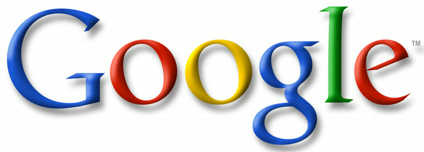
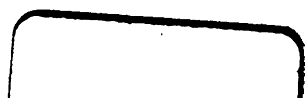




OE

Dziwinski

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA.
WYDAWNICTWO POLSKICH PODRĘCZNIKÓW TECHNICZNYCH, PODJĘTE STARANIEM GRONA PROFESORÓW SZKOŁY POLITECHNICZNEJ WE LWOWIE.

Dr. PLACYD DZIWIŃSKI,
PROFESOR SZKOŁY POLITECHNICZNEJ WE LWOWIE.

WYKŁADY MATEMATYKI.

KURS I.

ZASADY GEOMETRYI ANALITYCZNEJ I ANALIZY WYŻSZEJ.

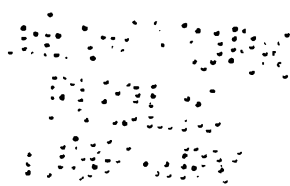
TOM II.

Zasady rachunku całkowego i analiza funkcyj ilukolwiek zmiennych, z teoryą linij krzywych i powierzchni. Początki równań różniczkowych i rachunku przemienności.

W 63 wykładach, uzupełnionych ćwiczeniami, wiadomościami bibliograficznemi i tematami do rozprawek naukowych.

Z 270 figurami w tekście.





LWÓW.
I. Związkowa drukarnia we Lwowie, ul. Lindego l. 4.
1908.

Składali zecerzy Marcin Kazimierz Leszczyński i Stanisław Dąbrowski.

PRZEDMOWA.

Tom II. **wykładów** matematyki, który obecnie oddaję do użytku młodzieży, rozpocząłem wykładami zasad rachunku całkowego, rozwijając kolejno całki funkcyj algebraicznych, wymiernych i niewymiernych, całki dwumienne, całki funkcyj goniometrycznych i cyklometrycznych, wykładniczych i logarytmicznych, hiperbolicznych i hiperbolometrycznych, poczem przystąpiłem do analizy wyższej funkcyj ilukolwiek zmiennych.

Wyjaśniwszy pojęcia różniczek i pochodnych cząstkowych, tudzież różniczek zupełnych jakiegokolwiek rzędu, a zarazem wyznaczanie całek cząstkowych, pojedyńczych i wielokrotnych, tudzież całkowanie różniczek zupełnych i rozwijanie funkcyj na szeregi z odnośnemi zastosowaniami, rozwinąłem zasady teoryi przekształceń funkcyj, tudzież przekształcania pochodnych, różniczek i całek funkcyj ilukolwiek zmiennych.

Z rozwijaniem funkcyj na szeregi potęgowe połączyłem rozwijanie funkcyj na iloczyny nieskończone, podając przy tej sposobności ogólną teoryę tworzenia funkcyj jedno- i dwu-peryodycznych ze szczególnem uwzględnieniem thetafunkcyj Jacobi'ego i funkcyj elliptycznych Weierstrassa.

Dołączywszy następnie wykłady o rozwijaniu funkcyj na ułamki ciągłe nieskończone, zająłem się teoryą całek określonych, rozwijając kolejno całki określone pojedyńcze, podwójne, potrójne i wielokrotne z ich przekształceniami.

Przy zastosowaniu całek określonych do krzywych płaskich, podałem przykłady ważniejszych krzywych płaskich algebraicznych i przestępnych z uwzględnieniem krzywych spiralnych, a rozważając zastosowania całek określonych do krzywych przestrzennych i powierzchni, wyłożyłem teoryę styczności i krzywizny krzywych przestrzennych, ogólne i szczególne własności powierzchni rzędu drugiego i zasady ogólnej teoryi powierzchni z teoryą krzywizny, tworzenia i przekształcania powierzchni, wyjaśniając przytem wybitniejsze linie na powierzchniach.

Koniec tomu II tworzą wykłady teoryi równań różniczkowych, w których omówiłem ogólne metody całkowania równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych, dołączając wykłady o przedstawianiu funkcyj za pomocą całek określonych i o zasadniczych pojęciach rachunku przemienności.

W całości obejmuje tom II. wykładów 63. Podobnie jak w tomie I. dodałem po każdym wykładzie liczne ćwiczenia z wynikami lub wskazówkami rozwiązań, oraz odnośne wiadomości bibliograficzne i tematy do rozprawek naukowych.

Tom ten wydałem również nakładem własnym, korzystając z subwencyi c. k. ministerstwa wyznań i oświaty i opierając się na prenumeratach kolegów i słuchaczy, przy stałem poparciu komisyi wydawniczej Grona Profesorów Szkoły Politechnicznej.

Korektę druku przeprowadzał długoletni asystent przy mojej katedrze matematyki, Dr. Łucyan Böttcher, któremu też zawdzięczam niejedną cenną uwagę w tekście wykładów i doborze ćwiczeń.

Klisze do rycin sporządzał zakład artystyczno-fotograficzny im. E. Trzemeskiego, bądź to na podstawie rysunków, wykonanych przez asystenta Dra Łucyana Böttchera, bądź też na podstawie zdjęć z modeli muzeum matematycznego, uskutecznionych przez p. Seweryna Bitnego, słuchacza Wydziału Inżynieryi. Za ten ich współudział w pracy wyrażam Im serdeczne podziękowanie, jak niemniej Zarządowi „Pierwszej drukarni związkowej", który nie szczędził starań, aby dzieło to także pod względem typograficznym odpowiadało słusznym wymaganiom.

Oba tomy obejmują wykłady matematyki, którą nazwałem matematyką kursu I-go; tworzą one razem wstęp do nauki nowszej analizy i wyższej geometryi, którą obejmuję nazwą matematyki kursu II-go, a stanowią zarazem konieczną podstawę do samodzielnych studyów w zakresie matematyki czystej i stosowanej.

Oby wyszły na pożytek młodzieży i nauki polskiej.

Pisałem we Lwowie dnia 18. lipca 1908.

Dr. Placyd Dziwiński.

SPIS RZECZY
w tomie II. zawartych.

Stronica.

Wykład I. **Wstęp do rachunku całkowego.** Funkcya pochodna i różniczkowa danej funkcyi. Funkcye różniczkowalne. Przykłady funkcyj różniczkowalnych. Przykłady funkcyj nie różniczkowalnych. Funkcya pierwotna danej funkcyi. Wzory zasadnicze. Całka danej różniczki. Funkcya pierwotna danej funkcyi pochodnej i całka nieokreślona danej różniczki. Rachunek całkowy i rachunek różniczkowy. Całki zasadnicze. Prawidło całkowania sumy różniczek. Prawidło całkowania wielokrotności różniczek. Prawidło całkowania przez części. Prawidło całkowania różniczek przez wprowadzenie nowej zmiennej. Sposób całkowania zapomocą podstawienia. Sposób całkowania zapomocą przekształcenia. Elementarne metody całkowania. Zastosowania. Całki funkcyj elementarnych. Ćwiczenia 1—17.

Wykład II. **Całki funkcyj algebraicznych wymiernych.** Całki funkcyj algebraicznych, wymiernych, całkowitych. Całki funkcyj algebraicznych wymiernych, ułamkowych. Całki funkcyj ułamkowych właściwych. Całki właściwych funkcyj ułamkowych, których mianowniki są funkcyami drugiego stopnia. Całki funkcyj ułamkowych, których mianowniki są potęgami funkcyi drugiego stopnia. Całkowalność funkcyj algebraicznych wymiernych. — Ćwiczenia . . . . 18—30.

Wykład III. **Szczególne metody całkowania funkcyj wymiernych, ułamkowych.** Ogólna metoda całkowania funkcyj wymiernych, ułamkowych. Całkowanie funkcyj ułamkowych, których mianowniki mają czynniki tylko stopnia pierwszego. Całkowanie funkcyj wymiernych, ułamkowych o mianowniku kształtu $x^n \pm 1$, Sprowadzanie funkcyi ułamkowej do najprostszej postaci. Największy wspólny podzielnik dwu funkcyj całkowitych, wymiernych. Największy wspólny podzielnik funkcyi całkowitej, wymiernej i jej funkcyi pochodnej. Warunek, pod jakim całka funkcyi ułamkowej jest wyłącznie funkcyą przestępną. Niektóre uwagi o rozwiązywaniu równań liczebnych, posiadających same tylko jednokrotne pierwiastki. Całkowanie funkcyj ułamkowych, których mianowniki mają czynniki wielokrotne. Warunki, pod jakimi całka funkcyi ułamkowej jest czysto algebraiczną. Rozwiązywanie równań liczebnych o pierwiastkach wielokrotnych. Wyznaczanie części algebraicznej w całce danej funkcyi ułamkowej, bez rozkładania tej funkcyi na ułamki proste. Całkowanie funkcyj wymiernych metodą podstawienia. Wyznaczanie całki $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n}$, metodą podstawienia. Całkowanie funkcyj ułamkowych zapomocą wzorów redukcyjnych. Wzór redukcyjny dla całek typu $I_{mr} = \int \frac{x^m dx}{(ax^2+bx+c)^r}$ Ćwiczenia . . . . . . 31—51.

Wykład IV. **Całki funkcyj algebraicznych, niewymiernych.** Zasadnicza metoda całkowania funkcyj algebraicznych niewymiernych. Całki funkcyj algebraicznych, niewymiernych, zawierających ułamkowe potęgi zmiennej. Całki funkcyj algebraicznych, niewymiernych, zawierających ułamkowe potęgi dwumianu: $ax+b$. Całki funkcyj algebraicznych, niewymiernych, zawierających jako niewymierność ułamkowe potęgi funkcyi: $\frac{ax+b}{a'x+b'}$. Ogólne wnioski. Całki funkcyj algebraicznych, niewymiernych, zawierających jako niewymierność kwadratowy pierwiastek funkcyi drugiego stopnia. Rozkładanie całek kształtu $\int R(x, y)dx$. Ćwiczenia 52—67.

Stronica.

Wykład V. **Uwagi dotyczące wyznaczania całek kształtu:** $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$. Ogólne formy podstawień algebraicznych. Znaczenie geometryczne podstawień algebraicznych, przekształcających całkę: $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ na całki funkcyj wymiernych. Przekształcenia funkcyi $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, wskazane przed jej całkowaniem. Sprowadzanie całek kształtu: $\int \frac{R(x)\,dx}{y}$ do całek normalnych Sprowadzanie całek normalnych do całek zasadniczych. Podstawienia algebraiczne w zastosowaniu do całek zasadniczych. Ćwiczenia . . . . 68—88.

Wykład VI. **Dalszy ciąg uwag dotyczących wyznaczania całek kształtu:** $\int R(x, y)dx$, gdzie $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$. Przekształcanie całki: $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ przez uproszczenie funkcyi drugiego stopnia, występującej pod znakiem pierwiastkowym. Całki zasadnicze pierwszego typu z możliwie uproszczoną niewymiernością. Całki zasadnicze drugiego typu z możliwie uproszczoną niewymiernością. Szczególne przypadki. Całki zasadnicze trzeciego typu z możliwie uproszczoną niewymiernością. Przekształcenie całki zasadniczej trzeciego typu przez sprowadzenie trójmianów drugiego stopnia, w niej występujących, do form dwuwyrazowych. Wyznaczanie całek zasadniczych typu trzeciego zapomocą podstawień goniometrycznych. Wyznaczanie całki pierwszego rodzaju. Wyznaczanie całki drugiego rodzaju. Wyznaczanie całki trzeciego rodzaju. Podstawienia goniometryczne w zastosowaniu do całek zasadniczych pierwszych dwu typów. Ćwiczenia . . . . 89—104.

Wykład VII. **Całki dwumienne.** Określenie całek dwumiennych. Przypadki, w których całka dwumienna da się sprowadzić do całki funkcyi wymiernej. Wzory redukcyjne całki dwumiennej. Przykłady wyznaczania całek dwumiennych zapomocą wzorów redukcyjnych. Całki funkcyj algebraicznych, niewymiernych, sprowadzalne do całek dwumiennych. Przekształcanie całki dwumiennej przez sprowadzenie funkcyi dwuwyrazowej do funkcyi stopnia pierwszego. Przekształcanie całki dwumiennej $I_{p,\,q}$, za pomocą podstawień goniometrycznych. Ćwiczenia . . . . 105—116.

Wykład VIII. **Całki funkcyj goniometrycznych kształtu:** $I_{s,\,k} = \int \sin^s x \cos^k x\,dx$. Wzory redukcyjne całki $I_{s,\,k}$. Redukcya całek $I_{s,\,k}$ przy całkowitych wykładnikach. Całki $I_{s,\,0} = \int \sin^s x\,dx$ i $I_{0,\,k} = \int \cos^k x\,dx$. Całki kształtu: $I_m = \int \operatorname{tang}^m x\,dx$. Całki kształtu $I_n = \int \frac{dx}{\operatorname{tang}^n x}$. Wyznaczanie całek $I_{s,\,k}$ zapomocą podstawień. Rozkładanie iloczynu $\sin^s x \cos^k x$ na dodajniki. Prawidła Żmurki. Przykłady wyznaczania całek $I_{s,\,k}$ zapomocą prawideł Żmurki. Wzory rozkładające funkcye goniometryczne $\sin^s x$ i $\cos^k x$ na dodajniki. Całki $I_{s,\,0} = \int \sin^s x\,dx$, $I_{0,\,k} = \int \cos^k x dx$, wyznaczone zapomocą rozkładania funkcyj $\sin^s x$ i $\cos^k x$ na dodajniki. Całki $I_{s,\,k} = \int \sin^s x \cos^k x\,dx$ o wykładnikach ułamkowych. Ćwiczenia . . . . . . 117—138.

Wykład IX. **Całkowanie niektórych funkcyj algebraicznych zapomocą całek typu:** $I_{s,\,k} = \int \sin^s x \cos^k x dx$. Wyznaczanie całek funkcyj algebraicznych. Wyznaczanie całki dwumiennej: $I_{m,\,p} = \int x^m (ax^n+b)^p\,dx$ zapomocą podstawień goniometrycznych. Całki kształtu: $I_{m,\,p} = \int x^m (ax^2+b)^p\,dx$. Wyznaczanie całek trójmiennych, kształtu: $I = \int x^m (ax^2+bx+c)^{p/2} dx$ za pomocą podstawień goniometrycznych. Całki trójmienne kształtu: $I = \int x^m (ax^{2n}+bx^n+c)^p dx$. Rozmaite inne całki funkcyj algebraicznych, sprowadzalne do całek typu: $I_{s,\,k} = \int \sin^s x \cos^k x\,dx$. Korzyści podstawień goniometrycznych, przy wyznaczaniu całek niektórych funkcyj algebraicznych. Zastosowanie rachunku całkowego do wyznaczania związków między funkcyami cyklometrycznemi i funkcyami logarytmicznemi. Związek między funkcyami goniometrycznemi a funkcyami wykładniczemi. Związki między funkcyami hiperbolometrycznemi a funkcyami logarytmicznemi, tudzież związki między funkcyami hiperbolicznemi a funkcyami wykładniczemi. Całki Abelowe. Ćwiczenia . . . . 139—154.

Stronica.

Wykład X. **Całki złożonych funkcyj goniometrycznych.** Całki kształtu: $\int R(\sin x, \cos x)dx$. Podstawienie $\sin x = u$. Podstawienie $\operatorname{tang} x = u$. Podstawienie $\operatorname{tang} {}^1/_2 x = u$. Całki kształtu: $\int G(\sin x, \cos x)\, dx$. Całki kształtu: $\int R(\sin mx, \cos nx)dx$. Sprowadzanie całek funkcyj goniometrycznych kształtu: $\int \frac{\cos nx}{\cos^m x}dx$, $\int \frac{\sin nx}{\sin^m x}dx$ do całek kształtu: $I_{s,k} = \int \sin^s x \cos^k x\, dx$. Wzory redukcyjne całek kształtu: $\int \frac{\cos nx}{\cos^m x}dx$, $\int \frac{\cos nx}{\sin^m x}dx$, $\int \frac{\sin nx}{\sin^m x}dx$, $\int \frac{\sin nx}{\cos^m x}dx$. Rozkładanie funkcyi $\sin nx$ na czynniki. Rozkładanie funkcyi $\cos nx$ na czynniki. Wyznaczanie całek kształtu: $\int \frac{\cos^n x}{\sin mx}dx$, $\int \frac{\sin^n x}{\sin mx}dx$. Całki kształtu: $\int \sin^s mx \cos^k nx\, dx$. Ćwiczenia . . . . 155—171.

Wykład XI. **Całki funkcyj wykładniczych i logarytmicznych.** Całki funkcyj, złożonych z funkcyj wykładniczych. Całki kształtu: $\int R(e^{ax})\, dx$. Całki funkcyj niewymiernych, złożonych z funkcyj wykładniczych. Całka kształtu: $\int R(x)e^{ax}dx$. Całka kształtu: $\int x^n e^{ax}dx$. Wzór ogólny całki kształtu: $\int G(x)\, e^{ax}\, dx$. Całki kształtu: $\int \frac{G_{m-1}(x)}{(x-a)^m}e^{ax}dx$. Całki kształtu: $\int \frac{e^{ax}dx}{x-a}$. Całki kształtu: $\int \frac{e^{ax}}{x^n}dx$. Całkowanie funkcyj logarytmicznych Całki kształtu: $\int (\log x)^n dx$. Całki kształtu: $\int R(x) \log x\, dx$. Całki kształtu: $\int R(x, \log x)dx$. Całki kształtu: $\int f(x) \log \varphi(x) dx$. Ćwiczenia . . . . 172—185

Wykład XII. **Całki funkcyj goniometrycznych i cyklometrycznych.** Całkowanie funkcyj goniometrycznych zapomocą podstawienia $e^{xi} = z$. Bezpośrednie zastosowanie podstawienia funkcyi wykładniczej: $e^{xi} = z$ do funkcyj: $\int R(\sin x, \cos x)dx$. Całki kształtu: $\int R(x) \sin x\, dx$, lub $\int R(x) \cos x\, dx$. Całki kształtu: $\int G(x) \sin x\, dx$ lub $\int G(x) \cos x\, dx$. Całki kształtu: $\int x^m \sin x\, dx$, lub $\int x^m \cos x\, dx$. Całki kształtu: $\int \frac{G_{n-1}(x)}{G_n(x)} \sin x\, dx$, lub $\int \frac{G_{n-1}(x)}{G_n(x)} \cos x\, dx$. Całki kształtu: $\int \frac{x\, dx}{\sin^m x}$ i $\int \frac{x\, dx}{\cos^m x}$. Całki kształtu: $\int x \operatorname{tang} x\, dx$ i $\int x \operatorname{cotg} x\, dx$. Całki funkcyj cyklometrycznych, kształtu: $\int R(\operatorname{arc} \sin x)dx$. Wzory redukcyjne całek kształtu: $\int (\operatorname{arc} \sin x)^n dx$ i $\int (\operatorname{arc} \cos x)^n dx$. Całki kształtu: $\int R(x) \operatorname{arc} \sin x\, dx$. Całki kształtu: $\int x^n \operatorname{arc} \sin x\, dx$. Całki kształtu: $\int x^n \operatorname{arc} \operatorname{tang} x\, dx$. Całki kształtu: $\int x^n \operatorname{arc} \sin \varphi(x)\, dx$, $\int x^n \operatorname{arc} \operatorname{tang} \varphi(x)\, dx$. Ćwiczenia . . . . 186—202.

Wykład XIII. **Całki funkcyj hiperbolicznych i hiperbolometrycznych.** Elementarne funkcye hiperboliczne. Znakowanie funkcyj hiperbolicznych. Związki między elementarnemi funkcyami hiperbolicznemi. Wzory hiperboliczne. Elementarne funkcye hiperbolometryczne. Znakowanie funkcyj hiperbolometrycznych. Związki między funkcyami hiperbolometrycznemi. Różniczki i pochodne funkcyj hiperbolicznych. Różniczki i pochodne funkcyj hiperbolometrycznych. Całki zasadnicze, dotyczące funkcyj hiperbolicznych i hiperbolometrycznych. Całki elementarnych funkcyj hiperbolicznych. Całki elementarnych funkcyj hiperbolometrycznych. Całkowanie funkcyj złożonych wymiernie z funkcyj hiperbolicznych. Całki kształtu: $\int R(\sin \operatorname{hip} m x, \cos \operatorname{hip} n x)\, dx$. Całki kształtu: $\int \sin \operatorname{hip}^s mx, \cos \operatorname{hip}^k n x\, dx$. Całkowanie funkcyj hiperbolicznych za pomocą podstawień wykładniczych, lub goniometrycznych. Całki kształtu $\int R(x) \sin \operatorname{hip} x\, dx$, lub $\int R(x) \cos \operatorname{hip} x\, dx$. Całki: $\int \frac{x\, dx}{\sin \operatorname{hip}^m x}$ i $\int \frac{x\, dx}{\cos \operatorname{hip}^m x}$. Całki kształtu: $\int x \operatorname{tang} \operatorname{hip} x\, dx$ i $\int x \operatorname{cotg} \operatorname{hip} x\, dx$. Całki funkcyj hiperbolometrycznych kształtu: $\int R(\arg \sin \operatorname{hip} x)dx$. Wzory redukcyjne całek: $\int (\arg \sin \operatorname{hip} x)^n dx$ i $\int (\arg \cos \operatorname{hip} x)^n dx$. Całki kształtu: $\int R(x) \arg \sin \operatorname{hip} x\, dx$. Całki kształtu: $\int x^n \arg \sin \operatorname{hip} x\, dx$ i $\int x^n \arg \cos \operatorname{hip} x\, dx$. Całki kształtu: $\int x^n \arg \operatorname{tang} \operatorname{hip} x\, dx$. Ćwiczenia . . . . 203—221.

Stronic

Wykład XIV. **Całki funkcyj złożonych z funkcyj wykładniczych, goniometrycznych, lub hiperbolicznych i ich odwróceń.** Całkowanie funkcyj złożonych z funkcyj wykładniczych i goniometrycznych. Całki kształtu: $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ i $\int e^{ax}\sin bx\,dx$. Całki kształtu: $\int e^{ax}\sin^m x\,dx$ i $\int e^{ax}\cos^m x\,dx$. Całki kształtu: $\int \frac{e^{ax}}{\sin^m x}dx$ i $\int \frac{e^{ax}}{\cos^m x}dx$. Całki kształtu: $\int e^{ax}\,\mathrm{tang}^m x\,dx$ i $\int e^{ax}\cot g^m x\,dx$. Uwagi o całkowaniu funkcyj złożonych, sprowadzającem się do całkowania funkcyj wymiernych. Uwaga o uogólnionej metodzie całkowania przez części. Całki funkcyj złożonych z funkcyj wykładniczych i goniometrycznych i potęg zmiennej. Całki kształtu: $\int x^m e^{ax}\cos bx\,dx$ i $\int x^m e^{ax}\sin bx\,dx$. Całki kształtu: $\int (x-a)^m e^{ax}\cos bx\,dx$, $\int (x-a)^m e^{ax}\sin bx\,dx$. Całki kształtu: $\int G(x)e^{ax}\cos bx\,dx$ i $\int G(x)e^{ax}\sin bx\,dx$. Całki kształtu: $\int R(x)e^{ax}\cos bx\,dx$ i $\int R(x)e^{ax}\sin bx\,dx$. Całka kształtu: $\int R(x, e^{a_1x},\ldots, e^{a_nx}, \sin b_1x,\ldots, \sin b_nx, \cos b_1x,\ldots, \cos b_nx)\,dx$. Całki funkcyj złożonych z funkcyj logarytmicznych i cyklometrycznych. Uwagi o całkowaniu funkcyj mieszanych. Metoda różniczkowania pod znakiem całkowym. Zastosowania. Ćwiczenia . . . . 222—23

Wykład XV. **Całkowanie zapomocą szeregów.** Przedstawianie całki nieokreślonej danej funkcyi w postaci szeregu potęgowego. Wyprowadzanie szeregów potęgowych danej całki za pomocą szeregów potęgowych funkcyi, stojącej pod znakiem całkowania. Całki szeregów potęgowych i ich zakresy zbieżności. Funkcye, określone szeregami funkcyj elementarnych. Pochodna szeregu funkcyj elementarnych. Całka szeregu funkcyj elementarnych. Szereg utworzony z potęg funkcyi elementarnej $f(x)$. Całkowanie funkcyj, określonych szeregami potęgowymi. Zastosowanie prawidła całkowania szeregów potęgowych do rozwijania funkcyj na szeregi. Całki funkcyj, nie dające się wyrazić przez funkcye elementarne. Całki dwumienne Eulera. Główniejsze całki funkcyj przestępnych, niedające się wyrazić przez funkcye elementarne. Całki niektórych funkcyj złożonych, niedające się wyrazić przez funkcye elementarne. Rozwinięcie całek: $\int R(x)e^{ax}\cos bx\,dx$, $\int R(x)e^{ax}\sin bx\,dx$. Ćwiczenia . . . . 239—25

Wykład XVI. **Szczególne uwagi, dotyczące rozwijania całek.** Całki pierwszego i wyższych rzędów. Całki ogólne i całki szczególne dowolnego rzędu. Ogólny wzór, dotyczący wyznaczania całki n-go rzędu danej funkcyi $f(x)$ za pomocą n całek pojedyńczych. Metoda wyznaczania całek pojedyńczych przy pomocy szeregów z nieoznaczonymi spółczynnikami. Rozwijanie funkcyj na szeregi przy pomocy całkowania lub różniczkowania szeregów o nieoznaczonych spółczynnikach Rozwijanie danej funkcyj według potęg innej znanej funkcyi. Całki funkcyj uwikłanych. Ćwiczenia . . . . 256—2(

Wykład XVII. **Dalszy ciąg uwag dotyczących rozwijania całek.** Wzory redukcyjne danego typu całek. Metoda powtarzanego całkowania przez części i ogólne wzory, na niej oparte. Zastosowanie powyższych wzorów do wyznaczania całek w formie zamkniętej. Zastosowanie metody całkowania przez części do rozwijania całek na szeregi. Rozwinięcie całki kształtu: $\int f(x)\,\varphi(x)\,dx$ na szereg. Rozwinięcia, oparte na różniczkowaniu danej całki pod znakiem całkowym. Całkowanie pod znakiem całkowym. Rozwinięcia, oparte na całkowaniu pod znakiem całkowym. Ćwiczenia . . . . 270—28

Wykład XVIII. **Różniczkowanie i całkowanie funkcyj dwu zmiennych niezależnych.** Pochodne cząstkowe funkcyi dwu zmiennych niezależnych. Różniczki cząstkowe i różniczka zupełna funkcyi dwu zmiennych niezależnych. Pochodne cząstkowe wyższych rzędów danej funkcyi dwu zmiennych niezależnych. Różniczki cząstkowe wyższych rzędów. Różniczki zupełne wyższych rzędów danej funkcyi dwu zmiennych niezależnych. Całki cząstkowe danej funkcyi dwu zmiennych. Całkowanie różniczek zupełnych pierwszego rzędu. Warunki całkowalności różniczek drugiego lub wyższych rzędów. Ćwiczenia . . . . 283—2

Stronica.

Wykład XIX. **Rozwijanie funkcyj dwu zmiennych niezależnych na szeregi.** Szereg Taylora dla funkcyj dwu zmiennych niezależnych. Maxima i minima funkcyj dwu zmiennych niezależnych. Przykłady wyznaczania maximów lub minimów danej funkcyi. Zastosowanie teoryi maximów i minimów dwu zmiennych niezależnych do rozwiązywania rozmaitych zagadnień arytmetycznych lub geometrycznych. Symbole nieoznaczone funkcyj dwu zmiennych, niezależnych. Całkowanie funkcyj dwu zmiennych niezależnych za pomocą szeregów. Ćwiczenia 300—317.

Wykład XX. **Różniczkowanie i całkowanie funkcyj wyraźnych ilukolwiek zmiennych, niezależnych.** Pochodne cząstkowe i różniczka zupełna funkcyi *n* zmiennych niezależnych. Pochodne i różniczki cząstkowe wyższych rzędów danej funkcyi *n* zmiennych niezależnych. Różniczki zupełne wyższych rzędów danej funkcyi *n* zmiennych niezależnych. Własności pochodnych cząstkowych funkcyj jednorodnych o ilukolwiek zmiennych, niezależnych. Jednorodne formy algebraiczne. Całki cząstkowe danej funkcyi *n* zmiennych niezależnych. Całki wielokrotne. Całkowanie różniczek zupełnych pierwszego rzędu o *n* zmiennych, niezależnych. Całkowanie różniczek zupełnych o trzech zmiennych, niezależnych. Warunki całkowalności różniczek wyższych rzędów o ilukolwiek zmiennych. Ćwiczenia . . . . 318—334.

Wykład XXI. **Rozwijanie funkcyj ilukolwiek zmiennych na szeregi i odnośne zastosowania.** Wzór Taylora dla funkcyi ilukolwiek zmiennych, niezależnych. Szeregi Taylora i Maclaurina dla funkcyi ilukolwiek zmiennych, niezależnych. Maxima i minima funkcyi ilukolwiek zmiennych, niezależnych. Maxima i minima funkcyj ilukolwiek zmiennych, poddanych pewnym warunkom dodatkowym. Zastosowanie teoryi maximów i minimów funkcyi ilukolwiek zmiennych, do rozwiązywania zagadnień z analizy i geometryi. Ćwiczenia . . . . 335—349.

Wykład XXII. **Zasady teoryi przekształceń funkcyj ilukolwiek zmiennych.** Określenie pojęcia przekształcenia funkcyj. Przekształcenie liniowe form algebraicznych. Przekształcenie ortogonalne. Wyznacznik ortogonalny. Elementy wyznacznika ortogonalnego n-go rzędu. Zastosowanie przekształceń liniowych do danej formy liniowej ilukolwiek zmiennych. Kolejne zastosowanie kilku przekształceń liniowych do danej formy. Zastosowanie przekształceń liniowych do układu form liniowych. Zastosowanie przekształceń liniowych do form kwadratowych, ilukolwiek zmiennych. Zastosowanie przekształceń ortogonalnych do form kwadratowych ilukolwiek zmiennych. Sprowadzenie formy kwadratowej do postaci kanonicznej zapomocą przekształceń jednomodułowych. Formy kwadratowe stale dodatnie, lub stale ujemne. Prawo bezwładności form kwadratowych. Zastosowanie przekształceń liniowych do dowolnej funkcyi ilukolwiek zmiennych, niezależnych. Zastosowanie przekształceń liniowych do układu funkcyj ilukolwiek zmiennych, niezależnych. Ćwiczenia . . . . 350—367.

Wykład XXIII. **Niezmienniki i współzmienniki form algebraicznych ilukolwiek zmiennych.** Określenie niezmienników danych form. Określenie współzmienników danych form. Ilość niezmienników bezwzględnych danej formy. Formy niemające niezmienników bezwzględnych. Jedyny niezmiennik formy kwadratowej. Wspólne niezmienniki dwu form kwadratowych. Niezmienniki ortogonalne formy kwadratowej *n* zmiennych. Ogólne własności niezmienników danej formy *m*-go stopnia. Ogólne własności współzmienników danej formy *m*-go stopnia. Niezmienniki form dwójkowych m-go stopnia. Równania różniczkowe niezmienników formy dwójkowej. Tworzenie niezmienników danego stopnia dla danych form dwójkowych. Współzmienniki danej formy dwójkowej n-go stopnia. Równanie różniczkowe współzmienników. Tworzenie współzmienników dla danych trójkowych. Ćwiczenia . . . . 368—387.

Wykład XXIV. **Przekształcenie pochodnych i różniczek funkcyi jednej i dwu zmiennych.** Zmiana zmiennej niezależnej w funkcyi jednej zmiennej. Różniczkowanie funkcyi określonej równaniem : $F(x, y)=0$ za pośrednictwem nowej zmiennej t. Zmiana zmiennej niezależnej na zależną i odwrotnie. Zmiana obu zmiennych zależnej i niezależnej w funkcyi jednej zmiennej. Zmiana zmiennych niezależnych w funkcyi dwu zmiennych. Różniczkowanie funkcyi, określonej równaniem: $F(x, y, z)=0$. Zmiana wszystkich zmiennych w funkcyi dwu zmiennych niezależnych. Przekształcanie całek podwójnych. Ćwiczenia . . . . 388—406.

Stroni

Wykład XXV. **Przekształcanie pochodnych i różniczek funkcyj ilukolwiek zmiennych i wyznaczniki funkcyjne.** Różniczki zupełne i pochodne cząstkowe funkcyi uwikłanej n zmiennych. Zmiana zmiennych niezależnych w funkcyi n zmiennych Zasadnicze własności Jakobianu n funkcyj. Jakobian układu n funkcyj, złożonych z funkcyj n zmiennych niezależnych. Jakobian układu funkcyi n zmiennych niezależnych. Jakobian układu funkcyj odwrotnych. Hesyan funkcyi n zmiennych niezależnych. Różniczkowanie wyznaczników funkcyjnych. Wyznaczniki funkcyjne Wrońskiego. Zasadnicze własności Wrońskianu. Funkcye, określone układem równań. Zmiana wszystkich zmiennych w funkcyi n zmiennych niezależnych. Przekształcanie całek wielokrotnych. Ćwiczenia . . . . 407—4

Wykład XXVI. **Rozwijanie funkcyj uwikłanych ilukolwiek zmiennych na szeregi potęgowe.** Rozwijanie funkcyi uwikłanej, określonej jednem równaniem. Maxima i minima funkcyi uwikłanej, określonej równaniem: $F(z_1, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$. Rozwijanie funkcyj algebraicznych ilukolwiek zmiennych. Szeregi Lagrange'a Zastosowanie szeregów Lagrange'a do rozwiązywania równań. Odwracanie szeregów potęgowych. Rozwijanie układu funkcyj uwikłanych na szeregi potęgowe. Ćwiczenia 428–4

Wykład XXVII. **Zasady teoryi iloczynów nieskończonych i rozwijanie funkcyj na iloczyny.** Zasadnicze pojęcia. Warunki zbieżności iloczynów nieskończonych. Warunek ogólny. Bezwarunkowa zbieżność iloczynu nieskończonego. Iloczyny nieskończone, warunkowo zbieżne. Zestawienie prawideł zbieżności iloczynów. Przekształcanie szeregów na iloczyny nieskończone. Przekształcanie iloczynów nieskończonych na szeregi. Iloczyny nieskończone, których czynniki są funkcyami jednej zmiennej niezależnej. Przedstawianie funkcyj sin x i cos x w postaci iloczynów nieskończonych. Wzór Wallisa. Przedstawianie funkcyj goniometrycznych ilukolwiek zmiennych w postaci nieskończonych iloczynów. Rozwijanie funkcyj hiperbolicznych na iloczyny nieskończone. Ćwiczenia . . . . 445—4

Wykład XXVIII. **Funkcye peryodyczne i rozwijanie ich na szeregi i iloczyny nieskończone.** Funkcye jednoperyodyczne. Elementarna funkcya jednoperyodyczna bez miejsc zerowych. Peryody i miejsca zerowe funkcyj goniometrycznych i hiperbolicznych. Peryodyczność iloczynu nieskończonego, przedstawiającego funkcyę sin x. Punkt istotnie osobliwy funkcyj peryodycznych. Ogólny sposób tworzenia funkcyj peryodycznych. Niektóre uwagi o funkcyach całkowitych przestępnych. Funkcye całkowite przestępne o nieskończonej ilości miejsc zerowych. Szeregi nieskończone, oparte na iloczynach nieskończonych danych funkcyj. Szeregi nieskończone, po obu stronach wyrazu środkowego. Szereg Jacobiego. Ćwiczenia . . . . 462—4

Wykład XXIX. **Theta-funkcye Jacobiego i na nich oparte funkcye dwuperyodyczne.** Funkcya $\Theta(x)$ określona szeregiem: $\Theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{an^2+bnx}$. Funkcye Jacobiego, zwane Theta-funkcyami. Miejsca zerowe funkcyi Theta. Rozwijanie Theta-funkcyj na iloczyny nieskończone. Logarytmiczna pochodna funkcyi $\Theta_{11}(x)$. Druga pochodna logarytmu $\Theta_{11}(x)$, jako przykład funkcyi dwuperyodycznej. Rozmaite inne funkcye dwuperyodyczne oparte na funkcyach Theta. Cwiczenia . . . 477—4

Wykład XXX. **Ogólna teorya funkcyj dwuperyodycznych i funkcye eliptyczne.** Określenie ogólnej peryodycznosci funkcyj. Funkcye dodajnikowo-peryodyczne. Funkcye mnożnikowo peryodyczne. Tworzenie funkcyj mnożnikowo-peryodycznych. Funkcye dwuperyodyczne pierwszego rodzaju, oparte na funkcyach mnożnikowo-peryodycznych. Funkcye dwuperyodyczne drugiego rodzaju. Funkcye dwuperyodyczne trzeciego rodzaju. Theta funkcye n-go rzędu. Theta funkcye pierwszego rzędu. Theta-funkcye drugiego rzędu. Tworzenie elementarnych funkcyj dwuperyodycznych przy pomocy Theta-funkcyi pierwszego rzędu. Rozwijanie elementarnych funkcyi dwuperyodycznych $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ na szeregi potęgowe. Funkcye eliptyczne w ogólności. Ćwiczenia . . . . 495—51

Stronica.

Wykład XXXI. **Szczególne funkcye eliptyczne.** Funkcye eliptyczne Jacobiego. Peryody funkcyj eliptycznych sn *u*, cn *u*, dn *u*. Punkta zerowe i punkta nieskończonościowe funkcyj sn *u*, cn *u*, dn *u*. Prawa dodawnicze Theta funkcyj. Prawa dodawnicze funkcyj eliptycznych: $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$. Prawa dodawnicze funkcyj eliptycznych: sn *u*, cn *u*, dn *u* i związki na nich oparte. Zastosowania funkcyj tn *u* i cotn *u*. Ćwiczenia . . . . 513—524.

Wykład XXXII. **Funkcye eliptyczne Weierstrassa.** Funkcya Weierstrassa $\sigma(u)$. Pochodna logarytmiczna funkcyi $\sigma(u)$. Funkcya eliptyczna Weierstrassa $\wp(u)$. Wyprowadzenie wzoru $\sigma(u+a)$. Funkcye $\zeta(u+a)$ i $\wp(u+a)$. Dwuperyodyczność funkcyi $\wp(u)$. Rodzaj dwuperyodyczności funkcyi $\zeta(u)$. Rodzaj dwu peryodyczności funkcyi $\sigma(u)$. Pierwsza pochodna funkcyi $\wp(u)$. Ćwiczenia . . . . . . 525—534.

Wykład XXXIII. **Rozwijanie funkcyj eliptycznych.** Odwrotności Theta funkcyj i ich rozwinięcia. Rozwinięcia funkcyj eliptycznych i ich odwrotności. Ćwiczenia 535—542.

Wykład XXXIV. **Rozwijanie funkcyj na ułamki ciągłe nieskończone.** Ułamek ciągły nieskończony i jego wartości przybliżone. Ułamki ciągłe nieskończone, o samych wyrazach dodatnich. Zbieżność i rozbieżność nieskończonych ułamków ciągłych. Badanie zbieżności lub rozbieżności danego ułamka ciągłego za pomocą badania zbieżności lub rozbieżności równoważnego szeregu nieskończonego. Zasadnicze typy nieskończonych ułamków ciągłych. Ułamki ciągłe nieskończone, złożone z samych wyrazów dodatnich. Wystarczające, choć nie zawsze konieczne kryterya zbieżności ułamków ciągłych nieskończonych, złożonych z samych wyrazów dodatnich. Ułamki ciągłe zwyczajne. Rozwijanie liczb wymiernych i liczb niewymiernych na ułamki ciągłe zwyczajne. Ułamki ciągłe nieskończone, których wyrazy począwszy od drugiego są ujemne. Ułamki ciągłe peryodyczne. Przykłady ułamków ciągłych peryodycznych. Ćwiczenia . . . . 543—561.

Wykład XXXV. **Przekształcanie szeregów i iloczynów nieskończonych na ułamki ciągłe nieskończone.** Przekształcanie szeregu nieskończonego na ułamek ciągły nieskończony. Przekształcanie szeregu potęgowego na ułamek ciągły. Przekształcanie ilorazu dwu szeregów potęgowych na ułamek ciągły. Przekształcanie iloczynów nieskończonych na ułamki ciągłe i nawzajem. Przekształcanie iloczynu nieskończonego na ułamek ciągły za pośrednictwem szeregu. Bezpośrednie rozwijanie danej funkcyi na ułamek ciągły. Ćwiczenia . . . . . . 562—570.

Wykład XXXVI. **Zasady teoryi całek określonych.** Pojęcie całki określonej pojedyńczej. Przykłady wyznaczania całek określonych pojedyńczych za pomocą całek nieokreślonych. Zasadnicze własności pojedyńczej całki określonej, oparte na własnościach całki nieokreślonej. Zmiana zmiennej niezależnej w danej całce określonej. Metoda całkowania przez części w zastosowaniu do całek określonych. Wzór Wallisa. Całki określone z nieskończonemi granicami. Ocenianie całki określonej na podstawie funkcyi, stojącej pod znakiem całkowania. Całkowanie szeregów. Ćwiczenia . . . . 571—584.

Wykład XXXVII. **Znaczenie geometryczne całki pojedyńczej i przybliżone metody całkowania.** Krzywe różniczkowe i krzywe całkowe. Całkowanie graficzne. Znaczenie geometryczne całki określonej. Metody bezpośredniego obliczania wartości całek określonych. Przykłady bezpośredniego obliczania całek określonych. Przybliżone metody obliczania powierzchni zastosowane do przybliżonych metod obliczania całek określonych. Wzór trapezowy przybliżonego obliczania całek określonych. Wzór Simpsona. Uogólnienie wzoru Simpsona. Średnia wartość funkcyi w danym odstępie. Reszta szeregu Taylora w postaci całki określonej. Ćwiczenia . . . . 575—599.

Wykład XXXVIII. **Powierzchnie jako obrazy geometryczne funkcyj dwu zmiennych niezależnych.** Obraz geometryczny funkcyi dwu zmiennych niezależnych. Kształt powierzchni określonej danem równaniem. Przykłady badania kształtu powierzchni określonej równaniem wyraźnem. Przykłady badania powierzchni określonych równaniami uwikłanemi. α) Elipsoida. β) Hiperboloida o jednej powłoce. γ) Hiperboloida o dwóch powłokach. δ) Paraboloida eliptyczna. ε) Paraboloida hiperboliczna. Kształt powierzchni, określonej równaniem o dwu zmiennych,

Stronica.

uważanem za równanie o trzech zmiennych. Znaczenie geometryczne pochodnych cząstkowych w danym punkcie powierzchni Płaszczyzna styczna w danym punkcie powierzchni. Powierzchnie różniczkowe danej powierzchni. Powierzchnie całkowe danej powierzchni. Całki określone cząstkowe: $\int_{x_1}^{x_2} f(x, y)dx$ i $\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)dy$. Ćwiczenia . . . . 600—614.

Wykład XXXIX. **Całki określone podwójne, potrójne i wielokrotne.** Pojęcie całki określonej podwójnej. Porządek całkowania podwójnego przy stałych granicach całkowania. Znaczenie geometryczne całki określonej podwójnej. Całka określona podwójna jako granica sumy podwójnej. Całki określone podwójne o zmiennych granicach całkowania. Znaczenie geometryczne podwójnej całki określonej przy zmiennych granicach całkowania. Całki określone potrójne. Całka potrójna jako granica sumy. Pojęcie całki wielokrotnej. Całki n-krotne i ich szczególne przypadki. Całki liniowe, powierzchniowe i przestrzeniowe. Ćwiczenia . . . . 615—626.

Wykład XL. **Różniczkowanie, całkowanie i przekształcanie całek określonych.** Różniczkowanie całki określonej względem zmiennych granic. Różniczkowanie całki określonej ze względu na zmienny parametr, znajdujący się pod znakiem całkowania. Różniczkowanie całek określonych o zmiennych granicach całkowania. Zastosowanie prawideł różniczkowania całek określonych. Całkowanie pojedyńczej całki określonej ze względu na parametr zmienny, znajdujący się pod znakiem całkowania. Zastosowanie prawideł różniczkowania i całkowania całek określonych do wyznaczania niektórych całek. Wyznaczanie całek określonych pojedyńczych za pomocą całek podwójnych. Przykłady mieszane. Przekształcanie całek określonych podwójnych. Znaczenie geometryczne przekształcania całek podwójnych. Przykład: Przekształcić całkę podwójną kształtu: $\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)dxdy$ za pomocą podstawienia: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Przekształcanie całki określonej potrójnej. Przekształcanie całki określonej wielokrotnej. Ćwiczenia . . 627—643.

Wykład XLI. **Zastosowanie całek określonych do krzywych płaskich.** Kwadratura krzywych płaskich. Zastosowanie całek określonych pojedyńczych w kwadraturze linii krzywej. Przykłady: α) Kwadratura elipsy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. β) Kwadratura hiperboli: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. γ) Kwadratura paraboli: $y^2=2px$. Rektyfikacya linii krzywej. Przykłady: α) Rektyfikacya ellipsy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. β) Rektyfikacya hiperboli: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. γ) Rektyfikacya paraboli: $y^2=2px$. Kubatura powierzchni obrotowych. Przykłady: α) Kubatura ellipsoidy obrotowej. β) Kubatura hiperboloidy obrotowej o jednej i dwu powłokach. γ) Kubatura paraboloidy obrotowej. Komplanacya powierzchni obrotowych. Przykłady: α) Komplanacya ellipsoidy obrotowej. β) Komplanacya hiperboloidy obrotowej o jednej i o dwu powłokach. γ) Komplanacya paraboloidy obrotowej. Momenta statyczne łuków i pól płaskich. Moment statyczny łuku względem prostej. Moment statyczny powierzchni zamkniętej względem linii prostej. Środki ciężkości łuków i pól płaskich. Wzory Guldin'a. Moment bezwładności łuków i pól płaskich. Moment bezwładności łuku. Moment bezwładności pola. Przykłady: α) Moment bezwładności powierzchni trójkąta względem jego podstawy. β) Moment bezwładności powierzchni koła względem jego średnicy. γ) Moment bezwładności koła względem jego środka. Potencyał łuku i pola płaskiego. Przyciąganie punktu przez łuki lub pola płaskie. Ćwiczenia . . . . 644—665.

Wykład XLII. **Przykłady krzywych płaskich algebraicznych.** Ogólne uwagi o równaniach krzywych. Krzywe algebraiczne i przestępne. Wyprowadzenie równania linii krzywej z danej własności jej punktów. Cissoida Dioklesa. Parabola Neila. Strofoida. Liść Descartesa. Konchoida Nikomedesa. Konchoida Pascala. Kar-

Stronica.

dioida. Krzywe Cassiniego. Lemniskata. Róża czterolistna. Astroida. Skarabea, jako uogólnienie róży czterolistnej. Ćwiczenia . . . . 666—681.

Wykład XLIII. **Przykłady krzywych przestępnych.** Krzywe logarytmiczne. Linia łańcuchowa. Krzywe goniometryczne, a w szczególności krzywa Dinostrata. Cykloida. Zastosowanie całek określonych do cykloidy zwyczajnej. Epicykloida i hipocykloida. Odwinięta linii kołowej. Krzywe spiralne. Spiralna Archimedesa. Spiralna hiperboliczna. Spiralna paraboliczna. Spiralna logarytmiczna. Styczne w punktach krzywej, określonej równaniem biegunowem. Zastosowania. Asymptoty krzywych, określonych równaniami biegunowemi. Koła i punkta asymptotyczne krzywych spiralnych. Promień krzywizny w danym punkcie krzywej, określonej równaniem biegunowem. Ćwiczenia . . . . 682-699.

Wykład XLIV. **Zastosowanie całek określonych do krzywych przestrzennych i powierzchni.** Równanie krzywej przestrzennej. Linia śrubowa na walcu kołowym, jako przykład krzywej przestrzennej. Komplanacya walca, rzucającego krzywą przestrzenną. Kubatura powierzchni dowolnych. Zastosowanie całek określonych pojedyńczych w kubaturze powierzchni. Zastosowanie całek podwójnych w kubaturze powierzchni. Zastosowanie całek potrójnych w kubaturze powierzchni. Przykłady: α) Kubatura ellipsoidy. β) Kubatura hiperboloidy o jednej powłoce. γ) Kubatura hiperboloidy o dwóch powłokach. δ) Kubatura paraboloidy eliptycznej. Komplanacya dowolnych powierzchni. Momenta statyczne i środki ciężkości powierzchni i brył. Potencyały powierzchni i objętości. Przyciąganie punktu przez powierzchnie i bryły. Ćwiczenia . . . . 700—716.

Wykład XLV. **Teorya styczności i krzywizny krzywych przestrzennych.** Styczna do krzywej przestrzennej. Asymptoty krzywej przestrzennej. Płaszczyzna normalna krzywej przestrzennej. Płaszczyzna ściśle styczna. Normalna główna i binormalna. Koło ściśle styczne i krzywizna pierwsza. Kąt skręcenia i krzywizna druga. Kula ściśle styczna. Związek między promieniem koła ściśle stycznego i promieniem kuli ściśle stycznej. Wzory Freneta. Przykłady: α) Linia śrubowa. β) Lemniskata sferyczna. γ) Dana krzywa algebraiczna. δ) Wyznaczyć asymptoty krzywej przestrzennej. Styczna dwu krzywych przestrzennych. Ćwiczenia . . . . 717—736.

Wykład XLVI. **Ogólne własności powierzchni drugiego rzędu.** Dyskusya równania drugiego stopnia o trzech zmiennych. Środek powierzchni. Płaszczyzny środkowe. Średnice powierzchni 2-go rzędu. Średnice sprzężone. Układy średnic sprzężonych. Płaszczyzny główne i kierunki główne powierzchni. Układ kierunków głównych. Płaszczyzna styczna. Stożek styczny. Biegun i płaszczyzna biegunowa. Punkta nieskończenie dalekie na powierzchni. Stożek asymptotyczny. Ćwiczenia . . . 737—754.

Wykład XLVII. **Szczególne postacie powierzchni rzędu drugiego.** Przekształcanie ogólnego równania powierzchni drugiego rzędu na podstawie zmiany początku układu. Zmiana kierunków osi układu. Zmiana początku i kierunków osi układu. Klasyfikacya powierzchni drugiego rzędu. Powierzchnie obrotowe rzędu drugiego. Ćwiczenia . . . . 755—766.

Wykład XLVIII. **Szczególne własności powierzchni środkowych rzędu drugiego.** Ellipsoida. Przekroje płaskie ellipsoidy. Przekroje kołowe ellipsoidy. Średnice i płaszczyzny środkowe ellipsoidy. Układy średnic sprzężonych. Układ równych średnic sprzężonych. Hiperboloida o jednej powłoce. Przekroje płaskie hiperboloidy o jednej powłoce. Przekroje kołowe hiperboloidy o jednej powłoce. Stożek asymptotyczny hiperboloidy o jednej powłoce. Linie proste na hiperboloidzie o jednej powłoce. Hiperboloida o jednej powłoce, powstała przez ruch prostej. Średnice sprzężone hiperboloidy o jednej powłoce. Hiperboloida o dwóch powłokach. Przekroje płaskie hiperboloidy o dwóch powłokach. Przekroje kołowe hiperboloidy o dwóch powłokach. Stożek asymptotyczny hiperboloidy o dwóch powłokach. Płaszczyzny środkowe i średnice sprzężone hiperboloidy o dwu powłokach. Ćwiczenia . . . . 767—784

Wykład XLIX. **Szczególne własności powierzchni bezśrodkowych rzędu drugiego.** Paraboloida elliptyczna. Przekroje płaskie paraboloidy elliptycznej. Przekroje

Stron.

kołowe paraboloidy elliptycznej. Odmiany paraboloidy elliptycznej. Płaszczyzna styczna i prosta normalna. Płaszczyzny środkowe i średnice paraboloidy elliptycznej. Paraboloida hiperboliczna. Przekroje płaskie paraboloidy hiperbolicznej. Linie proste na paraboloidzie hiperbolicznej. Płaszczyzny styczne i płaszczyzny środkowe paraboloidy hiperbolicznej. Ćwiczenia . . . . 785—

Wykład L. **Ogniska i kierownice powierzchni drugiego rzędu i powierzchnie spółogniskowe.** Równanie kuli. Potęga punktu względem kuli. Ilość kul w przestrzeni. Układ dwóch kul. Układ trzech kul. Układ czterech kul. Równanie koła w przestrzeni. Ogniska i kierownice danej powierzchni rzędu drugiego. Ogniska w powierzchniach środkowych drugiego rzędu. Kierownice powierzchni środkowych. Ogniska w powierzchniach bezśrodkowych. Kierownice w powierzchniach bezśrodkowych. Ogniska pępkowe i ogniska modułowe powierzchni. Uwaga o ogniskach pępkowych powierzchni drugiego rzędu. Uwaga o ogniskach modułowych powierzchni drugiego rzędu. Powierzchnie spółogniskowe. Powierzchnie spółogniskowe z ellipsoidą, przechodzące przez dany punkt w przestrzeni. Normalne do trzech powierzchni spółogniskowych, przechodzących przez dany punkt w przestrzeni. Powierzchnie spółogniskowe z daną powierzchnią bezśrodkową. Ćwiczenia . . . . 797—

Wykład LI. **Zasady ogólnej teoryi powierzchni.** Ogólne równanie powierzchni. Linie styczne i płaszczyzna styczna w danym punkcie powierzchni. Normalna i płaszczyzny normalne w danym punkcie powierzchni. Punkta osobliwe powierzchni. Szczególne postacie punktów nadzwyczajnych. Stożki styczne danej powierzchni. Kontury powierzchni. Promienie krzywizny przekrojów płaskich danej powierzchni. Promienie krzywizny przekrojów normalnych powierzchni. Główne promienie krzywizny. Wzajemne położenie głównych płaszczyzn krzywizny w danym punkcie powierzchni. Wzór Eulera, wyznaczający promień krzywizny w dowolnym przekroju normalnym. Wzór Meusniera, wyznaczający promień krzywizny w dowolnym przekroju skośnym. Ćwiczenia . . . . 813—

Wykład LII. **Teorya krzywizny powierzchni.** Środki krzywizny powierzchni. Powierzchnia środków krzywizny. Kryterya krzywizny. Krzywa wskazująca (Indicatrix) Dupina. Krzywizna Gaussa. Krzywizna dodatnia, ujemna i zerowa. Punkta kuliste, czyli punkta pępkowe powierzchni. Rozwijalność powierzchni na innej powierzchni. Spółrzędne krzywolinijne na powierzchniach. Różniczka łuku na powierzchni, określonej trzema równaniami, kształtu: $x=f(u, v)$, $y=\varphi(u, v)$, $z=\psi(u, v)$. Kąt zawarty między dwoma łukami na powierzchni. Promień krzywizny przekroju normalnego powierzchni: $x=f(u, v)$, $y=\varphi(u, v)$, $z=\psi(u, v)$. Główne promienie krzywizny w punktach powierzchni: $x=f(u, v)$, $y=\varphi(u, v)$, $z=\psi(u, v)$. Ćwiczenia . . . . 829—

Wykład LIII. **Teorya tworzenia powierzchni.** Powierzchnie powstałe przez ruch linii prostej. Powierzchnie walcowe. Równanie różniczkowe cząstkowe powierzchni walcowych. Powierzchnie stożkowe. Równanie różniczkowe cząstkowe powierzchni stożkowych. Ogólne równanie powierzchni rozwijalnych na płaszczyźnie. Równanie różniczkowe powierzchni rozwijalnych. Krzywa zwrotu na powierzchni rozwijalnej. Równanie powierzchni rozwijalnej, mającej daną krzywą zwrotu. Płaszczyzna styczna w danym punkcie powierzchni rozwijalnej. Powierzchnie wichrowate w ogólności. Przykłady konoidów. α) Paraboloida hiperboliczna. β) Konoid kołowy. Płaszczyzny styczne do powierzchni wichrowatych. Krzywa zwężenia (strykcyjna) danej powierzchni wichrowatej. Powierzchnie powstałe przez ruch koła. Powierzchnie obrotowe. Równanie różniczkowe cząstkowe powierzchni obrotowych. Powierzchnie kanałowe. Równanie różniczkowe cząstkowe powierzchni kanałowych. Ćwiczenia . . . . 845—

Wykład LIV. **Dalszy ciąg teoryi tworzenia powierzchni.** Powierzchnia powstała przez ruch dowolnej krzywej. Przykłady powstawania powierzchni rzędu drugiego przez ruch krzywych rzędu drugiego. Powierzchnie śrubowe. Powierzchnie powstałe przez ruch powierzchni. Przykład: Powierzchnie powstałe przez ruch płaszczyzny. Powierzchnie graniczne. Przykład: Powierzchnia graniczna podwójnie nieskończonego układu płaszczyzn. Równania powierzchni w spółrzędnych pła-

Stronica.

szczyzny. Przykład: Równania ellipsoidy w spółrzędnych jej płaszczyzn stycznych. Powierzchnie spodkowe danej powierzchni. Przykład: Spodkowa dodatnia i ujemna ellipsoidy. Powierzchnie równoległe do danej powierzchni. Ćwiczenia . . 861—872.

Wykład LV. **Zasady teoryi przekształcania powierzchni.** Powierzchnie algebraiczne. Układy liniowe powierzchni. Rząd i klasa powierzchni algebraicznych. Powierzchnie biegunowo wzajemne. Powierzchnie jednokreślne, czyli homograficzne. Powierzchnie jednokładne, czyli homologiczne. Przekształcanie powierzchni za pomocą promieni odwrotnych (inwersya). Równania powierzchni w spółrzędnych jednorodnych. Powierzchnie biegunowe punktu ze względu na daną powierzchnię n-go rzędu. Płaszczyzna styczna jako pierwsza powierzchnia biegunowa punktu na danej powierzchni. Druga powierzchnia biegunowa punktu parabolicznego na płaszczyźnie i powierzchnia Hessego. Ćwiczenia . . . . 873—884.

Wykład LVI. **Powierzchnie określone równaniami różniczkowemi i wybitniejsze linie na powierzchniach.** Równania zwyczajne a równania różniczkowe powierzchni. Powierzchnie stokowe, czyli powierzchnie posiadające płaszczyzny styczne jednakowo nachylone do danej płaszczyzny. Powierzchnie Weingartena (zwane krótko powierzchnie W). Powierzchnie minimalne. Linie na powierzchniach. Linie krzywiznowe. Linie krzywiznowe poszczególnych powierzchni. Analityczne wyznaczanie linij krzywiznowych na danej powierzchni. Linie krzywiznowe na ellipsoidzie. Dwie powierzchnie przecinające się podług wspólnej linii krzywiznowej. Linie asymptotyczne na powierzchni. Linie asymptotyczne na powierzchniach obrotowych, określonych równaniami: $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = f(u)$. Proste minimalne. Krzywe minimalne. Linie geodezyjne. Analityczne wyznaczanie linij geodezyjnych na powierzchni: $z = f(x, y)$. Linie geodezyjne na powierzchniach obrotowych. Znaczenie geometryczne równania: $r^2\frac{d\varphi}{ds} = C$. Długość łuku linii geodezyjnej na powierzchni obrotowej: $z = f(r)$. Warstwice i linie największego spadu. Linie największego spadu na ellipsoidzie. Warstwice i linie największego spadu na powierzchni obrotowej: $z = f(r)$. Isofoty na danej powierzchni. Ćwiczenia 885—906.

Wykład LVII. **Wstęp do teoryi równań różniczkowych.** Określenie i podział równań różniczkowych. Rząd i stopień równania różniczkowego. Całki równania różniczkowego. Tworzenie równań różniczkowych zwyczajnych. Równania różniczkowe linij krzywych. Przykłady równań różniczkowych poszczególnych linij krzywych. Całka ogólna zwyczajnego równania różniczkowego rzędu pierwszego. Geometryczny obraz całek szczególnych i całki ogólnej danego równania różniczkowego pierwszego rzędu. Normalna postać równania różniczkowego pierwszego rzędu i pierwszego stopnia. Rozmaite postacie całki ogólnej danego równania różniczkowego rzędu i stopnia pierwszego. Ogólne uwagi o rodzajach całek eliptycznych. Zastosowania geometryczne równań różniczkowych pierwszego rzędu. Trajektorye układu krzywych. Całka ogólna równania zwyczajnego różniczkowego n-go rzędu. Geometryczny obraz całek danego równania różniczkowego n-go rzędu Równanie różniczkowe zwyczajne ilukolwiek zmiennych. Równania różniczkowe linij krzywych na powierzchni. Tworzenie równań różniczkowych cząstkowych. Równania różniczkowe cząstkowe o dwu zmiennych niezależnych. Równania różniczkowe powierzchni. Ćwiczenia . . . . 907—928

Wykład LVIII. **Szczególne metody całkowania równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego.** Metoda oddzielania zmiennych. Metoda zamiany zmiennych. Zastosowania geometryczne. α) Trajektorye ukośnokątne układu prostych $y = Cx$. β) Przykład trajektoryj ortogonalnych. Równania różniczkowe jednorodne. Równania różniczkowe niejednorodne. Równania liniowe pierwszego rzędu. Metoda całkowania równania różniczkowego liniowego rzędu pierwszego, za pomocą funkcyj dowolnych. Równania Bernouilli'ego. Równania Riccatiego. Zupełne równania różniczkowe rzędu pierwszego. Teorya czynników całkujących. Ogólne wyznaczanie czynników całkujących równania: $Mdx + Ndy = 0$. Równania różniczkowe pierwszego rzędu a wyższych stopni. Szczególne przypadki równań różniczkowych rzędu pierwszego a wyższych stopni. Równanie Clairaut'a. Równanie

Stronic

Lagrange'a. Równania różniczkowe ewolwent danej linii krzywej. Równania różniczkowe rulet. Równania jednorodne ze względu na x i y. Całki osobliwe równań różniczkowych pierwszego rzędu. Geometryczne objaśnienie całki ogólnej i osobliwej. Wyprowadzenie całki osobliwej z równania różniczkowego. Ćwicz. 929—95

Wykład LIX. **Równania różniczkowe zwyczajne drugiego i wyższych rzędów.** Równania różniczkowe liniowe n-go rzędu. Równania różniczkowe liniowe ze stałymi spółczynnikami i wyrazem wolnym różnym od zera. Równania różniczkowe liniowe ze zmiennymi spółczynnikami. Równanie różniczkowe nieliniowe wyższego rzędu. Równania różniczkowe jednorodne wyższych rzędów. Zupełne równania różniczkowe rzędów wyższych. Niektóre równania całkowalne za pomocą metody zmiany zmiennych. Zastosowanie metody zmiany zmiennych do równania różniczkowego rzędu drugiego, sprowadzonego do zera. Przekształcenie równania różniczkowego rzędu drugiego na równanie różniczkowe rzędu pierwszego. Przekształcenie równania różniczkowego rzędu drugiego na inne, w którem brak pierwszej pochodnej. Ogólna całka równania różniczkowego liniowego rzędu drugiego z wyrazem wolnym różnym od zera. Całkowanie równań różniczkowych drugiego rzędu za pomocą szeregów. Równanie Legendre'a. Równanie Bessel'a. Równanie Gaussa. Zastosowania geometryczne równań różniczkowych rzędu drugiego. Ćwiczenia 953—97

Wykład LX. **Zwyczajne równania różniczkowe o ilukolwiek zmiennych i układy równań różniczkowych.** Zupełne równanie różniczkowe pierwszego rzędu o trzech zmiennych. Równanie niezupełne różniczkowe o trzech zmiennych. Zupełne równanie różniczkowe o n zmiennych. Zwyczajne równanie różniczkowe stopnia wyższego nad pierwszy. Układy równań różniczkowych. Równania jednoczesne pierwszego rzędu i pierwszego stopnia o trzech zmiennych. Równania różniczkowe jednoczesne pierwszego rzędu o ilukolwiek zmiennych. Niektóre uproszczenia przy całkowaniu układu równań różniczkowych. Układy równań różniczkowych rzędu wyższego nad pierwszy. Ćwiczenia . . . . 975—98

Wykład LXI. **Równania różniczkowe cząstkowe.** Całki równań różniczkowych cząstkowych rzędu pierwszego. Geometryczne znaczenie całek danego równania różniczkowego cząstkowego rzędu pierwszego. Równanie cząstkowe liniowe rzędu pierwszego. Równania różniczkowe cząstkowe o ilukolwiek zmiennych. Równania cząstkowe pierwszego rzędu nieliniowe. Przykłady zastosowań geometrycznych. Bezpośrednie wyprowadzenie całki osobliwej z danego równania różniczkowego. Całkowanie równań różniczkowych cząstkowych rzędu pierwszego nieliniowych ilukolwiek zmiennych. Całkowanie układu równań różniczkowych cząstkowych rzędu pierwszego. Równania różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu. Całkowanie równania: $Rr+Ss+Tt=V$. Metoda Monge'a. Całkowanie równań różniczkowych cząstkowych za pomocą szeregów potęgowych. Ćwiczenia . . . . 990—100

Wykład LXII. **Przedstawianie funkcyj i rozwiązywanie równań różniczkowych za pomocą całek określonych.** Ogólny pogląd na wyznaczanie wartości całek określonych. Funkcye przedstawione całkami określonemi. Całki Eulera. Związek między obu gatunkami całek Eulera. Obliczanie wartości funkcyj Gamma. Wartość $\Gamma(1/2)$ i $\Gamma(m+1/2)$. Przedstawianie funkcyi $\Gamma(x)$ w postaci iloczynu nieskończonego. Przedstawianie funkcyi $\Gamma(x)$ w postaci szeregu potęgowego. Obraz funkcyi $\Gamma(x)$. Sprowadzanie niektórych całek określonych do funkcyi Gamma. Całki elliptyczne. Przykłady całek określonych, sprowadzających się do całek elliptycznych pierwszego lub drugiego rodzaju. Szeregi i całki Fouriera. Przykłady. Rozwiązywanie równań różniczkowych za pomocą całek określonych. Ćwicz. 1009—102

Wykład LXIII. **Zasadnicze pojęcia rachunku przemienności.** Pojęcie przemienności funkcyi. Przemienność całki określonej. Maximum lub minimum całki określonej. Zagadnienie o brachistochronie. Przemienność całek określonych o zmiennych granicach całkowania. Maximum lub minimum całki określonej zależnej od dwu lub więcej funkcyj. Maximum lub minimum całki określonej z warunkami dodatkowymi. Przemienność całki określonej zależnej od niewiadomej funkcyi dwu lub więcej zmiennych. Ćwiczenia . . . . 1030—103

Dostrzeżone omyłki drukarskie . . . . 1039—104

WYKŁADY MATEMATYKI I.

Zasady geometryi analitycznej i analizy wyższej.

TOM II.

Wykład I.

Wstęp do rachunku całkowego.

1. Funkcya pochodna i różniczka danej funkcyi. W rachunku różniczkowym rozważa się zmiany danej funkcyi $f(x)$, wywołane zmianą zmiennej niezależnej x, i dochodzi się do dwu pojęć zasadniczych:

a) do pojęcia funkcyi pochodnej $f'(x)$, jako funkcyi, określającej granicę stosunku różnicowego danej funkcyi $f(x)$ w każdem miejscu x, według wzoru:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1}$$

b) do pojęcia różniczki $df(x)$ danej funkcyi $f(x)$, jako różnicy między dwiema sąsiedniemi wartościami funkcyi $f(x)$, przedstawiającej się, jako iloczyn z pochodnej $f'(x)$ danej funkcyi $f(x)$ i różniczki dx zmiennej niezależnej x, według wzoru:

$$df(x) = f(x+dx) - f(x) = f'(x)\,dx \tag{2}$$

Powyższe dwa wzory podają zarazem sposoby bezpośredniego wyznaczania funkcyi pochodnej $f'(x)$, a więc i różniczki $df(x)$ danej funkcyi $f(x)$, pierwszy metodą granic, drugi metodą różniczek.

2. Funkcye różniczkowalne. Oba powyżej wskazane sposoby wyznaczania pochodnej $f'(x)$, a więc i różniczki $df(x)$ danej funkcyi $f(x)$, wymagają, aby dana funkcya $f(x)$ w całym, lub pewnym wiadomym zakresie zmienności zmiennej niezależnej x była: 1) funkcyą skończoną i jednowartościową; 2) funkcyą ciągłą; 3) funkcyą, posiadającą oznaczoną granicę stosunku różnicowego, czyli funkcyą różniczkowalną.

Funkcye $f(x)$, posiadające swe funkcye pochodne $f'(x)$, a więc także swe różniczki $df(x)$, nazywamy też ogólnie funkcyami różniczkowalnemi.

3. Przykłady funkcyj różniczkowalnych. Do funkcyj różniczkowalnych należą przedewszystkiem wszystkie funkcye algebraiczne, a mianowicie: 1) funkcye wymierne całkowite, kształtu:

$$G(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n;$$

2) funkcye **wymierne ułamkowe**, kształtu:

$$R(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m},$$

3) funkcye **niewymierne** $y=f(x)$, określone w ten sposób, że, podstawione w równanie algebraiczne:

$$\Phi(x,\ y)=a_{00}x^my^n+a_{10}x^{m-1}y^n+a_{01}x^my^{n-1}+\ldots=0,$$

czynią dany wielomian algebraiczny tożsamościowo równym zeru:

$$\Phi(x,\ f(x))\equiv 0.$$

Wśród funkcyj przestępnych okazują się, jako różniczkowalne:

a) wszystkie poznane w tomie I. elementarne funkcye przestępne, jako to: 1) funkcye potęgowe: x^m o jakimkolwiek niewymiernym wykładniku m, 2) funkcye wykładnicze: a^x, e^x, 3) funkcye logarytmiczne: $\log_b x$, $\log x$, 4) funkcye goniometryczne: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tang} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, 5) funkcye cyklometryczne: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arc\,tang} x$, $\operatorname{arc\,cotg} x$, $\operatorname{arc\,sec} x$, $\operatorname{arc\,cosec} x$, 5) funkcye hyperboliczne: $\sin\operatorname{hip} x$, $\cos\operatorname{hip} x$, $\operatorname{tang\,hip} x$, $\operatorname{cotg\,hip} x$, $\sec\operatorname{hip} x$, $\operatorname{cosec\,hip} x$, 6) funkcye odwrotne względem funkcyi hyperbolicznych: $\arg\sin\operatorname{hip} x$, $\arg\cos\operatorname{hip} x$, $\arg\operatorname{tang\,hip} x$, $\arg\operatorname{cotg\,hip} x$, $\arg\sec\operatorname{hip} x$, $\arg\operatorname{cosec\,hip} x$, wreszcie 7) funkcye złożone z powyższych funkcyj w skończonej jednak liczbie, jak $f(x)=\operatorname{tg} x^2$, $\sin^2(xe^{tgx})$, ...,

b) funkcye analityczne, określone szeregami potęgowemi, kształtu:

$$\mathfrak{P}(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots,$$
$$\mathfrak{P}(x-a)=b_0+b_1(x-a)+b_2(x-a)^2+\ldots+b_n(x-a)^n+\ldots$$

4. Przykłady funkcyj nieróżniczkowalnych. Wśród funkcyj, określonych za pomocą szeregów funkcyj:

$$f(x)=\varphi_0(x)+\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\ldots+\varphi_n(x)+\ldots$$

spotykamy się po raz pierwszy z funkcyami nieróżniczkowalnemi.

Takiemi są n. p. funkcye określone szeregami:

$$f(x)=\sin x+\frac{\sin 2^2x}{2^2}+\frac{\sin 3^2x}{3^2}+\frac{\sin 4^2x}{4^2}+\frac{\sin 5^2x}{5^2}+\ldots,$$

$$f(x)=\sin x+\frac{\sin 2!x}{2^2}+\frac{\sin 3!x}{3^2}+\frac{\sin 4!x}{4^2}+\frac{\sin 5!x}{5^2}+\ldots$$

zbieżne w całym zakresie rzeczywistej, zmiennej niezależnej x. Funkcye te, mimo swej skończoności i ciągłości, nie posiadają w żadnem miejscu x oznaczonej granicy stosunku różnicowego, czyli nie posiadają funkcyj pochodnych, a więc nie są funkcyami różniczkowalnemi.

Pierwszy przykład funkcyi ciągłej, która w żadnem miejscu x nie posiada oznaczonego stosunku różniczkowego podał Weierstrass (1874) w postaci szeregu:

$$f(x)=\cos(\pi x)+a\cos(b\pi x)+a^2\cos(b^2\pi x)+a^3\cos(b^3\pi x)+\ldots,$$

czyli:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty} a^n\cos(b^n\pi x),$$

gdzie a jest liczbą stałą, mniejszą od 1, b liczbę nieparzystą, większą od 1, a zarazem $ab>1+{}^3/_2\pi$.

Funkcya ta występuje, jako granica szeregu funkcyj, których wartości ostatecznie różnią się o liczby dowolnie małe, podczas, gdy wartości ich stosunków różniczkowych wahają się między dowolnie wielkiemi wartościami.

mo przez się rozumie się, że ta funkcya w żadnem miejscu $x=a$, nie da przedstawić w postaci szeregu potęgowego, uporządkowanego podług tęg $(x-a)$.

5. Funkcya pierwotna danej funkcyi. Zagadnienie rachunku różniczko-go wyznaczania pochodnej $F'(x)$ danej funkcyi $F(x)$ prowadzi do zagad-nia odwrotnego:

Znaleźć funkcyę $F(x)$, której pochodną $F'(x)$ byłaby dana funkcya $f(x)$.

Szukaną funkcyę $F(x)$, której pochodną $F'(x)$ jest dana funkcya $f(x)$, zywamy funkcyą pierwotną danej funkcyi $f(x)$. Na jej oznaczenie ogliby śmy użyć znakowania: $F(x)=Pr[f(x)]$, ytając: Funkcya $F(x)$ jest funkcyą pierwotną funkcyi $f(x)$.

Znakowanie to nie wskazuje sposobu wyznaczania funkcyi pierwotnej, łoby tylko analogicznem do znakowania odwrotnego:

$$[F(x)]'=f(x), \text{ czyli } F'(x)=f(x),$$

óre wypowiada, że funkcyą pochodną funkcyi $F(x)$ jest funkcya $f(x)$.

Z wzorów, dotyczących funkcyj pochodnych danych funkcyj, otrzymamy podstawie powyższego znakowania wprost odpowiednie wzory, dotyczące nkcyj pierwotnych, przyczem możemy do tak otrzymanej funkcyi pier-otnej dodać dowolną stałą C.

Skoro bowiem $[F(x)]'=f(x)$, to także $[F(x)+C]'=f(x)$, a zatem:

$$P_r[f(x)]=F(x)+C \qquad (3)$$

6. Wzory zasadnicze, dotyczące funkcyj pochodnych i analogiczne, do-yczące funkcyj pierwotnych przedstawiałyby się według powyższego zna-kowania w sposób następujący:

1) $C'=0$ a zatem $P_r(0)=C.$

2) $x'=1$ „ $P_r(1)=x+C.$

3) $(ax)'=a$ „ $P_r(a)=ax+C.$

4) $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=x^n$ „ $P_r(x^n)=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C.$

5) $(\log x)'=\frac{1}{x}$ „ $P_r\left(\frac{1}{x}\right)=\log x+C.$

6) $\left(\frac{a^x}{\log a}\right)'=a^x$ „ $P_r(a^x)=\frac{a^x}{\log a}+C.$

7) $(e^x)'=e^x$ „ $P_r(e^x)=e^x+C.$

8) $(-\cos x)'=\sin x$ „ $P_r(\sin x)=-\cos x+C.$

9) $(\sin x)'=\cos x$ „ $P_r(\cos x)=\sin x+C.$

10) $(\operatorname{tang} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$ „ $P_r\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)=\operatorname{tang} x+C.$

11) $(-\operatorname{cotang} x)'=\frac{1}{\sin^2 x}$ „ $P_r\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)=-\operatorname{cotang} x+C.$

12) $(\sec x)'=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$ „ $P_r\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)=\sec x+C.$

13) $(-\operatorname{cosec} x)'=\frac{\cos x}{\sin^2 x}$ „ $P_r\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)=-\operatorname{cosec} x+C.$

14) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ „ $P_r\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\arcsin x+C.$

15) $(-\text{arc}\cos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, a zatem $P_r\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\text{arc}\cos x + C.$

16) $(\text{arc tang}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$ „ $P_r\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \text{arc tang}\, x + C.$

17) $(-\text{arc cotg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$ „ $P_r\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = -\text{arc cotg}\, x + C.$

18) $(\text{arc sec}\, x)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ „ $P_r\left(\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\right) = \text{arc sec}\, x + C.$

19) $(-\text{arc cosec}\, x)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ „ $P_r\left(\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\right) = -\text{arc cosec}\, x + C.$

Ten sposób znakowania zastępuje się innym, który poznamy w następnym artykule.

7. Całka danej różniczki. Z zagadnienia rachunku różniczkowego, które dotyczy wyznaczania różniczki $dF(x)$ wypływa zagadnienie odwrotne:

Znaleźć funkcyę $F(x)$, której różniczką jest dana zmienna różniczka $f(x)dx$.

Szukana funkcya pierwotna $F(x)$ staje się, w tak postawionem zagadnieniu, określoną swą różniczką $dF(x) = f(x)dx$, a więc sama jest niejako całością swych zmian, czyli zmiennych różniczek kształtu: $f(x)dx$, nazywa się przeto *całką danej różniczki* $f(x)dx$.

W tem rozumieniu funkcya pierwotna $F(x)$ danej funkcyi pochodnej $f(x)$, jako całka danej różniczki $f(x)dx$, jest niejako sumą swych zmian, czyli sumą różniczek zmiennych kształtu $f(x)dx$. Na jej oznaczenie używamy przeto za przykładem Leibnitza (1694), znaku sumowego w postaci wydłużonego S, kształtu $\int$, zwanego *znakiem całkowym*.

Piszemy zatem: $F(x) = \int f(x)\,dx$,
skoro się przekonamy, że: $dF(x) = f(x)\,dx$,
i powiadamy: Funkcya $F(x)$ jest całką różniczki $f(x)dx$, jeżeli różniczka $dF(x)$, przedstawiająca, jak wiadomo, różnicę $F(x+dx) - F(x)$, jest równa różniczce $f(x)dx$, stojącej pod znakiem całkowym. Znak całkowy $\int$ i znak różniczkowy d pozostają, w myśl powyższego określenia, w tym związku wzajemnym, że położone jeden po drugim wzajemnie się znoszą. Jest tedy:

$\int dx = x$, a zarazem $d\int dx = dx$, ogólnie $\int dF(x) = F(x)$; $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$.

8. Funkcya pierwotna danej funkcyi pochodnej i całka nieokreślona danej różniczki. Funkcya pierwotna $F(x)$ danej pochodnej $f(x)$ jest zarazem całką danej różniczki $f(x)dx$ i nawzajem, całka danej różniczki $f(x)dx$ jest funkcyą pierwotną danej funkcyi pochodnej $f(x)$. Skoro bowiem $F(x) = P_r(f(x))$, to $F'(x) = f(x)$, czyli $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$, a więc $dF(x) = f(x)dx$, czyli $F(x) = \int f(x)dx$ i odwrotnie, skoro $F(x) = \int f(x)dx$, to $dF(x) = f(x)dx$, a zatem $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$, czyli $F'(x) = f(x)$, a więc $F(x) = P_r(f(x))$.

Znakowanie możliwe, ale nieużywane: $F(x) = P_r f(x)$ zastępuje się tedy zawsze znakowaniem: $F(x) = \int f(x)dx$, skoro $F'(x) = f(x)$, czyli, skoro: $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$, a więc skoro $dF(x) = f(x).dx$.

Jeżeli jednak $dF(x) = f(x)\,dx$, to ponieważ według prawideł rachunku różniczkowego jest: $d[F(x)+C]=dF(x)$, przyczem C jest dowolną liczbą stałą, jest więc także $d[F(x)+C]=f(x)\,dx$, a zatem nietylko funkcya $F(x)$, lecz także funkcya $F(x)+C$, gdzie C jest stałą dowolną, jest funkcyą pierwotną danej funkcyi $f(x)$, czyli innemi słowy nietylko funkcya $F(x)$, lecz także funkcya $F(x)+C$ z dowolną stałą C jest całką danej różniczki $f(x)\,dx$.

Dana funkcya pochodna $f(x)$ ma zatem nieskończenie wiele funkcyj pierwotnych, czyli dana różniczka $f(x)\,dx$ ma nieskończenie wiele całek, a wszystkie te funkcye pierwotne danej funkcyi pochodnej $f(x)$, czyli wszystkie całki danej różniczki $f(x)\,dx$, różnią się między sobą tylko o liczby stałe.

Piszemy zatem ogólnie:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C, \tag{4}$$

skoro $dF(x) = f(x)\,dx$, a ogólną funkcyę pierwotną $F(x)+C$ danej funkcyi pochodnej $f(x)$ nazywamy całką nieokreśloną danej różniczki $f(x)\,dx$, albo też niewłaściwie całką nieokreśloną danej funkcyi pochodnej $f(x)$.

Całką nieokreśloną różniczki $f(x)\,dx$, przedstawioną w postaci $\int f(x)\,dx$, jest więc najogólniejsza funkcya $F(x)$, której różniczka $dF(x)$ znajduje się pod znakiem całkowym, czyli ma kształt $f(x)dx$. Funkcye, posiadające całki nieokreślone, czyli funkcye pierwotne, nazywamy funkcyami całkowalnemi.

9. Rachunek całkowy, a rachunek różniczkowy. Wyznaczanie funkcyj pierwotnych dla danych funkcyj pochodnych, czyli wyznaczanie całek nieokreślonych dla danych różniczek, jest głównym przedmiotem rachunku, zwanego rachunkiem całkowym, podobnie, jak wyznaczanie funkcyj pochodnych, czyli wyznaczanie różniczek danych funkcyj, jest głównym przedmiotem rachunku, zwanego rachunkiem różniczkowym.

Rachunek różniczkowy i rachunek całkowy stanowią dwa główne rachunki analizy wyższej, zajmującej się wielkościami zmiennemi. Przedmiotem tych rachunków są dwa działania odwrotne względem siebie, pierwsze działanie nazywamy różniczkowaniem danych funkcyj, drugie całkowaniem danych różniczek.

Różniczkowanie jest działaniem głównem, określonem bezpośrednio wzorem różniczkowym:

$$dF(x)=F(x+dx)-F(x)=f(x)\,dx,$$

z którego, jako odwrotność występuje odpowiedni wzór całkowy w postaci:

$$\int f(x)\,dx=F(x), \text{ albo ogólnie } \int f(x)\,dx=F(x)+C.$$

Zmienna niezależna x może mieć oczywiście rozmaite znaczenie i może być też zastąpioną różnemi innemi literami, jak t, u, z, ...

10. Całki zasadnicze. Z różniczek funkcyj elementarnych wypływają, jako odwrotności odpowiednie wzory całkowe, podające tak zwane całki zasadnicze.

Zestawiwszy je kolejno, otrzymujemy następującą tablicę całek zasadniczych:

1) $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, \; (m \gtrless -1)$, gdyż $d\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right) = x^m dx$.

2) $\int \frac{dx}{x} = \log x + C$, „ $d \log x = \frac{dx}{x}$.

3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$, „ $d\left(\frac{a^x}{\log a}\right) = a^x dx$,

4) $\int e^x dx = e^x + C$, „ $d(e^x) = e^x dx$.

5) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$, „ $d(\sin x) = \cos x \, dx$.

6) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$, „ $d(-\cos x) = \sin x \, dx$.

7) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x + C$, „ $d(\operatorname{tang} x) = \frac{dx}{\cos^2 x}$.

8) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C$, „ $d(-\operatorname{cotg} x) = \frac{dx}{\sin^2 x}$.

9) $\int \frac{\sin x \, dx}{\cos^2 x} = \sec x + C$, „ $d(\sec x) = \frac{\sin x \, dx}{\cos^2 x}$.

10) $\int \frac{\cos x \, dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec} x + C$, „ $d(-\operatorname{cosec} x) = \frac{\cos x \, dx}{\sin^2 x}$.

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, „ $d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C$, „ $d(-\arccos x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

13) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tang} x + C$, „ $d(\operatorname{arc\,tang} x) = \frac{dx}{1+x^2}$.

14) $\int \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arc\,cotg} x + C$, „ $d(-\operatorname{arc\,cotg} x) = \frac{dx}{1+x^2}$.

15) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arc\,sec} x + C$, „ $d(\operatorname{arc\,sec} x) = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

16) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\operatorname{arc\,cosec} x + C$, „ $d(-\operatorname{arc\,cosec} x) = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Podobnie wynikają z prawideł różniczkowania odpowiednie pra całkowania. Przejdźmy je po kolei.

11. Prawidło całkowania sumy różniczek. Z prawidła różniczkov sumy funkcyj, określonego wzorem:

$$d(u+v) = du + dv,$$

czyli:
$$d(f(x) + \varphi(x)) = [f'(x) + \varphi'(x)]\, dx,$$

otrzymujemy, zastępując u przez $\int du$, czyli $f(x)$ przez $\int f'(x) dx$, a v przez czyli $\varphi(x)$ przez $\int \varphi'(x)\, dx$, wzór następujący:

$$\int (du + dv) = \int du + \int dv,$$

czyli:
$$\int [f'(x) + \varphi'(x)]\, dx = \int f'(x)\, dx + \int \varphi'(x)\, dx,$$

t. z. *Całka sumy różniczek jest równa sumie całek poszczególnych różniczek.*

Na podstawie tego prawidła całkowania, rozwiążemy n. p. nas jące całki:

1) $\int(x+1)dx=\int xdx+\int dx=\frac{x^2}{2}+x+C;$

2) $\int(x^2-x+1)dx=\int x^2dx-\int xdx+\int dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+C;$

3) $\int(\cos x-\sin x)\,dx=\int\cos x\,dx-\int\sin x\,dx=\sin x+\cos x+C;$

4) $\int\left(e^x+\frac{1}{x}\right)dx=\int e^x\,dx+\int\frac{dx}{x}=e^x+\log x+C.$

12. Prawidło całkowania wielokrotności różniczek. Z prawidła różniczkowania wielokrotności danej funkcyi, określonego wzorem:

$$d\,(a\,u)=adu,$$

czyli:
$$d[a\,f(x)]=a\,f'(x)\,dx,$$

otrzymujemy podobnie wzór:

$$\int a\,du=a\int du, \tag{6}$$

czyli:
$$\int a\,f'(x)\,dx=a\int f'(x)\,dx. \tag{6'}$$

t. z. *Całka wielokrotności danej różniczki jest równa wielokrotności całki tejże różniczki*, albo innemi słowy: *W danej całce możemy czynnik stały wyłączyć przed znak całkowania.*

Na podstawie tego prawidła całkowania, otrzymujemy wprost, lub w połączeniu z poprzedzającem prawidłem, n. p. następujące całki:

1) $\int ax^n\,dx=a\int x^n dx=\frac{ax^{n+1}}{n+1}+C;$

2) $\int(ax+b)\,dx=a\int xdx+b\int dx=\frac{ax^2}{2}+bx+C;$

3) $\int(ax^2+bx+c)\,dc=\frac{ax^3}{3}+b\frac{x^2}{2}+cx+C;$

4) $\int\frac{x^2-1}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int(x^2-1)\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}-x\right]+C.$

13. Prawidło całkowania przez części. Z prawidła różniczkowania iloczynu dwu funkcyj, określonego wzorem:

$$d(uv)=u\,dv+v\,du,$$

wynika, jako odwrotność wzór:

$$\int(udv+vdu)=uv,$$

z którego, na mocy prawidła całkowania sumy, dostajemy:

$$\int udv+\int vdu=uv,$$

i stąd wzór:

$$\int udv=uv-\int vdu, \tag{7}$$

dający sposób całkowania danej różniczki, zwany całkowaniem przez części, albo też całkowaniem częściowem.

Według tego wzoru całkowanie różniczki udv sprowadza się do całkowania różniczki vdu, które może doprowadzić do całki prostszej, ewentualnie do jednej z całek zasadniczych.

Przykłady:

1) Mając znaleźć całkę kształtu: $\int x\cos x dx$, połóżmy:

$u=x$, $dv=\cos x\,dv$ a otrzymamy $du=dx$, $v=\sin x.$

Wobec tego, na mocy wzoru: $\int u dv = uv - \int v du$, otrzymujemy:

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx,$$

a że:

$$\int \sin x \, dx = -\cos x,$$

przeto będzie ostatecznie:

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x + C,$$

co łatwo sprawdzić różniczkowaniem otrzymanej funkcyi, jest bowie

$$d(x \sin x + \cos x) = x \cos x \, dx.$$

2) $\int xe^x dx = ?$

Kładąc:	a zatem
$u = x$	$du = dx$
$dv = e^x dx$	$v = e^x$,

otrzymujemy:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx,$$

a więc ostatecznie:

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + C.$$

3) $\int \log x \, dx = ?$

Kładąc	a zatem
$u = \log x$	$du = \frac{dx}{x}$.
$dv = dx$	$v = x$

otrzymujemy:

$$\int \log x \, dx = x \log x - \int x \frac{dx}{x} = x \log x - x,$$

a więc:

$$\int \log x \, dx = x \log x - x + C.$$

4) $\int x \log x \, dx = ?$

Kładąc	a zatem
$u = \log x$	$du = \frac{dx}{x}$
$dv = x dx$	$v = \frac{x^2}{2}$

otrzymamy:

$$\int x \log x \, dx = \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^2 \log x}{2} - \frac{1}{2} \int x dx,$$

a zatem:

$$\int x \log x \, dx = \frac{x^2 \log x}{2} - \frac{x^2}{4} + C.$$

14. Prawidło całkowania różniczek przez wprowadzenie nowej zn
Z prawidła różniczkowania funkcyi danej funkcyi, określonego wzor

$$df[\varphi(x)] = \frac{df[\varphi(x)]}{d\varphi(x)} \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} \cdot dx,$$

czyli:

$$df[\varphi(x)] = f'[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) \, dx,$$

który, za podstawieniem $\varphi(x) = u$, sprowadza się do postaci:

$$df(u) = f'(u) \cdot du,$$

otrzymujemy wzór:

$$\int f'[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) \, dx = \int f'(u) \, du = f(u) = f[\varphi(x)],$$

który dozwala daną całkę, przez wprowadzenie nowej zmiennej, spr do całki prostszej, ewentualnie do jednej z całek zasadniczych. Z teg możemy, przy całkowaniu danej różniczki, skorzystać w dwojaki spos

1) wprowadzając w istocie stosowną funkcyę zmiennej niezależnej x, jako nową zmienną u, albo

2) przekształcając stosownie funkcyę stojącą pod znakiem całkowania.

Pierwszy sposób nazywamy całkowaniem za pomocą podstawienia, drugi całkowaniem za pomocą przekształcenia.

15. Sposób całkowania za pomocą podstawienia. Mając wyznaczyć całkę kształtu $\int F(x)\,dx$, staramy się stosownem podstawieniem $\varphi(x)=z$ daną całkę sprowadzić do całki możliwie prostszej kształtu $\int f(z)\,dz$. Wyznaczywszy tę całkę, wyrażamy na powrót, na mocy podstawienia $\varphi(x)=z$, nową zmienną z przez pierwotną x.

Postępowanie to wyjaśnimy na przykładach:

1) Mając wyznaczyć całkę: $\int\sqrt{a^2+x^2}\,xdx$, położmy $a^2+x^2=z^2$, a otrzymamy $2x\,dx=2z\,dz$, zatem $xdx=zdz$; a że $\sqrt{a^2+x^2}=z$, przeto będzie:

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,.\,xdx=\int z^2\,dz.$$

Otrzymaliśmy tą całkę zasadniczą $\int z^2\,dz=\frac{z^3}{3}$, wobec tego będzie:

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,xdx=\int z^2dz=\frac{z^3}{3}=\frac{(\sqrt{a^2+x^2})^3}{3}$$

zatem:

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,xdx=\frac{(a^2+x^2)^{3/2}}{3}+C;$$

2) $\int\sqrt{\sin x}\cos x\,dx=?$

Połóżmy $\sin x=z$, zatem $\cos x\,dx=dz$, to otrzymamy:

$$\int\sqrt{\sin x}\cos x\,dx=\int z^{1/2}\,dz=\frac{2}{3}\,z^{3/2}=\frac{2}{3}(\sin x)^{3/2},$$

$$\int\sqrt{\sin x}\cos x\,dx=\frac{2}{3}\sqrt{\sin^3 x}+C.$$

3) $\int\frac{dx}{x^2+a^2}=?$

Połóżmy $x=az$, natenczas będzie $dx=adz$, zatem będzie:

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\int\frac{adz}{a^2(z^2+1)}=\frac{1}{a}\int\frac{dz}{z^2+1},$$

a że $\int\frac{dz}{z^2+1}=\operatorname{arc\,tang} z$, przeto, kładąc naodwrót $z=\frac{x}{a}$, otrzymamy:

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg} z=\frac{1}{a}\operatorname{arctang}\frac{x}{a},$$

zatem:

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctang}\frac{x}{a}+C.$$

4) $\int e^{mx}\,dx=?$

Kładąc $mx=u$, otrzymamy: $mdx=du$, $dx=\frac{du}{m}$, będzie więc:

$$\int e^{mx}dx=\int\frac{e^u\,du}{m}=\frac{1}{m}\int e^u\,du=\frac{1}{m}\,e^u=\frac{e^{mx}}{m},$$

zatem:

$$\int e^{mx}\,dx=\frac{e^{mx}}{m}+C.$$

16. Sposób całkowania za pomocą przekształcenia. Podstawienie $\varphi(x)=u$ ma na celu sprowadzenie danej całki ze zmienną niezależną x do całki zasadniczej ze zmienną niezależną u.

Całki tego rodzaju są uogólnieniami całek zasadniczych i prowadzą do następnych wzorów, jak:

1) $\int[\varphi(x)]^m \varphi'(x)\,dx = \int[\varphi(x)]^m d\varphi(x) = \frac{[\varphi(x)]^{m+1}}{m+1} + C, \quad (m \gtrless -1).$

2) $\int \frac{\varphi'(x)\,dx}{\varphi(x)} = \int \frac{d\,\varphi(x)}{\varphi(x)} = \log \varphi(x) + C.$

3) $\int a^{\varphi(x)} \varphi'(x)\,dx = \int a^{\varphi(x)} d\,\varphi(x) = \frac{a^{\varphi(x)}}{\log a} + C.$

4) $\int e^{\varphi(x)} \varphi'(x)\,dx = \int e^{\varphi(x)} d\,\varphi(x) = e^{\varphi(x)} + C.$

5) $\int \sin[\varphi(x)].\varphi'(x)\,dx = \int \sin\varphi(x)\,d\varphi(x) = -\cos[\varphi(x)] + C.$

6) $\int \cos[\varphi(x)].\varphi'(x)\,dx = \int \cos\varphi(x)\,d\varphi(x) = \sin[\varphi(x)] + C.$

7) $\int \frac{\varphi'(x)\,dx}{\cos^2[\varphi(x)]} = \int \frac{d\,\varphi(x)}{\cos^2\varphi(x)} = \operatorname{tang}[\varphi(x)] + C.$

8) $\int \frac{\varphi'(x)\,dx}{\sin^2[\varphi(x)]} = \int \frac{d\varphi(x)}{\sin^2\varphi(x)} = -\operatorname{cotg}[\varphi(x)] + C.$

9) $\int \frac{\varphi'(x)\,dx}{\sqrt{1-[\varphi(x)]^2}} = \int \frac{d\,\varphi(x)}{\sqrt{1-[\varphi(x)]^2}} = \operatorname{arc\,sin}[\varphi(x)] + C.$

10) $\int \frac{\varphi'(x)\,dx}{1+[\varphi(x)]^2} = \int \frac{d\varphi(x)}{1+[\varphi(x)]^2} = \operatorname{arc\,tang}[\varphi(x)] + C.$

W wielu przypadkach możemy daną całkę, przypominającą jedną z całek zasadniczych, przez stosowne przekształcenie, sprowadzić do jednego z powyższych wzorów. Ten sposób postępowania zastępuje całkowanie za pomocą podstawienia, a nazywamy go całkowaniem za pomocą przekształcenia.

Przykłady. Sposobem całkowania przez przekształcenie przeprowadzimy z łatwością rozwiązanie następujących całek:

1) $\int \sqrt[3]{1+x}\,dx = \int(1+x)^{1/3}dx = \int(1+x)^{1/3} d(1+x) = \frac{3}{4}(1+x)^{4/3} + C.$

a więc $$\int \sqrt[3]{1+x}\,dx = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+x)^4} + C.$$

2) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int(1+x^2)^{-1/2} d(1+x^2) = (1+x^2)^{1/2},$

a więc: $$\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} + C.$$

3) $\int \frac{a+2bx}{ax+bx^2}dx = \int \frac{d(ax+bx^2)}{ax+bx^2} = \log(ax+bx^2),$

a więc: $$\int \frac{a+2bx}{ax+bx^2}dx = \log(ax+bx^2) + C.$$

4) $\int \operatorname{tang} x\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\log\cos x,$

a że: $$-\log\cos x=\log\frac{1}{\cos x}=\log\sec x,$$

przeto: $$\int \operatorname{tang} x\,dx=\log\sec x+C.$$

5) $$\int \operatorname{cotg} x\,dx=\int\frac{\cos x\,dx}{\sin x}=\int\frac{d\sin x}{\sin x}=\log\sin x,$$

a więc: $$\int \operatorname{cotg} x\,dx=\log\sin x+C.$$

6) $$\int\cos mx\,dx=\frac{1}{m}\int\cos mx\,d(mx)=\frac{1}{m}\sin mx,$$

a więc: $$\int\cos mx\,dx=\frac{\sin mx}{m}+C.$$

podobnie:

7) $$\int\sin mx\,dx=-\frac{\cos mx}{m}+C.$$

17. **Elementarne metody całkowania.** Na podstawie poznanych prawideł całkowania możemy wymienić następujące elementarne metody całkowania:

a) całkowanie bezpośrednie, oparte wprost na całkach zasadniczych;

b) całkowanie za pomocą przekształcenia, sprowadzające daną całkę za pomocą stosownych przekształceń do całek zasadniczych;

c) całkowanie za pomocą podstawienia, sprowadzające daną całkę za pomocą stosownego podstawienia do jednej z całek zasadniczych;

d) całkowanie przez rozkładanie na dodajniki, polegające na tem, że funkcyę, stojącą pod znakiem całkowania, przedstawiamy w postaci sumy funkcyj;

e) całkowanie częściowe, oparte na wzorze:

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du;$$

f) całkowanie za pomocą połączenia powyższych metod elementarnych.

18. **Zastosowania.**

1) $$\int\frac{3x^2+5x-1}{x-1}\,dx=?$$

Funkcyę ułamkową, stojącą pod znakiem całkowania, możemy rozłożyć na dodajniki w postaci:

$$\frac{3x^2+5x-1}{x-1}=3x+8+\frac{7}{x-1},$$

otrzymujemy zatem:

$$\int\frac{3x^2+5x-1}{x-1}dx=\int\left(3x+8+\frac{7}{x-1}\right)dx=3\int x\,dx+8\int dx+\int\frac{dx}{x-1}=$$
$$=3\frac{x^2}{2}+8x+7\log(x-1),$$

a więc: $$\int\frac{3x^2+5x-1}{x-1}\,dx=\frac{3}{2}x^2+8x+\log(x-1)^7+C.$$

2) $$\int\cos^2 x\,dx=?$$

Wiedząc, że $1+\cos 2x=2\cos^2 x$, mamy $\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{\cos 2x}{2}$, wobec tego otrzymujemy:

$$\int \cos^2 x\,dx = \int\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2},$$

zatem:
$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

3) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = ?$

Połóżmy	a zatem:
$\sqrt{a^2-x^2}=u$	$du = -\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$
$dv = dx$	$v = x$

a na podstawie wzoru $\int udv = uv - \int vdu$, otrzymamy:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Otrzymaną nową całkę możemy wyznaczyć przez rozkładanie na d dajniki. Kładąc $x^2 = a^2-(a^2-x^2)$, otrzymujemy:

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{a^2-(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx,$$

zatem dostajemy:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx,$$

a stąd:

$$2\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

czyli
$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

a, że
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin \frac{x}{a},$$

więc otrzymujemy ostatecznie:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

19. Uwaga. Do jednej i tej samej całki możemy często zastosować róż metody całkowania. Wyniki mogą być na pozór różne, muszą jednak prze stawiać funkcye, różniące się tylko o liczby stałe.

Tak n. p. otrzymujemy wprost:

$$\int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C,$$

a całkowanie przez przekształcenie daje:

$$\int \sin 2x\,dx = \int 2\sin x\cos x\,dx = 2\int \sin x\,d\sin x = \sin^2 x + C,$$

albo:
$$\int \sin 2x\,dx = \int 2\cos x\sin x\,dx = -2\int \cos x\,d\cos x = -\cos^2 x + C.$$

Funkcye: $-\frac{1}{2}\cos 2x$, $\sin^2 x$, $-\cos^2 x$ różnią się między sobą tyl o liczby stałe, jest bowiem:

$$-\frac{1}{2}\cos 2x = -\frac{1}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\frac{1}{2} + \sin^2 x = -\cos^2 x + \frac{1}{2}$$

Znalazłszy więc jedną z metod całkę nieokreśloną danej funkcyi, możemy pewną część stałej dowolnej dołączyć do wyniku, a tem samem, po stosownem przekształceniu całkę nieokreśloną przedstawić w odmiennej postaci.

20. Całki funkcyj elementarnych. Stosując odpowiednio powyższe metody całkowania do funkcyj elementarnych, otrzymujemy w zestawieniu następujące grupy wzorów:

1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ (n \gtrless -1);\ \int \frac{dx}{x} = \log x + C$

(całkowaniem bezpośredniem).

2) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C;\ \int e^x dx = e^x + C$

(całkowaniem bezpośredniem).

3) $\int \log x\, dx = x(\log x - 1) + C$

(całkowaniem częściowem).

4) $\int \sin x dx = -\cos x + C;\ \int \cos x dx = \sin x + C$

(całkowaniem bezpośredniem).

5) $\int \operatorname{tang} x\, dx = \log \sec x + C;\ \int \operatorname{cotg} x dx = \log \sin x + C$

(całkowaniem za pomocą przekształcenia, lub metodą podstawienia, kładąc w pierwszej całce $\cos x = z$, w drugiej $\sin x = z$).

6) $\int \sec x dx = \log \operatorname{cotang} \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + C,$

gdyż metodą przekształcenia otrzymujemy:

$$\int \sec x\, dx = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\dfrac{dx}{\cos^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -\int \frac{d\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} =$$

$$= -\log \operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \log \operatorname{cotang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

7) $\int \operatorname{cosec} x dx = \log \operatorname{tang} \frac{x}{2} + C,$

gdyż metodą przekształcenia otrzymujemy:

$$\int \operatorname{cosec} x dx = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{\dfrac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\operatorname{tang}\frac{x}{2}} =$$

$$= \int \frac{d\operatorname{tang}\frac{x}{2}}{\operatorname{tang}\frac{x}{2}} = \log \operatorname{tang}\frac{x}{2}.$$

8) $\int \mathbf{arc\,sin}\, x dx = x\, \mathbf{arc\,sin}\, x + \sqrt{1-x^2} + C$,

gdyż, kładąc	a zatem
$u = \operatorname{arc\,sin} x$	$du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$dv = dx$	$v = x$

na mocy wzoru $\int u dv = uv - \int v du$, otrzymujemy:

$$\int \operatorname{arc\,sin} x\, dx = x \operatorname{arc\,sin} x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \operatorname{arc\,sin} x + \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x \operatorname{arc\,sin} x + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-1/2} d(1-x^2) = x \operatorname{arc\,sin} x + \frac{1}{2} . 2 . (1-x^2)^{1/2} =$$

$$= x \operatorname{arc\,sin} x + \sqrt{1-x^2}.$$

9) $\int \mathbf{arc\,cos}\, x dx = x\, \mathbf{arc\,cos}\, x - \sqrt{1-x^2} + C$,

gdyż, kładąc:	a zatem
$u = \operatorname{arc\,cos} x$	$du = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$dv = dx$	$v = x$

otrzymujemy:

$$\int \operatorname{arc\,cos} x\, dx = x \operatorname{arc\,cos} x + \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \operatorname{arc\,cos} x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x \operatorname{arc\,cos} x - \sqrt{1-x^2},$$

co także otrzymamy metodą rozkładania na dodajniki na podstawie wz(

$$\operatorname{arc\,cos} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,sin} x.$$

10) $\int \mathbf{arc\,tang}\, x dx = x\, \mathbf{arc\,tang}\, x - \mathbf{log}\, \sqrt{1+x^2} + C$,

gdyż, kładąc:	a zatem
$u = \operatorname{arc\,tang} x$	$du = \dfrac{dx}{1+x^2}$,
$dv = dx$	$v = x$

otrzymujemy:

$$\int \operatorname{arc\,tang} x dx = x \operatorname{arc\,tang} x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \operatorname{arc\,tang} x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$$

$$= x \operatorname{arc\,tang} x - \frac{1}{2} \log(1+x^2).$$

Temsamem otrzymujemy:

11) $\int \mathbf{arc\,cotg}\, x dx = x\, \mathbf{arc\,cotg}\, x + \mathbf{log}\, \sqrt{1+x^2} + C$.

12) $\int \mathbf{arc\,sec}\, x dx = x\, \mathbf{arc\,sec}\, x - \mathbf{log}\,(x + \sqrt{x^2-1}) + C$.

Kładąc bowiem	a zatem
$u = \operatorname{arc\,sec} x$	$du = \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$,
$dv = dx$	$v = x$

otrzymujemy:

$$\int \operatorname{arc\,sec} x\, dx = x \operatorname{arc\,sec} x - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Podstawiając teraz $\sqrt{x^2-1}=z-x$, a więc $z=x+\sqrt{x^2-1}$, dostajemy:

$$x^2-1=z^2+x^2-2xz,$$

atem: $x=\frac{z^2+1}{2z}$, a stąd $dx=\frac{z^2-1}{2z^2}dz$; $\sqrt{x^2-1}=z-\frac{z^2+1}{2z}=\frac{z^2-1}{2z}$,

zeto: $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{z^2-1}{2z^2}\cdot\frac{2z}{z^2-1}dz=\int\frac{dz}{z}=\log z=\log(x+\sqrt{x^2-1})$,

yli:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\log(x+\sqrt{x^2-1}).$$

Tem samem otrzymujemy:

13) $\int \textbf{arc cosec}\, x dx = x\, \textbf{arc cosec}\, x + \log(x+\sqrt{x^2-1})+C.$

Całki funkcyj elementarnych dadzą się więc powyżej podanemi metomi wyznaczyć i są nowemi funkcyami, złożonemi funkcyj elementarnych.

Ćwiczenia I.

Wyznaczyć i sprawdzić następujące całki: 1) $\int dx=x+C$. 2) $\int a dx=ax+C$.
3) $\int 2x dx=x^2+C$. 4) $\int 3x^2 dx=x^3+C$. 5) $\int 4x^3 dx=x^4+C$. 6) $\int mx^{m-1}dx=x^m+C$.
7) $\int\frac{dx}{x}=\log x+C$. 8) $\int\frac{2dx}{x}=\log(x^2)+C$. 9) $\int\frac{mdx}{x}=\log(x^m)+C$. 10) $\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+C$.
11) $\int\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2x^2}+C$. 12) $\int\frac{dx}{x^{m+1}}=-\frac{1}{mx^m}+C$. 13) $\int\sqrt{x}.dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$.
14) $\int\sqrt[3]{x}dx=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C$. 15) $\int\sqrt[m]{x}dx=\frac{m}{m+1}x\sqrt[m]{x}+C$. 16) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C$.
17) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C$. 18) $\int\frac{dx}{\sqrt[m]{x}}=\frac{m}{m-1}\sqrt[m]{x^{m-1}}+C$.
19) $\int x\sqrt{x}dx=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$. 20) $\int x\sqrt[3]{x}dx=\frac{3}{7}x^2\sqrt[3]{x}+C$.
21) $\int x\sqrt[m]{x}dx=\frac{m}{2m+1}x^2\sqrt[m]{x}+C$. 22) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x}}=-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$.
23) $\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}=-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+C$. 24) $\int\frac{dx}{x\sqrt[m]{x}}=-\frac{m}{\sqrt[m]{x}}+C$.
25) $\int x^n\sqrt[m]{x}dx=\frac{m}{(n+1)m+1}x^{n+1}\sqrt[m]{x}+C$.
26) $\int\frac{dx}{x^n\sqrt[m]{x}}=-\frac{m}{(n-1)m+1}\cdot\frac{1}{x^{n-1}\sqrt[m]{x}}+C$.
27) $\int(x-a)dx=\frac{1}{2}(x-a)^2+C$. 28) $\int(x-a)^n dx=\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}+C$.
29) $\int(a-x)dx=-\frac{1}{2}(a-x)^2+C$. 30) $\int(a-x)^n dx=-\frac{(a-x)^{n+1}}{n+1}+C$.
31) $\int\frac{dx}{x-a}=\log(x-a)+C$. 32) $\int\frac{dx}{a-x}=\log\frac{1}{a-x}+C$.
33) $\int\sqrt{x-a}\,dx=\frac{2}{3}(x-a)\sqrt{x-a}+C$. 34) $\int\frac{dx}{\sqrt{x-a}}=2\sqrt{x-a}+C$.
35) $\int(a+bx)dx=\frac{1}{2b}(a+bx)^2+C$. 36) $\int(a+bx)^n dx=\frac{1}{(n+1)b}(a+bx)^{n+1}+C$.
37) $\int\frac{dx}{a+bx}=\frac{1}{b}\log(a+bx)+C$. 38) $\int\frac{x^{n-1}dx}{a+bx^n}=\frac{1}{nb}\log(a+bx^n)+C$.

39) $\int \sqrt{x^2-1}\,x dx = \frac{1}{3}(x^2-1)\sqrt{x^2-1} + C.$ 40) $\int \sqrt[3]{(1+x)^2}dx = \frac{3}{5}(1+x)\sqrt[3]{(1+x)^2} +$

41) $\int x^2\sqrt{x^3-1}\,dx = \frac{2}{9}\sqrt{(x^3-1)^3} + C.$ 42) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} + C.$

43) $\int \frac{xdx}{(x^2+1)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + C.$ 44) $\int \frac{x^3\,dx}{x^4-4} = \log\sqrt[4]{x^4-4} + C.$

45) $\int \frac{1+2x}{x+x^2}dx = \log(x+x^2) + C.$ 46) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{arc sin}\,\frac{x}{a} + C.$

47) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}} = \frac{1}{b}\,\text{arc sin}\,\frac{bx}{a} + C.$ 48) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\,\text{arc tang}\,\frac{x}{a} + C.$

49) $\int \frac{dx}{1+a^2x^2} = \frac{1}{a}\,\text{arc tang}\,ax + C.$ 50) $\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{ab}\,\text{arc tang}\,\frac{bx}{a} + C.$

51) $\int a^x \log a\,dx = a^x + C.$ 52) $\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C.$ 53) $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a}\cos ax +$

54) $\int \text{tang}\,ax\,dx = -\frac{1}{a}\log\cos ax + C.$ 55) $\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + C.$

56) $\int \text{cotg}\,ax\,dx = \frac{1}{a}\log\sin ax + C.$ 57) $\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C.$

58) $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C.$ 59) $\int \frac{\log x}{x}dx = \frac{1}{2}(\log x)^2 + C.$

60) $\int \frac{dx}{x(\log x)^n} = -\frac{1}{(n-1)(\log x)^{n-1}} + C.$ 61) $\int \frac{dx}{x\log x} = \log(\log x) + C.$

62) $\int \cos^n x\sin x\,dx = -\frac{\cos^{n+1}x}{n+1} + C.$ 63) $\int \sin^n x\cos x\,dx = \frac{\sin^{n+1}x}{n+1} + C.$

64) $\int \frac{\text{tang}^n x}{\cos^2 x}dx = \frac{\text{tang}^{n+1}x}{(n+1)} + C.$ 65) $\int \frac{\text{cotg}^n x}{\sin^2 x}dx = -\frac{\text{cotg}^{n+1}x}{n+1} + C.$

66) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\text{arctang}\,x} = \log\text{arc tang}\,x + C.$ 67) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x(a-x)}} = \text{arc cos}\,\frac{a-x}{a} + C.$

68) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax-a^2}} = \frac{2}{a}\,\text{arc tang}\sqrt{\frac{2x-a}{a}} + C.$ 69) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \text{arc tang}\,e^x + C.$

70) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \log(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C.$ 71) $\int \frac{x^3+4x^2+5}{x}dx = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5\log x$

72) $\int \frac{x^3-x^2+x+1}{x}dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + \log x + C.$

73) $\int \frac{2x^2\sqrt[3]{x} - 5x + 3x^2e^x - 4}{x^2}dx = \frac{3}{2}x\sqrt[3]{x} - 5\log x + 3e^x + \frac{4}{x} + C$

74) $\int \frac{x-(1+x^4)[\sec^2 x - \sqrt{x}]}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\,\text{arctg}\,x^2 - \text{tang}\,x + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C.$

75) $\int \frac{(1-x^2)^2dx}{x} = \log x - x^2 + \frac{1}{4}x^4 + C.$ 76) $\int \frac{1-x}{1+x}dx = 2\log(1+x) - x + C.$

77) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}} = \frac{2}{3a}\left[(x+a)^{3/2} - x^{3/2}\right] + C.$

78) $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\log\frac{x-1}{x+1} + C.$ 79) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a} + C.$

80) $\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin^2 x}{4} + C.$ 81) $\int \text{tang}^2 x dx = \text{tang}\,x - x + C.$

82) $\int \sin ax\cos bx dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(a+b)x}{a+b} + \frac{\cos(a-b)x}{(a-b)}\right] + C.$

83) $\int \sin ax\sin bx\,dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(a+b)x}{a+b} - \frac{\sin(a-b)x}{a-b}\right] + C.$

84) $\int \cos ax\cos bx\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(a+b)x}{a+b} + \frac{\sin(a-b)x}{a-b}\right] + C.$

85) $\int \cos^3 x dx = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$ 86) $\int \sin^3 x dx = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C.$

87) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \operatorname{tang} x - \operatorname{cotg} x + C.$ 88) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$

89) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx = 2x - \operatorname{tang} x + C.$ 90) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} dx = -2x - \operatorname{cotg} x + C.$

91) $\int \frac{\cos 3x}{\cos^3 x} dx = 4x - 3\operatorname{tang} x + C.$ 92) $\int \frac{\sin 3x}{\cos x} dx = 2\sin^2 x + \log\cos x + C.$

93) $\int x\sqrt{1+x}\, dx = \frac{2}{5} x(1+x)^{3/2} - \frac{4}{15}(1+x)^{5/2} + C.$

94) $\int x \cos ax dx = \frac{x \sin ax}{a} + \frac{\cos ax}{a^2} + C.$ 95) $\int x e^{-x} dx = -(x+1)e^{-x} + C.$

96) $\int x e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}\left(x - \frac{1}{a}\right) + C.$ 97) $\int x \operatorname{tang}^2 x dx = x \operatorname{tang} x + \log\cos x - \frac{1}{2} x^2 + C.$

98) $\int \frac{x dx}{\cos^2 x} = x \operatorname{tang} x + \log\cos x + C.$ 99) $\int \frac{x dx}{\sin^2 x} = -x \operatorname{cotg} x + \log\sin x + C.$

100) $\int x^m \log x dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left(\log x - \frac{1}{m+1}\right) + C.$

101) $\int \frac{x \arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}} = x - \sqrt{1-x^2}\arcsin x + C.$

102) $\int \frac{\arcsin x \,.\, dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \log\sqrt{1-x^2} + C.$

103) $\int \sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{1}{2}\log(x+\sqrt{1+x^2}).$

104) $\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C.$

105) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(a-x)}} = 2\arcsin\sqrt{\frac{x}{a}} + C.$ 106) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(a-bx)}} = \frac{2}{\sqrt{b}}\arcsin\sqrt{\frac{bx}{a}} + C.$

107) $\int \frac{dx}{x+x^3} = \frac{1}{2}\log\frac{x^2}{1+x^2} + C.$ 108) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{4}\log\frac{\sqrt{1+x^4}-1}{\sqrt{1+x^4}+1} + C.$

109) $\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b\sin^2 x} = \frac{1}{ab}\operatorname{arctang}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tang} x\right) + C.$

110) $\int \frac{\operatorname{tang} x\, dx}{a\cos^2 x + b\sin^2 x} = \frac{1}{2b}\log(a + b\operatorname{tg}^2 x) + C.$

Rozwiązania I. Wskazówki: 1) do 66) całkowanie bezpośrednie, lub za pomocą przekształcenia, względnie podstawienia 67) Podstawienie $a - x = z$. 68) $2ax - a^2 = z^2$. 69) $e^{x} = z$. 70) $\sqrt{a^2 + x^2} = z - x$. 71)—92) za pomocą rozkładania na dodajniki. 93)—104) całkowanie przez części. 105) Podstawienie $x = a\sin^2\varphi$. 106) $x = \frac{a}{b}\sin^2\varphi$. 107) Podst. $x^2 = z$ i rozkładanie na dodajniki. 108. $\sqrt{1+x^4} = \frac{1}{z}$. 109. $\operatorname{tang} x = z$. 110) $\operatorname{tang} x = \sqrt{z}$.

Literatura. L. Euler. Institutiones calculi integralis, Petropolis 1768—1770. w niem. tłumacz.: Vollständige Anleitung zur Integralrechnung, übersetzt von Salamon, Wien 1830. C. J. Gerhardt. Die Entdeckung der höheren Analysis. Halle 1855. W. Folkierski. Zasady rachunku całkowego. Paryż 1873. O. Schlömilch. Compendium der höheren Analysis. 2 Bde. 4. Aufl. Braunschweig 1895.

Tematy do rozprawek naukowych:

1. Historya odkryć analizy wyższej.
2. Warunki różniczkowalności funkcyi i przykłady funkcyj nieróżniczkowalnych.
3. Metody całkowania różniczek.

Wykład II.

Całki funkcyj algebraicznych, wymiernych.

1. Całki funkcyj algebraicznych, wymiernych, całkowitych. Funkcya algebraiczna, wymierna, całkowita n-go stopnia:

$$G(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

ma całkę nieokreśloną, kształtu:

$$\int G(x)dx=\frac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_1}{n}x^n+\frac{a_2}{n-1}x^{n-1}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{2}x^2+a_nx+C, \qquad (1)$$

która jest funkcyą algebraiczną, wymierną, całkowitą $(n+1)$-go stopnia, a zatem: *Funkcye algebraiczne, wymierne, całkowite są zawsze całkowalne, a ich funkcye pierwotne są również funkcyami wymiernemi, całkowitemi, stopnia o jeden wyższego.*

n. p. $\int(x^3-2x^2+8x-1)\,dx=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{8}{2}x^2-x+C.$

2. Całki funkcyj algebraicznych, wymiernych, ułamkowych. Funkcya algebraiczna, wymierna, ułamkowa przedstawia się w postaci ilorazu dwóch funkcyj wymiernych, całkowitych:

$$R(x)=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n}=\frac{G_m(x)}{G_n(x)}$$

i jest, albo niewłaściwą, gdy $m\geq n$, albo właściwą, gdy $m<n$. Funkcya ułamkowa niewłaściwa, w której licznik jest m-go, a mianownik n-go stopnia, przyczem $(m\geq n)$ da się, za pomocą zwykłego dzielenia, rozłożyć na funkcyę całkowitą, wymierną $(m-n)$-go stopnia i na funkcyę ułamkową właściwą, której licznik będzie najwyżej $(n-1)$-go stopnia, a więc da się przedstawić w postaci:

$$R(x)=G(x)+\frac{G_{n-1}(x)}{G_n(x)}.$$

Całka funkcyi ułamkowej, niewłaściwej składa się więc z całki funkcyi wymiernej, całkowitej, która jest znowu funkcyą wymierną, całkowitą i z całki funkcyi ułamkowej, właściwej, według wzoru:

$$\int R(x)\,dx=\int G(x)\,dx+\int\frac{G_{n-1}(x)}{G_n(x)}\,dx \qquad (2)$$

3. Przykład. $\int\frac{x^3-2x^2-7x+17}{x^2-5x+6}\,dx=?$

Mamy tu: $(x^3-2x^2-7x+17):(x^2-5x+6)=x+3+\frac{2x-1}{x^2-5x+6}$,

zatem: $$\int\frac{x^3-2x^2-7x+17}{x^2-5x+6}\,dx=\int\left(x+3+\frac{2x-1}{x^2-5x+6}\right)dx,$$

więc:
$$\int \frac{x^3-2x^2-7x+17}{x^2-5x+6}dx=\frac{1}{2}x^2+3x+\int\frac{2x-1}{x^2-5x+6}dx+C.$$

4. Całki funkcyj ułamkowych, właściwych. Funkcya ułamkowa, właściwa $\frac{G_{n-1}(x)}{G_n(x)}$ da się, jak wiemy z wykładu XLI. Tom I. str. 565., rozłożyć na ułamki proste, kształtu:
$$\frac{A}{x-a},\ \frac{A}{(x-a)^r},\ \frac{Ax+B}{x^2+px+q},\ \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^r},$$
względnie, kształtu:
$$\frac{A}{ax+b},\ \frac{A}{(ax+b)^r},\ \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c},\ \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^r}.$$

Spółczynniki A, B, są tu pewnemi liczbami stałemi, które możemy zawsze wyznaczyć, skoro mianownik $G_n(x)$ danej funkcyi ułamkowej, właściwej, jest rozłożony na czynniki stopnia pierwszego, lub drugiego, albo na potęgi czynników stopnia pierwszego, lub drugiego, w których spółczynniki a, b, c są wiadomemi liczbami stałemi.

Z tego wynika, że całka wszelkiej funkcyi ułamkowej, właściwej da się ostatecznie rozłożyć na całki ułamków prostych o spółczynnikach rzeczywistych, kształtu:
$$\int\frac{Adx}{x-a},\ \int\frac{Adx}{(x-a)^r},\ \int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx,\ \int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^r}dx,$$
względnie, na całki kształtu:
$$\int\frac{Adx}{ax+b},\ \int\frac{Adx}{(ax+b)^r},\ \int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx,\ \int\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^r}dx.$$

Dopuszczając przy rozkładzie funkcyi ułamkowej na ułamki proste także spółczynniki urojone i opierając się na twierdzeniu, że wszelka funkcya całkowita n-go stopnia da się rozłożyć na czynniki stopnia pierwszego, względnie ich potęgi, możemy wnosić, że wszelka funkcya ułamkowa da się rozłożyć na ułamki proste, których mianownikami są funkcye całkowite stopnia pierwszego, lub ich potęgi, a więc na dwa rodzaje ułamków prostych kształtu:
$$\frac{A_1}{x-a},\ \frac{A_r}{(x-a)^r}\ \text{względnie:}\ \frac{A_1}{ax+b},\ \frac{A_r}{(ax+b)^r},$$
w których spółczynniki A_1, A_r, a, a, b, są wiadomemi stałemi liczbami, rzeczywistemi, lub urojonemi, względnie zespolonemi.

Na bezpośrednie wyznaczenie spółczynnika A wyrazu $\frac{A}{x-a}$ rozwinięcia funkcyi $\frac{G(x)}{G_n(x)}$, odpowiadającego czynnikowi $(x-a)$ mianownika $G_n(x)$, mamy, na mocy T. I. art. 10 str. 568, wzór:
$$A=\frac{G(x)}{G'_n(x)}\Big/_{x=a}=\frac{G(a)}{G'_n(a)},$$
a na wyznaczenie spółczynników $A_s (s=1, 2, \dots r)$, wyrazów $\frac{A_s}{(x-a)^s}$ rozwinięcia funkcyi $\frac{G(x)}{G_n(x)}$, odpowiadających czynnikowi $(x-a)^r$ mianownika:
$$G_n(x)=(x-a)^r\psi(x)$$
mamy znowu, na mocy tegoż art., T. I. str. 569., wzory:

$$A_r = \frac{G(x)}{\psi(x)}\Big/_{x=a} = \frac{G(a)}{\psi(a)} = \Psi(a), \quad A_{r-1} = \Psi'(a),$$

$$A_{r-2} = \frac{\Psi''(a)}{2!}, \ldots, \; A_1 = \frac{\Psi^{(r-1)}(a)}{(r-1)!}.$$

Wyznaczając całki takich ułamków prostych, otrzymujemy, w pierwszym przypadku:

$$\int \frac{Adx}{x-a} = A \int \frac{dx}{x-a} = A \log(x-a),$$

ogólnie:

$$\int \frac{Adx}{ax+b} = \frac{A}{a} \int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{A}{a} \log(ax+b),$$

a więc:

$$\int \frac{Adx}{x-a} = A \log(x-a), \text{ ogólnie: } \int \frac{Adx}{ax+b} = \frac{A}{a} \log(ax+b), \tag{3}$$

czyli całkę, w postaci funkcyi logarytmicznej, w drugim przypadku zaś:

$$\int \frac{Adx}{(x-a)^r} = A \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^r} = A \int (x-a)^{-r} d(x-a) = -\frac{A}{(r-1)(x-a)^{r-1}},$$

$$\int \frac{Adx}{(ax+b)^r} = \frac{A}{a} \int \frac{d(ax+b)}{(ax+b)^r} = \frac{A}{a} \frac{(ax+b)^{-r+1}}{-r+1} = -\frac{A}{a(r-1)(ax+b)^{r-1}},$$

a więc:

$$\int \frac{Adx}{(x-a)^r} = -\frac{A}{(r-1)(x-a)^{r-1}}, \text{ ogólnie } \int \frac{Adx}{(ax+b)^r} = -\frac{A}{a(r-1)(ax+b)^{r-1}} \tag{4}$$

czyli całkę w postaci funkcyi wymiernej, ułamkowej.

Mamy więc twierdzenie:

Funkcye algebraiczne, wymierne, ułamkowe są zawsze całkowalne, a ich całki składają się z funkcyj algebraicznych, wymiernych i z funkcyj logarytmicznych.

5. Mając więc wyznaczyć (art. 3.) całkę: $\int \frac{2x-1}{x^2-5x+6} dx$, możemy najpierw, ze względu na to, że $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, daną funkcyę ułamkową rozłożyć na ułamki proste:

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6} = \frac{2x-1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2},$$

przyczem, na wyznaczenie spółczynników A i B, otrzymujemy tożsamość:

$$2x-1 = A(x-2) + B(x-3), \text{ z której wypływa: } A=5, \; B=-3.$$

Jest zatem: $\frac{2x-1}{x^2-5x+6} = \frac{5}{x-3} - \frac{3}{x-2}$, przeto:

$$\int \frac{2x-1}{x^2-5x+6} dx = \int \left(\frac{5}{x-3} - \frac{3}{x-2}\right) dx = 5\log(x-3) - 3\log(x-2).$$

czyli:

$$\int \frac{2x-1}{x^2-5x+6} dx = \log \frac{(x-3)^5}{(x-2)^3} + C,$$

a więc:

$$\int \frac{x^3-2x^2-7x+17}{x^2-5x+6} dx = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \log \frac{(x-3)^5}{(x-2)^3} + C.$$

6. Przykłady:

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = ?$$

Mamy tu:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1},$$

stąd tożsamość: $\quad 1 = A(x-1) + B(x+1),$

z której wypływa: $\quad 0 = A + B, \quad 1 = -A + B,$

tąd: $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$, lub wprost: $A = \frac{1}{2x}\Big/_{x=-1} = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2x}\Big/_{x=+1} = \frac{1}{2}$.

Jest zatem:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right],$$

ięc: $$\int\frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}[\log(x-1) - \log(x+1)] = \frac{1}{2}\log\frac{x-1}{x+1},$$

li: $$\int\frac{dx}{x^2-1} = \log\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C.$$

2) $$\int\frac{3x^2+x+2}{x^3-x^2-x+1}dx = \int\frac{3x^2+x+2}{(x+1)(x-1)^2}dx = ?$$

Mamy tu:

$$\frac{3x^2+x+2}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2},$$

tem tożsamość: $$3x^2 + x + 2 = A(x-1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x+1),$$

ąd: $$3 = A + B,\ 1 = -2A + C,\ 2 = A - B + C,$$

yli: $$A = 1,\quad B = 2,\quad C = 3.$$

b wprost: $$A = \frac{3x^2+x+2}{3x^2-2x-1}\Big/_{x=-1} = 1,\quad C = \frac{3x^2+x+2}{x+1}\Big/_{x=1} = \Psi(x)\Big/_{x=1} = 3,$$

$$B = \Psi'(x)/_{x=1} = \frac{(x+1)(6x+1)-(3x^2+x+2)}{(x+1)^2}\Big/_{x=1} = 2.$$

Jest zatem:

$$\frac{3x^2+x+2}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2},$$

rzeto: $$\int\frac{3x^2+x+2}{(x+1)(x-1)^2}dx = \log(x+1) + 2\log(x-1) - \frac{3}{x-1},$$

a więc: $$\int\frac{3x^2+x+2}{(x+1)(x-1)^2}dx = \log[(x+1)(x-1)^2] - \frac{3}{x-1} + C,$$

czyli: $$\int\frac{3x^2+x+2}{x^3-x^2-x+1}dx = \log(x^3-x^2-x+1) - \frac{3}{x-1} + C.$$

7. **Uwaga.** Dopuszczając spółczynniki urojone, możemy n. p. całkę zasadniczą:

$$\int\frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arc\,tang} x + C$$

przedstawić w postaci funkcyi logarytmicznej.

Mamy tu:

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{(x+i)(x-i)} = \frac{A}{x+i} + \frac{B}{x-i}$$

$$1 = A(x-i) + B(x+i),$$

$$A = -\frac{1}{2i} = \frac{1}{2}i,\quad B = \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}i,$$

możemy zatem położyć:

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2}i\left[\frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i}\right],$$

skąd otrzymujemy:

$$\int\frac{dx}{x^2+1} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\log\frac{x+\sqrt{-1}}{x-\sqrt{-1}} + C.$$

W sprawie związku funkcyj logarytmicznych z cyklometrycznemi por. T. I. dział XLIV.

8. **Całki właściwych funkcyj ułamkowych, których mianowniki są wyrażeniami drugiego stopnia.** Mając wyznaczyć całkę kształtu: $\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$, której mianownik x^2+px+q nie da się rozłożyć na dwa czynniki stopnia

pierwszego o rzeczywistych spółczynnikach, możemy ten mianownik przedstawić, jako sumę kwadratów. Otrzymujemy bowiem:

$$x^2+px+q=\left(x^2+px+\frac{p^2}{4}\right)+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right),$$

zatem:

$$x^2+px+q=(x-\alpha)^2+\beta^2,$$

gdzie:

$$\alpha=-\frac{p}{2},\ \beta=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}.$$

Wobec tego możemy daną całkę sprowadzić do postaci:

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx.$$

Rozkładając funkcyę, stojącą pod znakiem całkowym, na dwa dodajniki, według wzoru:

$$\frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}=\frac{A(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}+\frac{A\alpha+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2},$$

rozłożymy daną całkę na dwie całki w postaci:

$$\int\frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx=\int\frac{A(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx+\int\frac{A\alpha+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx,$$

a że:

$$\int\frac{A(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx=\frac{A}{2}\int\frac{d[(x-\alpha)^2+\beta^2]}{(x-\alpha)^2+\beta^2}=\frac{A}{2}\log[(x-\alpha)^2+\beta^2],$$

zaś:

$$\int\frac{A\alpha+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx=\frac{A\alpha+B}{\beta}\int\frac{d\left[\frac{x-\alpha}{\beta}\right]}{\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1}=\frac{A\alpha+B}{\beta}\operatorname{arc\,tang}\frac{x-\alpha}{\beta},$$

przeto otrzymujemy:

$$\int\frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx=\frac{A}{2}\log[(x-\alpha)^2+\beta^2]+\frac{A\alpha+B}{\beta}\operatorname{arc\,tang}\frac{x-\alpha}{\beta}\tag{5}$$

czyli:

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\log(x^2+px+q)-\frac{Ap-2B}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctang}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\tag{6}$$

Całki funkcyj ułamkowych, właściwych, w których mianownikami są funkcye drugiego stopnia, nie dające się rozłożyć na czynniki rzeczywiste, składają się więc z funkcyj logarytmicznych i z funkcyj cyklometrycznych.

9. Przykłady:

1) $\int\frac{x^2+2x-1}{(x-1)(x^2+1)}dx$?

Mamy tu:

$$\frac{x^2+2x-1}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x^2+1},$$

zatem:

$$\int\frac{x^2+2x-1}{(x-1)(x^2+1)}dx=\log(x-1)+2\operatorname{arctang}x.$$

2) $\int\frac{x^3dx}{(x^2+1)(x^2-2x+10)}=?$

Mamy tu: (patrz T. I. str. 570).

$$\frac{x^3}{(x^2+1)(x^2-2x+10)}=-\frac{1}{85}\frac{9x-2}{x^2+1}+\frac{1}{85}\frac{94x-20}{x^2-2x+10},$$

zatem:
$$\int\frac{x^3dx}{(x^2+1)(x^2-2x+10)}=-\frac{9}{85}\log\sqrt{x^2+1}+\frac{2}{85}\operatorname{arctang}x+$$
$$+\frac{94}{85}\log\sqrt{x^2-2x+10}+\frac{74}{255}\operatorname{arctang}\frac{x-1}{3}+C.$$

10. **Mając ogólnie wyznaczyć całkę, kształtu:**
$$\int\frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c},$$
możemy postąpić w sposób następujący:

Połóżmy: $ax^2+bx+c=X$, a więc $(2ax+b)\,dx=dX$,

natenczas, mając na uwadze, że:
$$(Ax+B)\,dx=\frac{1}{2a}[A(2ax+b)+(2aB-Ab)]\,dx=\frac{A}{2a}\,dX+\frac{2aB-Ab}{2a}\,dx,$$
otrzymamy:
$$\int\frac{(Ax+B)\,dx}{ax^2+bx+c}=\frac{A}{2a}\int\frac{dX}{X}+\frac{2aB-Ab}{2a}\int\frac{dx}{X},$$
a więc:
$$\int\frac{(Ax+B)\,dx}{ax^2+bx+c}=\frac{A}{2a}\log X+\frac{2aB-Ab}{2a}\int\frac{dx}{X}. \qquad (7)$$

Pozostaje nam zatem wyznaczyć jeszcze całkę, kształtu:
$$\int\frac{dx}{X}=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Uwzględniając, że:
$$ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)],$$
przyjmijmy, że trójmian ax^2+bx+c nie da się rozłożyć na dwa czynniki stopnia pierwszego o rzeczywistych spółczynnikach, i połóżmy: $4ac-b^2=\Delta>0$, natenczas otrzymamy:
$$ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}[(2ax+b)^2+\Delta]=\frac{\Delta}{4a}\left[\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2+1\right],$$
zatem:
$$\int\frac{dx}{X}=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{4a}{\Delta}\int\frac{dx}{\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2+1}.$$

Kładąc:
$$\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}=t,\text{ a więc } x=\frac{t\sqrt{\Delta}-b}{2a},\quad dx=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}dt,\quad X=\frac{\Delta}{4a}(t^2+1),$$
otrzymujemy:
$$\int\frac{dx}{X}=\frac{4a}{\Delta}\cdot\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{2}{\sqrt{\Delta}}\operatorname{arc\,tang}t,$$
a więc:
$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arc\,tang}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \qquad (8)$$

Wobec tego, na mocy wzoru (7), otrzymujemy:
$$\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\frac{A}{2a}\log(ax^2+bx+c)+\frac{2aB-Ab}{a\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arc\,tang}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}.$$

11. Jeżeli trójmian ax^2+bx+c da się rozłożyć na czynniki stopnia pierwszego o spółczynnikach rzeczywistych, wówczas mamy: albo 1) $\Delta=4ac-b^2<0$, albo 2) $\Delta=4ac-b^2=0$.

W przypadku $\Delta<0$, mamy $-\Delta=b^2-4ac>0$,
$$X=ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}[(2ax+b)^2-(b^2-4ac)]=\frac{b^2-4ac}{4a}\left[\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)^2-1\right],$$

$$\int\frac{dx}{X}=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{4a}{b^2-4ac}\int\frac{dx}{\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)^2-1}=\frac{4a}{-\Delta}\int\frac{dx}{\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2-1}.$$

Kładąc:

$$\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}=\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}=t,$$

a więc:

$$x=\frac{t\sqrt{-\Delta}-b}{2a},\quad dx=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}dt,\quad ax^2+bx+c=\frac{-\Delta}{4a}(t^2-1),$$

otrzymujemy:

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\int\frac{dt}{t^2-1},$$

a że:

$$\frac{1}{t^2-1}=\frac{1}{(t-1)(t+1)}=\frac{1/2}{t-1}-\frac{1/2}{t+1},$$

więc:

$$\int\frac{dt}{t^2-1}=\frac{1}{2}\left[\int\frac{dt}{t-1}-\int\frac{dt}{t+1}\right]=\frac{1}{2}\log\frac{t-1}{t+1},$$

zatem otrzymujemy:

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\log\frac{t-1}{t+1}=\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\log\frac{2ax+b-\sqrt{-\Delta}}{2ax+b+\sqrt{-\Delta}},$$

czyli:

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\log\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}. \tag{9}$$

W przypadku $\Delta=0$, mamy $b^2=4ac$, $ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}(2ax+b)^2$, zatem:

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=4a\int\frac{dx}{(2ax+b)^2}=2\int\frac{d(2ax+b)}{(2ax+b)^2}=\frac{-2}{2ax+b},$$

czyli:

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{-2}{2ax+b},\ \text{gdy } b^2=4ac. \tag{10}$$

12. Z wzoru (7) otrzymujemy zatem, na podstawie wzorów (8), (9), (10), następujące wzory całkowe, zawsze w postaci rzeczywistej:

1) gdy $\Delta=4ac-b^2>0$,

$$\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\frac{A}{2a}\log(ax^2+bx+c)+\frac{2aB-Ab}{a\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arc\,tang}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+C. \tag{11}$$

2) gdy $\Delta=4ac-b^2<0$,

$$\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\frac{A}{2a}\log(ax^2+bx+c)+\frac{2aB-Ab}{2a\sqrt{b^2-4ac}}\log\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}+C. \tag{12}$$

3) gdy $\Delta=4ac-b^2=0$,

$$\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\frac{A}{2a}\log(ax^2+bx+c)-\frac{2aB-Ab}{a(2ax+b)}+C. \tag{13}$$

13. Przykłady. Według powyższych wzorów, otrzymujemy n. p. wprost:

$$\int\frac{(x+2)\,dx}{x^2+x+1}=\frac{1}{2}\log(x^2+x+1)+\sqrt{3}\operatorname{arc\,tang}\frac{2x+1}{\sqrt{3}},$$

$$\int\frac{2x-1}{x^2-3x+2}dx=\log(x^2-3x+2)+2\log\frac{x-2}{x-1}+C=\log\frac{(x-2)^3}{x-1}+C,$$

$$\int\frac{(x-2)\,dx}{x^2+2x+1}=\frac{1}{2}\log(x^2+2x+1)+\frac{6}{x+1}+C=\log(x+1)+\frac{6}{x+1}+C.$$

14. Całki funkcyj ułamkowych, których mianowniki są potęgami funkcyj drugiego stopnia. Mając wyznaczyć całkę, kształtu:

$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{(x^2+px+q)^r},$$

w której trójmian x^2+px+q nie da się rozłożyć na czynniki stopnia pierwszego o spółczynnikach rzeczywistych, a więc da się przedstawić, jako suma kwadratów, w postaci:

$$x^2+px+q=(x-\alpha)^2+\beta^2,$$

gdzie:

$$\alpha=-\frac{p}{2},\quad \beta=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}},$$

otrzymujemy:

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^r}\,dx=\int\frac{Ax+B}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^r}\,dx=\int\frac{A(x-\alpha)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^r}\,dx+\int\frac{A\alpha+B}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^r}\,dx.$$

Z otrzymanych dwu całek jest pierwsza:

$$\int\frac{A(x-\alpha)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^r}\,dx=\frac{A}{2}\int\frac{2(x-\alpha)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^r}=-\frac{A}{2}\cdot\frac{1}{(r-1)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{r-1}},$$

druga zaś da się przedstawić w postaci:

$$\int\frac{A\alpha+B}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^r}\,dx=\frac{A\alpha+B}{\beta^{2r}}\int\frac{dx}{\left[\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1\right]^r}=\frac{A\alpha+B}{\beta^{2r-1}}\int\frac{dt}{(t^2+1)^r},$$

gdzie

$$t=\frac{x-\alpha}{\beta}.$$

Pozostaje nam zatem znaleźć jeszcze całkę, kształtu:

$$J_r=\int\frac{dt}{(t^2+1)^r}.$$

Zastępując w liczniku czynnik 1 przez różnicę $(t^2+1)-t^2$, otrzymujemy:

$$\int\frac{dt}{(t^2+1)^r}=\int\frac{(t^2+1)-t^2}{(t^2+1)^r}\,dt=\int\frac{dt}{(t^2+1)^{r-1}}-\int\frac{t^2dt}{(t^2+1)^r}.$$

Stosując do wyznaczenia całki $\int\frac{t^2\,dt}{(t^2+1)^r}$ metodę całkowania przez części,

połóżmy	a zatem
$t=u$	$du=dt$
$\frac{tdt}{(t^2+1)^r}=dv$	$v=-\frac{1}{2(r-1)(t^2+1)^{r-1}}$.

otrzymamy:

$$\int\frac{t^2dt}{(t^2+1)^r}=-\frac{t}{2(r-1)(t^2+1)^{r-1}}+\frac{1}{2r-2}\int\frac{dt}{(t^2+1)^{r-1}}.$$

Wobec tego będzie:

$$\int\frac{dt}{(t^2+1)^r}=\int\frac{dt}{(t^2+1)^{r-1}}+\frac{t}{2(r-1)(t^2+1)^{r-1}}-\frac{1}{2r-2}\int\frac{dt}{(t^2+1)^{r-1}},$$

skąd otrzymujemy wzór redukcyjny całki J_r w postaci:

$$\int\frac{dt}{(t^2+1)^r}=\frac{1}{2r-2}\cdot\frac{t}{(t^2+1)^{r-1}}+\frac{2r-3}{2r-2}\int\frac{dt}{(t^2+1)^{r-1}},\qquad(14)$$

czyli:
$$J_r = \frac{1}{2r-2}\cdot\frac{t}{(t^2+1)^{r-1}} + \frac{2r-3}{2r-2} J_{r-1}.$$

Na podstawie tego wzoru, otrzymujemy kolejno:
$$J_{r-1} = \frac{1}{2r-4}\cdot\frac{t}{(t^2+1)^{r-2}} + \frac{2r-5}{2r-4} J_{r-2}$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$J_2 = \frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2} J_1,$$

a że:
$$J_1 = \int\frac{dt}{t^2+1} = \text{arctang}\, t,$$

przeto, pomnożywszy powyższe równania, kolejno przez:
$$1,\ \frac{2r-3}{2r-2},\ \frac{(2r-3)(2r-5)}{(2r-2)(2r-4)},\dots\ \frac{(2r-3)(2r-5)\dots 3}{(2r-2)(2r-4)\dots 4},$$
i dodawszy je następnie, otrzymujemy wzór bezpośredni:
$$\int\frac{dt}{(t^2+1)^r} = \frac{t}{2r-2}\left[\frac{1}{(t^2+1)^{r-1}} + \frac{2r-3}{2r-4}\cdot\frac{1}{(t^2+1)^{r-2}} + \dots + \right.$$
$$\left. + \frac{(2r-3)(2r-5)\dots 3}{(2r-4)(2r-6)\dots 2}\cdot\frac{1}{t^2+1}\right] + \frac{(2r-3)(2r-5)\dots 3}{(2r-2)(2r-4)\dots 2}\text{arc tang}\, t,$$
a zatem:

Całki prostych funkcyj ułamkowych, w których mianowniki
gami funkcyj całkowitych stopnia drugiego, składają się z funkcyj
nych i funkcyj cyklometrycznych.

15. Przykład.
$$\int\frac{(4x+1)\,dx}{(x^2+x+1)^2} = 2\int\frac{(2x+1)\,dx}{(x^2+x+1)^2} - \int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = -\frac{2}{x^2+x+1} - \int\frac{dx}{(x^2+x}$$
Mamy tu:
$$\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{8\sqrt{3}}{9}\int\frac{dt}{(t^2+1)^2},$$

gdzie
$$x+\frac{1}{2} = \frac{t\sqrt{3}}{2},\ \text{czyli}\ t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

a że:
$$\int\frac{dt}{(t^2+1)^2} = \int\frac{dt}{t^2+1} - \int\frac{t^2\,dt}{(t^2+1)^2} = \int\frac{dt}{t^2+1} + \frac{t}{2(t^2+1)} - \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1} =$$
$$= \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\text{arc tang}\, t,$$

więc:
$$\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = -\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4\sqrt{3}}{9}\ \text{arctg}\ \frac{2x+1}{\sqrt{3}},$$

a zatem:
$$\int\frac{(4x+1)\,dx}{(x^2+x+1)^2} = -\frac{2x+7}{3(x^2+x+1)} - \frac{4\sqrt{3}}{9}\text{arctang}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

16. Mając ogólnie wyznaczyć całkę, kształtu:
$$\int\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^r}dx,$$
możemy postępować w sposób następujący:

Połóżmy: $ax^2+bx+c = X$, a więc: $(2ax+b)dx = dX$, natenczas, ze względu
$$(Ax+B)\,dx = \frac{1}{2a}\,[A(2ax+b)+(2aB-Ab)]\,dx = \frac{A}{2a}dX + \frac{2aB-Ab}{2a}\,dx,$$
otrzymujemy:

$$\int \frac{Ax+B}{X^r}dx = \frac{A}{2a}\int\frac{dX}{X^r} + \frac{2aB-Ab}{2a}\int\frac{dx}{X^r},$$

czyli:

$$\int \frac{Ax+B}{X^r}dx = -\frac{A}{2a(r-1)}\cdot\frac{1}{X^{r-1}} + \frac{2aB-Ab}{2a}\int\frac{dx}{X^r} \tag{15}$$

Celem wyznaczenia całki: $\int\frac{dx}{X^r}$ użyjmy metody całkowania przez części.

W tym celu połóżmy: a zatem:

$du = dx$	$u = x$
$v = \frac{1}{X^r}$	$dv = -r.X^{-r-1}dX,$

i otrzymamy:

$$\int\frac{dx}{X^r} = \frac{x}{X^r} + r\int xX^{-r-1}\,dX = \frac{x}{X^r} + r\int\frac{xdX}{X^{r+1}},$$

a że:

$$dX = (2ax+b)\,dx,$$

a więc: $xdX = (2ax^2+bx)dx = [2ax^2+2bx+2c-(bx+2c)]dx = [2X-(bx+2c)]dx,$

przeto będzie:

$$\int\frac{dx}{X^r} = \frac{x}{X^r} + r\int\frac{2X-(bx+2c)}{X^{r+1}}dx = \frac{x}{X^r} + 2r\int\frac{dx}{X^r} - r\int\frac{bx+2c}{X^{r+1}}dx,$$

a zatem:

$$\int\frac{bx+2c}{X^{r+1}}dx = \frac{1}{r}\frac{x}{X^r} + \frac{2r-1}{r}\int\frac{dx}{X^r},$$

skąd, zastępując $r+1$ przez r, dostajemy wzór:

$$\int\frac{bx+2c}{X^r}dx = \frac{1}{r-1}\cdot\frac{x}{X^{r-1}} + \frac{2r-3}{r-1}\int\frac{dx}{X^{r-1}}.$$

Na mocy wzoru (15), mamy jednakże:

$$\int\frac{bx+2c}{X^r}dx = -\frac{b}{2a(r-1)}\cdot\frac{1}{X^{r-1}} + \frac{4ac-b^2}{2a}\int\frac{dx}{X^r},$$

wobec tego otrzymujemy równość:

$$-\frac{b}{2a(r-1)}\cdot\frac{1}{X^{r-1}} + \frac{4ac-b^2}{2a}\int\frac{dx}{X^r} = \frac{1}{r-1}\cdot\frac{x}{X^{r-1}} + \frac{2r-3}{r-1}\int\frac{dx}{X^{r-1}},$$

czyli:

$$\frac{4ac-b^2}{2a}\int\frac{dx}{X^r} = \frac{2ax+b}{2a(r-1)X^{r-1}} + \frac{2r-3}{r-1}\int\frac{dx}{X^{r-1}},$$

z której, kładąc $4ac-b^2=\Delta$, otrzymujemy wzór redukcyjny całki $J_r = \int\frac{dx}{X^r}$ w postaci:

$$\int\frac{dx}{X^r} = \frac{2ax+b}{(r-1)\Delta X^{r-1}} + \frac{2(2r-3)a}{(r-1)\Delta}\int\frac{dx}{X^{r-1}}, \tag{16}$$

czyli:

$$\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^r} = \frac{2ax+b}{(r-1)(4ac-b^2)}\cdot\frac{1}{(ax^2+bx+c)^{r-1}} + \frac{2(2r-3)a}{(r-1)(4ac-b^2)}\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{r-1}} \tag{16'}$$

Podstawiając we wzorze (16) za r kolejno wartości $r, r-1, r-2, \dots 3, 2$, otrzymamy szereg wzorów:

$$J_r = \int\frac{dx}{X^r} = \frac{2ax+b}{(r-1)\Delta X^{r-1}} + \frac{2(2r-3)a}{(r-1)\Delta}\int\frac{dx}{X^{r-1}},$$

$$J_{r-1} = \int\frac{dx}{X^{r-1}} = \frac{2ax+b}{(r-2)\Delta X^{r-2}} + \frac{2(2r-5)a}{(r-2)\Delta}\int\frac{dx}{X^{r-2}},$$

$$J_{r-2} = \int\frac{dx}{X^{r-2}} = \frac{2ax+b}{(r-3)\Delta X^{r-3}} + \frac{2(2r-7)}{(r-3)\Delta}\int\frac{dx}{X^{r-3}}$$

. . . .

$$J_3 = \int\frac{dx}{X^3} = \frac{2ax+b}{2\Delta.X^2} + \frac{2.3.a}{2\Delta}\int\frac{dx}{X^2}$$

$$J_2 = \int\frac{dx}{X^2} = \frac{2ax+b}{\Delta.X} + \frac{2.1.a}{\Delta}\int\frac{dx}{X},$$

które całkę J_r sprowadzają ostatecznie do całki:

$$J_1 = \int \frac{dx}{X} = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c},$$

wyznaczonej w art. 10. a przedstawiającej się w przypadku $\Delta = 4ac - b^2 > 0$, w postaci:

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \operatorname{arctang} \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} + C.$$

17. Całkowalność funkcyj algebraicznych wymiernych. Rozkładanie funkcyj algebraicznych, wymiernych, ułamkowych na dodajniki, t. j. na funkcye całkowite, wymierne i na ułamki częściowe, względnie ułamki proste, których całki nieokreślone, jak powyżej wykazaliśmy, dadzą się zawsze przedstawić za pomocą funkcyj wymiernych, całkowitych, lub ułamkowych i za pomocą funkcyj logarytmicznych, względnie cyklometrycznych, prowadzi do ważnego wniosku, że wszelka funkcya algebraiczna, wymierna jest zawsze całkowalna, a jej całka składa się z funkcyj algebraicznych, wymiernych i logarytmicznych, względnie cyklometrycznych.

Celem wyznaczenia tych funkcyj, potrzeba przedewszystkiem daną funkcyę, jeżeli jest funkcyą ułamkową, niewłaściwą, zamienić na funkcyę całkowitą i na funkcyę ułamkową, właściwą, a następnie przystąpić do rozkładania funkcyi ułamkowej, właściwej na ułamki proste.

W tym celu należy mianownik otrzymanej funkcyi ułamkowej, która jest funkcyą całkowitą, wymierną pewnego stopnia, rozłożyć na czynniki stopnia pierwszego, lub drugiego, względnie na ich potęgi.

Rozkładanie funkcyi całkowitej wymiernej n-go stepnia o liczebnych spółczynnikach na czynniki pierwszego, lub drugiego stopnia wymaga w ogólności rozwiązania liczebnego równania n-go stopnia, co jest teoretycznie możliwe, w wykonaniu jednak połączone jest niejednokrotnie z poważnemi trudnościami rachunkowemi. Ogólny sposób postępowania, jaki tu jest wskazany, polega na kolejnem wyszukaniu poszczególnych pierwiastków i zniżaniu stopnia równania w ten sposób, że się wielomian równania podzieli przez znaleziony czynnik pierwiastkowy. Wyznaczywszy poszczególne czynniki pierwiastkowe mianownika, możemy dopiero przystąpić do rozkładania danej funkcyi ułamkowej na ułamki częściowe, według metod poznanych w wykładzie XLI. Tomu I.

Całka danej funkcyi przedstawia się tedy, jako suma całek poszczególnych funkcyj częściowych, które w myśl art. poprzednich dadzą się zawsze wyrazić przez funkcye wymierne, logarytmiczne i cyklometryczne.

Ćwiczenia II.

Wyznaczyć i sprawdzić następujące całki:

1) $\int (a + bx)\,dx = ax + \frac{1}{2} bx^2 + C = \frac{1}{2b}(a + bx)^2 + C'.$

2) $\int (a + bx + cx^2)\,dx = ax + \frac{1}{2} bx^2 + \frac{1}{3} cx^3 + C.$

3) $\int (a + bx + cx^2 + dx^3)\,dx = ax + \frac{1}{2} bx^2 + \frac{1}{3} cx^3 + \frac{1}{4} dx^4 + C.$

4) $\int (7x^3 + 5x^2 - 3x + 5)\,dx = {}^7/_4\, x^4 + {}^5/_3\, x^3 - {}^3/_2\, x^2 + 5x + C.$

5) $\int (a + bx)^2\,dx = a^2x + abx^2 + {}^1/_3\, b^2x^3 + C = \frac{1}{3b}(a + bx)^3 + C'.$

6) $\int (2 + 5x)^2\,dx = 4x + 10x^2 + {}^{25}/_3\, x^3 + C = {}^1/_{15}\,(2 + 5x)^3 + C'.$

7) $\int(1-3x+2x^2)^2dx = x-3x^2+{}^{13}/_3\,x^3-3x^4+{}^4/_5\,x^5+C.$

8) $\int(1+x^2)(1+x)\,x\,dx = {}^1/_2\,x^2+{}^1/_3\,x^3+{}^1/_4\,x^4+{}^1/_5\,x^5+C.$

9) $\int\frac{(1+x^2)(1-x)}{x^2}dx = \frac{-x\log x^2+2x^2-x^3-2}{2x}+C.$

10) $\int\frac{x\,dx}{a+bx} = \frac{x}{b}-\frac{a}{b^2}\log(a+bx)+C.$ 11) $\int\frac{dx}{x(a+bx)} = \frac{1}{a}\log\frac{x}{a+bx}+C.$

12) $\int\frac{5x^3+1}{(x-1)(x-2)}dx = {}^5/_2\,x^2+15x-6\log(x-1)+41\log(x-2)+C.$

13) $\int\frac{dx}{(x+1)(2x+1)} = \log\frac{2x+1}{2(x+1)}+C.$ 14) $\int\frac{(3-2x)\,dx}{(x+1)(x-2)} = -\log\sqrt[3]{(x+1)^5(x-2)}+C.$

15) $\int\frac{x^4dx}{(x-1)^2(x+1)^2} = x-\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right\}+\frac{3}{4}\log\frac{x-1}{x+1}+C.$

16) $\int\frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\log\frac{x-a}{x-b}+C.$

17) $\int\frac{x\,dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{a}{a-b}\log(x-a)+\frac{b}{b-a}\log(x-b)+C.$

18) $$\int\frac{dx}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{1}{(a-b)(a-c)}\log(x-a)+\frac{1}{(b-a)(b-c)}\log(x-b)+ \\ +\frac{1}{(c-a)(c-b)}\log(x-c)+C.$$

19) $$\int\frac{x\,dx}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{a}{(a-b)(a-c)}\log(x-a)+\frac{b}{(b-a)(b-c)}\log(x-b)+ \\ +\frac{c}{(c-a)(c-b)}\log(x-c)+C.$$

20) $$\int\frac{dx}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)} = \sum_{r=1}^{r=n}\frac{\log(x-a_r)}{(a_r-a_1)(a_r-a_2)\ldots(a_r-a_{r-1})(a_r-a_{r+1})\ldots(a_r-a_n)}+C.$$

21) $$\int\frac{x^m\,dx}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)} = \sum_{r=1}^{r=n}\frac{a_r^m\log(x-a_r)}{(a_r-a_1)(a_r-a_2)\ldots(a_r-a_n)}+C.$$

22) $\int\frac{dx}{(x-a)(x-b)^2} = \frac{1}{(a-b)(x-b)}+\frac{1}{(a-b)^2}\log\frac{x-a}{x-b}+C.$

23) $\int\frac{x\,dx}{(x-a)(x-b)^2} = \frac{b}{(a-b)(x-b)}+\frac{a}{(a-b)^2}\log\frac{x-a}{x-b}+C.$

24) $\int\frac{x+1}{(x-1)^3}dx = -\frac{x}{(x-1)^2}+C.$ 25) $\int\frac{x^2+1}{(x-1)^4}dx = -\frac{1}{6}\frac{3x^2+1}{(x-1)^3}+C.$

26) $\int\frac{x\,dx}{(x+2)(x+3)^2} = -\frac{3}{x+3}+\log\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^2+C.$

27) $\int\frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+4)^2} = -\frac{5x+12}{x^2+6x+8}+\log\left(\frac{x+4}{x+2}\right)^2+C.$

28) $\int\frac{x^2dx}{(a+bx)^2} = \left(\frac{x^2}{b}-\frac{2a^2}{b^3}\right)\cdot\frac{1}{a+bx}-\frac{2a}{b^3}\log(a+bx)+C.$

29) $\int\frac{dx}{x^2(a+bx)^2} = -\left(\frac{1}{ax}+\frac{2b}{a^2}\right)\cdot\frac{1}{a+bx}+\frac{2b}{a^3}\log\frac{a+bx}{x}+C.$

30) $\int\frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctang}\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+C.$ 31) $\int\frac{dx}{a-bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}}\log\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}+C.$

32) $\int\frac{dx}{x^2-a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\log\frac{\sqrt{a}-x}{\sqrt{a}+x}+C = \frac{1}{\sqrt{-a}}\operatorname{arctang}\frac{x}{\sqrt{-a}}+C'.$

33) $\int\frac{dx}{x^2+a} = \frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arctang}\frac{x}{\sqrt{a}}+C = \frac{1}{2\sqrt{-a}}\log\frac{\sqrt{-a}-x}{\sqrt{-a}+x}+C'.$

34) $\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ arc tang } \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$

35) $\int \frac{dx}{x^2-6x+13} = \frac{1}{2} \text{ arc tang } \frac{x-3}{2} + C.$

36) $\int \frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{3}\left\{2 \text{ arc tang } \frac{x}{2} - \text{arc tang } x\right\} + C.$

37) $\int \frac{dx}{x(x+1)^2(x^2+x+1)} = \frac{1}{x+1} + \log \frac{\sqrt{x^4+x^3+x^2}}{(x+1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ arc tang } \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$

38) $\int \frac{dx}{x^3(x+1)^2(x-1)(x^2+1)} = \frac{2-2x+5x^2}{4x^2(x+1)} + \log \sqrt[8]{\frac{(x+1)^9(x-1)}{x^8(x^2+1)}} - \frac{1}{4} \text{ arc tang } x + C.$

39) $\int \frac{(2x^3-x^2+5x)dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x-3}{2(x^2+1)} + \log(x^2+1) - \frac{1}{2} \text{ arc tang } x + C.$

40) $\int \frac{x^5dx}{(x^2+1)^3} = \frac{4x^2+3}{4(x^2+1)^2} + \log\sqrt{x^2+1} + C.$

41) $\int \frac{(x^2-3x-2)\,dx}{(x+1)^2(x^2+x+1)^2} = \log \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} - \frac{11x^2+13x+13}{3(x+1)(x^2+x+1)} -$

$- \frac{25}{9}\sqrt{3} \text{ arctang } \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$

42) $\int \frac{(x^3-2x+1)dx}{x^3(x-2)(x^2+1)} = -\frac{5x^3-3x^2+3x-1}{4x^2(x^2+1)} + \frac{1}{40}\log \frac{x^{55}(x-2)}{(x^2+1)^{23}} - {}^{13}/_{10} \text{ arc tang} x + C.$

43) $\int \frac{3x^2-2x+1}{(2x+1)(x+1)^2}dx = {}^{11}/_{18} \log(2x+1) + \frac{6}{x+1} + \frac{52}{9}\log(x+1) + C.$

44) $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \text{ arc tang } \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$

45) $\int \frac{(3x^2-x+2)dx}{(x-1)(x^2+x+1)^2} = -\frac{3x+4}{3(x^2+x+1)} + \frac{2}{9}\log\frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1} - \frac{10}{3\sqrt{3}} \text{ arctang } \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$

46) $\int \frac{7xdx}{x^2+3x-18} = \frac{7}{3}\log(x-3) + \frac{14}{3}\log(x+6) + C.$

47) $\int \frac{24dx}{x^2+3x-18} = {}^{8}/_{3} \log \frac{x-3}{x+6} + C.$

48) $\int \frac{7x+24}{x^2+3x-18}dx = \log[(x-3)^5(x+6)^2] + C.$

49) $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^2} = \frac{2ax+b}{(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)} + \frac{4a}{(4ac-b^2)\sqrt{4ac-b^2}} \text{ arctang } \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C.$

50) $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^3} = \frac{2ax+b}{4ac-b^2} \cdot \frac{6a(ax^2+bx+c)+(4ac-b^2)}{2(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^2} +$

$+ \frac{12a^2}{(4ac-b^2)^2\sqrt{4ac-b^2}} \text{ arc tang } \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C.$

Rozwiązania II. Wskazówki do rozwiązania całek zawarte są w wykładzie.

Literatura. S. F. Lacroix. Traité de calcul differentiel et de calcul integral. Paris Tom. II. 1814. F. Minding. Lehrbuch der Differential und Integralrechnung. Berlin 1836. J. Hann Examples on the integral calculus. London 1850.

Tematy do rozprawek naukowych.

1. Całkowanie funkcyj wymiernych, ułamkowych.
2. Całki funkcyj wymiernych, ułamkowych, których mianownikami są funkcye stopnia trzeciego.
3. Całki funkcyj wymiernych, ułamkowych, których mianownikami są całkowite potęgi funkcyj stopnia trzeciego.

Wykład III.

Szczególne metody całkowania funkcyj wymiernych, ułamkowych.

1. **Ogólna metoda całkowania funkcyj wymiernych, ułamkowych** polega na rozkładaniu danej funkcyi ułamkowej, właściwej $\frac{G_m(x)}{G_n(x)}$, $(m<n)$, na ułamki częściowe. Jeżeli

$$G_n(x)=(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x^2+px+q)^\lambda (x^2+rx+s)^\mu \dots$$

natenczas dana funkcya ułamkowa, właściwa da się przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned}\frac{G_m(x)}{G_n(x)}=&\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}}+\dots+\frac{A_1}{x-a}\\ &+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\frac{B_{\beta-1}}{(x-b)^{\beta-1}}+\dots+\frac{B_1}{x-b}\\ &+\dots\dots\dots\dots\\ &+\frac{P_\lambda x+Q_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda}+\frac{P_{\lambda-1}x+Q_{\lambda-1}}{(x^2+px+q)^{\lambda-1}}+\dots+\frac{P_1x+Q_1}{x^2+px+q}\\ &+\frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu}+\frac{R_{\mu-1}x+S_{\mu-1}}{(x^2+rx+s)^{\mu-1}}+\dots+\frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s}\\ &+\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned} \tag{1}$$

w której spółczynniki liczników są liczbami stałemi, jednoznacznie, określonemi.

Całka danej funkcyi ułamkowej składa się tedy z całek, które się sprowadzają ostatecznie do trzech typów:

1) $\int\frac{dx}{(x-a)^r}=-\frac{1}{(r-1)(x-a)^{r-1}}$, 2) $\int\frac{dx}{x-a}=\log(x-a)$,

3) $\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctang}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}$;

przyczem:

$$4)\ \int\frac{dx}{(x^2+px+q)^r}=\frac{2x+p}{(r-1)(4q-p^2)}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{r-1}}+\frac{2(2r-3)}{(r-1)(4q-p^2)}\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^{r-1}}.$$

2. **Całkowanie funkcyj ułamkowych, których mianowniki mają czynniki tylko stopnia pierwszego.** Jeżeli mianownik $G_n(x)$ danej funkcyi ułamkowej da się sprowadzić do postaci: $G_n(x)=(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$, gdzie $a_1, a_2,\dots a_n$, są pojedyńczemi pierwiastkami równania: $G_n(x)=0$, natenczas otrzymujemy rozwinięcie:

$$\frac{G_m(x)}{G_n(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_n}{x-a_n},$$

którego spółczynniki $A_r\,(r=1,\ 2,\ldots n)$ podaje wzór:

$$A_r=\frac{G_m(x)}{G'_n(x)}\Big/ x=a_r=\frac{G_m(a_r)}{G'_n(a_r)},$$

Całka nieokreślona przedstawia się tedy w postaci:

$$\int\frac{G_m(x)}{G_n(x)}dx=A_1\log(x-a_1)+A_2\log(x-a_2)+\ldots+A_n\log(x-a_n), \tag{2}$$

i jest wyłącznie funkcyą przestępną.

W przypadku pierwiastków urojonych, możemy, dla uniknięcia wyrażeń ze spółczynnikami urojonemi, zebrać parami wyrazy sprzężone w jedno, na mocy, wzoru:

$$\frac{P+iQ}{x-\alpha-\beta i}+\frac{P-iQ}{x-\alpha+\beta i}=\frac{2P(x-\alpha)-2\beta Q}{(x-\alpha)^2+\beta^2}=\frac{Ax+B}{x^2+px+q},$$

i otrzymujemy, jako sumę całek dwu wyrażeń sprzężonych:

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\log(x^2+px+q)-\frac{Ap-2B}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arc\,tang}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} \tag{3}$$

Postępowanie to zastosujemy do wyznaczania całek funkcyj wymiernych, ułamkowych, których mianownikami są funkcye całkowite n-go stopnia kształtu: $x^n\pm1$.

3. Całkowanie funkcyj wymiernych, ułamkowych o mianownikach kształtu: $x^n\pm1$. Niech będzie do wyznaczenia całka kształtu: $\int\frac{x^m\,dx}{x^n\pm1}$, w której wykładniki m i n są liczbami całkowitemi, przyczem $m<n$. Przyjąwszy mianownik w postaci x^n-1, załóżmy najpierw, że wykładnik n jest liczbą parzystą i połóżmy $n=2r$, natenczas otrzymujemy pierwiastki równania: $x^{2r}-1=0$, w postaci:

$$x=\sqrt[2r]{+1}=\sqrt[2r]{1_{2k\pi}}=1_{\frac{k\pi}{r}}=\cos\frac{k\pi}{r}+i\sin\frac{k\pi}{r},\ (k=0,\ \pm1,\pm2\ldots\pm(r-1),\ r),$$

przedstawiającej $2r$ różnych pierwiastków, między któremi są tylko dwa pierwiastki rzeczywiste: $+1$ i -1, odpowiadające wartościom $k=0$ i $k=r$, wszystkie inne zaś są zespolone, parami sprzężone.

Kładąc: $\cos\frac{k\pi}{r}+i\sin\frac{k\pi}{r}=\alpha_k,\ \cos\frac{k\pi}{r}-i\sin\frac{k\pi}{r}=\beta_k,$

otrzymujemy rozwinięcie:

$$\frac{x^m}{x^{2r}-1}=\frac{x^m}{(x+1)(x-1)(x-\alpha_1)(x-\beta_1)\ldots(x-\alpha_k)(x-\beta_k)\ldots(x-\alpha_{r-1})(x-\beta_{r-1})}=$$

$$=\frac{A_0}{x+1}+\frac{B_0}{x-1}+\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{B_1}{x-\beta_1}+\ldots+\frac{A_k}{x-\alpha_k}+\frac{B_k}{x-\beta_k}+\ldots+\frac{A_{r-1}}{x-\alpha_{r-1}}+\frac{B_{r-1}}{x-\beta_{r-1}},$$

w którem, na mocy T. I. str. 594., mamy:

$$A_0=\frac{x^m}{2rx^{2r-1}}\Big/_{x=-1}=\frac{x^{m+1}}{2rx^{2r}}\Big/_{x=-1}=\frac{x^{m+1}}{2r}\Big/_{x=-1}=\frac{(-1)^{m+1}}{2r},$$

$$B_0=\frac{x^m}{2rx^{2r-1}}\Big/_{x=1}=\frac{x^{m+1}}{2rx^{2r}}\Big/_{x=1}=\frac{x^{m+1}}{2r}\Big/_{x=1}=\frac{1}{2r}.$$

$$A_k = \frac{x^m}{2rx^{2r-1}}\Big/_{x=\alpha_k} = \frac{1}{2r}\cdot\frac{x^{m+1}}{x^{2r}}\Big/_{x=\alpha_k} = \frac{1}{2r}\alpha_k^{m+1},$$

$$B_k = \frac{x^m}{2rx^{2r-1}}\Big/_{x=\beta_k} = \frac{1}{2r}\cdot\frac{x^{m+1}}{x^{2r}}\Big/_{x=\beta_k} = \frac{1}{2r}\beta_k^{m+1}.$$

ıa dwóch ułamków częściowych, odpowiadających dwu pierwiastkom ym, przedstawia się w postaci:

$$\frac{A_k}{(x-\alpha_k)}+\frac{B_k}{(x-\beta_k)}=\frac{1}{2r}\left[\frac{\alpha_k^{m+1}}{x-\alpha_k}+\frac{\beta_k^{m+1}}{x-\beta_k}\right]=$$

$$\frac{1}{2r}\left[\frac{\cos\frac{(m+1)k\pi}{r}+i\sin\frac{(m+1)k\pi}{r}}{x-\left(\cos\frac{k\pi}{r}+i\sin\frac{k\pi}{r}\right)}+\frac{\cos\frac{(m+1)k\pi}{r}-i\sin\frac{(m+1)k\pi}{r}}{x-\left(\cos\frac{k\pi}{r}-i\sin\frac{k\pi}{r}\right)}\right]=$$

$$=\frac{1}{r}\,\frac{x\cos\frac{(m+1)k\pi}{r}-\cos\frac{mk\pi}{r}}{x^2-2x\cos\frac{k\pi}{r}+1}.$$

ıbec tego otrzymujemy:

$$\frac{x^m}{x^{2r}-1}=\frac{1}{r}\left[\frac{(-1)^{m+1}}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x-1)}+\frac{x\cos\frac{(m+1)\pi}{r}-\cos\frac{m\pi}{r}}{x^2-2x\cos\frac{\pi}{r}+1}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{x\cos\frac{(m+1)(r-1)\pi}{r}-\cos\frac{m(r-1)\pi}{r}}{x^2-2x\cos\frac{(r-1)\pi}{r}+1}\right]. \tag{4}$$

dobnie otrzymamy, w przypadku, gdy $n=2r+1$, wzór:

$$\frac{x^m}{x^{2r+1}-1}=\frac{2}{2r+1}\left[\frac{1}{2(x-1)}+\frac{x\cos\frac{2(m+1)\pi}{2r+1}-\cos\frac{2m\pi}{2r+1}}{x^2-2x\cos\frac{2\pi}{2r+1}+1}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{x\cos\frac{2r(m+1)\pi}{2r+1}-\cos\frac{2rm\pi}{2r+1}}{x^2-2x\cos\frac{2r\pi}{2r+1}+1}\right]. \tag{5}$$

nalogicznie wypadają rozwinięcia:

$$\frac{x^m}{x^{2r}+1}=-\frac{1}{r}\left[\frac{x\cos\frac{(m+1)\pi}{2r}-\cos\frac{m\pi}{2r}}{x^2-2x\cos\frac{\pi}{2r}+1}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{x\cos\frac{(2r-1)(m+1)\pi}{2r}-\cos\frac{(2r-1)m\pi}{2r}}{x^2-2x\cos\frac{(2r-1)\pi}{2r}+1}\right], \tag{6}$$

$$\frac{x^m}{x^{2r+1}+1}=-\frac{2}{2r+1}\left[\frac{(-1)^{m+1}}{2(x+1)}+\frac{x\cos\frac{(m+1)\pi}{2r+1}-\cos\frac{m\pi}{2r+1}}{x^2-2x\cos\frac{\pi}{2r+1}+1}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{x\cos\frac{(2r-1)(m+1)\pi}{2r+1}-\cos\frac{(2r-1)m\pi}{2r+1}}{x^2-2x\cos\frac{(2r-1)\pi}{2r+1}+1}\right].$$

Całki funkcyj ułamkowych kształtu: $\int\frac{x^m}{x^n\pm1}dx$, składają się z całek kształtu:

$$\int\frac{x\cos\frac{(m+1)k\pi}{n}-\cos\frac{mk\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1}dx=\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx,$$

gdzie:
$$A=\cos\frac{(m+1)k\pi}{n};\quad B=-\cos\frac{mk\pi}{n},$$
$$p=-2\cos\frac{k\pi}{n},\quad q=1,$$

które, na mocy wzoru (3), przedstawiają się w postaci:

$$\int\frac{x\cos\frac{(m+1)k\pi}{n}-\cos\frac{mk\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cos\frac{(m+1)k\pi}{n}\log\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right)-$$

$$-\sin(m+1)\frac{k\pi}{n}\operatorname{arc\,tang}\frac{x-\cos\frac{k\pi}{n}}{\sin\frac{k\pi}{n}}+C.$$

Otrzymujemy zatem całki szukane, w następujących postaciach:

1) $$\int\frac{x^m dx}{x^{2r}-1}=\frac{1}{2r}\log(x-1)+\frac{(-1)^{m+1}}{2r}\log(x+1)+$$

$$+\frac{1}{2r}\sum_{k=1}^{k=r-1}\cos\frac{(m+1)k\pi}{r}\log\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{r}+1\right)-$$

$$-\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{k=r-1}\sin\frac{(m+1)k\pi}{r}\operatorname{arctang}\frac{x-\cos\frac{k\pi}{r}}{\sin\frac{k\pi}{r}};$$

2) $$\int\frac{x^m dx}{x^{2r+1}-1}=\frac{1}{2r+1}\log(x-1)+$$

$$+\frac{1}{2r+1}\sum_{k=1}^{k=r}\cos\frac{(m+1)2k\pi}{2r+1}\log\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2r+1}+1\right)-$$

$$-\frac{2}{2r+1}\sum_{k=1}^{k=r}\sin\frac{(m+1)2k\pi}{2r+1}\operatorname{arctang}\frac{x-\cos\frac{2k\pi}{2r+1}}{\sin\frac{2k\pi}{2r+1}};$$

3) $$\int\frac{x^m dx}{x^{2r}+1}=-\frac{1}{2r}\sum_{k=1}^{k=r}\cos\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{2r}\log\left(x^2-2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2r}+1\right)+$$

$$+\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{k=r}\sin\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{2r}\operatorname{arc\,tang}\frac{x-\cos\frac{(2k-1)\pi}{2r}}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{2r}};$$

4) $$\int\frac{x^m dx}{x^{2r+1}+1}=\frac{(-1)^m}{2r+1}\log(x+1)-$$

$$-\frac{1}{2r+1}\sum_{k=1}^{k=r}\cos\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{2r+1}\log\left(x^2-2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2r+1}+1\right)+$$

$$+\frac{2}{2r+1}\sum_{k=1}^{k=r}\sin\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{2r+1}\operatorname{arc\,tang}\frac{x-\cos\frac{2(k-1)\pi}{2r+1}}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{2r+1}}.$$

4. Sprowadzanie funkcyi ułamkowej do najprostszej postaci. Mając daną funkcyę wymierną, ułamkową w postaci ilorazu dwu funkcyj całkowitych, wymiernych $G_m(x):G_n(x)$, należy zawsze zbadać, czy ta funkcya jest sprowadzoną do najprostszej postaci, t. z. czy licznik i mianownik tej funkcyi nie posiadają żadnego wspólnego podzielnika, przez który możnaby daną funkcyę uprościć. W tym celu należy wyznaczyć wspólny podzielnik funkcyj całkowitych, występujących w liczniku i mianowniku danej funkcyi ułamkowej, a w przypadku istnienia takiego podzielnika należy daną funkcyę przez niego uprościć, n. p. $\frac{x^2-1}{x^3+2x^2+x}=\frac{(x+1)(x-1)}{x(x+1)^2}=\frac{x-1}{x^2+x}$, zatem $\int\frac{x^2-1}{x^3+2x^2+x}dx=\int\frac{x-1}{x^2+x}dx$.

5. Największy wspólny podzielnik dwu funkcyj całkowitych, wymiernych możemy wyznaczyć, bez rozkładania tych funkcyj na czynniki metodą Euklidesa, stosowaną przy wyszukiwaniu największego wspólnego podzielnika dwu liczb całkowitych.

Niech będą $G(x)$ i $G_1(x)$ danemi funkcyami całkowitemi, dla których wyszukać mamy ich największy wspólny podzielnik.

Przypuszczając, że funkcya $G(x)$ jest n-go, $G_1(x)$ zaś m-go stopnia, przyczem $n<m$, podzielmy funkcyę $G(x)$ przez funkcyę $G_1(x)$, a otrzymamy na iloraz funkcyę $q_1(x)$, stopnia $(n-m)$-go, a na resztę funkcyę $r_1(x)$ stopnia najwyżej $(m-1)$-go.

Będzie zatem:
$$\frac{G(x)}{G_1(x)}=q_1(x)+\frac{r_1(x)}{G_1(x)},$$

czyli:
$$G(x)=q_1(x)\,.\,G_1(x)+r_1(x).$$

Dzieląc teraz pierwotny dzielnik $G_1(x)$ przez resztę $r_1(x)$, otrzymamy pewien iloraz $q_2(x)$, oraz resztę $r_2(x)$, funkcyą całkowitą, stopnia najwyżej $(m-2$-go:
$$G_1(x)=r_1(x)\,.\,q_2(x)+r_2(x).$$

Powtarzając wskazane działania, otrzymamy kolejno:
$$r_1(x)=r_2(x)\,.\,q_3(x)+r_3(x),$$
$$r_2(x)=r_3(x)\,.\,q_4(x)+r_4(x),$$
$$.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

ogólnie:
$$r_{\mu-2}(x)=r_{\mu-1}(x)\,.\,q_\mu(x)+r_\mu(x),$$

gdzie $r_\mu(x)$ **będzie funkcyą całkowitą, stopnia najwyżej $(m-\mu)$-go.**

Postępując w ten sposób, musimy dojść w końcu do reszty $r_\mu(x)$, przez którą reszta poprzedzająca $r_{\mu-1}(x)$ będzie już podzielna, co w najgorszym razie nastąpi wtedy, gdy reszta $r_\mu(x)$ będzie funkcyą stopnia zerowego, czyli liczbą stałą.

Przypuśćmy tedy, że w końcu tą resztą $r_\mu(x)$ jest funkcya $(m-\mu)$-go stopnia, i że

$$r_{\mu-1}(x) = r_\mu(x) \cdot q_{\mu+1}(x),$$

natenczas poznamy z łatwością, że funkcya $r_\mu(x)$ jest tą funkcyą, przez którą dane funkcye $G(x)$ i $G_1(x)$ są podzielne.

Z pierwszego równania powyższego układu równań wynika bowiem, że wszelki podzielnik funkcyj $G(x)$ i $G_1(x)$ jest także podzielnikiem funkcyi $r_1(x)$, z następnego wynika znowu, że wszelki podzielnik funkcyj $G(x)$ i $G_1(x)$ jest także podzielnikiem funkcyi $r_2(x)$, a w końcu z ostatniego, że wszelki podzielnik funkcyj $G(x)$ i $G_1(x)$ jest także podzielnikiem funkcyi $r_\mu(x)$. Z czego wynika, że największy wspólny podzielnik funkcyj $G(x)$ i $G_1(x)$ jest także podzielnikiem funkcyi $r_\mu(x)$. Tym podzielnikiem jest sama funkcya $r_\mu(x)$.

Funkcya ta jest przedewszystkiem wspólnym podzielnikiem funkcyj $G(x)$ i $G_1(x)$, gdyż będąc podzielnikiem funkcyj $r_{\mu-1}(x)$ i $r_\mu(x)$ jest także podzielnikiem funkcyj $r_{\mu-2}(x) \ldots r_1(x)$, a więc także funkcyj $G_1(x)$ i $G(x)$.

Funkcya $r_\mu(x)$ jest także funkcyą najwyższego możliwego stopnia, przez którąby były funkcye $G(x)$ i $G_1(x)$ podzielne, czyli największym wspólnym podzielnikiem funkcyj $G(x)$ i $G_1(x)$, gdyby bowiem istniała funkcya wyższego stopnia, przez którąby były funkcye $G(x)$ i $G_1(x)$ podzielne, to przez tą funkcyę musiałaby być także funkcya $r_\mu(x)$, a więc funkcya niższego stopnia podzielną, co jest niemożliwe.

Szukając tą drogą największego wspólnego podzielnika funkcyj x^2-1 i x^3+2x^2+x, otrzymujemy:

$$\begin{array}{l} (x^3+2x^2+x):(x^2-1) = x+2, \\ \underline{\pm x^3 \mp x} \\ \quad 2x^2+2x \\ \quad \underline{\pm 2x^2 \mp 2} \\ \quad\quad 2x+2 = 2(x+1) \end{array}$$

a więc, pomijając czynnik stały 2, mamy $r_1(x) = x+1$, a ponieważ $(x^2-1):(x+1) = x-1$, przeto $x+1$ jest szukanym największym wspólnym podzielnikiem funkcyj x^2-1 i x^3+2x^2+x.

Funkcye całkowite, których największym wspólnym podzielnikiem jest funkcya stopnia zerowego, nazywamy funkcyami względem siebie pierwszemi; w funkcyi ułamkowej, przedstawionej w najprostszej postaci, powinny być licznik i mianownik funkcyami całkowitemi, względem siebie pierwszemi.

6. Największy wspólny podzielnik funkcyi całkowitej, wymiernej i jej funkcyi pochodnej. Niech będzie dana funkcya całkowita, wymierna, n-go stopnia, w postaci:

$$G(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \ldots (x-k)^\varkappa (x-l)^\lambda,$$

gdzie

$$\alpha+\beta+\ldots+\lambda = n,$$

natenczas jej funkcya pochodna $G'(x)$ przedstawi się w postaci:

$$\begin{aligned} G'(x) = {} & \alpha(x-a)^{\alpha-1}(x-b)^\beta(x-c)^\gamma \ldots (x-k)^\varkappa (x-l)^\lambda + \\ & + \beta(x-a)^\alpha (x-b)^{\beta-1}(x-c)^\gamma \ldots (x-k)^\varkappa (x-l)^\lambda + \\ & + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + \\ & + \lambda(x-a)^\alpha(x-b)^\beta(x-c)^\gamma \ldots (x-k)^\varkappa (x-l)^{\lambda-1} \end{aligned}$$

czyli:

$$G'(x) = (x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1} \ldots (x-k)^{\varkappa-1}(x-l)^{\lambda-1}$$
$$\{\alpha(x-b)\ldots(x-k)(x-l) + \beta(x-a)(x-c)\ldots(x-l) + \ldots + \lambda(x-a)(x-b)\ldots(x-k)\}.$$

Łatwo wykazać, że największym wspólnym podzielnikiem danej funkcyi $G(x)$ i jej pochodnej $G'(x)$ jest funkcya:

$$D(x) = (x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1} \ldots (x-k)^{\varkappa-1}(x-l)^{\lambda-1}. \tag{8}$$

Funkcya $D(x)$ jest bowiem przedewszystkiem wspólnym podzielnikiem danej funkcyi $G(x)$ i jej pochodnej $G'(x)$, gdyż funkcya $D(x)$ występuje, jako czynnik, tak w $G(x)$, jak w $G'(x)$. Funkcya $D(x)$ jest jednak także największym wspólnym podzielnikiem funkcyj $G(x)$ i $G'(x)$. Wspólny podzielnik wyższego stopnia musiałby bowiem, oprócz wielokrotnych czynników w $D(x)$ się znajdujących, zawierać jeszcze inne czynniki, któreby były wspólne funkcyom

(x) i $G'(x)$, co jest niemożebne. Przyjąwszy dalej, że n. p. czynnik $(x-a)$ zawiera się w największym wspólnym podzielniku nie $(\alpha-1)$ razy, lecz α razy (więcej razy ze względu na kształt funkcyi $G(x)$ niemożebna), to musiałby czynnik $(x-a)$ być wspólnym czynnikiem funkcyi, mieszczącej się w nawiasie funkcyi $G'(x)$, a więc cała funkcya, w nawiasie $\{\ \}$ ujęta, musiałaby dla $x=a$ stać się zerem, co się jednak stać nie może, gdyż pierwszy wyraz będzie różny od zera.

Funkcya $D(x)=(x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1}\ldots(x-l)^{\lambda-1}$ jest więc największym wspólnym podzielnikiem funkcyi $G(x)$ i jej pochodnej $G'(x)$.

A zatem: *Największy wspólny podzielnik funkcyi całkowitej wymiernej $G(x)$ i jej funkcyi pochodnej $G'(x)$ zawiera wszystkie czynniki pierwiastkowe funkcyi $G(x)$ w stopniu o jeden mniejszym.*

Największy wspólny podzielnik funkcyi $G(x)$ i jej pochodnej $G'(x)$ nie zawiera więc wcale pojedyńczych czynników pierwiastkowych danej funkcyi $G(x)$, a natomiast zawiera podwójne czynniki raz, potrójne 2 razy, ogólnie r-krotne $(r-1)$ razy.

7. Warunek, pod jakim całka funkcyi ułamkowej jest wyłącznie funkcyą przestępną. Z ostatniego twierdzenia wynika, że funkcya całkowita wymierna, posiadająca tylko pojedyńcze czynniki pierwiastkowe, nie ma z funkcyą pochodną żadnego wspólnego podzielnika, czyli innemi słowy funkcya całkowita, wymierna, posiadająca same pojedyńcze czynniki pierwiastkowe jest pierwszą względem swej funkcyi pochodnej.

Chcąc się zatem przekonać, czy dana funkcya posiada wyłącznie pojedyńcze czynniki pierwiastkowe stopnia pierwszego, należy wyznaczyć jej pochodną i znaleźć największy wspólny podzielnik tej funkcyi i jej pochodnej. Jeżeli tym wspólnym podzielnikiem jest funkcya zerowego stopnia, czyli liczba stała, względnie 1, to znak, że dana funkcya ma wyłącznie czynniki pierwiastkowe stopnia pierwszego.

Jeżeli taka funkcya występuje, jako mianownik danej funkcyi ułamkowej właściwej, to całka takiej funkcyi ułamkowej składa się, jak wiemy z art. 2., wyłącznie z funkcyj logarytmicznych, względnie cyklometrycznych, czyli jest wyłącznie funkcyą przestępną.

Z tąd wniosek: *Całka funkcyi ułamkowej właściwej $\frac{G_m(x)}{G_n(x)}$ jest wyłącznie funkcyą przestępną, skoro mianownik $G_n(x)$ tej funkcyi nie ma ze swą pochodną $G'_n(x)$ tej funkcyi żadnego wspólnego podzielnika.*

8. Przykład. Mając ocenić rodzaj całki w postaci:

$$\int\frac{dx}{x^3+2x^2-x-2},$$

przeprowadzimy zatem następujący rachunek:

$$G(x)=x^3+2x^2-x-2,\quad G'(x)=3x^2+4x-1.$$

Celem uniknięcia spółczynników ułamkowych przy wyszukiwaniu największego wspólnego podzielnika funkcyj $G(x)$ i $G'(x)$ pomnóżmy $G(x)$ przez 9, a otrzymamy:

$$\begin{array}{l}
(9x^3+18x^2-9x-18):(3x^2+4x-1)=3x+2\\
9x^3+12x^2-3x\\
-\quad-\quad+\\
\hline
\qquad 6x^2-6x-18\\
\qquad 6x^2+8x-2\\
\qquad -\quad-\quad+\\
\hline
\qquad -14x-16=-2\,[7x+8]
\end{array}$$

Pomnóżmy $3x^2+4x-1$ przez $7^2=49$, a otrzymamy:

$$\begin{array}{l}
(147x^2-196x-49):(7x+8)=21x-52\\
147x^2+168x\\
-\quad-\\
\hline
\quad -364x-49\\
\quad -364x-416\\
\quad +\quad+\\
\hline
\qquad +367
\end{array}$$

$G(x)$ i $G'(x)$ są więc funkcyami względem siebie pierwszemi. Funkcya $G(x)$ ma więc wyłącznie pojedyńcze czynniki pierwiastkowe.

W istocie jest $(x^3+2x^2-x-2)=(x-1)(x+1)(x+2)$.

Otrzymujemy zatem:

$$\frac{1}{x^3+2x^2-x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2},$$

gdzie:
$$A = \frac{1}{8x^2+4x-1}\Big/_{x=1} = \frac{1}{6}, \quad B = \frac{1}{8x^2+4x-1}\Big/_{x=-1} = -\frac{1}{2},$$
$$C = \frac{1}{8x^2+4x-1}\Big/_{x=-2} = \frac{1}{8},$$

a więc:
$$\frac{1}{x^3+2x^2-x-2} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x+2},$$

przeto:
$$\int\frac{dx}{x^3+2x^2-x-2} = \frac{1}{6}\log(x+1) - \frac{1}{2}\log(x+1) + \frac{1}{8}\log(x+2),$$

czyli:
$$\int\frac{dx}{x^3+2x^2-x-2} = \log\frac{\sqrt[6]{x-1}\,.\,\sqrt[8]{x+2}}{\sqrt{x+1}} + C.$$

9. Niektóre uwagi o rozwiązywaniu równań liczebnych, posiadających same tylko jednokrotne pierwiastki. Równaniami liczebnemi nazywamy równania, których spółczynniki są liczbami szczególnemi, dla odróżnienia od równań algebraicznych, których spółczynniki są liczbami ogólnemi. W tomie I. poznaliśmy sposoby rozwiązywania równań algebraicznych, pierwszych czterech stopni. Równania algebraiczne stopni wyższych nad czwarty nie dadzą się, jak dowiódł Abel (1817), ogólnie rozwiązać przy pomocy działań algebraicznych, któreby miały być wykonane na ogólnych spółczynnikach tych równań. Z tego powodu, mówiąc o rozwiązywaniu równań wyższych stopni, mamy zawsze na myśli równania liczebne, ograniczając się do równań liczebnych o rzeczywistych współczynnikach.

Przekonawszy się sposobem, podanym w art. 6., że dane równanie liczebne:
$$G(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$
nie posiada pierwiastków wielokrotnych, a tylko same pojedyńcze pierwiastki, że więc $G(x)$ da się przedstawić w postaci: $G(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$, możemy przystąpić do wyznaczania poszczególnych pierwiastków $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Pierwiastki te mogą być liczbami rzeczywistemi, lub urojonemi, parami sprzężonemi. [Jeżeli spółczynniki równania są liczbami całkowitemi, to pierwiastkami rzeczywistemi mogą być tylko liczby całkowite, lub liczby niewymierne, zwane liczbami algebraicznie niewymiernemi.]

Szukając pierwiastków rzeczywistych równania $G(x)=0$, musimy przedewszystkiem wskazać granice, między któremi leżą poszczególne pierwiastki rzeczywiste tego równania.

W tym celu, podstawiamy za x rozmaite liczby rzeczywiste $a, b, \ldots$ i wyznaczamy odpowiednie wartości $G(a)$, $G(b), \ldots$, wprost, lub za pomocą dzielenia Hornera, jako reszty ilorazów $G(x):(x-a)$. Por. tom I. str. 414.

Odcinając przyjęte wartości $a, b, \ldots$ jako odcięte, a wartości $G(a)$, $G(b), \ldots$ jako rzędne punktów, otrzymujemy przybliżony obraz krzywej parabolicznej o równaniu: $y = G(x)$.

Jeżeli przytem okaże się przypadkowo, że jedna z tych wartości, n. p. $G(a)$, jest zerem, tedy krzywa przecina oś X-ów w punkcie $A(a, 0)$, a liczba rzeczywista a jest pierwiastkiem równania $G(x)=0$.

Jeżeli wartości $G(a)$ i $G(b)$ są różne od zera, to na podstawie tego, że funkcya całkowita wymierna jest funkcyą ciągłą, wysnuwamy wniosek, że krzywa $y = G(x)$, między granicami $x=a$ i $x=b$, przecina oś x-ów w parzystej, lub nieparzystej ilości punktów, czyli, że między granicami a i b znajduje się parzysta, lub nieparzysta ilość pierwiastków, stosownie do tego, czy wartości $G(a)$ i $G(b)$ mają znaki jednakie, czy też znaki przeciwne.

Stosownem ścieśnianiem granic a i b, możemy szukane pierwiastki rzeczywiste wyznaczyć z wszelką żądaną dokładnością.

Wyznaczanie pojedyńczych pierwiastków zespolonych danego równania możemy zawsze sprowadzić do wyznaczania pierwiastków rzeczywistych dwu równań o dwu niewiadomych.

Kładąc bowiem w danem równaniu $G(x)=0$ za niewiadomą x liczbę zespoloną $\alpha+\beta i$, otrzymujemy:
$$G(x) = F(\alpha, \beta) + i\,\Phi(\alpha, \beta),$$
a zatem, na wyznaczenie α i β, dwa równania o spółczynnikach rzeczywistych, o dwu niewiadomych α, β, w postaci:
$$F(\alpha, \beta) = 0, \quad \Phi(\alpha, \beta) = 0.$$

Bliższe szczegóły, dotyczące ściślejszego oddzielenia pierwiastków (stosownego ścieśniania granic pierwiastków) danego równania liczebnego, jakoteż rachunku liczebnego pierwiastków niewymiernych poznamy przy zastosowaniach wyższej analizy do algebry.

10. Przykład. Równanie:

$$x^5+3x^4-2x^3-9x^2-11x-6=0,$$

ma same pojedyncze pierwiastki, gdyż funkcya:

$$G(x)=x^5+3x^4-2x^3-9x^2-11x-6$$

jest pierwszą względem swej funkcyi pochodnej: $G'(x)=5x^4+12x^3-6x^2-18x-11$.

Podstawiając za x rozmaite liczby całkowite, otrzymamy:

$$G(3)=330,\ G(2)=0,\ G(11)=-24,\ G(0)=-6,$$
$$G(-1)=0,\ G(-2)=12,\ G(-3)=0,\ G(-4)=-182,$$

zatem trzy pierwiastki całkowite 2, —1, —3, a więc trzy czynniki pierwiastkowe $x-2$, $x+1$, $x+3$, których iloczyn daje funkcyę: x^3+2x^2-5x-6. Podzieliwszy funkcyę $G(x)$ przez funkcyę x^3+2x^2-5x-6, otrzymujemy iloraz x^2+x+1, a więc pozostałe dwa pierwiastki zespolone:

$$-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\quad -\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Jest zatem:

$$x^5+3x^4-2x^3-9x^2-11x-6=(x-2)(x+1)(x+3)(x^2+x+1).$$

Całka funkcyi ułamkowej właściwej, której mianownikiem jest funkcya:

$$x^5+3x^4-2x^3-9x^2-11x-6$$

jest zatem wyłącznie funkcyą przestępną.

11. Całkowanie funkcyj ułamkowych, których mianowniki mają czynniki wielokrotne. Jeżeli mianownik funkcyi ułamkowej, właściwej $\frac{G_m(x)}{G_n(x)}$ $(m<n)$, ma czynniki wielokrotne, a więc przedstawia się w postaci:

$$G_n(x)=(x-a)^\alpha(x-b)^\beta..(x-l)^\lambda,\ \text{gdzie}\ \alpha+\beta+\ldots+\lambda=n,\ \text{natenczas:}$$

$$\begin{aligned}\frac{G_m(x)}{G_n(x)}=&\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_1}{x-a}+\\&+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\frac{B_{\beta-1}}{(x-b)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{B_1}{x-b}+\\&+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ +\\&+\frac{L_\lambda}{(x-l)^\lambda}+\frac{L_{\lambda-1}}{(x-l)^{\lambda-1}}+\ldots+\frac{L_1}{x-l}\end{aligned}$$

zatem:

$$\begin{aligned}\int\frac{G_m(x)}{G_n(x)}dx=&-\frac{A_\alpha}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}}-\frac{A_{\alpha-1}}{(\alpha-2)(x-a)^{\alpha-2}}-\ldots-\frac{A_2}{x-a}+A_1\log(x-a)-\\&-\frac{B_\beta}{(\beta-1)(x-b)^{\beta-1}}-\frac{B_{\beta-1}}{(\beta-2)(x-b)^{\beta-2}}-\ldots-\frac{B_2}{x-b}+B_1\log(x-b)-\\&-\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ -\\&-\frac{L_\lambda}{(\lambda-1)(x-l)^{\lambda-1}}-\frac{L_{\lambda-1}}{(\lambda-2)(x-l)^{\lambda-2}}-\ldots-\frac{L_2}{x-l}+L_1\log(x-l),\end{aligned}$$

czyli:

$$\int\frac{G_m(x)}{G_n(x)}dx=R(x)+\Sigma A\log(x-a)\qquad(9)$$

gdzie $R(x)$ jest funkcyą algebraiczną, wymierną, $\Sigma A\log(x-a)$ jest funkcyą przestępną.

Całka nieokreślona funkcyi ułamkowej, której mianownik posiada czynniki wielokrotne, składa się zatem z dwu części, z części algebraicznej i z części przestępnej, złożonej z logarytmów.

W przypadku pierwiastków urojonych mamy co dwa pierwiastki sprzężone o tej samej wielokrotności: $a = \alpha + \beta i$, $b = \alpha - \beta i$; odpowiednie ułamki częściowe mają postać:

$$\frac{P+iQ}{(x-\alpha-\beta i)^r}, \quad \frac{P-iQ}{(x-\alpha+\beta i)^r},$$

są również wyrażeniami sprzężonemi, a ich całki:

$$-\frac{1}{r-1}\frac{P+iQ}{(x-\alpha-\beta i)^{r-1}}, \quad -\frac{1}{r-1}\frac{P-iQ}{(x-\alpha+\beta i)^{r-1}}$$

dają sumę rzeczywistą w części algebraicznej szukanej całki.

W części przestępnej zaś mamy:

$$\log(x-\alpha-\beta i) = \frac{1}{2}\log[(x-\alpha)^2+\beta^2] + i \operatorname{arc\,tang}\frac{x-\alpha}{\beta};$$

zatem sumę:

$$(P+iQ)\log(x-\alpha-\beta i) + (P-iQ)\log(x-\alpha+\beta i) =$$
$$= P\log[(x-\alpha)^2+\beta^2] - 2Q\operatorname{arctg}\frac{x-\alpha}{\beta},$$

złożoną z funkcyi logarytmicznej i funkcyi cyklometrycznej.

12. Warunki, pod jakimi całka funkcyi ułamkowej jest czysto algebraiczną. Z wzoru (9) poznajemy, że całka funkcyi ułamkowej $\frac{G(x)}{G_n(x)}$ jest czysto algebraiczną, skoro spółczynniki $A_1, B_1, \dots, L_1$ są wszystkie zerami.

Kładąc:

$$\frac{G_n(x)}{(x-a)^\alpha} = \psi_\alpha(x), \quad \frac{G_n(x)}{(x-b)^\beta} = \psi_\beta(x), \dots, \frac{G_n(x)}{(x-l)^\lambda} = \psi_\lambda(x),$$
$$\frac{G(x)}{\psi_\alpha(x)} = \Psi_\alpha(x), \quad \frac{G(x)}{\psi_\beta(x)} = \Psi_\beta(x), \dots, \frac{G(x)}{\psi_\lambda(x)} = \Psi_\lambda(x),$$

otrzymujemy, jak na str. 569. Tomu I., na wyznaczenie spółczynników $A_1, B_1, \dots, L_1$, wzory:

$$A_1 = \frac{\Psi_\alpha^{(\alpha-1)}(a)}{(\alpha-1)!}, \quad B_1 = \frac{\Psi_\beta^{(\beta-1)}(b)}{(\beta-1)!}, \dots, L_1 = \frac{\Psi_\lambda^{(\lambda-1)}(l)}{(\lambda-1)!}.$$

Spółczynniki $A, B, \dots, L$, określone powyższemi wzorami, nazywają się, według Cauchy'ego **resztami**, albo **residuami** funkcyi wymiernej:

$$R(x) = \frac{G(x)}{G_n(x)} = \frac{G(x)}{(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\dots(x-l)^\lambda},$$

odpowiadającemi różnym między sobą pierwiastkom mianownika $G_n(x)$. Mamy zatem twierdzenie:

Całka funkcyi ułamkowej jest czysto algebraiczną, skoro wszystkie jej reszty (residua) są zerami.

13. Rozwiązywanie równań liczebnych o pierwiastkach wielokrotnych. Przypuśćmy, że dane równanie liczebne n-go stopnia $G(x) = 0$ posiada pierwiastki wielokrotne, że więc:

$$G(x) = (x-a)^\alpha(x-b)^\beta \dots (x-k)^\varkappa(x-l)^\lambda,$$

natenczas największy wspólny podzielnik $D_1(x)$ funkcyi $G(x)$ i jej pochodnej $G'(x)$, ma, jak wiadomo z art. 6., kształt:

$$D_1(x) = (x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1}\dots(x-k)^{\varkappa-1}(x-l)^{\lambda-1}.$$

Oznaczmy największy wspólny podzielnik dwu funkcyj znakiem NWP, to napiszemy:

$$D_1(x) = NWP[G(x),\ G'(x)].$$

Funkcya $D_1(x)$ ma znowu swoją pochodną $D'_1(x)$, a ich największy wspólny podzielnik $D_2(x)$ przedstawi się w postaci:

$$D_2(x) = (x-a)^{\alpha-2}(x-b)^{\beta-2}\dots(x-l)^{\lambda-2}.$$

Pomyślmy teraz sobie, żeśmy w danej funkcyi $G(x)$ zebrali wszystkie pojedyńcze czynniki pierwiastkowe w jedną funkcyę U_1, wszystkie podwójne czynniki pierwiastkowe w jedną funkcyę U_2 ... wszystkie r-krotne czynniki pierwiastkowe w jedną funkcyę U_r, gdzie r jest wykładnikiem największym, natenczas możemy funkcyę $G(x)$ przedstawić w postaci:

$$G(x) = U_1 . U^2_2 . U^3_3 \ldots U_{r-1}^{r-1} . U_r^r . \qquad (10)$$

Otrzymujemy tedy powyżej wyprowadzone, największe wspólne podzielniki, w postaci:

$$D_{r-1}(x) = U_r$$
$$D_{r-2}(x) = U^2_r . U_{r-1}$$
$$D_{r-3}(x) = U^3_r . U^2_{r-1} . U_{r-2}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$D_1(x) = U_r{}^{r-1} . U_{r-1}^{r-2} . U_{r-2}^{r-3} \ldots U^2_3 . U_2, \text{ przyczem: }$$
$$G(x) = U_r^r . U_{r-1}^{r-1} . U_{r-2}^{r-2} \ldots U^3_3 . U^2_2 . U_1,$$

a stąd dostajemy poszczególne funkcye U, wyrażone przez największe wspólne podzielniki $D_s(x)$, w postaci:

$$U_r = D_{r-1}(x)$$
$$U_{r-1} = \frac{D_{r-2}(x)}{U^2_r} = \frac{D_{r-2}(x)}{D^2_{r-1}(x)}$$
$$U_{r-2} = \frac{D_{r-3}(x)}{U^3_r\, U^2_{r-1}} = \frac{D_{r-3}(x) . D^4_{r-1}(x)}{D^3_{r-1}(x) . D^2_{r-2}(x)} = \frac{D_{r-3}(x) . D_{r-1}(x)}{D^2_{r-2}(x)}$$
$$U_{r-3} = \frac{D_{r-1}(x) . D_{r-2}(x)}{D^2_{r-3}(x)}$$
$$\ldots\ldots \qquad (11)$$
$$U_2 = \frac{D_1(x) . D_3(x)}{D^2_2(x)}$$

a w końcu:

$$U_1 = \frac{G(x) . D_2(x)}{D^2_1(x)} .$$

Wyznaczywszy zatem metodą Euklidesa kolejno największe spólne podzielniki: $D_1(x)$, $D_2(x)$, ... $D_r(x)$, tak, że:

$$D_1(x) = NWP[G(x),\ G'(x)]$$
$$D_2(x) = NWP[D_1(x),\ D'_1(x)]$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$D_r(x) = NWP[D_{r-1}(x),\ D'_{r-1}(x)]$$

możemy, na mocy wzorów (11), wyznaczyć wprost czynniki jedno- i wielokrotne $U_1, U_2, \ldots, U_r$ danej funkcyi $G(x)$, przedstawionej w postaci: $G(x) = U_1 . U^2_2 . U^3_3 \ldots U^r_r$.

Rozwiązanie równania $G(x) = 0$ sprowadza się zatem do rozwiązywania r równań:

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 0, \ldots, \ U_r = 0,$$

z których każde ma tylko pojedyńcze pierwiastki, między sobą różne.

Równanie $U_1 = 0$ podaje tedy wszystkie pojedyńcze, $U_2 = 0$ wszystkie podwójne, $U_r = 0$ wszystkie r-krotne pierwiastki, występujące w równaniu $G(x) = 0$.

14. **Przykład.** Dane jest równanie:

$$G(x) = x^6 - 5x^5 + 5x^4 + 13x^3 - 34x^2 + 28x - 8 = 0.$$

Chcąc zbadać, czy to równanie ma pierwiastki wielokrotne, szukajmy największego wspólnego podzielnika funkcyi $G(x)$ i jej pochodnej $G'(x) = 6x^5 - 25x^4 + 20x^3 + 89x^2 - 68x + 28$.

Aby uniknąć spółczynników ułamkowych przy dzieleniu $G(x)$ przez $G'(x)$, pomnóżmy funkcyę $G(x)$ przez $6^2 = 36$, a otrzymamy:

$$(36x^6 - 180x^5 + 180x^4 + 468x^3 - 1224x^2 + 1008x - 288) : (6x^5 - 25x^4 + 20x^3 + 39x^2 - 68x + 28) = 6x - 5$$
$$36x^6 - 150x^5 + 120x^4 + 234x^3 - 408x^2 + 168x$$
$$- \quad + \quad - \quad - \quad + \quad +$$
$$-30x^5 + 60x^4 + 234x^3 - 816x^2 + 840x - 288$$
$$-30x^5 + 125x^4 - 100x^3 - 195x^2 + 840x - 140$$
$$+ \quad - \quad + \quad + \quad - \quad +$$
$$-65x^4 + 334x^3 - 621x^2 + 500x - 148$$

$$\frac{x^m}{x^{2r+1}+1} = -\frac{2}{2r+1}\left[\frac{(-1)^{m+1}}{2(x+1)} + \frac{x\cos\frac{(m+1)\pi}{2r+1}-\cos\frac{m\pi}{2r+1}}{x^2-2x\cos\frac{\pi}{2r+1}+1}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{x\cos\frac{(2r-1)(m+1)\pi}{2r+1}-\cos\frac{(2r-1)m\pi}{2r+1}}{x^2-2x\cos\frac{(2r-1)\pi}{2r+1}+1}\right]. \qquad (7)$$

Całki funkcyj ułamkowych kształtu: $\int\frac{x^m}{x^n\pm 1}dx$, składają się więc z całek kształtu:

$$\int\frac{x\cos\frac{(m+1)k\pi}{n}-\cos\frac{mk\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1}dx=\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx,$$

gdzie:

$$A=\cos\frac{(m+1)k\pi}{n};\quad B=-\cos\frac{mk\pi}{n},$$

$$p=-2\cos\frac{k\pi}{n},\ q=1,$$

które, na mocy wzoru (3), przedstawiają się w postaci:

$$\int\frac{x\cos\frac{(m+1)k\pi}{n}-\cos\frac{mk\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cos\frac{(m+1)k\pi}{n}\log\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right)-$$

$$-\sin(m+1)\frac{k\pi}{n}\operatorname{arc\,tang}\frac{x-\cos\frac{k\pi}{n}}{\sin\frac{k\pi}{n}}+C.$$

Otrzymujemy zatem całki szukane, w następujących postaciach:

1) $$\int\frac{x^m dx}{x^{2r}-1}=\frac{1}{2r}\log(x-1)+\frac{(-1)^{m+1}}{2r}\log(x+1)+$$

$$+\frac{1}{2r}\sum_{k=1}^{k=r-1}\cos\frac{(m+1)k\pi}{r}\log\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{r}+1\right)-$$

$$-\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{k=r-1}\sin\frac{(m+1)k\pi}{r}\operatorname{arctang}\frac{x-\cos\frac{k\pi}{r}}{\sin\frac{k\pi}{r}};$$

2) $$\int\frac{x^m dx}{x^{2r+1}-1}=\frac{1}{2r+1}\log(x-1)+$$

$$+\frac{1}{2r+1}\sum_{k=1}^{k=r}\cos\frac{(m+1)2k\pi}{2r+1}\log\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2r+1}+1\right)-$$

$$-\frac{2}{2r+1}\sum_{k=1}^{k=r}\sin\frac{(m+1)2k\pi}{2r+1}\operatorname{arctang}\frac{x-\cos\frac{2k\pi}{2r+1}}{\sin\frac{2k\pi}{2r+1}};$$

3) $$\int\frac{x^m dx}{x^{2r}+1}=-\frac{1}{2r}\sum_{k=1}^{k=r}\cos\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{2r}\log\left(x^2-2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2r}+1\right)+$$

$$+\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{k=r}\sin\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{2r}\operatorname{arc tang}\frac{x-\cos\frac{(2k-1)\pi}{2r}}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{2r}};$$

4) $$\int\frac{x^m dx}{x^{2r+1}+1}=\frac{(-1)^m}{2r+1}\log(x+1)-$$

$$-\frac{1}{2r+1}\sum_{k=1}^{k=r}\cos\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{2r+1}\log\left(x^2-2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2r+1}+1\right)+$$

$$+\frac{2}{2r+1}\sum_{k=1}^{k=r}\sin\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{2r+1}\operatorname{arc tang}\frac{x-\cos\frac{2(k-1)\pi}{2r+1}}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{2r+1}}.$$

4. Sprowadzanie funkcyi ułamkowej do najprostszej postaci. Mając daną funkcyę wymierną, ułamkową w postaci ilorazu dwu funkcyj całkowitych, wymiernych $G_m(x):G_n(x)$, należy zawsze zbadać, czy ta funkcya jest sprowadzoną do najprostszej postaci, t. z. czy licznik i mianownik tej funkcyi nie posiadają żadnego wspólnego podzielnika, przez który możnaby daną funkcyę uprościć. W tym celu należy wyznaczyć wspólny podzielnik funkcyj całkowitych, występujących w liczniku i mianowniku danej funkcyi ułamkowej, a w przypadku istnienia takiego podzielnika należy daną funkcyę przez niego uprościć, n. p. $\frac{x^2-1}{x^3+2x^2+x}=\frac{(x+1)(x-1)}{x(x+1)^2}=\frac{x-1}{x^2+x}$, zatem $\int\frac{x^2-1}{x^3+2x^2+x}dx=\int\frac{x-1}{x^2+x}dx.$

5. Największy wspólny podzielnik dwu funkcyj całkowitych, wymiernych możemy wyznaczyć, bez rozkładania tych funkcyj na czynniki metodą Euklidesa, stosowaną przy wyszukiwaniu największego wspólnego podzielnika dwu liczb całkowitych.

Niech będą $G(x)$ i $G_1(x)$ danemi funkcyami całkowitemi, dla których wyszukać mamy ich największy wspólny podzielnik.

Przypuszczając, że funkcya $G(x)$ jest n-go, $G_1(x)$ zaś m-go stopnia, przyczem $n<m$, podzielmy funkcyę $G(x)$ przez funkcyę $G_1(x)$, a otrzymamy na iloraz funkcyę $q_1(x)$, stopnia $(n-m)$-go, a na resztę funkcyę $r_1(x)$ stopnia najwyżej $(m-1)$-go.

Będzie zatem: $$\frac{G(x)}{G_1(x)}=q_1(x)+\frac{r_1(x)}{G_1(x)},$$

czyli: $$G(x)=q_1(x).G_1(x)+r_1(x).$$

Dzieląc teraz pierwotny dzielnik $G_1(x)$ przez resztę $r_1(x)$, otrzymamy pewien iloraz $q_2(x)$, oraz resztę $r_2(x)$, funkcyą całkowitą, stopnia najwyżej $(m-2$-go:

$$G_1(x)=r_1(x).q_2(x)+r_2(x).$$

Powtarzając wskazane działania, otrzymamy kolejno:

$$r_1(x)=r_2(x).q_3(x)+r_3(x),$$
$$r_2(x)=r_3(x).q_4(x)+r_4(x),$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

ogólnie: $$r_{\mu-2}(x)=r_{\mu-1}(x).q_\mu(x)+r_\mu(x),$$

gdzie $r_\mu(x)$ będzie funkcyą całkowitą, stopnia najwyżej $(m-\mu)$-go.

$$\frac{x^m}{x^{2r+1}+1} = -\frac{2}{2r+1}\left[\frac{(-1)^{m+1}}{2(x+1)} + \frac{x\cos\frac{(m+1)\pi}{2r+1} - \cos\frac{m\pi}{2r+1}}{x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{2r+1}+1} + \ldots +\right.$$

$$\left. + \frac{x\cos\frac{(2r-1)(m+1)\pi}{2r+1} - \cos\frac{(2r-1)m\pi}{2r+1}}{x^2 - 2x\cos\frac{(2r-1)\pi}{2r+1}+1}\right]. \qquad (7)$$

Całki funkcyj ułamkowych kształtu: $\int \frac{x^m}{x^n \pm 1}dx$, składają się więc z całek kształtu:

$$\int \frac{x\cos\frac{(m+1)k\pi}{n} - \cos\frac{mk\pi}{n}}{x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n}+1}dx = \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx,$$

gdzie:

$$A = \cos\frac{(m+1)k\pi}{n}; \quad B = -\cos\frac{mk\pi}{n},$$

$$p = -2\cos\frac{k\pi}{n}, \quad q=1,$$

które, na mocy wzoru (3), przedstawiają się w postaci:

$$\int \frac{x\cos\frac{(m+1)k\pi}{n} - \cos\frac{mk\pi}{n}}{x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n}+1}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cos\frac{(m+1)k\pi}{n}\log\left(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right) -$$

$$-\sin(m+1)\frac{k\pi}{n}\operatorname{arc\,tang}\frac{x-\cos\frac{k\pi}{n}}{\sin\frac{k\pi}{n}} + C.$$

Otrzymujemy zatem całki szukane, w następujących postaciach:

1) $$\int \frac{x^m dx}{x^{2r}-1} = \frac{1}{2r}\log(x-1) + \frac{(-1)^{m+1}}{2r}\log(x+1) +$$

$$+\frac{1}{2r}\sum_{k=1}^{k=r-1}\cos\frac{(m+1)k\pi}{r}\log\left(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{r}+1\right) -$$

$$-\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{k=r-1}\sin\frac{(m+1)k\pi}{r}\operatorname{arctang}\frac{x-\cos\frac{k\pi}{r}}{\sin\frac{k\pi}{r}};$$

2) $$\int \frac{x^m dx}{x^{2r+1}-1} = \frac{1}{2r+1}\log(x-1) +$$

$$+\frac{1}{2r+1}\sum_{k=1}^{k=r}\cos\frac{(m+1)2k\pi}{2r+1}\log\left(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{2r+1}+1\right) -$$

$$-\frac{2}{2r+1}\sum_{k=1}^{k=r}\sin\frac{(m+1)\,2k\pi}{2r+1}\operatorname{arctang}\frac{x-\cos\frac{2k\pi}{2r+1}}{\sin\frac{2k\pi}{2r+1}};$$

3) $$\int\frac{x^m\,dx}{x^{2r}+1}=-\frac{1}{2r}\sum_{k=1}^{k=r}\cos\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{2r}\log\left(x^2-2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2r}+1\right)+$$

$$+\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{k=r}\sin\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{2r}\operatorname{arc\,tang}\frac{x-\cos\frac{(2k-1)\pi}{2r}}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{2r}};$$

4) $$\int\frac{x^m\,dx}{x^{2r+1}+1}=\frac{(-1)^m}{2r+1}\log(x+1)-$$

$$-\frac{1}{2r+1}\sum_{k=1}^{k=r}\cos\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{2r+1}\log\left(x^2-2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2r+1}+1\right)+$$

$$+\frac{2}{2r+1}\sum_{k=1}^{k=r}\sin\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{2r+1}\operatorname{arc\,tang}\frac{x-\cos\frac{2(k-1)\pi}{2r+1}}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{2r+1}}.$$

4. Sprowadzanie funkcyi ułamkowej do najprostszej postaci. Mając daną funkcyę wymierną, ułamkową w postaci ilorazu dwu funkcyj całkowitych, wymiernych $G_m(x):G_n(x)$, należy zawsze zbadać, czy ta funkcya jest sprowadzoną do najprostszej postaci, t. z. czy licznik i mianownik tej funkcyi nie posiadają żadnego wspólnego podzielnika, przez który możnaby daną funkcyę uprościć. W tym celu należy wyznaczyć wspólny podzielnik funkcyj całkowitych, występujących w liczniku i mianowniku danej funkcyi ułamkowej, a w przypadku istnienia takiego podzielnika należy daną funkcyę przez niego uprościć, n. p. $\frac{x^2-1}{x^3+2x^2+x}=\frac{(x+1)(x-1)}{x(x+1)^2}=\frac{x-1}{x^2+x}$, zatem $\int\frac{x^2-1}{x^3+2x^2+x}\,dx=\int\frac{x-1}{x^2+x}\,dx$.

5. Największy wspólny podzielnik dwu funkcyj całkowitych, wymiernych możemy wyznaczyć, bez rozkładania tych funkcyj na czynniki metodą Euklidesa, stosowaną przy wyszukiwaniu największego wspólnego podzielnika dwu liczb całkowitych.

Niech będą $G(x)$ i $G_1(x)$ danemi funkcyami całkowitemi, dla których wyszukać mamy ich największy wspólny podzielnik.

Przypuszczając, że funkcya $G(x)$ jest n-go, $G_1(x)$ zaś m-go stopnia, przyczem $n<m$, podzielmy funkcyę $G(x)$ przez funkcyę $G_1(x)$, a otrzymamy na iloraz funkcyę $q_1(x)$, stopnia $(n-m)$-go, a na resztę funkcyę $r_1(x)$ stopnia najwyżej $(m-1)$-go.

Będzie zatem: $$\frac{G(x)}{G_1(x)}=q_1(x)+\frac{r_1(x)}{G_1(x)},$$

czyli: $$G(x)=q_1(x)\,.\,G_1(x)+r_1(x).$$

Dzieląc teraz pierwotny dzielnik $G_1(x)$ przez resztę $r_1(x)$, otrzymamy pewien iloraz $q_2(x)$, oraz resztę $r_2(x)$, funkcyą całkowitą, stopnia najwyżej $(m-2)$-go:

$$G_1(x)=r_1(x)\,.\,q_2(x)+r_2(x).$$

Powtarzając wskazane działania, otrzymamy kolejno:

$$r_1(x)=r_2(x)\,.\,q_3(x)+r_3(x),$$
$$r_2(x)=r_3(x)\,.\,q_4(x)+r_4(x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ogólnie: $$r_{\mu-2}(x)=r_{\mu-1}(x)\,.\,q_\mu(x)+r_\mu(x),$$

gdzie $r_\mu(x)$ będzie funkcyą całkowitą, stopnia najwyżej $(m-\mu)$-go.

zatem: $x=a.\frac{1+z}{1-z}$, skąd wypada: $dx=\frac{2adz}{(1-z)^2}$,

a zarazem $x^2-a^2=\frac{4a^2z}{(1-z)^2}$.

Wobec tego, dana całka przedstawi się w postaci:

$$\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^n}=\int\frac{2adz}{(1-z)^2}\cdot\frac{(1-z)^{2n}}{2^{2n}.a^{2n}.z^n}=\frac{1}{(2a)^{2n-1}}\int\frac{(1-z)^{2n-2}}{z^n}dz,$$

którą łatwo scałkować, rozwijając licznik $(1-x)^{2n-2}$ według wzoru Newtona.

Mianowicie otrzymujemy:

$$\frac{(1-z)^{2n-2}}{z^n}=\frac{1}{z^n}-\binom{2n-2}{1}\cdot\frac{1}{z^{n-1}}+\binom{2n-2}{2}\cdot\frac{1}{z^{n-2}}-\ldots+(-1)^{n-1}\binom{2n-2}{n-1}\cdot\frac{1}{z}+$$
$$+(-1)^n\binom{2n-2}{n}+\ldots+\binom{2n-2}{2}z^{n-4}-\binom{2n-2}{1}z^{n-3}+z^{n-2},$$

czyli:

$$\frac{(1-z)^{2n-2}}{z^n}=\left(\frac{1}{z^n}+z^{n-2}\right)-\binom{2n-2}{1}\left(\frac{1}{z^{n-1}}+z^{n-3}\right)+\binom{2n-2}{2}\left[\frac{1}{z^{n-2}}+z^{n-4}\right]+$$
$$+\ldots+(-1)^n\binom{2n-2}{n-2}\left[\frac{1}{z^2}+1\right]+(-1)^{n-1}\binom{2n-2}{n-1}\cdot\frac{1}{z},$$

a zatem:

$$\int\frac{(1-z)^{2n-2}}{z^n}dz=\frac{1}{n-1}\left\{z^{n-1}-\frac{1}{z^{n-1}}\right\}-\binom{2n-2}{1}\cdot\frac{1}{n-2}\left\{z^{n-2}-\frac{1}{z^{n-2}}\right\}+$$
$$+\binom{2n-2}{2}\cdot\frac{1}{n-3}\left\{z^{n-3}-\frac{1}{z^{n-3}}\right\}-\ldots+(-1)^n\binom{2n-2}{n-2}\left\{z-\frac{1}{z}\right\}+(-1)^{n-1}\binom{2n-2}{n-1}\log z.$$

Zastępując teraz z przez $\frac{x-a}{x+a}$, otrzymamy wzór:

$$\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^n}=\frac{1}{(2a)^{2n-1}}\left[\frac{1}{n-1}\left\{\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^{n-1}-\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{n-1}\right\}-\binom{2n-2}{1}\cdot\frac{1}{n-2}\left\{\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^{n-2}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{n-2}\right\}+\ldots+(-1)^n\binom{2n-2}{n-2}\left\{\frac{x-a}{x+a}-\frac{x+a}{x-a}\right\}\right]+$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2a)^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1}\log\frac{x-a}{x+a}+C.$$

19. Całkowanie funkcyj ułamkowych za pomocą wzorów redukcyjnych. Jakkolwiek w rozkładaniu funkcyj wymiernych, ułamkowych na ułamki częściowe, posiadamy ogólną metodę całkowania funkcyj wymiernych, to jednak metoda ta połączona jest często z mozolnemi rachunkami, zanim dojdzie się do wyniku Z tego powodu wyprowadza się za pomocą metod elementarnych, najczęściej za pomocą metody całkowania przez części, opartej na wzorze: $\int udv=uv-\int vdu$, dla poszczególnych typów całek odpowiednie wzory redukcyjne, które wyznaczanie całego tego typu całek sprowadzają do wyznaczania całki możliwie najprostszej, względnie do całki zasadniczej.

20. Wzór redukcyjny dla całek typu $J_{mr}=\int\frac{x^m\,dx}{(ax^2+bx+c)^r}$. Kładąc $ax^2+bx+c=X$ i uwzględniając, że:

$$x^m=\frac{1}{a}x^{m-2}[ax^2-bx+c-(bx+c)]=\frac{1}{a}x^{m-2}[X-bx-c],$$

otrzymujemy wzór:

$$\int\frac{x^m dx}{X^r}=\frac{1}{a}\int\frac{x^{m-2}}{X^{r-1}}dx-\frac{b}{a}\int\frac{x^{m-1}}{X^r}dx-\frac{c}{a}\int\frac{x^{m-2}}{X^r}dx. \qquad (17)$$

Celem wyznaczenia całki: $\int\frac{x^{m-2}}{X^{r-1}}dx=\int x^{m-2}.X^{-r+1}dx$,

położmy: $x^{m-2}dx=du$, $X^{-r+1}=v$ | a zatem: $u=\frac{x^{m-1}}{m-1}$, $dv=-(r-1)X^{-r}dX$

[wt]enczas, otrzymujemy wzór:

$$\int\frac{x^{m-2}dx}{X^{r-1}}=\frac{x^{m-1}}{(m-1)X^{r-1}}+\frac{r-1}{m-1}\int\frac{x^{m-1}dX}{X^r},$$

[któ]ry, ze względu na to, że $dX=(2ax+b)dx$, sprowadza się do postaci:

$$\int\frac{x^{m-2}dx}{X^{r-1}}=\frac{x^{m-1}}{(m-1)X^{r-1}}+\frac{2(r-1)a}{m-1}\int\frac{x^m dx}{X^r}+\frac{(r-1)b}{m-1}\int\frac{x^{m-1}}{X^r}dx.$$

Wobec tego, na podstawie wzoru (17), otrzymujemy:

$$\int\frac{x^m dx}{X^r}=\frac{1}{(m-1)a}\frac{x^{m-1}}{X^{r-1}}+\frac{2(r-1)}{m-1}\int\frac{x^m dx}{X^r}+\frac{r-1}{m-1}\frac{b}{a}\int\frac{x^{m-1}dx}{X^r}-\frac{b}{a}\int\frac{x^{m-1}dx}{X^r}-\frac{c}{a}\int\frac{x^{m-2}dx}{X^r}$$

[a] stąd:

$$\left(1-\frac{2r-2}{m-1}\right)\int\frac{x^m dx}{X^r}=\frac{1}{(m-1)a}\frac{x^{m-1}}{X^{r-1}}+\left(\frac{r-1}{m-1}-1\right)\frac{b}{a}\int\frac{x^{m-1}dx}{X^r}-\frac{c}{a}\int\frac{x^{m-2}dx}{X^r},$$

[zat]em wzór redukcyjny:

$$\int\frac{x^m dx}{X^r}=\frac{1}{(m-2r+1)a}\cdot\frac{x^{m-1}}{X^{r-1}}+\frac{(r-m)b}{(m-2r+1)a}\int\frac{x^{m-1}}{X^r}dx-\frac{(m-1)c}{(m-2r+1)a}\int\frac{x^{m-2}dx}{X^r}, \qquad (18)$$

który wyznaczenie całki: $\int\frac{x^m dx}{X^r}$, sprowadza ostatecznie do całek: $\int\frac{xdx}{X^r}$ i $\int\frac{dx}{X^r}$, czyli do całki $\int\frac{dx}{X^r}$, gdyż:

$$\int\frac{xdx}{X^r}=\frac{1}{2a}\int\frac{2ax+b}{X^r}dx-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{X^r}=-\frac{1}{2a(r-1)X^{r-1}}-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{X^r}, \qquad (19)$$

Możemy więc, nie rozkładając funkcyi $\frac{x^m}{X^r}$ na ułamki proste, całkę $\int\frac{x^m dx}{X^r}$ o całkowitym wykładniku $m \gtreqless 2r-1$, za pomocą wzoru (18) sprowadzić do całki $\int\frac{dx}{X^r}$ o wykładniku $m=0$, do której możemy znowu stosować wzory redukcyjne (16) i (16') wyprowadzone w art. 16. str. 27. Wykład II.

W przypadku $m=2r-1$, otrzymujemy, na podstawie wzoru (17), wzór redukcyjny w postaci:

$$\int\frac{x^{2r-1}}{X^r}dx=\frac{1}{a}\int\frac{x^{2r-3}}{X^{r-1}}dx-\frac{b}{a}\int\frac{x^{2r-2}}{X^r}dx-\frac{c}{a}\int\frac{x^{2r-3}}{X^r}dx.$$

21. Zastępując we wzorze (18) m przez $-m$, otrzymujemy:

$$\int\frac{dx}{x^m X^r}=\frac{1}{(-m-2r+1)a}\cdot\frac{1}{x^{m+1}X^{r-1}}+\frac{(r+m)b}{(-m-2r+1)a}\int\frac{dx}{x^{m+1}X^r}-$$
$$-\frac{(-m-1)c}{(-m-2r+1)a}\int\frac{dx}{x^{m+2}X^r}, \quad \text{więc}$$

$$\int\frac{dx}{x^{m+2}X^r}=-\frac{1}{(m+1)c}\frac{1}{x^{m+1}X^{r-1}}-\frac{(r+m)b}{(m+1)c}\int\frac{dx}{x^{m+1}X^r}-\frac{(m+2r-1)a}{(m+1)c}\int\frac{dx}{x^m X^r},$$

[s]kąd, zastępując $m+2$ przez m, otrzymujemy wzór redukcyjny:

$$\int\frac{dx}{x^m X^r}=-\frac{1}{(m-1)c}\frac{1}{x^{m-1}X^{r-1}}-\frac{(r+m-2)b}{(m-1)c}\int\frac{dx}{x^{m-1}X^r}-\frac{(m+2r-3)a}{(m-1)c}\int\frac{dx}{x^{m-2}X^r}, \qquad (20)$$

który wyznaczenie całki $\int\frac{dx}{x^m X^r}$, w przypadku $m>1$ sprowadza ostatecznie do całek: $\int\frac{dx}{x.X^r}$ i $\int\frac{dx}{X^r}$

W przypadku $m=1$, określonym całką $\int\frac{dx}{x\,.\,X^r}$, możemy znowu zastosować wzór (17). Kładąc w nim $m=1$, otrzymujemy:

$$\int\frac{xdx}{X^r}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{xX^{r-1}}-\frac{b}{a}\int\frac{dx}{X^r}-\frac{c}{a}\int\frac{dx}{xX^r},$$

skąd wypływa:

$$\int\frac{dx}{xX^r}=\frac{1}{c}\int\frac{dx}{xX^{r-1}}-\frac{b}{c}\int\frac{dx}{X^r}-\frac{a}{c}\int\frac{xdx}{X^r},\tag{21}$$

a że:

$$\int\frac{xdx}{X^r}=-\frac{1}{2a(r-1)X^{r-1}}-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{X^r},$$

przeto otrzymujemy wzór:

$$\int\frac{dx}{xX^r}=\frac{1}{2(r-1)c}\cdot\frac{1}{X^{r-1}}+\frac{1}{c}\int\frac{dx}{xX^{r-1}}-\frac{b}{2c}\int\frac{dx}{X^r},\tag{22}$$

który wyznaczenie całki $\int\frac{dx}{xX^r}$ sprowadza do całek $\int\frac{dx}{xX}$ i $\int\frac{dx}{X}$, czyli wprost do całki $\int\frac{dx}{X}$, gdyż na podstawie wzoru (21) mamy:

$$\int\frac{dx}{xX}=\frac{1}{c}\int\frac{dx}{x}-\frac{b}{c}\int\frac{dx}{X}-\frac{a}{c}\int\frac{xdx}{X},$$

skąd, ze względu na to, że:

$$\int\frac{xdx}{X}=\frac{1}{2a}\log X-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{X},$$

otrzymujemy:

$$\int\frac{dx}{xX}=\frac{1}{c}\log x-\frac{b}{c}\int\frac{dx}{X}-\frac{1}{2c}\log X+\frac{b}{2c}\int\frac{dx}{X},$$

czyli:

$$\int\frac{dx}{xX}=\frac{1}{2c}\log\frac{x^2}{X}-\frac{b}{2c}\int\frac{dx}{X}.\tag{23}$$

Jesteśmy więc zawsze w stanie całki kształtu $\int\frac{x^m dx}{X^r}$ i $\int\frac{dx}{x^m X^r}$ przy dowolnych całkowitych wykładnikach m i r za pomocą wzorów redukcyjnych sprowadzić do całki typu:

$$\int\frac{dx}{X}=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Ćwiczenia III.

1) $\int\frac{3x^2-5x+2}{x^3-2x^2+3x-6}dx=\frac{4}{7}\log(x-2)+\frac{17}{14}\log(x^2+3)-\frac{\sqrt{3}}{21}\operatorname{arctang}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$

2) $\int\frac{x^2dx}{x^4+x^2-2}=\frac{1}{6}\log\frac{x-1}{x+1}+\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$

3) $\int\frac{dx}{a^4-x^4}=\frac{1}{4a^2}\log\frac{a+x}{a-x}+\frac{1}{2a^2}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{a}+C.$

4) $\int\frac{2x^2-3a^2}{x^4-a^4}dx=-\frac{1}{4a}\log\frac{x-a}{x+a}+\frac{5}{2a}\operatorname{arctang}\frac{x}{a}+C.$

5) $\int\frac{dx}{x^4+x^3+x^2+x}=\log\frac{x}{\sqrt{x+1}\sqrt[4]{x+1}}-\frac{1}{2}\operatorname{arctang}x+C.$

6) $\int\frac{dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\log(x+1)-\frac{1}{3}\log\sqrt{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctang}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$

7) $\int\frac{dx}{x^3-1}=\frac{1}{3}\log(x-1)-\frac{1}{3}\log\sqrt{x^2+x+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctang}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$

8) $\int \frac{dx}{x^4-1} = {}^1\!/_4 \log \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2} \operatorname{arctang} x + C.$

9) $\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctang} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + C.$

10) $\int \frac{x^2dx}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \sqrt{\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctang} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + C.$

11) $\int \frac{dx}{x^6-1} = \frac{1}{6} \log \frac{(x-1)\sqrt{x^2-x+1}}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctang} \frac{x\sqrt{3}}{1-x^2} + C.$

12) $\int \frac{dx}{x^6+1} = \frac{1}{4\sqrt{3}} \log \frac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2} + \frac{1}{6} \operatorname{arctang} \frac{3x(1-x^2)}{1-4x^2+x^4} + C.$

13) $\int \frac{x^2dx}{x^3+5x^2+8x+4} = \frac{4}{x+2} + \log(x+1) + C.$

14) $\int \frac{x^3+4x^2+6x}{x^4+2x^3+3x^2+4x+2}\, dx = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3} \log \frac{(x^2+2)^2}{x+1} + \frac{4\sqrt{2}}{3} \operatorname{arctang} \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$

15) $\int \frac{dx}{x^5+2x^3+3x^2} = -\frac{1}{3x} + \frac{1}{90} \log \frac{(x+1)^{18}(x^2-x+3)}{x^{20}} -$

$- \frac{13}{45\sqrt{11}} \operatorname{arctang} \frac{2x-1}{\sqrt{11}} + C.$

16) $\int \frac{2x^3+7x^2+6x+2}{x^4+3x^3+2x^2}\, dx = -\frac{1}{x} + \log \frac{(x+1)\sqrt{x^3}}{\sqrt{x+2}} + C.$

17) $\int \frac{x^2+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}\, dx = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \log \frac{x-1}{x} + C.$

18) $\int \frac{x^3-6x^2+15x-2}{x^4-4x^3+16x-16}\, dx = -\frac{3}{2(x-2)^2} + \log(x+2) + C.$

19) $\int \frac{x^2+3x-4}{x^3-6x^2+12x-8}\, dx = -\frac{3}{(x-2)^2} - \frac{7}{x-2} + \log(x-2) + C.$

20) $\int \frac{x^3dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2(x^2+1)} + \log \sqrt{x^2+1} + C.$ 21) $\int \frac{x^2+1}{x^3-x}\, dx = \log \frac{x^2-1}{x} + C.$

22) $\int \frac{x^2\,dx}{x^6-10x^3+9} = \frac{1}{24} \log \frac{x^3-9}{x^3-1} + C.$ 23) $\int \frac{6x^5\,dx}{(5-7x^3)^3} = \frac{x^6}{5(5-7x^3)^2} + C.$

24) $\int \frac{15dx}{x^4(5+3x^3)^2} = \frac{6}{25} \log \frac{5+3x^3}{x^3} - \frac{5+6x^3}{5x^3(5+3x^3)} + C.$

25) $\int \frac{x^2\,dx}{1-x^6} = {}^1\!/_6 \log \frac{x^3+1}{x^3-1} + C.$

26) $\int \frac{12x^5\,dx}{(x^4+1)^2} = \frac{3x^4(x^8-3x^4-4)+6}{2(x^4+1)} + \log(x^4+1)^9 + C.$

27) $\int \frac{8dx}{7x+3x^5} = \frac{2}{7} \log \frac{x^4}{7+3x^4} + C.$ 28) $\int \frac{dx}{x(5x^6+3)} = \frac{1}{18} \log \frac{x^6}{5x^6+3} + C.$

29) $\int \frac{12dx}{x^7(x^6-2)} = \frac{1}{x^6} - \frac{1}{2} \log \frac{x^6}{x^6-2} + C.$

30) $\int \frac{5dx}{x^3(5-6x)^2} = \left[-\frac{1}{x} + \frac{12}{5}\right] \frac{1}{5-6x} - {}^{12}\!/_{25} \log \frac{5-6x}{x} + C.$

31) $\int \frac{x^3dx}{(x^4-x^2+1)^2} = \frac{x^2-2}{6(x^4-x^2+1)} + \frac{\sqrt{3}}{9} \operatorname{arctang} \frac{2x^2-1}{\sqrt{3}} + C.$

Wyprowadzić następujące wzory redukcyjne:

32) $\int \frac{dx}{x^m(a+bx)} = -\frac{1}{a(m-1)x^{m-1}} - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{x^{m-1}(a+bx)} \quad (m \gtrless 1),$

przyczem $\int \frac{dx}{x(a+bx)} = -\frac{1}{a} \log \frac{a+bx}{x} + C.$

33) $\int \frac{dx}{x(a+bx)^n} = \frac{1}{a(n-1)(a+bx)^{n-1}} + \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x(a+bx)^{n-1}}, \ (n \gtrless 1).$

34) $\int \frac{(a+bx)^n}{x}\,dx = \frac{(a+bx)^n}{n} + a\int \frac{(a+bx)^{n-1}}{x}\,dx, \ (n \gtrless 0),$

przyczem $\int \frac{a+bx}{x}\,dx = a\log x + bx + C.$

35) $\int \frac{(a+bx)^n}{x^m}\,dx = -\frac{(a+bx)^{n+1}}{a(m-1)x^{m-1}} + \frac{n-m+2}{m-1}\cdot\frac{b}{a}\int \frac{(a+bx)^n}{x^{m-1}}\,dx, \ (m \gtrless 1).$

36) $\int \frac{dx}{x^m(a+bx)^n} = -\frac{1}{a(m-1)x^{m-1}(a+bx)^{n-1}} - \frac{m+n-2}{m-1}\,\frac{b}{a}\int \frac{dx}{x^m(a+bx)^{n-1}}.$

37) $\int \frac{dx}{(a+bx^2)^n} = \frac{x}{2a(n-1)(a+bx^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a(n-1)}\int \frac{dx}{(a+bx^2)^{n-1}},$

przyczem $\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctang}\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + C;\ \int \frac{dx}{a-bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}}\log\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}} + C.$

38) $\int \frac{x^m\,dx}{a+bx^2} = \frac{x^{m-1}}{b(m-1)} - \frac{a}{b}\int \frac{x^{m-2}\,dx}{a+bx^2}$, przyczem $\int \frac{x\,dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b}\log(a+bx^2) + C.$

39) $\int \frac{x^m\,dx}{(a+bx^2)^n} = \frac{1}{b}\int \frac{x^{m-2}\,dx}{(a+bx^2)^{n-1}} - \frac{a}{b}\int \frac{x^{m-2}\,dx}{(a+bx^2)^n}.$

40) $\int \frac{dx}{x^m(a+bx^2)^n} = -\frac{1}{a(m-1)x^{m-1}(a+bx^2)^n} - \frac{b(2n+m-3)}{a(m-1)}\int \frac{dx}{x^{m-1}(a+bx^2)^n}.$

41) $\int \frac{dx}{(a+bx^3)^n} = \frac{x}{3a(n-1)(a+bx^3)^{n-1}} + \frac{3n-2}{3a(n-1)}\int \frac{dx}{(a+bx^3)^{n-1}}$, przyczem

$\int \frac{dx}{a+bx^3} = \frac{\lambda}{3a}\left[\frac{1}{2}\log\frac{(x+\lambda)^2}{x^2-\lambda x+\lambda^2} + \sqrt{3}\operatorname{arctang}\frac{x\sqrt{3}}{2\lambda-x}\right] + C$, gdzie $\lambda = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}.$

Wyznaczyć *NWP* licznika i mianownika następujących funkcyj ułamkowych, wymiernych:

42) $\frac{x^4-2x^3+3x^2-2x+1}{x^6-1}$. 43) $\frac{x^9+1}{x^{11}+1}$. 44) $\frac{x^3-x^2-8x+12}{x^3+4x^2-3x-18}$. 45) $\frac{x^4-7x^3-22x^2+139x+105}{x^4-8x^3-11x^2+116x+70}$.

46) $\frac{x^5-2x^4-2x^3+4x^2+x-2}{x^5+2x^4-2x^3-8x^2-7x-2}$. 47) $\frac{x^8+6x^6-8x^4+1}{x^{12}-7x^{10}-3x^8-3x^2-2}$.

48) $\frac{x^4+64a^4}{(x+2a)^4-16a^4}$. 49) $\frac{x^n-nx+(n-1)}{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}$.

Następujące funkcye wymierne, ułamkowe przedstawić w najprostszej postaci i wyznaczyć ich funkcye pierwotne:

50) $\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2-8x+15)(x^2+8x+15)}{x^2-25}.$

51) $\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)-760(x-6)+120(x-7)}{(x-6)(x-7)}.$

52) $\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2-x+1)(x^3-1)}{x^4+x^2+1}$. 53) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3+2x^2-x+6}{x^3-x^2+4x-4}.$

54) $\frac{dy}{dx} = \frac{9x^3+53x^2-9x-18}{4x^2+44x+120}$. 55) $\frac{dy}{dx} = \frac{6x^3+13ax^2-9a^2x-10a^3}{9x^3+12ax^2-11a^2x-10a^3}.$

56) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^3-x^2-x-1}{3x^3+5x^2+3x+1} + \frac{x^3+3x^2+5x+3}{x^3+x^2+x-3}.$

57) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^4+2x^3-2x-1}{x^4+x^3-3x^2-5x-2} - \frac{x^4+x^3-3x^2-5x-2}{x^4+2x^3-2x-1}.$

58) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^6-2x^3+1}{x^2-2x+1} + \frac{x^6+2x^3+1}{x^2+2x+1}.$

Wyznaczyć część algebraiczną następujących całek:

59) $\int \frac{x^5 dx}{(x^2+1)^3}$. 60) $\int \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^3}$. 61) $\int \frac{x^4 dx}{(x^2+1)^5}$. 62) $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2}$.

63) $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^4}$. 64) $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$. 65) $\int \frac{dx}{x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+1}$.

66) $\int \frac{dx}{x^3-x^2-x+1}$. 67) $\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+5x+4)^2}$. 68) $\int \frac{3x^2-2x+7}{x^3+3x^2-4} dx$.

69) $\int \frac{x^3-6x^2+3x-9}{x^4+14x^3+73x^2+168x+144} dx$. 70) $\int \frac{dx}{x^3+5x^2}$.

Wykazać, że:

71) $\int \frac{x^2-3x+1}{(x-2)^3(x-3)^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} + C.$

72) $\int \frac{dx}{(x^2-4x+5)(x^2-6x+13)} = \frac{1}{20} \log \frac{x^2-4x+5}{x^2-6x+13} + \frac{1}{5} \text{arc tang}(x-2) -$

$- \frac{1}{10} \text{arc tang} \frac{x-3}{2} + C.$

Rozwiązania III. 1—21) Metodą rozkładania na ułamki częściowe. 22)—25) Podstawienie $x^3 = z$. 26)—27) $x^4 = z$. 28)—29) $x^6 = z$. 30) $\frac{5-6x}{x} = z$. 31) $x^2 = z$. 32)—41) stosownem przekształceniem i całkowaniem przez części. 42) x^2-x+1. 43) $x+1$. 44) x^2+x-6. 45) $x^2-12x+35$. 46) x^3-3x-2. 47) x^2-1. 48) $x^2+4ax+8a^2$. 49) $(x-1)^2$. 50) $y={}^1/_3x^3-9x+C$. 51) ${}^1/_4x^4-{}^2/_3x^3+{}^{17}/_2x^2+80x+C-40\log(x-7)$. 52) ${}^1/_2x^2-x+C$. 53) $\int \frac{x+3}{x^2+x-2} dx$. 54) $\int \frac{9x^2-x-3}{4(x+5)} dx$. 55) $\int \frac{2x+5a}{3x+5a} dx$. 56) $\int \frac{2(x^2+1)}{x^2-1} dx$. 57) $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+2} dx$. 58) $\int (2x^4+6x^2+2) dx$. 59) $\frac{4x^2+3}{4(x^2+1)^2}$. 60) $\frac{x^3-8a^2x}{64a^2(x^2+a^2)^2}$. 61) $\frac{3x^7+11x^5-11x^3+3x}{128(x^2+1)^4}$. 62) $-\frac{2+3x^2}{2x(x^2+1)}$. 63) $-\frac{105x^6+280x^4+231x^2+64}{64x(x^2+1)^3}$. 64) $\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}$. 65) $\frac{x+1}{4(x^2+1)}$. 66) $-\frac{1}{2(x-1)}$. 67) $\frac{7x+13}{9(x^2+5x+4)}$. 68) $\frac{23}{3(x+2)}$. 69) $\frac{280x+939}{x^2+7x+12}$. 70) $-\frac{1}{5x}$. 71) Funkcya czysto algebraiczna. 72) Funkcya czysto przestępna.

Literatura. J. Bertrand. Traité de calcul différentiel et de calcul integral. Paris 1870. Ch. Hermite. Cours d'analyse de l'école polytechnique. Paris 1873. Handbuch der Mathematik, herausgegeben von Geh. Schulrath Dr. Schlömilch, unter Mitwirkung von Prof. Dr. Reidt und Prof. Dr. Heger II. B. Breslau 1881. Integralrechnung, bearbeitet von Dr. Richard Heger a. o. Honorarprofessor am Kgl. Polytechnikum zu Dresden.

Tematy do rozpraw naukowych:

1. Znaczenie i sposoby wyznaczania residuów danej funkcyi ułamkowej.
2. Sposoby bezpośredniego wyznaczania części algebraicznej w całce funkcyi algebraicznej, wymiernej.
3. Całki funkcyj, wymiernych, typu: $\int \frac{dx}{(x^2 \pm a^2)^n}$ i sposoby ich wyznaczania.

Wykład IV.

Całki funkcyj algebraicznych, niewymiernych.

1. Zasadnicza metoda całkowania funkcyj algebraicznych, niewymiernych polega na sprowadzeniu danej całki, za pomocą stosownego podstawienia, do całki funkcyi wymiernej. Całki, w których takie przekształcenie jest możliwem, jak obaczymy, nieliczne, dadzą się ostatecznie wyrazić przez funkcye algebraiczne, wymierne, lub niewymierne i przez funkcye logarytmiczne, względnie cyklometryczne i nie prowadzą do żadnych innych funkcyj przestępnych. W niniejszym wykładzie przejdziemy po kolei główne rodzaje funkcyj algebraicznych, niewymiernych, których całkowanie da się sprowadzić do całkowania funkcyj algebraicznych, wymiernych.

2. Całki funkcyj algebraicznych, niewymiernych, zawierających ułamkowe potęgi zmiennej. Całki tego rodzaju przedstawiają się ogólnie w postaci:

$$J=\int\frac{a_1x^{\alpha_1}+a_2x^{\alpha_2}+\ldots+a_rx^{\alpha_r}}{b_1x^{\beta_1}+b_2x^{\beta_2}+\ldots+b_mx^{\beta_m}}\,dx, \tag{1}$$

w której wykładniki α i β są wszystkie liczbami ułamkowemi, sprowadzonemi do najprostszej formy. Oznaczywszy przez n najmniejszy wspólny mianownik tych ułamków, połóżmy $x=z^n$, a więc $dx=nz^{n-1}dz$, natenczas sprowadzimy daną całkę do postaci:

$$\int\frac{a_1x^{\alpha_1}+a_2x^{\alpha_2}+\ldots+a_rx^{\alpha_r}}{b_1x^{\beta_1}+b_2x^{\beta_2}+\ldots+b_mx^{\beta_m}}\,dx=\int\frac{a_1z^{n\alpha_1}+a_2z^{n\alpha_2}+\ldots+a_rz^{n\alpha_r}}{b_1z^{n\beta_1}+b_2z^{n\beta_2}+\ldots+b_mz^{n\beta_m}}\,z^{n-1}\,dz,$$

w której wykładniki $n\alpha$, $n\beta$, będą już liczbami całkowitemi. Funkcya, znajdująca się pod znakiem całkowania będzie już funkcyą wymierną, ułamkową, jej całka da się więc zawsze wyznaczyć i będzie się składać ogólnie z pewnej funkcyi algebraicznej $R(z)$ i pewnej funkcyi przestępnej $\Phi(z)$.

Wobec tego, szukana całka przedstawi się w postaci: $J=R(\sqrt[n]{x})+\Phi(\sqrt[n]{x})$ będzie się więc składać z pewnej funkcyi algebraicznej, niewymiernej i z funkcyj logarytmicznych, względnie cyklometrycznych.

3. Przykłady. Wyznaczyć całkę J, kształtu:

$$J=\int\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx=\int\frac{1+x^{1/2}}{1+x^{1/3}}\,dx.$$

Połóżmy $x=z^6$, a więc $dx=6z^5dz$, a otrzymamy:

$$J=6\int\frac{1+z^3}{1+z^2}\,z^5\,dz=6\int\frac{z^8+z^5}{z^2+1}\,dz.$$

a że:

$$\frac{z^8+z^5}{z^2+1}=z^6-z^4+z^3+z^2-z-1+\frac{z+1}{z^2+1}.$$

przeto: $$J=6\left\{\frac{z^7}{7}-\frac{z^5}{5}+\frac{z^4}{4}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^2}{2}-z\right\}+\log(z^2+1)^3+6\operatorname{arctang} z.$$

Zastępując z przez $\sqrt[6]{x}$, otrzymujemy więc:

$$\int\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx=6\sqrt[6]{x}\left\{\frac{x}{7}-\frac{\sqrt[3]{x^2}}{5}+\frac{\sqrt{x}}{4}+\frac{\sqrt[3]{x}}{3}-\frac{\sqrt[6]{x}}{2}-1\right\}+$$
$$+\log(\sqrt[3]{x}+1)^3+6\operatorname{arctang}\sqrt[6]{x}+C.$$

2. Wyznaczyć całkę J, kształtu:

$$J=\int\frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}=\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x^5}}.$$

Podstawiając znowu $x=z^6$, a więc $dx=6z^5dz$, otrzymujemy:

$$J=6\int\frac{z^5dz}{z^3+z^5}=6\int\frac{z^2dz}{1+z^2},$$

a że: $$\frac{z^2}{z^2+1}=1-\frac{1}{z^2+1},$$

przeto: $$J=6(z-\operatorname{arctg} z)+C,$$

czyli: $$\int\frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}=6\left\{\sqrt[6]{x}-\operatorname{arctang}\sqrt[6]{x}\right\}+C.$$

4. Całki funkcyj algebraicznych, niewymiernych, zawierających ułamkowe potęgi dwumianu: $ax+b$. Całki tego rodzaju przedstawiają się w postaci:

$$J=\int R[x,\ (ax+b)^\alpha,\ (ax+b)^\beta,\ (ax+b)^\gamma,\ldots]\,dx, \tag{2}$$

gdzie R przedstawia dowolną funkcyę wymierną argumentów: x, $(ax+b)^\alpha$,... a wykładniki α, β, γ,... są ułamkami wymiernemi, sprowadzonemi do najprostszej formy.

Oznaczmy przez n najmniejszy wspólny mianownik tych ułamków i połóżmy:

$$ax+b=z^n,\ \text{a więc}\ x=\frac{z^n-b}{a},\ dx=\frac{n}{a}z^{n-1}dz,$$

natenczas otrzymamy daną całkę w postaci:

$$J=\int R[x,\ (ax+b)^\alpha,\ (ax+b)^\beta,\ldots]\,dx=\frac{n}{a}\int R\left[\frac{z^n-b}{a},\ z^{n\alpha},\ z^{n\beta},\ldots\right]z^{n-1}dz,$$

w której nowa zmienna występuje już tylko z wykładnikami całkowitemi, a więc w postaci wymiernej.

5. Przykłady. Wyznaczyć następujące całki:

1) $J=\int\frac{dx}{m+n\sqrt{ax+b}}$.

Podstawiając $ax+b=z^2$, a więc: $x=\frac{z^2-b}{a}$, $dx=\frac{2z}{a}dz$, otrzymujemy:

$$J=\frac{2}{a}\int\frac{zdz}{m+nz}=\frac{2}{an}\int\left(1-\frac{m}{m+nz}\right)dz=\frac{2}{an}\left[z-\frac{m}{n}\log(m+nz)\right],$$

skąd, zastępując z przez $\sqrt{ax+b}$, otrzymujemy wzór:

$$\int\frac{dx}{m+n\sqrt{ax+b}}=\frac{2}{an}\left[\sqrt{ax+b}-\frac{m}{n}\log\left(m+n\sqrt{ax+b}\right)\right]+C.$$

2) $J=\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{x-1}}$.

Kładąc $x-1=z^2$, a więc $x=z^2+1$, $dx=2zdz$, mamy:

$$J=\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{x-1}}=2\int\frac{(z^2+1)^3zdz}{z}=2\int(z^6+3z^4+3z^2+1)\,dz=$$
$$=2\left[{}^1\!/_7z^7+{}^3\!/_5z^5+z^3+z\right],$$

zatem: $$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x-1}}=2\sqrt{x-1}\left\{{}^1/_7(x-1)^3+{}^3/_5(x-1)^2+x\right\}+C.$$

6. Całki funkcyj algebraicznych, niewymiernych, zawierających niewymierność ułamkowe potęgi funkcyi: $\frac{ax+b}{a'x+b'}$. Całki tego rodzaju przedstawiają się w postaci:

$$J=\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{a'x+b'}\right)^\alpha, \left(\frac{ax+b}{a'x+b'}\right)^\beta ...\right]dx,$$

gdzie R jest funkcyą wymierną całkowitą, lub ułamkową funkcyj:

$$x, \left(\frac{ax+b}{a'x+b'}\right)^\alpha, \left(\frac{ax+b}{a'x+b'}\right)^\beta, ...$$

w których α, β są ułamkami wymiernymi.

Oznaczając przez n najmniejszy wspólny mianownik tych ułamków, położmy
$$\frac{ax+b}{a'x+b'}=z^n, \text{ a więc } x=\frac{b'z^n-b}{a-a'z^n},$$

$$dx=n(ab'-a'b)\frac{z^{n-1}dz}{(a-a'z^n)^2},$$

natenczas, otrzymamy daną całkę w postaci:

$$J=n(ab'-a'b)\int R\left(\frac{b'z^n-b}{a-a'z^n}, z^{n\alpha}, z^{n\beta}, ...\right)\frac{z^{n-1}dz}{(a-a'z^n)^2},$$

gdzie wykładniki zmiennej z są już liczbami całkowitemi, zatem:

$$J=n(ab'-a'b)\int R_1(z)\,dz,$$

gdzie $R_1(z)$ jest funkcyą wymierną zmiennej $z=\left(\frac{ax+b}{a'x+b'}\right)^{\frac{1}{n}}$.

7. Przykład. Wyznaczyć całkę:

$$J=\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx.$$

Podstawiając $\frac{1-x}{1+x}=z^2$, a więc:

$$x=\frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad dx=-\frac{4z\,dz}{(1+z^2)^2},$$

sprowadzamy daną całkę do postaci wymiernej:

$$J=\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=4\int\frac{z^2dz}{(z^2-1)(z^2+1)}.$$

Mamy tu:

$$\frac{z^2}{(z^2-1)(z^2+1)}=\frac{z^2}{(z-1)(z+1)(z^2+1)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+1}+\frac{Cz+D}{z^2+1},$$

a więc tożsamość:

$$z^2=A(z+1)(z^2+1)+B(z-1)(z^2+1)+(Cz+D)(z^2-1),$$

która, dla $z=1$, daje $1=4A$, a więc $A={}^1/_4$, dla $z=-1$, daje $1=-4B$, a więc $B=-$ $z=i$, zaś $-1=-2(Ci+D)$ a więc $C=0$, $D={}^1/_2$.

Jest zatem:

$$\frac{z^2}{(z^2-1)(z^2+1)}=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right\}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z^2+1},$$

przeto: $$\int\frac{z^2dz}{(z^2-1)(z^2+1)}=\frac{1}{4}\log\frac{z-1}{z+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z,$$

a więc ostatecznie:

$$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=\log\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}+2\operatorname{arctang}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$$

8. Ogólne wnioski. Funkcye algebraiczne, niewymierne, w których niewymierność dotyczy samej zmiennej x, albo też jedynie pewnej funkcyi liniowej zmiennej, bądź to całkowitej, kształtu $ax+b$, bądź ułamkowej kształtu $\frac{ax+b}{a'x+b'}$, są, jak powyżej poznaliśmy, zawsze całkowalne, bez względu na stopień niewymierności, byle tylko wykładniki były ułamkami wymiernemi. Całki takich funkcyj dadzą się zawsze przekształcić na całki funkcyj algebraicznych, wymiernych, a więc wyznaczyć, jako sumy pewnych funkcyj algebraicznych, wymiernych, lub niewymiernych i pewnych funkcyj przestępnych, złożonych z funkcyj logarytmicznych, względnie cyklometrycznych.

Przejdźmy teraz do całek takich funkcyj niewymiernych, w których niewymierność dotyczy funkcyj całkowitej zmiennej x, stopnia drugiego.

9. Całki funkcyj algebraicznych, niewymiernych, zawierających, jako niewymierność kwadratowy pierwiastek z funkcyi drugiego stopnia. Niech będzie daną całka, kształtu:

$$J=\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\,)\,dx, \tag{4}$$

czyli $J=\int R(x,\ y)\,dx$, gdzie $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, o spółczynnikach rzeczywistych a, b, c, a $R(x,\ y)$ przedstawia funkcyą wymierną, całkowitą, lub ułamkową zmiennych x i y.

Aby całki tego rodzaju za pomocą stosownych podstawień sprowadzić do całek funkcyj algebraicznych, wymiernych, z rzeczywistemi spółczynnikami, odróżniamy przedewszystkiem następujące dwa przypadki:

a) Spółczynnik a przy x^2 jest liczbą dodatnią, czyli $a>0$.

W tym przypadku podstawmy:

$$y=\sqrt{ax^2+bx+c}=u-x\sqrt{a}, \tag{5}$$

gdzie u jest nową zmienną.

Wskutek tego podstawienia, otrzymujemy:

$$ax^2+bx+c=u^2+ax^2-2ux\sqrt{a}$$

a stąd:

$$x=\frac{u^2-c}{b+2u\sqrt{a}},$$

$$dx=\frac{(b+2u\sqrt{a})\,2u-(u^2-c)\,.\,2\sqrt{a}}{(b+2u\sqrt{a})^2}\,du=\frac{2[(u^2+c)\sqrt{a}+bu]}{(b+2u\sqrt{a})^2}\,du,$$

$$y=\sqrt{ax^2+bx+c}=u-x\sqrt{a}=u-\frac{(u^2-c)\sqrt{a}}{b+2u\sqrt{a}}=\frac{(u^2+c)\sqrt{a}+bu}{b+2u\sqrt{a}}.$$

Dana całka kształtu $\int R(x,y)\,dx$ przybiera, wskutek tego podstawienia kształt:

$$\int R(x,\ y)\,dx=\int R\left(\frac{u^2-c}{b+2u\sqrt{a}},\ \frac{(u^2+c)\sqrt{a}+bu}{b+2u\sqrt{a}}\right).\frac{2[(u^2+c)\sqrt{a}+bu]}{(b+2u\sqrt{a})^2}\,du=\int R_1(u)\,du$$

a więc zamienia się na całkę funkcyi wymiernej nowej zmiennej, kształtu: $\int R_1(u)\,du$, z rzeczywistemi spółczynnikami, gdy $a>0$.

Wyznaczywszy tę całkę, należy w wyniku położyć:

$$u=x\sqrt{a}+\sqrt{ax^2+bx+c}. \tag{5'}$$

b) Wyraz wolny funkcyi ax^2+bx+c jest liczbą dodatnią, czyli $c>0$.

W tym przypadku podstawmy:

$$y=\sqrt{ax^2+bx+c}=xu+\sqrt{c} \qquad (6)$$

gdzie u jest nową zmienną. Na mocy tego podstawienia, otrzymujemy:

$$ax^2+bx+c=x^2u^2+2ux\sqrt{c}+c,$$

a zatem:

$$ax^2+bx=x^2u^2+2ux\sqrt{c},$$

a stąd:

$$x=\frac{2u\sqrt{c}-b}{a-u^2},$$

$$dx=\frac{(a-u^2)\,2\sqrt{c}+(2u\sqrt{c}-b)2u}{(a-u^2)^2}\,du=\frac{2[(a+u^2)\sqrt{c}-bu]}{(a-u^2)^2}\,du,$$

$$y=\sqrt{ax^2+bx+c}=xu+\sqrt{c}=\frac{2u^2\sqrt{c}-bu}{a-u^2}+\sqrt{c}=\frac{(a+u^2)\sqrt{c}-bu}{a-u^2}.$$

Dana całka przybiera, wskutek tego podstawienia, kształt:

$$\int R(x,y)\,dx=\int R\left(\frac{2u\sqrt{c}-b}{r-u^2},\ \frac{(a+u^2)\sqrt{c}-bu}{a-u^2}\right)\frac{2[(a+u^2)\sqrt{c}-bu]}{(a-u^2)^2}\,du=\int R_2(u)\,du,$$

zamienia się więc na całkę funkcyi wymiernej nowej zmiennej u, kształtu: $\int R_2(u)\,du$, z rzeczywistemi spółczynnikami, gdy $c>0$. Wyznaczywszy tę całkę, należy w wyniku położyć:

$$u=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{c}}{x}. \qquad (6')$$

10. W obu powyższych przypadkach, w razie, gdy funkcya całkowita drugiego stopnia ax^2+bx+c da się rozłożyć na dwa czynniki rzeczywiste pierwszego stopnia, co ze względu na to, że:

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)],$$

zawsze nastąpi, gdy wyróżnik $\Delta=4ac-b^2<0$, możemy także użyć następującego podstawienia.

Przypuśćmy, że: $ax^2+bx+c=(px+q)(rx+s)$, wówczas podstawimy:

$$\sqrt{(px+q)(rx+s)}=(px+q)\,u \qquad (7)$$

a otrzymamy:

$$(px+q)(rx+s)=(px+q)^2.u^2,$$

zatem:

$$rx+s=(px+q)\,u^2,$$

a więc:

$$x(r-pu^2)=qu^2-s,$$

a stąd:

$$x=\frac{qu^2-s}{r-pu^2},$$

zatem:

$$dx=\frac{2(r-pu^2)\,qu+2\,(qu^2-s)\,pu}{(r-pu^2)^2}\,du=\frac{2(rq-sp)\,u}{(r-pu^2)^2}\,du,$$

$$y=(px+q)u=\left[p\frac{qu^2-s}{r-pu^2}+q\right]u=\frac{(rq-sp)\,u}{r-pu^2}.$$

Dana całka przedstawia się tedy w postaci:

$$\int R(x,y)\,dx=\int R\left(\frac{qu^2-s}{r-pu^2},\ \frac{(rq-sp)\,u}{r-pu^2}\right).\frac{2(rq-sp)u}{(r-pu^2)^2}\,du=\int R_3(u)\,du,$$

zamienia się więc także na całkę funkcyi wymiernej nowej zmiennej u, kształtu $\int R_3(u)\,du$, w której, po jej wyznaczeniu, należy podstawić:

$$u=\sqrt{\frac{rx+s}{px+q}}. \tag{7'}$$

Ostatniego podstawienia używamy szczególnie w przypadku, gdy oba pierwsze są niedopuszczalne, a więc, gdy zarówno $a<0$, jakoteż $c<0$, a także przytem wyróżnik $\Delta=4ac-b^2<0$, a więc trójmian:

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)],$$

da się rozłożyć na dwa czynniki rzeczywiste, stopnia pierwszego.

Gdyby jednak, przy $a<0$, $c<0$, był wyróżnik $\Delta=4ac-b^2>0$, a więc $4ac>b^2$, wówczas funkcya ax^2+bx+c byłaby, dla każdej rzeczywistej wartości x, ujemną, a więc zmienna $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ posiadałaby, dla każdej rzeczywistej wartości x, wartości urojone.

W tym wypadku nie podobna w całce kształtu $\int R, y)\,dx$ uniknąć spółczynników urojonych.

Podstawiając tedy:

$$y=\sqrt{ax^2+bx+c}=i\sqrt{-ax^2-bx-c}=i\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=iy_1,$$

gdzie $\alpha=-a$, $\beta=-b$, $\gamma=-c$, a więc $y_1=\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$, posiada pod pierwiastkiem kwadratowym spółczynniki dodatnie α i γ, otrzymujemy daną całkę w postaci:

$$\int R(x,\, y)\,dx=\int R(x,\, iy_1)\,dx,$$

do której możemy już zastosować poprzednie podstawienia.

Przypadek $\Delta=4ac-b^2=0$, pomijamy, gdyż wtedy całka $\int R(x,\, y)\,dx$ jest wprost całką funkcyi wymiernej.

Za pomocą jednego z powyżej wyłożonych podstawień, możemy więc całkowanie wszelkiej funkcyi niewymiernej, zawierającej, jako niewymierność kwadratowy pierwiastek z dowolnej funkcyi całkowitej drugiego stopnia, sprowadzić do całkowania funkcyi wymiernej nowej zmiennej u.

11. Przykłady.

1) Wyznaczyć całkę $J=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$.

Spółczynnnik przy x^2 jest tu dodatni, równy 1, użyjemy zatem podstawienia (5) w postaci:

$$\sqrt{x^2+px+q}=u-x,\ \text{czyli}\ u=x+\sqrt{x^2+px+q},$$

skąd dostajemy:
$$x^2+px+q=u^2-2ux+x^2,$$

a więc:
$$x=\frac{u^2-q}{p+2u},\quad dx=\frac{2(u^2+pu+q)}{(p+2u)^2}\,du,$$

$$\sqrt{x^2+px+q}=u-\frac{u^2-q}{p+2u}=\frac{u^2+pu+q}{p+2u}.$$

Otrzymujemy zatem:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}=\int\frac{2(u^2+pu+q)}{(p+2u)^2}\cdot\frac{p+2u}{u^2+pu+q}\,du=\int\frac{2du}{p+2u},$$

a że:
$$\int\frac{2du}{p+2u}=\log(p+2u)+C'=\log\left(\frac{p}{2}+u\right)+C,$$

przeto, kładąc: $$u=x+\sqrt{x^2+px+q},$$
dostajemy wzór:
$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}=\log\left[\frac{p}{2}+x+\sqrt{x^2+px+q}\right]+C.$$
W szczególności, otrzymujemy stąd wzory:
$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\log(x+\sqrt{x^2+a^2})+C,$$
$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\log(x+\sqrt{x^2-a^2})+C,$$
$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2px}}=\log[p+x+\sqrt{x^2+2px}]+C.$$

2) Wyznaczyć całkę $J=\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}$.

Spółczynnik przy x^2 jest tu ujemny, równy -1; jeżeli wyraz a jest dodatni, wówczas użyjemy podstawienia:
$$\sqrt{a+bx-x^2}=\sqrt{a}+xu,$$
czyli:
$$u=\frac{\sqrt{a+bx-x^2}-\sqrt{a}}{x}.$$
skąd dostajemy:
$$a+bx-x^2=a+2u\sqrt{a}x+x^2u^2,$$
a więc:
$$x=\frac{b-2u\sqrt{a}}{u^2+1}.$$
Stąd wynika:
$$dx=-\frac{2(\sqrt{a}+bu-u^2\sqrt{a})}{(u^2+1)^2}du,$$
$$\sqrt{a+bx-x^2}=\frac{\sqrt{a}+bu-u^2\sqrt{a}}{u^2+1}.$$
zatem otrzymujemy:
$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}=-2\int\frac{du}{u^2+1}=2\operatorname{arc\,tang}(-u),$$
czyli wzór:
$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}=2\operatorname{arc\,tang}\left[\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+bx-x^2}}{x}\right]+C.$$
Kładąc:
$$a+bx-x^2=a+\frac{b^2}{4}-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2,$$
otrzymujemy daną całkę także w postaci:
$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(a+\frac{b^2}{4}\right)-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2}},$$
czyli:
$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{a+\frac{b^2}{4}}}\arcsin\frac{x-\frac{b}{2}}{\sqrt{a+\frac{b^2}{4}}}+C.$$

W szczególności, otrzymujemy stąd wzory:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=2\,\mathrm{arc\,tang}\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}=\frac{1}{a}\mathrm{arc\,sin}\frac{x}{a}+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=2\,\mathrm{arc\,tang}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}=\mathrm{arc\,sin}\,x+C.$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{bx-x^2}}=-2\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{bx-x^2}}{x}=\frac{2}{b}\,\mathrm{arc\,sin}\frac{2x-b}{b}+C.$$

Wyznaczyć całkę $J=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)}}$.

ładąc:

$$\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)}=(x+\beta)u,$$

$$u=\sqrt{\frac{x+\alpha}{x+\beta}},$$

jemy:

$$(x+\alpha)=u^2(x+\beta),$$

$$x=\frac{\alpha-\beta u^2}{u^2-1},$$

e:

$$dx=\frac{2(\beta-\alpha)u}{(u^2-1)^2}\,du,$$

m:

$$\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)}=\frac{(\alpha-\beta)u}{u^2-1},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)}}=-2\int\frac{du}{u^2-1}=\log\frac{u+1}{u-1},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)}}=\log\frac{\sqrt{x+\alpha}+\sqrt{x+\beta}}{\sqrt{x+\alpha}-\sqrt{x+\beta}}+C, \tag{11}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)}}=2\log[\sqrt{x+\alpha}+\sqrt{x+\beta}]+C. \tag{11'}$$

W szczególności, otrzymamy stąd wzór:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(x+2a)}}=2\log\{\sqrt{x}+\sqrt{x+2a}\}=\log[x+a+\sqrt{x(x+2a)}]+C.$$

4) Wyznaczyć całkę $J=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+\alpha)(\beta-x)}}$.

Kładąc $\sqrt{(x+\alpha)(\beta-x)}=u(\beta-x)$, a więc $u=\sqrt{\frac{x+\alpha}{\beta-x}}$, otrzymujemy:

$$x=\frac{\beta u^2-\alpha}{u^2+1},\quad dx=\frac{2u(\alpha+\beta)}{(u^2+1)^2}du,$$

$$\sqrt{(x+\alpha)(\beta-x)}=\frac{u(\alpha+\beta)}{(u^2+1)},$$

tem:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x+\alpha)(\beta-x)}}=2\int\frac{du}{u^2+1}=2\,\mathrm{arctang}\,u,$$

czyli:
$$\frac{dx}{\sqrt{(x+\alpha)(\beta-x)}}=2\,\text{arc tang}\sqrt{\frac{x+\alpha}{\beta-x}}+C. \tag{12}$$

W szczególności, otrzymujemy stąd wzór:
$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(2a-x)}}=2\,\text{arctang}\sqrt{\frac{x}{2a-x}}=\text{arc sin}\,\frac{x-a}{a}+C.$$

12. Rozkładanie całek, kształtu: $\int R(x, y)\,dx$. Jakkolwiek całki funkcyj algebraicznych, niewymiernych, kształtu: $\int R(x, y)dx$, gdzie $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, za pomocą podstawień, poznanych w art. poprzednich, dadzą się zawsze sprowadzić do całek funkcyj algebraicznych, wymiernych, a tem samem wyrazić za pomocą funkcyj algebraicznych i funkcyj logarytmicznych, względnie cyklometrycznych, to jednak, dla uniknięcia mozolnego częstokroć rachunku, staramy się, przed użyciem stosownych podstawień, sprowadzić daną funkcyę do postaci możliwie najprostszych.

Mając na uwadze, że wszelkie parzyste potęgi zmiennej $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ są całkowitemi, wymiernemi funkcyami zmiennej x, a wszelka potęga nieparzysta zmiennej y da się przedstawić w postaci $G(x).y$, t. j. jako iloczyn z funkcyi całkowitej, wymiernej zmiennej x przez zmienną y, zauważymy z łatwością, że wszelka wymierna funkcya $R(x, y)$, którą możemy zawsze przedstawić w postaci ilorazu dwu funkcyj całkowitych, wymiernych obu zmiennych x i y, da się ostatecznie sprowadzić do postaci:
$$R(x, y)=\frac{G_1(x)+G_2(x).y}{G_3(x)+G_4(x).y},$$
czyli:
$$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})=\frac{G_1(x)+G_2(x).\sqrt{ax^2+bx+c}}{G_3(x)+G_4(x).\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{13}$$
gdzie $G_1(x)$, $G_2(x)$, $G_3(x)$, $G_4(x)$ są całkowitemi funkcyami zmiennej x rozmaitych stopni.

Uwolniwszy funkcyę $R(x, y)$, przedstawioną w powyższej postaci, od niewymiernego mianownika i zastępując, dla skrócenia funkcye $G_i(x)$ przez G_i, otrzymujemy:
$$R(x, y)=\frac{G_1+G_2.y}{G_3+G_4.y}=\frac{(G_1+G_2.y)(G_3-G_4.y)}{G^2_3-G^2_4.y^2}$$
a stąd:
$$R(x, y)=\frac{G_1G_3-G_2G_4\,y^2}{G^2_3-G^2_4.y^2}+\frac{(G_2G_3-G_1G_4)y^2}{G^2_3-G^2_4.y^2}\cdot\frac{1}{y},$$
czyli:
$$R(x, y)=R_1(x)+\frac{R_2(x)}{y}, \tag{14}$$
gdzie funkcye: $R_1(x)=\dfrac{G_1G_3-G_2G_4.y^2}{G^2_3-G^2_4.y^2}$, $R_2(x)=\dfrac{(G_2G_3-G_1G_4)y^2}{G^2_3-G^2_4.y^2}$,

są wymiernemi funkcyami wyłącznie zmiennej x.

Wobec tego, dana całka $\int R(x, y)dx$ da się zawsze rozłożyć na dwie całki następujące:
$$\int R(x, y)\,dx=\int R_1(x)dx+\int\frac{R_2(x)}{y}\,dx, \tag{15}$$
a więc da się przedstawić, jako suma dwu całek, z których jedna $\int R_1(x)\,dx$ jest całką funkcyi algebraicznej, wymiernej, a druga $\int R_2(x).\dfrac{dx}{y}$ jest całką funkcyi algebraicznej, niewymiernej, zawierającej niewymierność $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ tylko w mianowniku.

A zatem:

Całki funkcyj algebraicznych, niewymiernych, zawierających, jako niewymierność, kwadratowy pierwiastek z funkcyi całkowitej, wymiernej drugiego stopnia, dadzą się zawsze rozłożyć na całki funkcyj algebraicznych, wymiernych i na całki takich funkcyj algebraicznych, niewymiernych, w których kwadratowy pierwiastek z funkcyi całkowitej drugiego stopnia występuje tylko w mianowniku.

13. Sprowadzanie całki $\int \frac{R(x)}{y} dx$ do całek zasadniczych. Funkcya wymierna $R(x)$ całce niewymiernej, kształtu:

$$\int \frac{R(x)}{y} dx = \int \frac{R(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

w ogóle funkcyą ułamkową, niewłaściwą, składa się więc z funkcyi całkowitej i z funkcyi ułamkowej właściwej.

Połóżmy więc:

$$R(x) = G_m(x) + \frac{G_{n-1}(x)}{G_n(x)},$$

gdzie $G_m(x)$ jest funkcyą całkowitą m-go stopnia, natenczas rozłożymy daną całkę na dwie całki, w postaci:

$$\int \frac{R(x)dx}{y} = \int \frac{G_m(x)\,dx}{y} + \int \frac{G_{n-1}(x)\,dx}{G_n(x)\,.\,y}. \tag{16}$$

14. Połóżmy w pierwszej z tych całek:

$$\frac{G_m(x)}{y} = \frac{d}{dx}[G_{m-1}(x)\,.\,y] + \frac{A}{y}, \tag{17}$$

gdzie $G_{m-1}(x)$ jest niewiadomą funkcyą $(m-1)$-go stopnia, A zaś niewiadomą liczbą stałą.

Na wyznaczenie funkcyi $G_{m-1}(x)$ i stałej A, otrzymujemy, na podstawie (17) tożsamość:

$$\frac{G_m(x)}{y} = G_{m-1}(x)\,y' + G'_{m-1}(x)\,.\,y + \frac{A}{y},$$

zatem:

$$G_m(x) = G_{m-1}(x)\,.\,y'y + G'_{m-1}(x)\,.\,y^2 + A,$$

czyli, ze względu na to, że $y^2 = ax^2+bx+c$, zaś $yy' = \frac{1}{2}(2ax+b) = ax + \frac{1}{2}b$, otrzymujemy funkcyę $G_m(x)$, w postaci:

$$G_m(x) = (ax + \tfrac{1}{2}b)\,G_{m-1}(x) + (ax^2+bx+c)\,G'_{m-1}(x) + A.$$

Mamy tu po obu stronach funkcye całkowite m-go stopnia; porównywając spółczynniki przy równych potęgach zmiennej x, otrzymujemy $(m+1)$ równań o tyluż niewiadomych, do których zaliczamy m niewiadomych spółczynników funkcyi $G_{m-1}(x)$ i niewiadomy spółczynnik A. Równania te są, ze względu na niewiadome, stopnia pierwszego, określają więc jednoznacznie funkcyę $G_{m-1}(x)$ i stałą A.

Jeżeli więc $G_m(x)$ jest funkcyą całkowitą m-go stopnia a $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$, możemy zawsze wyznaczyć taką funkcyę $(m-1)$-go stopnia $G_{m-1}(x)$ i stałą A, że będzie tożsamościowo:

$$\frac{G_m(x)}{y} = [G_{m-1}(x)\,.\,y]' + \frac{A}{y},$$

Wobec tego, otrzymujemy wzór:

$$\int \frac{G_m(x)dx}{y} = G_{m-1}(x)\,.\,y + A\int\frac{dx}{y}, \tag{18}$$

który całkę, kształtu $\int \frac{G_m(x)\,dx}{y}$ sprowadza do całki zasadniczej typu:

$$\int \frac{dx}{y} = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

15. Druga całka, kształtu: $\int \frac{G_{n-1}(x)\,dx}{G_m(x)\,y}$, prowadzi w przypadku, gdy mianownik $G(x)$ ma czynnik m-krotny $(x-\alpha)$, do całki kształtu:

$$\int \frac{G_{n-1}(x)}{(x-\alpha)^m\,y}\,dx,$$

gdzie $G_{n-1}(x)$ jest funkcyą całkowitą $(m-1)$-go stopnia, jednoznacznie określoną.

Połóżmy:

$$\frac{G_{m-1}(x)}{(x-\alpha)^m y}=\frac{d}{dx}\left[\frac{G_{m-2}(x).y}{(x-\alpha)^{m-1}}\right]+\frac{A}{(x-\alpha)y}, \tag{19}$$

gdzie $G_{m-2}(x)$ jest niewiadomą funkcyą $(m-2)$-go stopnia, A zaś niewiadomą liczbą stałą.

Na wyznaczenie spółczynników $a_0, a_1 \ldots, a_{m-2}$ funkcyi $G_{m-2}(x)$ i stałej A otrzymujemy, na podstawie powyższego równania, tożsamość:

$$\frac{G_{m-1}(x)}{(x-\alpha)^m y}=\frac{G'_{m-2}(x).y+G_{m-2}(x).y'}{(x-\alpha)^{m-1}}-\frac{(m-1)\,G_{m-2}(x).y}{(x-\alpha)^m}+\frac{A}{(x-\alpha)y},$$

a zatem:

$$G_{m-1}(x)=[G'_{m-2}(x)\,y^2+G_{m-2}(x)y'y](x-\alpha)-(m-1)\,G_{m-2}(x).y^2+A(x-\alpha)^{m-1},$$

skąd, ze względu na to, że $y^2=ax^2+bx+c$, zaś $yy'=ax+{}^1\!/_2 b$, dostajemy tożsamość:

$$G_{m-1}(x)=[G'_{m-2}(x)(ax^2+bx+c)+G_{m-2}(x).(ax+{}^1\!/_2 b)](x-\alpha)-$$
$$-(m-1)\,G_{m-2}(x).(ax^2+bx+c)+A.(x-\alpha)^{m-1}.$$

Mamy tu po pierwszej stronie funkcyę całkowitą $(m-1)$-go stopnia, po drugiej stronie, na pozór, funkcyę całkowitą m-go stopnia, która jednak przechodzi także na funkcyę całkowitą $(m-1)$-go stopnia, gdyż kładąc:

$$G_{m-2}(x)=a_0.x^{m-2}+\ldots$$

a więc:

$$G'_{m-2}(x)=(m-2)\,a_0\,x^{m-3}+\ldots,$$

otrzymujemy spółczynnik przy x^m równy $(m-2)\,aa_0+aa_0-(m-1)\,aa_0$, zatem równy zeru. Porównywając spółczynniki przy jednakowych potęgach zmiennej x, otrzymujemy m równań o tyluż niewiadomych, do których zaliczamy $(m-1)$ niewiadomych spółczynników funkcyi $G_{m-2}(x)$ i niewiadomy spółczynnik A. Równania te są, ze względu na niewiadome stopnia pierwszego, określają więc jednoznacznie funkcyę $G_{m-2}(x)$ i stałą A.

Jeżeli więc $G_{m-1}(x)$ jest funkcyą całkowitą, najwyżej $(m-1)$-go stopnia, a

$$y=\sqrt{ax^2+bx+c},$$

możemy zawsze wyznaczyć taką funkcyę $(m-2)$-go stopnia $G_{m-2}(x)$ i stałą A, że będzie tożsamościowo:

$$\frac{G_{m-1}(x)}{(x-\alpha)^m y}=\left[\frac{G_{m-2}(x).y}{(x-\alpha)^{m-1}}\right]'+\frac{A}{(x-\alpha)y}.$$

Wobec tego, otrzymujemy wzór:

$$\int\frac{G_{m-1}(x)}{(x-\alpha)^m y}dx=\frac{G_{m-2}(x).y}{(x-\alpha)^{m-1}}+A\int\frac{dx}{(x-\alpha)y}. \tag{20}$$

który całkę kształtu: $\int\frac{G_{m-1}(x)}{(x-\alpha)^m y}dx$ sprowadza do całki zasadniczej, typu:

$$\int\frac{dx}{(x-\alpha)y}=\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

16. Całkę zasadniczą tego drugiego typu możemy przekształcić w sposób następujący:

Rozwińmy funkcyę ax^2+bx+c według potęg dwumianu $(x-\alpha)$, a otrzymamy, (porównaj Tom I. Wykład XXXI. str. 480.): $ax^2+bx+c=A+B(x-\alpha)+C(x-\alpha)^2$, gdzie:

$$A=a\alpha^2+b\alpha+c,\quad B=2a\alpha+b,\quad C=a.$$

Wobec tego, otrzymujemy:

$$\int\frac{dx}{(x-\alpha)y}=\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{C(x-\alpha)^2+B(x-\alpha)+A}}.$$

Połóżmy $x-\alpha=\frac{1}{z}$, zatem $dx=-\frac{dz}{z^2}$, $y=\frac{\sqrt{Az^2+Bz+C}}{z}$, natenczas otrzymana całka przedstawia się w postaci:

$$\int\frac{dx}{(x-\alpha)y}=-\int\frac{dz.z^2}{z^2\sqrt{Az^2+Bz+C}}=-\int\frac{dz}{\sqrt{Az^2+Bz+C}},$$

czyli:

$$\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}=-\int\frac{dz}{\sqrt{Az^2+Bz+C}}. \tag{21}$$

gdzie:

$$A=a\alpha^2+b\alpha+c,\quad B=2a\alpha+b,\quad C=a.$$

A zatem:

Całka zasadnicza typu drugiego: $\int\frac{dx}{(x-\alpha)y}$ da się przekształcić na całkę zasadniczą pierwszego: $\int\frac{dx}{y}$.

17. Gdy mianownik $G_n(x)$ funkcyi ułamkowej, właściwej $\frac{G_{n-1}(x)}{G_n(x)}$ ma czynnik m-krotny ostaci funkcyi całkowitej drugiego stopnia, kształtu: (x^2+px+q), natenczas odpowiada .u czynnikowi ułamek częściowy: $\frac{G_{2m-1}(x)}{(x^2+px+q)^m}$, zatem całka częściowa: $\int\frac{G_{2m-1}(x).dx}{(x^2+px+q)^m y}$, ie $G_{2m-1}(x)$ jest funkcyą całkowitą $(2m-1)$-go stopnia, jednoznacznie określoną:

Połóżmy:

$$\frac{G_{2m-1}(x)}{(x^2+px+q)^m y}=\frac{d}{dx}\left[\frac{G_{2m-3}(x).y}{(x^2+px+q)^{m-1}}\right]'+\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)y}, \tag{22}$$

ie $G_{2m-3}(x)$ jest niewiadomą funkcyą całkowitą $(2m-3)$-go stopnia, A i B zaś niewiadomymi spółczynnikami. Na wyznaczenie spółczynników $a_0, a_1, \ldots a_{2m-3}$, funkcyi $G_{2m-3}(x)$, również spółczynników A i B, otrzymujemy, na podstawie powyższego założenia, tożsamość:

$$\frac{G_{2m-1}(x)}{(x^2+px+q)^m y}=\frac{G'_{2m-3}(x).y+G_{2m-3}(x).y'}{(x^2+px+q)^{m-1}}-\frac{(m-1)(2x+p)G_{2m-3}(x).y}{(x^2+px+q)^m}+\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)y},$$

więc:

$$G_{2m-1}(x)=[G'_{2m-3}(x).y^2+G_{2m-3}(x).y'y](x^2+px+q)-(m-1)(2x+p)G_{2m-3}(x).y^2+$$
$$+(Ax+B)(x^2+px+q)^{m-1}. \tag{23}$$

Mamy tu po prawej stronie funkcyę całkowitą $(2m-1)$-go stopnia, po drugiej, na pozór, funkcyę całkowitą $2m$-go stopnia, która jednak przechodzi także na funkcyę całkowitą $(2m-1)$-go stopnia, gdyż kładąc:

$$G_{2m-3}(x)=a_0x^{2m-3}+a_1x^{2m-4}+\ldots$$

więc:

$$G'_{2m-3}(x)=(2m-3)a_0x^{2m-4}+\ldots,$$

otrzymujemy spółczynnik przy x^{2m} równy $(2m-3)a_0a+a_0a-2(m-1)aa_0$, zatem równy zeru.

Porównywając spółczynniki przy jednakowych potęgach zmiennej x, w tożsamości (23), otrzymujemy $2m$ równań o tyluż niewiadomych, do których zaliczamy $(2m-2)$ spółczynników funkcyi $G_{2m-3}(x)$ i 2 spółczynniki A i B. Równania te są, ze względu na niewiadome, stopnia pierwszego, określają więc jednoznacznie funkcyę $G_{2m-3}(x)$ i funkcyę $Ax+B$.

Jeżeli więc $G_{2m-1}(x)$ jest funkcyą całkowitą najwyżej $(2m-1)$-go stopnia, a

$$y=\sqrt{ax^2+bx+c},$$

możemy zawsze wyznaczyć taką funkcyę całkowitą $(2m-3)$-go stopnia $G_{2m-3}(x)$ i funkcyę pierwszego stopnia $Ax+B$, że będzie tożsamościowo:

$$\frac{G_{2m-1}(x)}{(x^2+px+q)^m y}=\left[\frac{G_{2m-3}(x).y}{(x^2+px+q)^{m-1}}\right]'+\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)y}.$$

Wobec tego, otrzymujemy wzór:

$$\int\frac{G_{2m-1}(x).dx}{(x^2+px+q)^m y}=\frac{G_{2m-3}(x).y}{(x^2+px+q)^{m-1}}+\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)y}dx, \tag{24}$$

który całkę kształtu: $\int\frac{G_{2m-1}(x)dx}{(x^2+px+q)^m y}$ sprowadza do całki zasadniczej trzeciego typu: $\int\frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^m y}$.

18. Dopuszczając spółczynniki urojone, możemy całkę typu: $\int\frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)y}$ rozłożyć zawsze na dwie całki drugiego typu: $\int\frac{dx}{(x-\alpha)y}$ i $\int\frac{dx}{(x-\beta)y}$, gdzie α i β są pierwiastkami równania: $x^2+px+q=0$. Całka zasadnicza trzeciego typu da się tem samem także za pomocą podstawień $x-\alpha=\frac{1}{z}$, $x-\beta=\frac{1}{z}$ przekształcić na dwie całki zasadnicze pierwszego typu.

19. Wniosek. Z wywodów powyższych, dotyczących rozkładania całki funkcyj niewymiernych, algebraicznych, w których, jako niewymierność występuje kwadratowy pierwiastek z funkcyi całkowitej drugiego stopnia, dochodzimy do następującego wniosku ogólnego:

Całki funkcyj algebraicznych, niewymiernych, kształtu: $\int R(x, y)\,dx$, gdzie:

$$y = \sqrt{ax^2 + bx + c},$$

dadzą się sprowadzić do całek zasadniczych trzech typów następujących:

$$J = \int \frac{dx}{y}, \quad J' = \int \frac{dx}{(x-\alpha)y}, \quad J'' = \int \frac{(Ax+B)\,dx}{(x^2+px+q)y}, \tag{25}$$

z których ostatnie dwa typy dadzą się ogólnie przekształcić na całki typu pierwszego.

Do tych też całek należałoby dopiero stosować podstawienia w art. 9. podane i one to składają się na część przestępną danej całki, złożoną z funkcyj logarytmicznych, względnie cyklometrycznych.

W szczególności otrzymujemy, podstawiając: $y = u - x\sqrt{a}$, całkę zasadniczą typu pierwszego, w postaci:

$$\int \frac{dx}{y} = \int \frac{2[(u^2+c)\sqrt{a} + bu]}{(b+2u\sqrt{a})^2} \cdot \frac{b+2u\sqrt{a}}{(u^2+c)\sqrt{a}+bu}\,du = 2\int \frac{du}{b+2u\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \log[b + 2u\sqrt{a}],$$

a więc, skoro od stałej dowolnej C oddzielimy stałą: $-\frac{1}{\sqrt{a}}\log 2\sqrt{a}$, otrzymujemy:

$$\frac{dx}{y} = \frac{1}{\sqrt{a}} \log \frac{b+2u\sqrt{a}}{2\sqrt{a}} + C,$$

czyli:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \log \left\{ \frac{b+2ax}{2\sqrt{a}} + \sqrt{ax^2+bx+c} \right\} + C. \tag{26}$$

Podstawiając zaś:

$$y = xu + \sqrt{c},$$

otrzymujemy ją w postaci:

$$\int \frac{dx}{y} = \int \frac{2[(a+u^2)\sqrt{c} - bu]}{(a-u^2)^2} \cdot \frac{(a-u^2)\,du}{(a+u)^2\sqrt{c} - bu} = 2\int \frac{du}{a-u^2} = -\frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{arc\,tang} \frac{u}{\sqrt{-a}},$$

czyli:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = -\frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{arc\,tang} \frac{\sqrt{c} - \sqrt{ax^2+bx+c}}{x\sqrt{-a}} + C, \tag{27}$$

a więc zawsze, jako funkcyę przestępną.

Ćwiczenia IV.

1) $\int \frac{\sqrt[4]{x}\,dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}} = \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - \frac{12}{7}\sqrt[12]{x^7} + \frac{12}{5}\sqrt[12]{x^5} - 4\sqrt[4]{x} + 12\sqrt[12]{x} - \operatorname{arctang}\sqrt[12]{x} + C.$

2) $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}} = 6[\sqrt[6]{x} - \operatorname{arctang}\sqrt[6]{x}] + C.$

3) $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}\,dx = -6\sqrt[6]{x}\left\{\frac{1}{7}x + \frac{1}{5}\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{4}\sqrt{x} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2}\sqrt[6]{x} + 1\right\} -$

$- \log[\sqrt[6]{x} - 1]^6 + C.$

4) $\int \frac{1-\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = -\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} - \log(1+\sqrt{x})^2 - \operatorname{arc\,tang}\sqrt[4]{x} + C.$

5) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+a}} = \frac{2}{\sqrt{a}} \log \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{a}} + C.$

6) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x+1)^5}} = \frac{2}{3} \, \frac{3(x+1)^2 + 6(x+1) - 1}{\sqrt{(x+1)^3}} + C.$

7) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}} = 2 \sqrt{x-1} \left\{ {}^1\!/_7 (x-1)^3 + {}^3\!/_5 (x-1)^2 + x \right\} + C.$

8) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x-1}} = \frac{(3x+2)\sqrt{x-1}}{4x^2} + \frac{3}{4} \operatorname{arc\,cos} \sqrt{\frac{1}{x}} + C.$

9) $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1+x}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \log \frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+x}} + C.$

10) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}} = \log \left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{1+\sqrt{1+x}} \right) + C.$

11) $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}} = 2 \operatorname{arc\,tang} \sqrt{1+x} + C.$

12) $\int \frac{x dx}{1+\sqrt{1+x}} = (1+x) \left\{ \frac{2}{3} \sqrt{1+x} - 1 \right\} + C.$

13) $\int \frac{x dx}{\sqrt{(5x+3)^5}} = - \frac{2(5x+2)}{25(5x+3)^{3/2}} + C.$

14) $\int 7x^2 \sqrt{5+2x} \, dx = (x^2 - 2x + {}^{10}\!/_3)\sqrt{(5+2x)^3} + C.$

15) $\int x \sqrt[3]{3x+7} \, dx = ({}^1\!/_7 \, x - {}^1\!/_4)(3x+7) \sqrt[3]{3x+7} + C.$

16) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2(8a^2 - 4abx + 3b^2x^2)}{15b^3} \sqrt{a+bx} + C.$

17) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \log \frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}} + C = \frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{arctang} \frac{\sqrt{a+bx}}{\sqrt{-a}} + C.$

18) $\int \frac{x dx}{\sqrt{(a+bx)^5}} = - \frac{2\left\{\sqrt{a+bx} - {}^1\!/_3 a\right\}}{b^2 \sqrt{(a+bx)^3}} + C.$

19) $\int \frac{dx}{p+q\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{aq} \left\{ \sqrt{ax+b} - \frac{p}{q} \log (p + q\sqrt{ax+b}) \right\} + C$

20) $\int \frac{px+q}{\sqrt{ax+b}} dx = \frac{2}{a^2} \left\{ \frac{p}{3}(ax+b) + aq - bp \right\} \sqrt{ax+b} + C.$

21) $\int (px+q)\sqrt{a+bx} \, dx = \frac{2}{a^2} \left\{ \frac{p}{5}(ax+b) + \frac{aq-bp}{3} \right\} . (ax+b)\sqrt{ax+b} + C.$

22) $\int \frac{dx}{(px+q)\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{\sqrt{p(aq-bp)}} \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{p(ax+b)}{aq-bp}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{p(bp-aq)}} \log \frac{\sqrt{p(ax+b)} - \sqrt{bp-aq}}{\sqrt{p(ax+b)} + \sqrt{bp-aq}}.$

23) $\int \sqrt{\frac{a+x}{x}} dx = 2 \sqrt{a+x} + \sqrt{a} . \log \frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a}} + C.$

24) $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx = 2a \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} - \sqrt{a^2-x^2} + C.$

25) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = \operatorname{arc\,sin} x - \sqrt{1-x^2} + C.$

26) $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+a}{x-a}} dx = \operatorname{arc\,sec} \frac{x}{a} + \log (x + \sqrt{x^2-a^2}) + C.$

27) $\int x \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \, . \, dx = \frac{a^2}{2} \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a} - \left(a + \frac{x}{2}\right)\sqrt{a^2-x^2} + C.$

28) $\int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} = \log (x + \sqrt{a+x^2}) + C.$

29) $\int \frac{dx}{\sqrt{bx+x^2}} = \log\left\{\frac{b}{2} + x + \sqrt{bx+x^2}\right\} + C$

30) $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}} = \log\left\{\frac{b}{2} + x + \sqrt{a+bx+x^2}\right\} + C.$

31) a) $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} = \arcsin \frac{x - \frac{1}{2}b}{\sqrt{a+\frac{1}{4}b^2}} + C.$ *)

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$ c) $\int \frac{dx}{\sqrt{bx-x^2}} = \arcsin \frac{2x-b}{b} + C.$

32) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctang} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$

33) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2}.$ 34) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{x^2+2}{3}\right)\sqrt{1-x^2} + C.$

35) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \log \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} + C.$

36) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \log \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2} + C.$

37) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C.$ 38) $\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C.$

39) $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$ 40) $\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-1}} = -\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C.$

41) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctang} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arccos \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} + C.$

42) $\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} + C.$

43) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \log[2\sqrt{x^2+x+1} + 2x + 1] + C.$

44) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}} = \log \frac{2\sqrt{1+x+x^2}-(x+2)}{3x} + C.$

45) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}} = \arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C.$

46) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}} = \operatorname{arctang} \frac{3x+1}{2\sqrt{1+x-x^2}} + C.$

47) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}} = \arcsin \frac{x-2}{x\sqrt{5}} + C.$

48) $\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x} + \log(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C.$

49) $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \arcsin \frac{x}{a} + C$

50) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a} \log \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C.$

51) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(2a+x)}} = \log[x + a\sqrt{x(2a+x)}] + C$

52) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(2a-x)}} = \arcsin \frac{x-a}{a} + C.$

---

*) We wzorze (10) na str. 58. należy opuścić mylnie pozostawiony czynnik przed arc sin jak również czynnik $\frac{1}{a}$ na str. 59. wiersz 2. i czynnik $\frac{2}{b}$ na str. 59. wiersz 4.

53) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+2)}} = 2 \log\,[\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}] + C.$

54) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(2-x)}} = 2 \arcsin \sqrt{\frac{x+1}{2-x}} + C.$

Dowieść, że:

55) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \log \left\{ \frac{ax+b}{\sqrt{a}} + \sqrt{ax^2+2bx+c} \right\} + C,$

$$= \frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{arctang} \sqrt{\frac{\sqrt{b^2-ac}-(ax+b)}{\sqrt{b^2-ac}+(ax+b)}} + C = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arccos \frac{ax+b}{\sqrt{b^2-ac}} + C.$$

56) $\int \sqrt{ax^2+2bx+c}\, dx = \frac{ax+b}{2a} \sqrt{ax^2+2bx+c} +$

$$+ \frac{ac-b^2}{2a\sqrt{a}} \log \left\{ \frac{ax+b}{\sqrt{a}} + \sqrt{ax^2+2bx+c} \right\} + C =$$

$$= \frac{ax+b}{2a} \sqrt{ax^2+2bx+c} + \frac{ac-b^2}{2a\sqrt{-a}} \arccos \frac{ax+b}{\sqrt{b^2-ac}} + C.$$

57) $\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a\alpha^2+b\alpha+c}} \log \frac{(x-\alpha)\sqrt{a}+\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{a\alpha^2+b\alpha+c}}{(x-\alpha)\sqrt{a}+\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a\alpha^2+b\alpha+c}}.$

58) $\int \frac{dx}{(\alpha x+\beta)\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2 a^2}} \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{\beta+\alpha a}{\beta-\alpha a} \cdot \frac{a+x}{a-x}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 a^2-\beta^2}} \log \frac{\sqrt{(a\alpha+\beta)(a+x)}+\sqrt{(a\alpha-\beta)(a-x)}}{\sqrt{(a\alpha+\beta)(a+x)}-\sqrt{(a\alpha-\beta)(a-x)}} + C.$$

59) $\int \frac{(\alpha x+\beta)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{\alpha}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{a\beta-\alpha b}{a\sqrt{a}} \log \left[\frac{ax+b}{\sqrt{a}} + \sqrt{ax^2+bx+c} \right] + C.$

60) $\int \frac{dx}{(\alpha x+\beta)\sqrt{ax^2+2bx+c}} = \frac{2}{\sqrt{2\alpha\beta b-(\alpha^2 c+\beta^2 a)}} \cdot$

$$\cdot \operatorname{arc\,tang} \frac{(\alpha x+\beta)\sqrt{a}+\alpha\sqrt{ax^2+2bx+c}}{\sqrt{2\alpha\beta b-(\alpha^2 c+\beta^2 a)}} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 c+\beta^2 a-2\alpha\beta b}} \log \frac{(\alpha x+\beta)\sqrt{a}+\alpha\sqrt{ax^2+2bx+c}-\sqrt{\alpha^2 c+\beta^2 a-2\alpha\beta b}}{(\alpha x+\beta)\sqrt{a}+\alpha\sqrt{ax^2+2bx+c}+\sqrt{\alpha^2 c+\beta^2 a-2\alpha\beta b}} + C.$$

Rozwiązania IV. 1) Podst. $x=z^{12}$. 2)—3) $x=z^6$. 4) $x=z^4$. 5) $x+a=z^2$. 6) $x+1=z^2$. 7)—8) $x-1=z^2$. 9) $1+x=z^2$. 13) $5x+3=z^2$. 14) $5+2x=z^2$. 15) $3x+7=z^3$. 16) $a+bx=z^2$. $(a+x)/(a-x)=z^2$. 28) $\sqrt{a+x^2}=u-x$. 29) $\sqrt{bx+x^2}=x-u$. 30) $\sqrt{a+bx+x^2}=x-u$. $\sqrt{a+bx-x^2}=ux-\sqrt{a}$. 32) $\sqrt{1-x^2}=xu-1$. 44) $\sqrt{1+x+x^2}=u-x$. 48) $\sqrt{a^2+x^2}=u-x$. $\sqrt{a^2-x^2}=xu-a$. 51) $\sqrt{x(2a+x)}=ux$.

Literatura. Emanuel Czuber. Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Zweiter Band. Leipzig, 1898. L. A. Sohnke. Sammlung von Aufgaben aus der Integralrechnung. Fünfte verbesserte Auflage, herausgegeben von Prof. Dr. Herman Amstein. Halle, 1885.

Tematy do rozprawek naukowych:

1) Całki funkcyj algebraicznych, niewymiernych, dające się przekształcić na całki funkcyj algebraicznych, wymiernych.

2) Wyznaczanie całek kształtu: $\int \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ i ich redukcya.

3) O spółczynnikach, występujących przy wyznaczaniu całki kształtu:

$$\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Wykład V.

Uwagi, dotyczące wyznaczania całek kształtu: $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$.

1. Ogólne formy podstawień algebraicznych. Podstawienia, przekształcające całkę, kształtu: $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ na całkę funkcyi algebraicznej, wymiernej, podane w poprzednim wykładzie, zdążają do wprowadzenia takiej nowej zmiennej u, aby zarówno zmienna x, jakoteż jej funkcya y, przedstawiająca się w postaci pierwiastka kwadratowego z danej funkcyi całkowitej, drugiego stopnia: $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, dały się wyrazić wymiernie za pomocą tejże nowej zmiennej u. Powyższe podstawienia przedstawiają się w ogólnej postaci:

$$y=Mx+N,$$

gdzie M i N są pewnemi liniowemi funkcyami nowej zmiennej u.

Połóżmy ogólnie:

$$y=(A_1u+A_0)x+(B_1u+B_0) \tag{1}$$

i zbadajmy, pod jakimi warunkami da się, na podstawie tego podstawienia, zarówno zmienna x, jak y, wyrazić wymiernie przez u. W tym celu, podnieśmy obie strony równania (1) do kwadratu, a otrzymamy równanie:

$$ax^2+bx+c=(A_1u+A_0)^2x^2+2(A_1u+A_0)(B_1u+B_0)x+(B_1u+B_0)^2,$$

które wyraża zmienną x wymiernie przez zmienną u, przedewszystkiem pod następującemi warunkami:

1) $A_1=0$, $A_0{}^2=a$, zatem $A_0=\sqrt{a}$,
2) $B_1=0$, $B_0{}^2=c$, zatem $B_0=\sqrt{c}$.

W pierwszym przypadku, przedstawia się ogólne podstawienie (1), w postaci:

$$y=x\sqrt{a}+B_1u+B_0, \tag{2}$$

i prowadzi do równania:

$$bx+c=2(B_1u+B_0)x\sqrt{a}+(B_1u+B_0)^2,$$

z którego otrzymujemy:

$$x[b-2(B_1u+B_0)\sqrt{a}]=(B_1u+B_0)^2-c,$$

zatem:

$$x=\frac{(B_1u+B_0)^2-c}{b-2(B_1u+B_0)\sqrt{a}}=\frac{(B^2_0-c)+2B_0B_1u+B_1{}^2u^2}{(b-2B_0\sqrt{a})-2B_1\sqrt{a}\,.\,u},$$

gdzie spółczynniki B_0 i B_1 mogą mieć ogólnie, dowolne wartości stałe, przyczem współczynnik B_1 musi być różny od zera.

Dla $B_1=-1$, $B_0=0$, otrzymujemy pierwsze podstawienie szczególne:

$$y=x\sqrt{a}-u, \text{ zatem } x=\frac{u^2-c}{b+2u\sqrt{a}}, \; y=-\frac{c\sqrt{a}+bu+u^2\sqrt{a}}{b+2u\sqrt{a}},$$

używane, gdy $a>0$, przyczem $\sqrt{a}$ może być uważany, jako dodatni, lub ujemny.

W drugim przypadku przedstawia się podstawienie ogólne (1) w postaci:

$$y=(A_1u+A_0)x+\sqrt{c}, \tag{3}$$

i prowadzi do równania:

$$ax^2+bx=(A_1u+A_0)^2x^2+2\sqrt{c}(A_1u+A_0)x,$$

czyli:

$$ax+b=(A_1u+A_0)^2x+2\sqrt{c}(A_1u+A_0),$$

z którego dostajemy:

$$x[a-(A_1u+A_0)^2]=2\sqrt{c}(A_1u+A_0)-b,$$

zatem:

$$x=\frac{2\sqrt{c}(A_1u+A_0)-b}{a-(A_1u+A_0)^2}=\frac{(2A_0\sqrt{c}-b)+2A_1\sqrt{c}\,.\,u}{(a-A_0^2)-2A_0A_1u-A_1^2u^2},$$

gdzie spółczynniki A_0, A_1 mogą mieć wogóle dowolne wartości stałe, przyczem spółczynnik A_1 musi być różny od zera.

Dla $A_1=1$, $A_0=0$, otrzymujemy drugie podstawienie szczególne:

$$y=ux+\sqrt{c}, \text{ zatem } x=\frac{2u\sqrt{c}-b}{a-u^2}, \; y=\frac{u^2\sqrt{c}-bu+a\sqrt{c}}{a-u^2},$$

używane, gdy $c>0$, przyczem znak w $\sqrt{c}$ może być przyjęty, jako dodatni, lub ujemny.

W przypadku, gdy funkcya drugiego stopnia: ax^2+bx+c, rozpada się na dwa czynniki pierwszego stopnia, w postaci:

$$ax^2+bx+c=(px+q)(rx+s),$$

podstawienie ogólne (1), które możemy także napisać w postaci:

$$y=(A_1x+B_1)u+(A_0x+B_0),$$

wyraża x wymiernie przez u, skoro spółczynniki A i B, tak obierzemy, że będzie:

$$(A_1x+B_1)u+(A_0x+B_0)=(px+q)(C_1u+C_0),$$

a więc, skoro położymy:

$$A_1=pC_1, \; B_1=qC_1, \; A_0=pC_0, \; B_0=qC_0.$$

czyli:

$$\frac{A_0}{C_0}=\frac{A_1}{C_1}=p, \; \frac{B_0}{C_0}=\frac{B_1}{C_1}=q.$$

W takim razie, przedstawia się ogólne podstawienie (1), w postaci:

$$y=(px+q)(C_1u+C_0) \tag{4}$$

z którego otrzymujemy, wobec $y^2=ax^2+bx+c=(px+q)(rx+s)$ i wzoru (4), wzór:

$$rx+s=(px+q)(C_1u+C_0)^2,$$

czyli:

$$x[r-p(C_1u+C_0)^2]=q(C_1u+C_0)^2-s,$$

zatem:

$$x=\frac{q(C_1u+C_0)^2-s}{r-p(C_1u+C_0)^2},$$

gdzie spółczynniki C_0 i C_1 mogą mieć w ogóle dowolne wartości stałe, przyczem spółczynnik C_1 musi być różny od zera.

Dla $C_1=1$, $C_0=0$, otrzymujemy trzecie podstawienie szczególne:

$$y=(px+q)u,$$

zatem:
$$x=\frac{qu^2-s}{r-pu^2},\quad y=\frac{(qr-ps)u}{r-pu^2},$$

używane, gdy funkcya ax^2+bx+c da się rozłożyć na dwa czynniki rzeczywiste stopnia pierwszego.

Podstawienia algebraiczne, podane w art. 6. wykładu IV., zawarte są więc w formie ogólnej:

$$y=(A_1u+A_0)x+(B_1u+B_0), \tag{5}$$

względnie:
$$y=(A_1x+B_1)u+(A_0x+B_0), \tag{5'}$$

w której dwa spółczynniki są zupełnie dowolne, a wybór drugich dwu, zależy od spółczynników funkcyi: ax^2+bx+c.

2. Znaczenie geometryczne podstawień algebraicznych, przekształcających całkę: $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ na całki funkcyj wymiernych. Oznaczając przez x i y spółrzędne punktu, odniesione do pewnego układu prostokątnego na płaszczyźnie, mamy równaniem: $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, czyli: $y^2=ax^2+bx+c$, określoną pewną krzywą drugiego rzędu, (krzywą stożkową, symetrycznie ułożoną względem osi x-ów). (Por. T. I. fig. 563.).

Krzywa ta, której równanie, sprowadzone do zera, przedstawia się w postaci:

$$y^2-ax^2-bx-c=0, \tag{6}$$

ma środek na osi x-ów w punkcie $C\left(\xi=-\frac{b}{2a},\ \eta=0\right)$, Por. T. I. str. 707. i jest hiperbolą, gdy $a>0$, parabolą (środek w nieskończoności), gdy $a=0$, a elipsą, gdy $a<0$.

3. Jej punkta przecięcia się z osią y-ów, określone są spółrzędnemi: $x=0$, $y=\pm\sqrt{c}$ i są rzeczywiste, gdy $c>0$, wpadają w punkt początkowy, gdy $c=0$, a urojone, gdy $c<0$, natomiast punkta przecięcia się tej krzywej z osią x-ów, określone są spółrzędnemi $y=0$,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{-\Delta}}{2a},$$

i są rzeczywiste i różne, gdy wyróżnik $\Delta=4ac-b^2<0$, wpadają w punkt: $y=0$, $x=-\frac{b}{2a}$, gdy $\Delta=4ac-b^2=0$, a są urojone, sprzężone, gdy $\Delta=4ac-b^2>0$.

W przypadku $\Delta=4ac-b^2=0$, wobec tego, że:

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)],$$

równanie drugiego stopnia przybiera postać:

$$y^2=ax^2+bx+\frac{b^2}{4a},\ \text{czyli}\ y^2=\frac{1}{4a}(2ax+b)^2,$$

i przedstawia, w przypadku $a>0$, dwie proste, rzeczywiste, przecinające się na osi x-ów, w punkcie: $\left(y=0,\ x=-\frac{b}{2a}\right)$, jako szczególną odmianę hiperboli; w przypadku $a<0$, dwie proste urojone, przecinające się na osi x-ów w punkcie $\left(y=0,\ x=-\frac{b}{2a}\right)$, czyli punkt rzeczywisty: $\left(y=0,\ x=-\frac{b}{2a}\right)$, jako szczególną odmianę elipsy; w przypadku $a=0$, będzie, wobec $b^2=4ac$, także $b=0$, równanie otrzymuje zatem kształt $y^2=c$ i przedstawia dwie proste, równoległe do osi x-ów, rzeczywiste, gdy $c>0$, a urojone, gdy $c<0$, jako szczególną odmianę paraboli, (wierzchołek w nieskończoności na osi x-ów).

W przypadku $\Delta = 4ac - b^2 > 0$, krzywa stożkowa: $y^2 = \frac{1}{4a}[(2ax+b)^2 + (4ac-b^2)]$, nie przecina osi x-ów w punktach rzeczywistych i jest, dla $a > 0$ hiperbolą, której gałęzie wznoszą się symetrycznie nad osią x-ów, dla $a < 0$, elipsą urojoną, dla $a = 0$ parabolą.

Przypadek $a \lesseqgtr 0$, $\Delta \gtreqless 0$, podtrzymujący pod pierwiastkiem kwadratowym funkcyą drugiego stopnia, w postaci równania $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, obejmuje wszystkie krzywe środkowe: hiperbole i elipsy z ich odmianami, ułożone symetrycznie względem osi x-ów. (Por. T. I. Fig. 505—508), z dowolnym środkiem na tejże osi.

4. Równanie podstawienia ogólnego: $y = Mx + N$, gdzie $M = A_1 u + B_1$, $N = A_0 u + B_0$, przedstawia linię prostą, której położenie zależy od parametru u, więc wogóle, przy zmiennem u, układ linij prostych na płaszczyźnie.

Oba równania:

$$y^2 = ax^2 + bx + c \text{ i } y = Mx + N, \qquad (7)$$

przedstawiają punkta przecięcia się krzywej stożkowej z prostemi układu. Żądanie, aby podstawienie algebraiczne: $y = Mx + N$, było tak dobrane, żeby x i y dały się wyrazić wymiernie przez u, schodzi się z żądaniem geometrycznem: obrać taki układ prostych na płaszczyźnie, aby każda z nich przecięła daną krzywą tylko w jednym punkcie. Warunkowi temu odpowiada taki tylko pęk prostych, którego wierzchołek jest jednym z punktów krzywej stożkowej.

Niech będą α i β spółrzędne x i y dowolnego punktu (fig. 1.) krzywej stożkowej: $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, natenczas:

$$\beta = \sqrt{a\alpha^2 + b\alpha + c}.$$

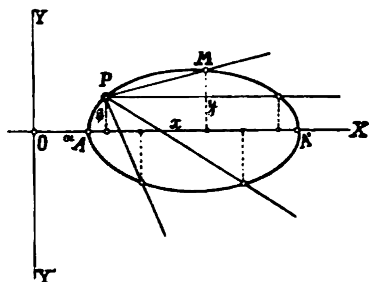


Fig. 1.

Pęk prostych, przechodzących przez punkt $P(\alpha, \beta)$, otrzymuje równanie:

$$y - \beta = u(x - \alpha), \text{ czyli: } y = u(x - \alpha) + \beta,$$

gdzie parametr $u = \operatorname{tg} \lambda$ cechuje nachylenie każdej poszczególnej prostej pęku względem osi x-ów.

Każda z tych prostych przecina krzywę stożkową jeszcze w jednym tylko punkcie M, którego spółrzędne są algebraicznemi, wymiernemi funkcyami zmiennego parametru u.

Na wyznaczenie tych spółrzędnych mamy bowiem dwa równania:

$$y^2 = ax^2 + bx + c, \qquad (8)$$
$$y = u(x - \alpha) + \beta,$$

o dwu niewiadomych: x i y, z których, po wyrugowaniu y, otrzymujemy:

$$ax^2 + bx + c = [u(x - \alpha) + \beta]^2,$$

czyli:
$$ax^2 + bx + c = u^2(x - \alpha)^2 + 2\beta u(x - \alpha) + \beta^2,$$

stąd, zastępując β^2 przez $a\alpha^2 + b\alpha + c$, dostajemy równanie:

$$ax^2 + bx = u^2(x - \alpha)^2 + 2\beta u(x - \alpha) + a\alpha^2 + b\alpha,$$

czyli:
$$a(x^2 - \alpha^2) + b(x - \alpha) = u^2(x - \alpha)^2 + 2\beta u(x - \alpha),$$

które, po opuszczeniu wspólnego czynnika $(x - \alpha)$, sprowadza się do postaci:

$$a(x + \alpha) + b = u^2(x - \alpha) + 2\beta u.$$

Otrzymujemy zatem:

$$x = \frac{(a\alpha + b) - 2\beta u + \alpha u^2}{u^2 - a},$$

a więc: $$y=u(x-\alpha)+\beta=\frac{a\beta-(2a\alpha+b)u+\beta u^2}{a-u^2},$$

wzory, wyrażające spółrzędne x i y, jako funkcye wymierne zmiennej u.

W tych wzorach może mieć α wartość dowolną, przyczem musi być $\beta=\sqrt{a\alpha^2+b\alpha+c}$. Podstawienia algebraiczne tego rodzaju są zatem nieskończenie liczne.

5. Mogąc wierzchołek (α, β) pęku prostych wybrać dowolnie na krzywej stożkowej: $y^2=ax^2+bx+c$, możemy sobie rachunek uprościć, przyjmując go

albo 1) w punktach nieskończenie dalekich krzywej stożkowej,

albo 2) w jej punktach przecięcia się z osią y-ów,

albo 3) w jej punktach przecięcia się z osią x-ów.

Pierwszy przypadek jest możliwy tylko przy hiperboli, jako krzywej, posiadającej dwa punkta rzeczywiste w nieskończoności, wymaga więc, aby było $a>0$. Kierunki tych punktów na krzywej $y^2-ax^2-bx-c=0$, określone są równaniem: $y^2-ax^2=0$, które wskazuje na dwie proste: $y=+x\sqrt{a}$ i $y=-x\sqrt{a}$, przechodzące przez początek układu, równolegle do dwu asymptot hiperboli.

Przyjmując jeden z tych dwu kierunków, n. p. $\operatorname{tg}\lambda=+\sqrt{a}$, (fig. 2.), jako kierunek promienia pęku o nieskończenie dalekim wierzchołku, otrzymujemy równanie pęku w postaci:

$$y=x\sqrt{a}+u \tag{9}$$

jako pierwsze szczególne podstawienie, w którem zmienny parametr u przedstawia odcinek, jaki dowolny promień pęku wyznacza na osi y-ów.

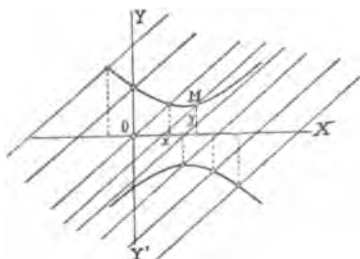


Fig. 2.

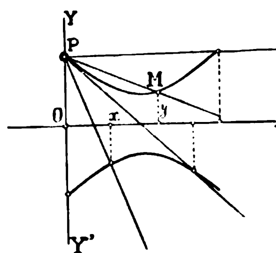


Fig. 3.

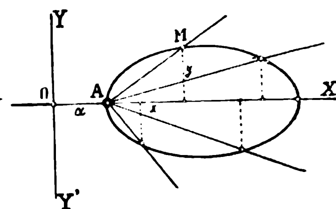


Fig. 4.

Drugi przypadek, w którym wierzchołek pęku przyjmujemy w jednym z punktów przecięcia się krzywej: $y^2-ax^2-bx-c=0$, z osią y-ów, a więc w punkcie $\alpha=0$, $\beta=\sqrt{c}$, wymaga, aby było $c>0$, co pod tym warunkiem możliwe jest, zarówno przy elipsie ($a<0$), jak przy hiperboli ($a>0$).

Przyjmując punkt $(0, \sqrt{c})$, jako wierzchołek pęku (fig. 3.), otrzymujemy równanie pęku w postaci:

$$y=ux+\sqrt{c},$$

która daje drugie szczególne podstawienie, gdzie zmienny parametr $u=\operatorname{tg}\lambda$, cechuje kierunek dowolnego promienia pęku.

Trzeci przypadek, w którym wierzchołek pęku przyjmujemy w jednym z punktów przecięcia się krzywej stożkowej z osią x-ów, wymaga, aby trójmian ax^2+bx+c dał się rozłożyć na dwa czynniki rzeczywiste stopnia pierwszego, co ze względu na to, że:

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)],$$

jest możliwe tylko w elipsie rzeczywistej, $(a<0)$, i to pod warunkiem: $\Delta=4ac-b^2<0$ i w hiperboli, $(a>0,\ \Delta<0)$, której oś rzeczywista wpada w oś x-ów.

Kładąc w tym przypadku:

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta),$$

i obierając punkt $P(\alpha, 0)$ za wierzchołek pęku (fig. 4. na str. poprz.), otrzymujemy równanie:

$$y=u(x-\alpha), \tag{11}$$

które daje trzecie szczególne podstawienie, gdzie zmienny parametr $u=\operatorname{tang}\lambda$ cechuje również kierunek dowolnego promienia pęku.

Całka kształtu: $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ okazuje, na podstawie powyższych rozumowań pewną funkcyę, jednoznacznie związaną z punktami (x, y) krzywej drugiego rzędu, o równaniu: $y^2-ax^2-bx-c=0$.

Podstawienia algebraiczne, przekształcające całkę: $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$, powyżej poznane, mają więc swe uzasadnienie geometryczne i tracą przeto, na podstawie powyższych wywodów, pierwotny pozór podstawień sztucznych.

6. Uwaga. Żadne z powyższych założeń nie może być przyjęte, gdy krzywa, określona równaniem: $y^2=ax^2+bx+c$, nie ma wogóle punktów rzeczywistych, czyli, gdy jest elipsą urojoną. W tym przypadku, określonym warunkami: $a<0$, $\Delta=4ac-b^2>0$, możemy wprawdzie stosować powyższe podstawienia, nie możemy jednak uniknąć spółczynników urojonych.

7. Przekształcenia funkcyi $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, wskazane przed jej całkowaniem. Funkcya niewymierna, ułamkowa $R(x, y)$ gdzie $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ da się przedewszystkiem, jak wiemy z art. 10. poprzedniego wykładu, przedstawić zawsze w postaci:

$$R(x, y)=R_1(x)+\frac{R_2(x)}{y},$$

gdzie $R_1(x)$ i $R_2(x)$ są funkcyami wymiernemi ułamkowemi, niewłaściwemi. Wskutek tego rozkładu, funkcya niewymierna $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ utrzymuje się tylko w jednej części danej funkcyi niewymiernej i to w mianowniku, w stopniu pierwszym.

Rozkładając każdą z funkcyj ułamkowych $R_1(x)$ i $R_2(x)$ na funkcyę całkowitą i na funkcyę ułamkową, właściwą, otrzymamy:

$$R_1(x)=G_\mu(x)+\frac{G_{\nu-1}(x)}{G_\nu(x)},\quad R_2(x)=G_m(x)+\frac{G_{n-1}(x)}{G_n(x)},$$

zatem daną funkcyą niewymierną, w postaci:

$$R(x, y)=G_\mu(x)+\frac{G_{\nu-1}(x)}{G_\nu(x)}+\frac{G_m(x)}{y}+\frac{G_{n-1}(x)}{G_n(x).y},$$

gdzie wskazówki μ, ν, m, n oznaczają stopnie odnośnych funkcyi całkowitych.

Całka danej funkcyi niewymiernej, ułamkowej rozpada się zatem na następujące cztery całki:

$$\int R(x, y)\,dx=\int G_\mu(x).dx+\int\frac{G_{\nu-1}(x)}{G_\nu(x)}dx+\int\frac{G_m(x).dx}{y}+\int\frac{G_{n-1}(x)\,dx}{G_n(x).y}, \tag{12}$$

z których dwie pierwsze są wprost całkami pewnych funkcyj wymiernych, całkowitej i ułamkowej, a tylko dwie ostatnie są całkami funkcyj

algebraicznych, niewymiernych, zawierających niewymierność, w postaci: $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, wyłącznie w mianowniku. Potrzebaby zatem stosować poznane podstawienia tylko do dwu ostatnich całek, chcąc je przekształcić na całki funkcyj wymiernych nowej zmiennej u.

Jednakże stosowanie poznanych podstawień algebraicznych okazuje się i teraz jeszcze przedwczesne.

8. Pierwsza z otrzymanych całek $\int\frac{G_m(x)}{y}dx$, wobec tego, że możemy wyznaczyć taką funkcyę $G_{m-1}(x)$ i taką stałą A, aby było tożsamościowo:

$$\frac{G_m(x)}{y}=[G_{m-1}(x).y]'+\frac{A}{y},$$

przedstawia się w postaci:

$$\int\frac{G_m(x)}{y}dx=G_{m-1}(x).y+A\int\frac{dy}{y}, \tag{13}$$

składa się więc z pewnej, ściśle określonej funkcyi algebraicznej, niewymiernej i z całki funkcyi niewymiernej, kształtu: $\int\frac{dx}{y}$, zwanej całką zasadniczą pierwszego typu.

Druga z otrzymanych całek $\int\frac{G_{n-1}(x)}{G_n(x)y}dx$, wskutek rozwinięcia funkcyi ułamkowej, na ułamki częściowe, kształtu:

$$\frac{G_{r-1}(x)}{(x-a)^r},\ \text{względnie}\ \frac{G_{2s-1}(x)}{(x^2+px+q)^s},$$

składać się będzie z całek częściowych, kształtu:

$$\int\frac{G_{r-1}(x)}{(x-a)^r y}dx\ \text{i}\ \int\frac{G_{2s-1}(x)}{(x^2+px+q)^s y}dx.$$

Z tych dwóch rodzajów całek, pierwsza, wobec tego, że możemy zawsze wyznaczyć taką funkcyę $G_{r-2}(x)$ i taką stałą A, że będzie tożsamościowo:

$$\frac{G_{r-1}(x)}{(x-a)^r y}=\left(\frac{G_{r-2}(x).y}{(x-a)^{r-1}}\right)'+\frac{A}{(x-a)y},$$

przedstawia się w postaci:

$$\int\frac{G_{r-1}(x)}{(x-a)^r y}dx=\frac{G_{r-2}(x).y}{(x-a)^{r-1}}+A\int\frac{dx}{(x-a)y}, \tag{14}$$

sprowadza się więc do pewnej, ściśle określonej funkcyi algebraicznej, niewymiernej i do całki funkcyi algebraicznej, niewymiernej, kształtu: $\int\frac{dx}{(x-a)y}$, zwanej całką zasadniczą drugiego typu.

9. Drugi rodzaj całek, w postaci $\int\frac{G_{2s-1}(x)\,dx}{(x^2+px+q)^s y}$, z powodu tego, że możemy zawsze wyznaczyć taką funkcyę $(2s-3)$-go stopnia: $G_{2s-3}(x)$ i taką funkcyę pierwszego stopnia: $Ax+B$, że będzie tożsamościowo:

$$\frac{G_{2s-1}(x)}{(x^2+px+q)^s y}=\left(\frac{G_{2s-3}(x).y}{(x^2+px+q)^{s-1}}\right)'+\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)y},$$

sprowadza się do postaci:

$$\int \frac{G_{2s-1}(x)\,dx}{(x^2+px+q)^s y} = \frac{G_{2s-3}(x)\,.\,y}{(x^2+px+q)^{s-1}} + \int \frac{(Ax+B)\,dx}{(x^2+px+q)^s y}, \tag{15}$$

a więc do pewnej, ściśle określonej funkcyi ułamkowej, niewymiernej i do całki funkcyi niewymiernej, kształtu: $\int \frac{(Ax+B)\,dx}{(x^2+px+q)\,y}$, zwanej całką zasadniczą trzeciego typu.

10. Całka funkcyi algebraicznej, niewymiernej, kształtu:

$$\int R(x,\,y)\,dx = \int R_1(x)\,dx + \int \frac{R_2(x)\,dx}{y},$$

da się więc ostatecznie przedstawić w postaci sumy następującej:

$$\int R(x,\,y)\,dx = \int G_\mu(x)\,dx + \int \frac{G_{\nu-1}(x)}{G_\nu(x)}\,dx + G_{m-1}(x).y + A\int\frac{dx}{y} + \sum \frac{G_{r-2}(x)\,.\,y}{(x-a)^{r-1}} +$$

$$+ \sum \frac{G_{2s-3}(x)\,.\,y}{(x^2+px+q)^{s-1}} + \sum \int \frac{A dx}{(x-a)y} + \sum \int \frac{(Ax+B)\,dx}{(x^2+px+q)\,y}, \tag{16}$$

w której występują w ogólności, obok funkcyj algebraicznych, ściśle określonych, jeszcze całki funkcyj wymiernych, całkowitych i ułamkowych i trzy typy całek funkcyj niewymiernych, zwanych całkami zasadniczemi:

$$J = \int \frac{dx}{y},\quad J' = \int \frac{dx}{(x-a)y},\quad J'' = \int \frac{(Ax+B)\,dx}{(x^2+px+q)\,y}, \tag{17}$$

do których należałoby dopiero stosować podstawienia algebraiczne, przekształcające te całki na całki funkcyj wymiernych.

11. Przykład. Wyznaczyć całkę, kształtu:

$$J = \int \frac{x+\sqrt{x^2-5x+10}}{x-\sqrt{x^2-5x+10}}\,dx.$$

Mamy tu:

$$\frac{x+\sqrt{x^2-5x+10}}{x-\sqrt{x^2-5x+10}} = \frac{(x+\sqrt{x^2-5x+10})^2}{5x-10} = \frac{2x^2-5x+10}{5x-10} + \frac{2x(x^2-5x+10)}{(5x-10)\sqrt{x^2-5x+10}} =$$

$$= \frac{1}{5}\,\frac{2x^2-5x+10}{x-2} + \frac{2}{5}\,\frac{x^3-5x^2+10x}{x-2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-5x+10}} =$$

$$= \frac{1}{5}\left\{2x-1+\frac{8}{x-2}\right\} + \frac{2}{5}\left\{x^2-3x+4+\frac{8}{x-2}\right\}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-5x+10}},$$

zatem otrzymujemy:

$$\int \frac{x+\sqrt{x^2-5x+10}}{x-\sqrt{x^2-5x+10}}\,dx = \frac{1}{5}\left\{x^2-x\right\} + \frac{8}{5}\log(x-2) +$$

$$+ \frac{2}{5}\int \frac{x^2-3x+4}{\sqrt{x^2-5x+10}}\,dx + \frac{16}{5}\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-5x+10}} + C.$$

Kładąc: $\frac{x^2-3x+4}{\sqrt{x^2-5x+10}} = (G_1(x)\,.\,\sqrt{x^2-5x+10})' + \frac{A}{\sqrt{x^2-5x+10}}$,

gdzie $G_1(x) = a_1x + a_0$, otrzymujemy, na wyznaczenie spółczynników a_0, a_1, A, tożsamość:

$$x^2-3x+4 = (x-{}^5\!/_2)(a_1x+a_0) + a_1(x^2-5x+10) + A,$$

z której wypływają równania warunkowe:

$$1 = 2a_1,\ -3 = -{}^5\!/_2 a_1 + a_0 - 5a_1;\ 4 = -{}^5\!/_2 a_0 + 10a_1 + A,$$

czyli:
$$a_1 = \frac{1}{2},\quad a_0 = \frac{3}{4},\quad A = \frac{7}{8},$$

a więc: $$\int\frac{x^2-3x+4}{\sqrt{x^2-5x+10}}\,dx=\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\right)\sqrt{x^2-5x+10}+\frac{7}{8}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+10}}.$$

zatem: $$\int\frac{x+\sqrt{x^2-5x+10}}{x-\sqrt{x^2-5x+10}}\,dx=\frac{1}{5}\left[x^2-x+\left(x+\frac{3}{2}\right)\sqrt{x^2-5x+10}\right]+$$
$$+\frac{8}{5}\log(x-2)+\frac{7}{20}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+10}}+\frac{16}{5}\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-5x+10}}.$$

gdzie wyznaczyć mamy jedną całkę zasadniczą pierwszego i jedną drugiego typu.

Celem wyznaczenia pierwszej całki, podstawmy:

$$\sqrt{x^2-5x+10}=u-x,\quad\text{czyli}\quad u=x+\sqrt{x^2-5x+10},$$

a otrzymamy: $$x^2-5x+10=u^2+x^2-2ux,\ \text{zatem}\ x=\frac{u^2-10}{2u-5},$$

$$dx=\frac{2(u^2-5u+10)}{(2u-5)^2}du,\quad\sqrt{x^2-5x+10}=\frac{u^2-5u+10}{2u-5},$$

zatem:
$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+10}}=\int\frac{2(u^2-5u+10)}{(2u-5)^2}\cdot\frac{2u-5}{u^2-5u+10}du=\int\frac{2du}{2u-5}=\log(2u-5),$$

czyli:
$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+10}}=\log\{2x-5+2\sqrt{x^2-5x+10}\}+C.$$

Celem wyznaczenia drugiej całki zasadniczej, połóżmy:

$$x-2=\frac{1}{z},\ \text{zatem}\ dx=-\frac{dz}{z^2},\ x=\frac{2z+1}{z},\ \sqrt{x^2-5x+10}=\frac{\sqrt{4z^2-z+1}}{z},$$

a otrzymamy:
$$\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-5x+10}}=-\int\frac{dz\,.\,z\,.\,z}{z^2\sqrt{4z^2-z+1}}=-\int\frac{dz}{\sqrt{4z^2-z+1}}.$$

Podstawiając teraz:
$$\sqrt{4z^2-z+1}=u-2z,\ \text{czyli}\ u=2z+\sqrt{4z^2-z+1},$$

otrzymujemy:
$$4z^2-z+1=u^2-4uz+4z^2,$$

zatem:
$$z=\frac{u^2-1}{4u-1},\quad dz=\frac{2(2u^2-u+2)}{(4u-1)^2}du,\quad\sqrt{4z^2-z+1}=\frac{2u^2-u+2}{4u-1},$$

a więc:
$$\int\frac{dz}{\sqrt{4z^2-z+1}}=\int\frac{2du}{4u-1}=\frac{1}{2}\log(4u-1)=\frac{1}{2}\log[8z-1+4\sqrt{4z^2-z+1}],$$

skąd, ze względu na to, że: $z=\frac{1}{x-2}$, otrzymujemy:
$$\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-5x+10}}=\frac{1}{2}\log\frac{x-2}{x+6+4\sqrt{x^2-5x+10}}.$$

Otrzymujemy zatem ostatecznie:
$$\int\frac{x+\sqrt{x^2-5x+10}}{x-\sqrt{x^2-5x+10}}\,dx=\frac{1}{5}x(x-1)+\frac{1}{5}\left(x+\frac{3}{2}\right)\sqrt{x^2-5x+10}+$$
$$+\frac{8}{5}\log\frac{(x-2)^2}{x+6+4\sqrt{x^2-5x+10}}+\frac{7}{20}\log\{2x-5+2\sqrt{x^2-5x+10}\}+C.$$

12. Sprowadzanie całek, kształtu: $\int\frac{R(x)\,dx}{y}$ do całek normalnych. Całka ks $\int\frac{R(x)\,dx}{y}$, gdzie $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, po rozwinięciu funkcyi wymiernej, ułamkow na funkcyę całkowitą i na ułamki proste, rozpada się ostatecznie na całki następı trzech typów: $J_r=\int\frac{x^r\,dx}{y}$, $J_m=\int\frac{dx}{(x-\alpha)^m y}$, $J_n=\int\frac{(Ax+B)\,dx}{(x^2+px+q)^n dx}$.

Te trzy typy całek nazywają częstokroć całkami normalnemi dla całek funkcyj algebraicznych, niewymiernych, zawierających niewymierność w postaci funkcyi:

$$y = \sqrt{ax^2 + bx + c}.$$

13. Sprowadzanie całek normalnych do całek zasadniczych. Wyznaczanie całek normalnych J_r, J_m, J_n możemy uskutecznić za pomocą podstawień, poznanych powyżej, sprowadzających te całki do całek funkcyj wymiernych, albo też za pomocą wzorów redukcyjnych, sprowadzających powyższe całki normalne do całek zasadniczych.

a) Dla całki normalnej:

$$J_r = \int \frac{x^r\,dx}{y} = \int \frac{x^r\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{x^r\,dx}{(ax^2+bx+c)^{1/2}}, \tag{19}$$

otrzymujemy wzór redukcyjny na podstawie wzoru (18), art. 19. str. 47., przedstawiającego wzór redukcyjny dla całek funkcyj algebraicznych, wymiernych, typu: $\int \frac{x^m\,dx}{(ax^2+bx+c)^r}$, który się jednak utrzymuje i podobnie wyprowadza także przy wykładnikach ułamkowych r i m.

Zastąpmy mianowicie w tym wzorze m przez r, zaś r przez $1/2$, a otrzymamy wzór redukcyjny w postaci:

$$J_r = \int \frac{x^r\,dx}{y} = \frac{1}{ra}x^{r-1}y - \frac{(2r-1)b}{2ra}\int\frac{x^{r-1}\,dx}{y} - \frac{(r-1)c}{ra}\int\frac{x^{r-2}\,dx}{y}, \tag{20}$$

który całkę $J_r = \int \frac{x^r\,dx}{y}$ przy całkowitym wykładniku r, sprowadza ostatecznie do całek:

$$J_1 = \int \frac{x\,dx}{y} \text{ i } J_0 = \int \frac{dx}{y},$$

czyli wprost do całki zasadniczej $J_0 = \int \frac{dx}{y}$, gdyż:

$$J_1 = \int \frac{x\,dx}{y} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{2a}\int\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

a więc:

$$J_1 = \frac{1}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{y}. \tag{21}$$

W rezultacie otrzymujemy, na podstawie uwag w art. 8. poczynionych, wprost:

$$\int \frac{x^r\,dx}{y} = G_{r-1}(x).y + A\int\frac{dx}{y}, \tag{22}$$

gdzie funkcya $G_{r-1}(x) = a_0 x^{r-1} + a_1 x^{r-2} + \ldots + a_{r-2}x + a_{r-1}$ i stała A określone są tożsamością:

$$x^r = G'_{r-1}(x)(ax^2+bx+c) + {}^1\!/_2\, G_{r-1}(x).(2ax+b) + A.$$

b) Całka normalna drugiego typu:

$$J_m = \int \frac{dx}{(x-\alpha)^m y} = \int \frac{dx}{(x-\alpha)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}. \tag{23}$$

wskutek podstawienia, $x-\alpha = u$, na podstawie którego wypada: $dx = du$,

$$ax^2+bx+c = a(u+\alpha)^2 + b(u+\alpha) + c = Au^2 + Bu + C,$$

gdzie:

$$A = a,\ B = 2a\alpha + b,\ C = a\alpha^2 + b\alpha + c,$$

a więc:

$$y = \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{Au^2+Bu+C},$$

przechodzi na całkę:

$$J_m = \int\frac{dx}{(x-\alpha)^m y} = \int\frac{du}{u^m\sqrt{Au^2+Bu+C}}. \tag{24}$$

Na podstawie wzoru (20) str. 47. przedstawiającego wzór redukcyjny dla całek typu

$$\int\frac{dx}{x^m X^r} = \int\frac{dx}{x^m(ax^2+bx+c)^r},$$

ważnego także dla ujemnych wykładników m i r, otrzymujemy dla całek typu:

$$\int \frac{du}{u^m\sqrt{Au^2+Bu+C}} = \int \frac{du}{u^m \cdot y},$$

gdzie $y = \sqrt{Au^2+Bu+C}$, wzór redukcyjny w postaci:

$$J_m = \int \frac{du}{u^m y} = -\frac{1}{(m-1)C} \cdot \frac{y}{u^{m-1}} - \frac{(2m-3)B}{2(m-1)C}\int \frac{du}{u^{m-1} y} - \frac{(m-2)A}{(m-1)C}\int \frac{du}{u^{m-2} y}, \quad (2$$

który wyznaczanie całki: $J_m = \int \frac{du}{u^m y}$, przy całkowitym wykładniku m, sprowadza wyznaczania całek: $J_1 = \int \frac{dx}{uy}$ i $J_0 = \int \frac{du}{y}$, a więc ostatecznie, do wyznaczania całki zasad czej: $J_0 = \int \frac{du}{y}$, gdyż całka $J_1 = \int \frac{du}{uy}$, wskutek podstawienia $u = \frac{1}{z}$, a więc $du = -\frac{dz}{z^2}$,

$$y = \sqrt{Au^2 + Bu + C} = \frac{1}{z}\sqrt{A + Bz + Cz^2},$$

sprowadza się do postaci:

$$J_1 = \int \frac{du}{uy} = -\int \frac{dz}{\sqrt{A + Bz + Cz^2}}, \quad (26$$

a więc do całki zasadniczej pierwszego typu.

W rezultacie otrzymamy, na podstawie art. 8., wprost:

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m y} = \frac{G_{m-2}(x) \cdot y}{(x-a)^{m-1}} + A_1 \int \frac{dx}{(x-a)y}, \quad (27$$

gdzie spółczynniki funkcyi całkowitej:

$$G_{m-2}(x) = a_0 x^{m-2} + a_1 x^{m-3} + \ldots + a_{m-3} x + a_{m-2},$$

i stała A_1 określone są tożsamością:

$$1 = [G'_{m-2}(x) \cdot y^2 + \tfrac{1}{2} G_{m-2}(x)(2ax+b)](x-a) - (m-1) G_{m-2}(x) \cdot y^2 + A_1 (x-a)^{m-1},$$

a w końcu:

$$\int \frac{dx}{(x-a)y} = -\int \frac{dz}{\sqrt{Cz^2 + Bz + A}}, \quad \text{gdzie } x - a = \frac{1}{z}.$$

c) Całka normalna trzeciego typu:

$$J_n = \int \frac{(Ax+B)\,dx}{(x^2+px+q)^n y} = \int \frac{(Ax+B)\,dx}{(x^2+px+q)^n \sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad (2$$

sprowadza się, na podstawie art. 9., wprost do postaci:

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^n y} = \frac{G_{2n-3}(x) \cdot y}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)y}, \quad (29$$

gdzie spółczynniki funkcyi całkowitej $(2n-3)$-go stopnia:

$$G_{2n-3}(x) = a_0 x^{2n-3} + a_1 x^{2n-4} + a_2 x^{2n-5} + \ldots + a_{2n-3},$$

i funkcyi całkowitej pierwszego stopnia: $Ax + B$, określone są tożsamością:

$$Ax + B = [(ax^2+bx+c)\, G'_{2n-3}(x) + (ax + \tfrac{1}{2}b)\, G_{2n-3}(x)](x^2+px+q) -$$
$$-(n-1)(2x+p)G_{2n-3}(x)(ax^2+bx+c) + (Ax+B)(x^2+px+q)^{n-1},$$

a więc składa się z funkcyi algebraicznej $\frac{G_{2n-3}(x) \cdot \sqrt{ax^2+bx+c}}{(x^2+px+q)^{n-1}}$ i z całki zasadn trzeciego typu: $J_1 = \int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)y}$.

14. Przykład. Rozwiązać całkę: $\int \frac{(x^2-3x+4)\,dx}{\sqrt{x^2-5x+10}}$ przy pomocy całek normaln

Mamy tu:

$$\int \frac{(x^2-3x+4)dx}{\sqrt{x^2-5x+10}} = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-5x+10}} - 3\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-5x+10}} + 4\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+10}}.$$

a więc całki normalne, typu:

$$J_m=\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{x^2-5x+10}}=\int\frac{x^m\,dx}{y}.$$

Kładąc $x^m=x^{m-2}\,.\,y^2+(5x-10)x^{m-2}$, otrzymujemy:

$$J_m=\int x^{m-2}y\,dx+5\,J_{m-1}-10\,J_{m-2}.$$

Za pomocą całkowania przez części, dostajemy jednak:

$$\int x^{m-2}y\,dx=\frac{x^{m-1}y}{m-1}-\frac{1}{2m-2}\int\frac{x^{m-1}}{y}(2x-5)\,dx=\frac{x^{m-1}y}{m-1}-\frac{1}{m-1}J_m+\frac{5}{2(m-1)}J_{m-1},$$

będzie zatem:

$$J_m=\frac{x^{m-1}y}{m-1}-\frac{1}{m-1}J_m+\frac{5\,(2m-1)}{2(m-1)}J_{m-1}-10\,J_{m-2},$$

a więc:

$$\frac{m}{m-1}J_m=\frac{x^{m-1}y}{m-1}+\frac{5(2m-1)}{2m-2}J_{m-1}-10\,J_{m-2},$$

skąd dostajemy wzór redukcyjny:

$$J_m=\frac{x^{m-1}y}{m}+\frac{5(2m-1)}{2m}J_{m-1}-\frac{10(m-1)}{m}J_{m-2},$$

który wypływa wprost z wzoru (20), jeżeli położymy $r=m$, $a=1$, $b=-5$, $c=10$.

Na podstawie tego wzoru otrzymujemy:

$$J_2=\frac{xy}{2}+\frac{15}{4}J_1-5J_0,\quad J_1=y+\frac{5}{2}J_0,$$

zatem:

$$\int\frac{(x^2-3x+4)\,dx}{\sqrt{x^2-5x+10}}=J_2-3\,J_1+4\,J_0=\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)y+\frac{7}{8}J_0,$$

a że:

$$J_0=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+10}}=\log\left(2x-5+2\sqrt{x^2-5x+10}\right),$$

otrzymujemy ostatecznie:

$$\int\frac{x^2-3x+4}{\sqrt{x^2-5x+10}}dx=\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)\sqrt{x^2-5x+10}+\frac{7}{8}\log\left(2x-5+2\sqrt{x^2-5x+10}\right)+C.$$

15. Podstawienia algebraiczne w zastosowaniu do całek zasadniczych. Stosując do całek zasadniczych:

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\quad J'=\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}},\quad J''=\int\frac{(Ax+B)\,dx}{(x^2+px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

kolejno trzy rodzaje podstawień, zależnych od kształtu funkcyi niewymiernej $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, dochodzimy do następujących wyników.

a) Całka zasadnicza pierwszego typu:

$$J=\int\frac{dx}{y}=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

1) przy podstawieniu I.: $y=u-x\sqrt{a}$, otrzymuje kształt:

$$J=2\int\frac{du}{b+2u\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\log\left(b+2u\sqrt{a}\right)+C,$$

na podstawie którego dostajemy:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\log\left\{b+2ax+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\right\}+C,$$

pod założeniem, że $a>0$.

2) przy podstawieniu II.: $y=xu+\sqrt{c}$, przedstawia się w postaci:

$$J=2\int\frac{du}{a-u^2}=-\frac{2}{\sqrt{-a}}\operatorname{arctang}\frac{u}{\sqrt{-a}}+C,$$

zatem w postaci:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{2}{\sqrt{-a}}\operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{c}-\sqrt{ax^2+bx+c}}{x\sqrt{-a}}+C.$$

rzeczywistej, pod założeniem, że $c>0$, $a<0$.

3) przy podstawieniu III.: $y=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=\sqrt{a}(x-x_1)u$, zamie[nia]
się na:

$$J=-\frac{2}{\sqrt{a}}\int\frac{du}{u^2-1}=\frac{1}{\sqrt{a}}\log\frac{u+1}{u-1}+C,$$

skąd dostajemy trzecie rozwiązanie w formie:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\log\frac{\sqrt{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}+\sqrt{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}}{\sqrt{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}-\sqrt{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}},$$

rzeczywistej, pod założeniem, że $b^2>4ac$.

b) Całka zasadnicza drugiego typu:

$$J'=\int\frac{dx}{(x-\alpha)y}=\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

1) przy podstawieniu I.: $y=u-x\sqrt{a}$, a więc: $x=\dfrac{u^2-c}{b+2u\sqrt{a}}$ przybi[era]
kształt:

$$J'=\int\frac{2du}{u^2-2\alpha u\sqrt{a}-b\alpha-c}=\log\frac{u-\alpha\sqrt{a}-\sqrt{a\alpha^2+b\alpha+c}}{u-\alpha\sqrt{a}+\sqrt{a\alpha^2+b\alpha+c}}+C,$$

wobec czego, otrzymujemy:

$$\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}=\log\frac{(x-\alpha)\sqrt{a}+\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{a\alpha^2+b\alpha+c}}{(x-\alpha)\sqrt{a}+\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a\alpha^2+b\alpha+c}}+C.$$

2) przy podstawieniu II.: $y=xu+\sqrt{c}$, a więc $x=\dfrac{2u\sqrt{c}-b}{a-u^2}$ przedsta[wia]
się w postaci:

$$J'=\int\frac{2du}{\alpha u^2+2u\sqrt{c}-b-a\alpha}=\frac{2}{\sqrt{-a\alpha^2-b\alpha-c}}\operatorname{arc\,tang}\frac{\alpha u+\sqrt{c}}{\alpha\sqrt{-a\alpha^2-b\alpha-c}},$$

zatem:

$$\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{2}{\sqrt{-a\alpha^2-b\alpha-c}}\operatorname{arc\,tang}\frac{\alpha\sqrt{ax^2+bx+c}+(x-\alpha)\sqrt{\ldots}}{\alpha x\sqrt{-a\alpha^2-b\alpha-c}}$$

3) przy podstawieniu III.: $y=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=\sqrt{a}(x-x_1)u$, a wi[ęc]
$x=\dfrac{x_1u^2-x_2}{u^2-1}$, zamienia się na następującą całkę:

$$J''=-\int\frac{2du}{u^2(x_1-\alpha)-(x_2-\alpha)}=\frac{1}{\sqrt{a(x_1-\alpha)(x_2-\alpha)}}\log\frac{u\sqrt{x_1+\alpha}+\sqrt{x_2+\alpha}}{u\sqrt{x_1+\alpha}-\sqrt{x_2+\alpha}}$$

skąd, kładąc $a\alpha^2+b\alpha+c=D$, otrzymujemy trzecie rozwiązanie tej c[ałki]
w postaci:

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+c}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{D}}\log\frac{\sqrt{(2ax+b-\sqrt{D})(2aa+b+\sqrt{D})}+\sqrt{(2ax+b+\sqrt{D})(2aa+b-\sqrt{D})}}{\sqrt{(2ax+b-\sqrt{D})(2aa+b+\sqrt{D})}-\sqrt{(2ax+b+\sqrt{D})(2aa+b-\sqrt{D})}}.$$

Szczególny przypadek całki zasadniczej drugiego typu, odpowiadający wartości), **tworzy całka:**

$$J'=\int\frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

ra, zapomocą podstawienia pierwszego: przypadek $b)$ 1), przedstawia się w postaci:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\log\frac{x\sqrt{a}+\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{c}}{x\sqrt{a}+\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{c}}+C.$$

c) **Całka zasadnicza trzeciego typu:**

$$J''=\int\frac{(Ax+B)\,dx}{(x^2+px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

mienia się: 1) wskutek podstawienia I: $y=u-x\sqrt{a}$, a więc $x=\dfrac{u^2-c}{b+2u\sqrt{a}}$

$$y=\frac{u^2\sqrt{a}+bu+c\sqrt{a}}{b+2u\sqrt{a}},\quad dx=\frac{2(u^2\sqrt{a}+bu+c\sqrt{a})}{(b+2u\sqrt{a})^2}\,du,\quad \frac{dx}{y}=\frac{2du}{b+2u\sqrt{a}},$$

a całkę funkcyi wymiernej, kształtu:

$$J''=2\int\frac{A(u^2-c)+B(b+2u\sqrt{a})}{(u^2-c)^2+p(u^2-c)(b+2u\sqrt{a})+q(b+2u\sqrt{a})^2}\,du;$$

2) wskutek podstawienia II: $y=xu+\sqrt{c}$, a więc $x=\dfrac{2u\sqrt{c}-b}{a-u^2}$,

$$y=\frac{u^2\sqrt{c}-bu+a\sqrt{c}}{a-u^2},\quad dx=\frac{2(u^2\sqrt{c}-bu+a\sqrt{c})du}{(a-u^2)^2},$$

a całkę funkcyi wymiernej:

$$J''=2\int\frac{A(2u\sqrt{c}-b)+B(a-u^2)}{(2u\sqrt{c}-b)^2+p(2u\sqrt{c}-b)(a-u^2)+q(a-u^2)^2}\,du;$$

3) wskutek podstawienia III: $y=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=\sqrt{a}\,(x-x_1)u$, a więc

$$x=\frac{x_1u^2-x_2}{u^2-1},\quad y=\frac{\sqrt{a}\,.(x_2-x_1)\,u}{u^2-1},\quad dx=\frac{2(x_2-x_1)u\,du}{(u^2-1)^2},$$

a całkę funkcyi wymiernej w postaci:

$$J''=\frac{2}{\sqrt{a}}\int\frac{A(x_1u^2-x_2)+B(u^2-1)}{(x_1u^2-x_2)^2+p(x_1u^2-x_2)(u^2-1)+q(u^2-1)^2}\,du.$$

16. Wszystkie trzy całki powyższe sprowadzają się do kształtu:

$$J''=\int R(u)\,du=\int\frac{Af_1+Bf_2}{f_1^2+pf_1f_2+qf_2^2}\,du,$$

gdzie f_1 i f_2 są funkcyami pierwszego, lub drugiego stopnia, ze względu na zmienną u, a mianownik $f_1^2+pf_1f_2+qf_2^2$ funkcyą stopnia czwartego.

Funkcya $f_1^2+pf_1f_2+qf_2^2$ w przypadku $p^2>4q$ rozpada się na dwa czynniki rzeczywiste, stopnia pierwszego ze względu na funkcye f_1 i f_2, w postaci:

$$f_1^2+pf_1f_2+qf_2^2=(f_1-\alpha f_2)(f_1-\beta f_2),$$

gdzie $\alpha=-\frac{1}{2}(p+\sqrt{p^2-4q})$, $\beta=-\frac{1}{2}(p-\sqrt{p^2-4q})$, w przypadku zaś $p^2<4q$, da się przedstawić w postaci:

$$f_1^2+pf_1f_2+qf_2^2=\frac{1}{4}[(2f_1+pf_2)^2+\varepsilon^2f_2^2], \text{ gdzie } \varepsilon^2=4q-p^2.$$

W pierwszym przypadku jest jednak:

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}=\frac{Ax+B}{(x-\alpha)(x-\beta)}=\frac{1}{\alpha-\beta}\left\{\frac{A\alpha+B}{x-\alpha}-\frac{A\beta+B}{x-\beta}\right\}.$$

Całka zasadnicza trzeciego typu przedstawia się w tym razie w postaci:

$$J''=\frac{A\alpha+B}{\alpha-\beta}\int\frac{dx}{(x-\alpha)y}+\frac{A\beta+B}{\beta-\alpha}\int\frac{dx}{(x-\beta)y},$$

składa się zatem z dwu całek typu drugiego, J_α' i J_β', pomnożonych przez rzeczywiste spółczynniki, w postaci:

$$J''=\frac{A\alpha+B}{\alpha-\beta}J_\alpha'+\frac{A\beta+A}{\beta-\alpha}J'_\beta,$$

gdzie całki J'_α i J'_β mają kształty, wyżej pod *b)* podane i są, albo funkcyami logarytmicznemi, albo funkcyami cyklometrycznemi.

Przyjmując kształty *b)*, 1), dostajemy:

$$J''=\frac{A\alpha+B}{(\alpha-\beta)}\frac{1}{\sqrt{a\alpha^2+b\alpha+c}}\log\frac{(x-\alpha)\sqrt{a}+\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{a\alpha^2+b\alpha+c}}{(x-\alpha)\sqrt{a}+\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a\alpha^2+b\alpha+c}}+$$

$$+\frac{A\beta+B}{(\beta-\alpha)}\frac{1}{\sqrt{a\beta^2+b\beta+c}}\log\frac{(x-\beta)\sqrt{a}+\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{a\beta^2+b\beta+c}}{(x-\beta)\sqrt{a}+\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a\beta^2+b\beta+c}}.$$

Przyjmując pierwszą z tych całek w postaci 1), drugą w postaci 2), lub 3); albo pierwszą w postaci 2), drugą w postaci 1), 2), 3); albo pierwszą w postaci 3), drugą w postaci 1), 2), 3) otrzymamy ośm jeszcze postaci, których tu wypisywać nie będziemy.

W drugim przypadku, $p^2<4q$, gdy oba pierwiastki α i β równania $x^2+px+q=0$ są liczbami zespolonemi, sprzężonemi, równania:

$$f_1-\alpha f_2=0 \text{ i } f_1-\beta f_2=0,$$

mają, każde z osobna po dwa pierwiastki zespolone, które układają się w ten sposób, że pierwiastki jednego równania są sprzężonemi z pierwiastkami drugiego równania.

Wobec tego, możemy napisać:

$$f_1-\alpha f_2=\lambda(u-\gamma_1-\delta_1 i)(u-\gamma_2-\delta_2 i),$$
$$f_1-\beta f_2=\lambda(u-\gamma_1+\delta_1 i)(u-\gamma_2+\delta_2 i),$$

gdzie λ jest pewnym stałym czynnikiem, zależnym od rodzaju podstawienia.

Połóżmy $\alpha=\gamma+\delta i$, $\beta=\gamma-\delta i$, a otrzymamy powyższe równania w postaci:

$$(f_1-\gamma f_2)-\delta f_2 i=\lambda(u-\gamma_1-\delta_1 i)(u-\gamma_2-\delta_2 i),$$
$$(f_1-\gamma f_2)+\delta f_2 i=\lambda(u-\gamma_1+\delta_1 i)(u-\gamma_2+\delta_2 i),$$

skąd wypływają równania:

$$f_1-\gamma f_2=\lambda(u-\gamma_1)(u-\gamma_2)-\lambda\delta_1\delta_2,$$
$$\delta f_2=\lambda\delta_1(u-\gamma_2)+\lambda\delta_2(u-\gamma_1),$$

które dają:

$$f_1=\lambda\left\{(u-\gamma_1)(u-\gamma_2)+\frac{\gamma\delta_2}{\delta}(u-\gamma_1)+\frac{\gamma\delta_1}{\delta}(u-\gamma_2)-\delta_1\delta_2\right\},$$

$$f_2=\lambda\left\{\frac{\delta_2}{\delta}(u-\gamma_1)+\frac{\delta_1}{\delta}(u-\gamma_2)\right\}.$$

Otrzymujemy zatem:

$$Af_1+Bf_2=\lambda\left[A(u-\gamma_1)(u-\gamma_2)+\frac{A\gamma+B}{\delta}\{\delta_2(u-\gamma_1)+\delta_1(u-\gamma_2)\}-A\delta_1\delta_2\right],$$

a więc badaną całkę J'' w postaci:

$$J''=\int\frac{(Af_1+Bf_2)\,du}{(f_1-\alpha f_2)(f_1-\beta f_2)}=$$

$$=\frac{1}{\lambda}\int\frac{A(u-\gamma_1)(u-\gamma_2)+\frac{A\gamma+B}{\delta}\{\delta_2(u-\gamma_1)+\delta_1(u-\gamma_2)\}-A\delta_1\delta_2}{\{(u-\gamma_1)^2+\delta^2_1\}\{(u-\gamma_2)^2+\delta^2_2\}}\,du.$$

Funkcyę ułamkową, stojącą pod znakiem całkowym możemy rozłożyć na dwie proste funkcye ułamkowe w postaci:

$$\frac{M_1(u-\gamma_1)+N_1}{(u-\gamma_1)^2+\delta_1^2}+\frac{M_2(u-\gamma_2)+N_2}{(u-\gamma_2)^2+\delta^2_2},$$

gdzie, na wyznaczenie spółczynników M_1, N_1, M_2, N_2, otrzymujemy równanie tożsamościowe:

$$A(u-\gamma_1)(u-\gamma_2)+\frac{A\gamma+B}{\delta}\{\delta_2(u-\gamma_1)+\delta_1(u-\gamma_2)\}-A\delta_1\delta_2=M_1(u-\gamma_1)(u-\gamma_2)^2+$$
$$+M_2(u-\gamma_2)(u-\gamma_1)^2+N_1(u-\gamma_2)^2+N_2(u-\gamma_1)^2+M_1\delta^2_2(u-\gamma_1)+M_2\delta^2_1(u-\gamma_2)+$$
$$+N_1\delta^2_2+N_2\delta^2_1,$$

z którego, przez porównanie spółczynników przy równych potęgach, otrzymujemy cztery równania pierwszego stopnia, ze względu na niewiadome M_1, M_2, N_1, N_2.

Porównywając spółczynniki przy u^3 i u^2, otrzymujemy pierwsze dwa równania w postaci: $M_1+M_2=0$,

$$-M_1(\gamma_1+2\gamma_2)-M_2(\gamma_2+2\gamma_1)+N_1+N_2=A,$$

kładąc zaś raz $u=\gamma_1$, drugi raz $u=\gamma_2$, otrzymujemy drugie dwa równania w postaci:

$$M_2\delta^2_1(\gamma_1-\gamma_2)+\{(\gamma_1-\gamma_2)^2+\delta^2_2\}N_1+\delta_1{}^2N_2=\frac{\delta_1(A\gamma+B)(\gamma_1-\gamma_2)}{\delta}-A\delta_1\delta_2,$$

$$M_1\delta^2_2(\gamma_2-\gamma_1)+\delta^2_2N_1+\{(\gamma_1-\gamma_2)^2+\delta^2_1\}N_2=\frac{\delta_2(A\gamma+B)(\gamma_2-\gamma_1)}{\delta}-A\delta_1\delta_2.$$

Z pierwszych dwu równań otrzymujemy:

$$M_1=\frac{A-N_1-N_2}{\gamma_1-\gamma_2},\quad M_2=\frac{A-N_1-N_2}{\gamma_2-\gamma_1}=-M_1,$$

z drugich dwu, po uwzględnieniu wartości M_1 i M_2, otrzymujemy:

$$[(\gamma_1-\gamma_2)^2+\delta^2_1+\delta^2_2]N_1+2\delta^2_1N_2=\frac{\delta_1}{\delta}[(A\gamma+B)(\gamma_1-\gamma_2)+A\delta(\delta_1-\delta_2)],$$

$$2\delta^2_2N_1+[(\gamma_1-\gamma_2)^2+\delta^2_1+\delta^2_2]N_2=\frac{\delta_2}{\delta}[(A\gamma+B)(\gamma_2-\gamma_1)+A\delta(\delta_2-\delta_1)],$$

a stąd wartości N_1 i N_2 w postaci wzorów:

$$N_1=\frac{\delta_1[(A\gamma+B)(\gamma_1-\gamma_2)+A\delta(\delta_1-\delta_2)]}{\delta[(\gamma_1-\gamma_2)^2+(\delta_1-\delta_2)^2]},\quad N_2=\frac{\delta_2[(A\gamma+B)(\gamma_2-\gamma_1)+A\delta(\delta_2-\delta_1)]}{\delta[(\gamma_1-\gamma_2)^2+(\delta_1-\delta_2)^2]}$$

przyczem:
$$M_1=\frac{A\delta(\gamma_1-\gamma_2)-(A\gamma+B)(\delta_1-\delta_2)}{\delta[(\gamma_1-\gamma_2)^2+(\delta_1-\delta_2)^2]}.$$

Badana całka zasadnicza trzeciego typu przyjmuje wobec tego ksz

$$J''=\frac{1}{\lambda}\int\frac{M_1(u-\gamma_1)+N_1}{(u-\gamma_1)^2+\delta_1^2}du+\frac{1}{\lambda}\int\frac{M_2(u-\gamma_2)+N_2}{(u-\gamma_2)^2+\delta_2^2}du,$$

czyli:

$$J''=\frac{M_1}{2\lambda}\log\frac{(u-\gamma_1)^2+\delta_1^2}{(u-\gamma_2)^2+\delta_2^2}+$$
$$+\frac{1}{\lambda}\frac{N_1}{\delta_1}\left\{\operatorname{arc\,tang}\frac{u-\gamma_1}{\delta_1}-\operatorname{arctang}\frac{u-\gamma_2}{\delta_2}\right\},$$

a więc:

$$J''=\frac{M_1}{2\lambda}\log\frac{(u-\gamma_1)^2+\delta_1^2}{(u-\gamma_2)^2+\delta_2^2}+\frac{N_1}{\lambda\delta_1}\operatorname{arctg}\frac{\delta_2(u-\gamma_1)-\delta_1(u-\gamma_2)}{(u-\gamma_1)(u-\gamma_2)+\delta_1\delta_2},$$

czyli ostatecznie:

$$J''=\frac{A\delta(\gamma_1-\gamma_2)-(A\gamma+B)(\delta_1-\delta_2)}{2\lambda\delta[(\gamma_1-\gamma_2)^2+(\delta_1-\delta_2)^2]}\log\frac{(u-\gamma_1)^2+\delta_1^2}{(u-\gamma_2)^2+\delta_2^2}+$$
$$+\frac{(A\gamma+B)(\gamma_1-\gamma_2)+A\delta(\delta_1-\delta_2)}{\lambda\delta[(\gamma_1-\gamma_2)^2+(\delta_1-\delta_2)^2]}\operatorname{arctg}\frac{\delta_2(u-\gamma_1)-\delta_1(u-\gamma_2)}{(u-\gamma_1)(u-\gamma_2)+\delta_1\delta_2},$$

gdzie, przy podstawieniu: $y=u-x\sqrt{a}$, mamy $\lambda^2=1$, przy podstawie $y=xu+\sqrt{c}$, $\lambda^2=q$, przy podstawieniu: $y=\sqrt{a}.(x-x_1)u$, $\lambda^2=x_1^2+px_1+q$.

17. Powyżej otrzymany wzór ulegnie zmianom pod szczególnemi założeniami.

1) Załóżmy, że: $\gamma_1=\gamma_2=\gamma'$.

Pod tym założeniem równanie tożsamościowe, wyznaczające spółczynniki M_1, N_1, N_2, przyjmuje postać:

$$A(u-\gamma')^2+\frac{(A\gamma+B)(\delta_1+\delta_2)}{\delta}(u-\gamma')-A\delta_1\delta_2=$$
$$=(M_1+M_2)(u-\gamma')^3+(N_1+N_2)(u-\gamma')^2+(M_1\delta_2^2+M_2\delta_1^2)(u-\gamma')+N_1\delta_2^2+N_2\delta_1^2,$$

zkąd otrzymujemy:

$$M_1+M_2=0,\quad N_1+N_2=A,$$
$$M_1\delta_2^2+M_2\delta_1^2=\frac{(A\gamma+B)(\delta_1+\delta_2)}{\delta},\quad N_1\delta_2^2+N_2\delta_1^2=-A\delta_1\delta_2,$$

a więc:

$$M_1=\frac{A\gamma+B}{\delta(\delta_2-\delta_1)},\quad M_2=\frac{A\gamma+B}{\delta(\delta_1-\delta_2)},\quad N_1=\frac{A\delta_1}{\delta_1-\delta_2},\quad N_2=\frac{A\delta_2}{\delta_2-\delta_1}.$$

Wobec tego, badana całka otrzymuje kształt:

$$J''=\frac{1}{2\lambda\delta}\frac{A\gamma+B}{\delta_2-\delta_1}\log\frac{(u-\gamma')^2+\delta_1^2}{(u-\gamma')^2+\delta_2^2}+\frac{1}{\lambda}\frac{A}{\delta_1-\delta_2}\operatorname{arc\,tang}\frac{u-\gamma'}{\delta_1}+\frac{1}{\lambda}\frac{A}{\delta_2-\delta_1}\operatorname{arc\,tang}\frac{u-}{\delta}$$

czyli:
$$J''=\frac{1}{2\lambda\delta}\frac{A\gamma+B}{\delta_2-\delta_1}\log\frac{(u-\gamma')^2+\delta_1^2}{(u-\gamma')^2+\delta_2^2}+\frac{1}{\lambda}\frac{A}{\delta_1-\delta_2}\operatorname{arctang}\frac{\frac{u-\gamma'}{\delta_1}-\frac{u-\gamma'}{\delta_2}}{1+\frac{(u-\gamma')^2}{\delta_1\delta_2}}.$$

2) Załóżmy, że jeden z pierwiastków równania: $f_1-\alpha f_2=0$, a tem samem i rów $f_1-\beta f_2=0$ jest rzeczywisty, będzie on oczywiście wspólnym pierwiastkiem ró $f_1=0$ i $f_2=0$. Oznaczmy go przez γ_2, będzie wtedy $\delta_2=0$, a dana całka otrzymuje ks

$$J''=\int\frac{(Af_1+Bf_2)\,du}{(f_1-\alpha f_2)(f_1-\beta f_2)}=\frac{1}{\lambda}\int\frac{A(u-\gamma_1)+\frac{(A\gamma+B)\delta_1}{\delta}}{(u-\gamma_2)\left\{(u-\gamma_1)^2+\delta_1^2\right\}}du.$$

Funkcya stojąca pod znakiem całkowym, daje się przedstawić w postaci:

$$\frac{A(u-\gamma_1)+\frac{(A\gamma+B)\delta_1}{\delta}}{(u-\gamma_2)\left\{(u-\gamma_1)^2+\delta_1^2\right\}}=\frac{M_1(u-\gamma_1)+N_1}{(u-\gamma_1)^2+\delta_1^2}+\frac{M_2}{u-\gamma_2},$$

z której, na wyznaczenie trzech spółczynników M_1, M_2, N_1, otrzymujemy tożsamość:

$$M_1(u-\gamma_1)(u-\gamma_2)+M_2(u-\gamma_1)^2+N_1(u-\gamma_2)+M_2\delta_1^2=A(u-\gamma_1)+\frac{(A\gamma+B)\delta_1}{\delta},$$

a zatem trzy równania:

$$M_1+M_2=0,$$
$$-M_1(\gamma_1+\gamma_2)-M_2\,.\,2\gamma_1+N_1=A,$$
$$M_1\gamma_1\gamma_2+M_2\gamma_1^2-N_1\gamma_2+M_2\delta_1^2=\frac{(A\gamma+B)\delta_1}{\delta}-A\gamma_1,$$

skąd otrzymujemy. $M_2=-M_1$, a zarazem dwa równania:

$$M_1(\gamma_1-\gamma_2)+N_1=A,$$
$$M_1(\gamma_1\gamma_2-\gamma_1^2-\delta_1^2)-N_1\gamma_2=\frac{(A\gamma+B)\delta_1}{\delta}-A\gamma_1,$$

wyznaczające M_1 i N_1 w postaci:

$$M_1=\frac{A\delta(\gamma_1-\gamma_2)-(A\gamma+B)\delta_1}{\delta[(\gamma_1-\gamma_2)^2+\delta_1^2]},\quad N_1=\frac{\delta_1[(A\gamma+B)(\gamma_1-\gamma_2)+A\delta\delta_1]}{\delta[(\gamma_1-\gamma_2)^2+\delta_1^2]}.$$

Wobec tego dana całka zasadnicza trzeciego typu przyjmuje w tym przypadku postać:

$$J''=\frac{M_1}{2\lambda}\log\frac{(u-\gamma_1)^2+\delta_1^2}{(u-\gamma_2)^2}+\frac{1}{\lambda}\frac{N_1}{\delta_1}\,\text{arc tang}\,\frac{u-\gamma_1}{\delta_1}.$$

3) Załóżmy wreszcie, że pierwiastek rzeczywisty γ_2 jest zarazem rzeczywistą częścią drugiego pierwiastka zespolonego, że więc $\gamma_1=\gamma_2$, a przytem $\delta_2=0$.

W tym przypadku, powyżej podane równanie tożsamościowe sprowadza się do postaci:

$$(M_1+M_2)(u-\gamma_1)^2+N_1(u-\gamma_1)+M_2\delta_1^2=A(u-\gamma_1)+\frac{(A\gamma+B)\delta_1}{\delta},$$

z której otrzymujemy:

$$M_1+M_2=0,\quad N_1=A,\quad M_2\delta_1^2=\frac{(A\gamma+B)\delta_1}{\delta},$$

a zatem:

$$M_2=\frac{A\gamma+B}{\delta\delta_1},\quad M_1=-\frac{A\gamma+B}{\delta\delta_1},\quad N_1=A.$$

Badana całka przyjmuje zatem, pod temi założeniami, postać:

$$J''=-\frac{1}{2\lambda}\frac{A\gamma+B}{\delta\delta_1}\log\frac{(u-\gamma_1)^2+\delta_1^2}{(u-\gamma_1)^2}+\frac{A}{\lambda\delta_1}\,\text{arc tang}\,\frac{u-\gamma_1}{\delta_1}.$$

Ćwiczenia V.

1) Wykreślić i zbadać krzywą o równaniu: $y=\sqrt{-x^2+3x+2}$ i wykazać, że:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x+2}}=\arcsin\frac{2x-3}{\sqrt{17}}+C.$$

2) Wykreślić krzywą o równaniu: $y=\sqrt{x^2+6x+5}$ i wykazać, że:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+5}}=\log(x+3+\sqrt{x^2+6x+5})+C.$$

3) Wykreślić krzywą: $y=\sqrt{9x^2+2x+8}$ i wykazać, że:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2+2x+8}}=\frac{1}{3}\log\{9x+1+3\sqrt{9x^2+2x+8}\}+C.$$

Uzasadnić geometrycznie podstawienia algebraiczne, wskazane przy następujących całek:

4) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+8}}=\log(x-2+\sqrt{x^2-4x+8})+C.$

5) $\int\frac{dx}{\sqrt{-5x^2+4x+1}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{5x-2}{3}+C.$

6) $\int\frac{dx}{\sqrt{-3x^2-5x-2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(6x+5)+C.$

7) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=\sqrt{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\log[2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}]+C.$

8) $\int\sqrt{x^2+x+1}\,dx=(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})\sqrt{x^2+x+1}+\frac{3}{8}\log[2x+1+2\sqrt{x^2+x}$

9) $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+1}}=\frac{(2x^2-1)\sqrt{x^2+1}}{3x^3}+C.$

10) $\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=\arcsin\frac{x-a}{a}+C.$

11) $\int\sqrt{2ax-x^2}\,dx=\frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x-a}{a}+C.$

12) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=-\sqrt{2ax-x^2}+a\,.\arcsin\frac{x-a}{a}+C.$

13) $\int\frac{dx}{x\sqrt{2ax-x^2}}=-\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{ax}+C.$

14) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=-\frac{x+3a}{2}\sqrt{2ax-x^2}+\frac{3a^2}{2}\arcsin\frac{x-a}{a}+C.$

15) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{2ax-x^2}}=-\frac{(x+a)\sqrt{2ax-x^2}}{3a^2x^2}+C.$

16) $\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{a^2+x^2})+C.$

17) $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$

18) $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\log\frac{\sqrt{ax^2+bx}+x\sqrt{a}}{\sqrt{ax^2+bx}-x\sqrt{a}}=\frac{2}{\sqrt{-a}}\text{arc tang}\ \frac{}{\sqrt{\ }}$

Następujące całki, sprowadzić do całek zasadniczych i wykazać, że:

19) $\int\sqrt{3x^2+10x+9}\,dx=\left(\frac{x}{2}+\frac{5}{6}\right)\sqrt{3x^2+10x+9}+$

$+\frac{1}{3\sqrt{3}}\log(3x+5+\sqrt{3}\ \sqrt{3}$

20) $\int\sqrt{-8x^2+12x+11}\,dx=\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{8}\right)\sqrt{-8x^2+12x+11}+\frac{31}{8\sqrt{2}}\text{arc}$

21) $\int \frac{x+2}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx = -\sqrt{1+2x-x^2} + 3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C.$

22) $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^{3/2}} = \frac{2}{3}\,\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} + C.$

23) $\int (x^2+x+1)^{3/2}\,dx = \frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)(\sqrt{x^2+x+1})^3 + \frac{9}{32}\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1} +$

$+ \frac{27}{128}\log(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}) + C.$

24) $\int \frac{(x^2+x)\,dx}{(x^2+x+1)^{3/2}} = \lg(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}) - \frac{2}{3}\,\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} + C.$

25) $\int \frac{x^3}{\sqrt{(x^2+x+1)^3}}\,dx = \frac{1}{3}\,\frac{3x^2+7x+5}{\sqrt{x^2+x+1}} - \frac{3}{2}\log(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}) + C.$

26) $\int \frac{x+1}{x^2\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} + \frac{1}{2}\log\frac{x+2-2\sqrt{x^2+x+1}}{x} + C.$

27) $\int \frac{x+1}{x^3\sqrt{(x^2+x+1)^3}}\,dx = \frac{1}{12}\,\frac{37x^3+3x^2-13x-18}{x^2\sqrt{x^2+x+1}} -$

$-\frac{9}{8}\log\frac{x+2-2\sqrt{x^2+x+1}}{x} + C.$

28) $\int \frac{x^2+5}{(1+x^2)^2\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x^2} + \frac{4}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} + C.$

29) $\int \frac{2x\,dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x-x^2}} = \log\frac{3x-1-2\sqrt{1-x-x^2}}{x+3-2\sqrt{1-x-x^2}} + C.$

30) $\int \frac{(1-3x^2)\,dx}{(1+x^2)^2\sqrt{1-x^2}} = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x^2} + C.$

31) $\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{(1-x-\sqrt{2}\sqrt{x^2+1})\sqrt{1-x}}{(x\sqrt{2}+\sqrt{x^2+1})\sqrt{1+x}} + C.$

32) $\int \frac{(x^{10}+1)\,dx}{x^4\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1}\left\{\frac{x^5}{6} - \frac{5x^3}{24} + \frac{5x}{16} + \frac{2}{3x} - \frac{1}{3x^3}\right\} + \frac{5}{16}\lg(x+\sqrt{x^2+1}) + C.$

33) $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}} = \frac{2(2ax+b)}{(4ac-b^2)\sqrt{ax^2+bx+c}} + C.$

34) $\int \frac{x\,dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}} = -\frac{2(bx+2c)}{(4ac-b^2)\sqrt{ax^2+bx+c}} + C.$

35) $\int \frac{(ax+b)\,dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}} = \frac{2[b(ax+b)-2ac]}{(4ac-b^2)\sqrt{ax^2+bx+c}} + C.$

36) $\int \frac{5x^2-2x+10}{\sqrt{3x^2-5x+8}}\,dx = \left(\frac{5}{6}x + \frac{17}{12}\right)\sqrt{3x^2-5x+8} +$

$+ \frac{55}{8\sqrt{3}}\log\left(3x - \frac{5}{2} + \sqrt{3}\sqrt{3x^2-5x+8}\right) + C.$

37) $\int (2x-5)\sqrt{2+3x-x^2}\,dx = \left(\frac{2}{3}x^2 - 3x + \frac{1}{6}\right)\sqrt{2+3x-x^2} - \frac{17}{4}\arcsin\frac{2x-3}{\sqrt{17}} + C.$

38) $\int \frac{x^3}{\sqrt{ax^2+b}}\,dx = \left(\frac{x^2}{3a} - \frac{2b}{3a^2}\right)\sqrt{ax^2+b} + C.$

39) $\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = \left\{\frac{1}{6}x^5 - \frac{5}{24}x^3 + \frac{15}{48}x\right\}\sqrt{x^2+1} - \frac{15}{48}\log(x+\sqrt{x^2+1}) + C.$

40) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax^2+b}} = -\frac{\sqrt{ax^2+b}}{bx} + C.$

Wykazać, że:

41) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \log \left[x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right] + C$

$= \frac{1}{\sqrt{a}} \log(2ax + b + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}) + C = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}.$

42) $\int \frac{dx}{\sqrt{(px+q)(rx+s)}} = \frac{1}{\sqrt{pr}} \log \frac{\sqrt{r(px+q)} + \sqrt{p(rx+s)}}{\sqrt{r(px+q)} - \sqrt{p(rx+s)}} + C.$

43) $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \log \frac{bx+2c-2\sqrt{c}\sqrt{ax^2+bx+c}}{x} =$

$= \frac{1}{\sqrt{-c}} \operatorname{arc\,tang} \frac{bx+2c}{2\sqrt{-c}\sqrt{ax^2+bx+c}}.$

44) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} = \log \frac{1-x-2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} + C.$

45) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x-x^2}} = \operatorname{arc\,tang} \frac{3x+1}{2\sqrt{1+x-x^2}} + C.$

46) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x-x^2}} = \log \frac{x+3-2\sqrt{1-x-x^2}}{x+1} + C.$

47) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x-x^2}} = \arcsin \frac{3x+1}{(x+1)\sqrt{5}} + C.$

48) $\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+x+1}} = -\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} + \frac{1}{2} \log \frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{2x} + C.$

49) $\int \frac{(x-2)\,dx}{(5x^2-18x+17)\sqrt{10x^2-22x+13}} = \frac{1}{4\sqrt{35}} \log \frac{2\sqrt{10x^2-22x+13}+(1-x)\sqrt{35}}{2\sqrt{10x^2-22x+13}-(1-x)\sqrt{35}} + C.$

50) $\int \frac{(1-x)\,dx}{(5x^2-18x+17)\sqrt{10x^2-22x+13}} = \frac{1}{\sqrt{35}} \operatorname{arc\,tang} \frac{\sqrt{10x^2-22x+13}}{(x-2)\sqrt{35}} + C.$

51) $\int \frac{(2x-3)\,dx}{(5x^2-18x+17)\sqrt{10x^2-22x+13}} = \frac{1}{4\sqrt{35}} \log \frac{2\sqrt{10x^2-22x+13}+(1-x)\sqrt{35}}{2\sqrt{10x^2-22x+13}-(1-x)\sqrt{35}} -$

$- \frac{1}{\sqrt{35}} \operatorname{arc\,tang} \frac{\sqrt{10x^2-22x+13}}{(x-2)\sqrt{35}}.$

Rozwiązania V. Wskazówki do rozwiązań podane w wykładzie.

Literatura. Leitfaden und Aufgabensammlung zur höheren Mathematik. Für technische Lehranstalten und den Selbstunterricht, bearbeitet von Robert Geigenmüller. II. Band. Die höhere Analysis oder Differential- und Integralrechnung. 5. Auflage. Mittweida 1903. M. C. Jordan. Cours d'analyse de l'école polytechnique. Tome deuxiéme. Calcul intégral. Paris 1883.

Tematy do rozprawek naukowych.

1. Całki normalne kształtu: $\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ i ich szczególne przypadki.

2. Całki normalne kształtu: $\int \frac{dx}{(x-a)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$ i ich rozwiązania.

3. Całki normalne kształtu: $\int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$ i ich szczególne przypadki.

Wykład VI.

Dalszy ciąg uwag dotyczących wyznaczania całek kształtu: $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$.

1. Przekształcenie całki: $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ przez uproszczenie kcyi drugiego stopnia, występującej pod znakiem pierwiastkowym. Wprowadźmy do danej całki nową zmienną z, za pomocą podstawienia:

$$x = lz + \lambda,$$

atenczas otrzymamy:

$$dx = l\,dz, \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{Az^2+Bz+C},$$

gdzie:

$$A = al^2, \quad B = 2al\lambda + bl, \quad C = a\lambda^2 + b\lambda + c.$$

Dana całka przedstawi się tedy w postaci analogicznej:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx = \int R(lz+\lambda, \sqrt{Az^2+Bz+C})\,l\,dz, \qquad (1)$$

której, rozporządzając dwoma spółczynnikami l i λ, możemy funkcyę ugiego stopnia, występującą pod znakiem pierwiastkowym sprowadzić formy prostszej.

Przedewszystkiem możemy w niej zawsze uwolnić się od spółczynnika przy pierwszej potędze nowej zmiennej z.

W tym celu należy położyć:

$$2al\lambda + bl = 0, \text{ czyli przyjąć: } \lambda = -\frac{b}{2a}.$$

Otrzymujemy tedy podstawienie:

$$x = lz - \frac{b}{2a}, \text{ dla którego } A = al^2, \quad B = 0, \quad C = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{\Delta}{4a},$$

gdzie $\Delta = 4ac - b^2$ jest wyróżnikiem danej funkcyi drugiego stopnia:

$$ax^2 + bx + c.$$

Przy tem podstawieniu dany pierwiastek kwadratowy otrzymuje kształt:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{Az^2+C},$$

zatem dana całka sprowadza się do postaci:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx = \int R(z, \sqrt{Az^2+C})\,dz, \qquad (2)$$

której jeszcze spółczynnikowi $A = al^2$ przez stosowny wybór dowolnego, rzeczywistego l możemy nadać dowolną wartość bezwzględną, nie mogąc znak zmienić znaku, jaki miał pierwotnie spółczynnik przy x^2 w funkcyi $^2+bx+c$.

Nie można także zmienić znaku w wyrazie wolnym: $C=\frac{\Delta}{4a}$, zależnym wyłącznie od spółczynników danej funkcyi: ax^2+bx+c, możemy więc odróżnić następujące trzy przypadki:

$$1)\ A>0,\ C>0,\quad 2)\ A>0,\ C<0,\quad 3)\ A<0.$$

Wskutek podstawienia $x=lz-\frac{b}{2a}$, możemy, przez stosowny wybór spółczynnika l, dany pierwiastek kwadratowy:

$$y=\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{Az^2+C}=\sqrt{al^2z^2+\frac{\Delta}{4a}},$$

sprowadzić do jednej z następujących postaci:

1) $y=\sqrt{z^2+1}$, gdy $a>0$, a $\Delta>0$,

2) $y=\sqrt{z^2-1}$, gdy $a>0$, a $\Delta>0$,

3) $y=\sqrt{1-z^2}$, gdy $a<0$, a $\Delta>0$,

zastępując zmienną z przez x, możemy więc odróżnić następujące trzy postacie całki $J=\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$, jako to:

1) $J_1=\int R(x,\sqrt{x^2+1})dx$, 2) $J_2=\int R(x,\sqrt{x^2-1})\,dx$, 3) $J_3=\int R(x,\sqrt{1-x^2})\,dx$,

którym odpowiadają całki zasadnicze, trzech typów: J, J', J'', każda w trzech różnych postaciach, odpowiadających trzem różnym kształtom niewymierności.

2. Do tak przekształconych całek należałoby dopiero stosować podstawienia algebraiczne, zamieniające te całki na całki funkcyj wymiernych nowej zmiennej u.

Odnośne podstawienia przedstawiałyby się w jednej z następujących postaci:

1) $\sqrt{x^2+1}=u-x$, albo $\sqrt{x^2+1}=ux+1$,

2) $\sqrt{x^2-1}=u-x$, albo $\sqrt{x^2-1}=(1+x)u$,

3) $\sqrt{1-x^2}=ux+1$, albo $\sqrt{1-x^2}=(1+x)u$,

z których każda mogłaby być opatrzona znakiem $+$, lub $-$.

3. Całki zasadnicze pierwszego typu z możliwie uproszczoną niewymiernością, przedstawiające się w jednej z następujących trzech postaci:

$$J_1=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}},\quad J_2=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}},\quad J_3=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

otrzymują, po zastosowaniu odnośnych podstawień algebraicznych, następujące kształty:

1) Kładąc $\sqrt{x^2+1}=u-x$, czyli $u=x+\sqrt{x^2+1}$, otrzymujemy $x=\frac{u^2-1}{2u}$, $dx=\frac{u^2+1}{2u^2}du$, $\sqrt{x^2+1}=\frac{u^2+1}{2u}$, zatem:

$$J_1=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{du}{u}=\log u,$$

czyli:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\log(x+\sqrt{x^2+1})+C. \qquad (3)$$

Używając natomiast podstawienia: $\sqrt{x^2+1}=xu-1$, czyli $u=\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$

otrzymujemy: $x=\frac{2u}{u^2-1}$, $dx=-\frac{2(u^2+1)}{(u^2-1)^2}du$, $\sqrt{x^2+1}=\frac{u^2+1}{u^2-1}$, zatem:

$$J_2=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=-\int\frac{2du}{u^2-1}=\log\frac{u+1}{u-1},$$

czyli:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\log\frac{1+\sqrt{x^2+1}+x}{1+\sqrt{x^2+1}-x}+C. \qquad (3')$$

Oba powyższe rozwiązania sprowadzają się do tożsamości, jest bowiem:

$$\frac{1+\sqrt{x^2+1}+x}{1+\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{(\sqrt{x^2+1}+x+1)(\sqrt{x^2+1}+x-1)}{(\sqrt{x^2+1}-x+1)(\sqrt{x^2+1}+x-1)}=\frac{2x^2+2x\sqrt{x^2+1}}{2x}=x+\sqrt{x^2+1}.$$

2) Kładąc $\sqrt{x^2-1}=u-x$, czyli: $u=x+\sqrt{x^2-1}$, otrzymujemy:

$$x=\frac{u^2+1}{2u},\quad dx=\frac{u^2-1}{2u^2}du,\quad \sqrt{x^2-1}=\frac{u^2-1}{2u}, \qquad \text{zatem:}$$

$$J_2=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{du}{u}=\log u,$$

czyli:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\log(x+\sqrt{x^2-1})+C. \qquad (4)$$

Używając natomiast podstawienia: $\sqrt{x^2-1}=(x+1)u$, czyli: $u=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

otrzymujemy: $x=\frac{1+u^2}{1-u^2}$, $dx=\frac{4udu}{(1-u^2)^2}$, $\sqrt{x^2-1}=\frac{2u}{1-u^2}$, zatem:

$$J_2=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{2du}{1-u^2}=-2\int\frac{du}{u^2-1}=\log\frac{u+1}{u-1},$$

czyli:

$$J_2=\log\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}=\log\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}+C. \qquad (4')$$

Oba rozwiązania są tożsamościowe, względnie różnią się o liczbę stałą, gdyż:

$$\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\frac{2x+2\sqrt{x^2-1}}{2}=x+\sqrt{x^2-1}.$$

3) Kładąc $\sqrt{1-x^2}=1-xu$, a więc $u=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$, otrzymujemy:

$$x=\frac{2u}{u^2+1},\quad dx=\frac{+2(1-u^2)}{(u^2+1)^2}du,\quad \sqrt{1-x^2}=\frac{1-u^2}{u^2+1},$$

zatem:

$$J_3=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=2\int\frac{du}{u^2+1}=+2\operatorname{arctg}u,$$

czyli:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=2\operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}+C. \qquad (5)$$

Używając natomiast podstawienia:

$$\sqrt{1-x^2}=(1-x)u, \text{ czyli } u=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$

otrzymujemy: $x=\frac{u^2-1}{u^2+1}$, $dx=\frac{4udu}{(1+u^2)^2}$, $\sqrt{1-x^2}=\frac{2u}{1+u^2}$, zatem:

$$J_3=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=+\int\frac{2du}{1+u^2}=2\operatorname{arctg}u,$$

czyli:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=2\operatorname{arctang}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C. \tag{5'}$$

Oba otrzymane rozwiązania różnią się tylko o stałą, jest bowiem:

$$\operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\operatorname{arctg}\frac{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}-\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{1+\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}=$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}-\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}}{1+\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}}=\operatorname{arctg}\frac{(1-x)-(1-x)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-x^2}}{x(1-x)+\sqrt{1-x^2}-(1-x^2)}=$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{1-x-\sqrt{1-x^2}}{x-1+\sqrt{1-x^2}}=\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}, \text{ a więc } \operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\frac{\pi}{4};$$

Kładąc $2\operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}=\varphi$, mamy $\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$, czyli:

$$\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{1-\sqrt{1-x^2}}=\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{x}=\frac{1}{\sqrt{2(1-\sqrt{1-x^2})}},$$

a więc: $\sin\varphi=2.\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}=2.\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}.\frac{x}{\sqrt{2}\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}=x$,

zatem:

$$\varphi=2\operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}=\arcsin x,$$

czyli, jak wiemy, bezpośrednio:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C. \tag{5''}$$

4. Całki zasadnicze drugiego typu z możliwie uproszczoną niewymiernością, przedstawiają się w jednej z następujących trzech postaci:

$$J'_1=\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{x^2+1}},\quad J_2'=\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{x^2-1}},\quad J_3'=\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}}.$$

Stosując do tych całek odnośne podstawienia algebraiczne, dochodzimy do następujących wyników.

1) Kładąc $\sqrt{x^2+1}=u-x$, czyli $u=x+\sqrt{x^2+1}$, otrzymujemy:

$$x=\frac{u^2-1}{2u},\quad x-a=\frac{u^2-2au-1}{2u},$$

zatem: $J_1'=\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{x^2+1}}=2\int\frac{du}{u^2-2au-1}=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\log\frac{u-a-\sqrt{a^2+1}}{u-a+\sqrt{a^2+1}}$,

czyli:

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\log\frac{x-a+\sqrt{x^2+1}-\sqrt{a^2+1}}{x-a+\sqrt{x^2+1}+\sqrt{a^2+1}}+C. \tag{6}$$

Używając zaś podstawienia:

$$\sqrt{x^2+1}=xu-1, \text{ czyli } u=\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x},$$

otrzymujemy:

$$x=\frac{2u}{u^2-1}, \quad x-a=\frac{2u-au^2+a}{u^2-1},$$

przeto:

$$J'_1=\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{2du}{au^2-2u-a}=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\log\frac{au-1-\sqrt{a^2+1}}{au-1+\sqrt{a^2+1}},$$

czyli:

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\log\frac{a(1+\sqrt{x^2+1})-x(1+\sqrt{a^2+1})}{a(1+\sqrt{x^2+1})+x(1+\sqrt{a^2+1})}+C. \qquad (6')$$

2) Kładąc $\sqrt{x^2-1}=u-x$, czyli $u=x+\sqrt{x^2-1}$, mamy:

$$x=\frac{u^2+1}{2u}, \quad x-a=\frac{u^2-2ua+1}{2u},$$

przeto:

$$J_2'=\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{x^2-1}}=2\int\frac{du}{u^2-2ua+1}=\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\log\frac{u-a-\sqrt{a^2-1}}{u-a+\sqrt{a^2-1}}+C,$$

lub:

$$J'_2=\int\frac{2du}{(u-a)^2+(1-a^2)}=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\operatorname{arctg}\frac{u-a}{\sqrt{1-a^2}},$$

czyli:

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\log\frac{x-a+\sqrt{x^2-1}-\sqrt{a^2-1}}{x-a+\sqrt{x^2-1}+\sqrt{a^2-1}}+C, \qquad (7)$$

gdy $a>1$,

lub:

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{x^2-1}}=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\operatorname{arctang}\frac{x-a+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{1-a^2}}+C, \qquad (8)$$

gdy $a<1$.

Używając zaś podstawienia: $\sqrt{x^2-1}=(x+1)u$, czyli:

$$u=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, \text{ mamy } x=\frac{1+u^2}{1-u^2}, \quad x-a=\frac{(1-a)+(1+a)u^2}{1-u^2},$$

przeto:

$$J'_2=\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{2du}{(a+1)u^2-(a-1)}=\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\log\frac{u\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}}{u\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}},$$

lub: $$J'_2=\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{2du}{(1+a)u^2+(1-a)}=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\operatorname{arctang}\frac{u\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}},$$

czyli wzór:

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\log\frac{\sqrt{(a+1)(x-1)}-\sqrt{(a-1)(x+1)}}{\sqrt{(a+1)(x-1)}+\sqrt{(a-1)(x+1)}}+C, \qquad (7')$$

gdy $a>1$,

lub:

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{x^2-1}}=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\operatorname{arctang}\sqrt{\frac{(1+a)(x-1)}{(1-a)(x+1)}}+C, \qquad (8')$$

gdy $a<1$.

3) Kładąc $\sqrt{1-x^2}=1-xu$ a więc $u=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$, mamy:

$$x=\frac{2u}{u^2+1},\quad x-a=-\frac{au^2-2u+a}{u^2+1},$$

zatem:

$$J'_3=\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}}=-2\int\frac{du}{au^2-2u+a}=\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\log\frac{au-1+\sqrt{1-a}}{au-1-\sqrt{1-a}}$$

lub:

$$J'_3=-2\int\frac{adu}{(au-1)^2+(a^2-1)}=\frac{-2}{\sqrt{a^2-1}}\operatorname{arctang}\frac{au-1}{\sqrt{a^2-1}},$$

czyli:

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\log\frac{a(1-\sqrt{1-x^2})-x(1-\sqrt{1-a^2})}{a(1-\sqrt{1-x^2})-x(1+\sqrt{1-a^2})}+C,$$

gdy $a<1$,

lub:

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}}=\frac{-2}{\sqrt{a^2-1}}\operatorname{arctang}\frac{a(1-\sqrt{1-x^2})-x}{x\sqrt{a^2-1}}+C.$$

gdy $a>1$.

Używając zaś podstawienia:

$$\sqrt{1-x^2}=(1-x)u,\quad \text{czyli } u=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$

mamy:

$$x=\frac{u^2-1}{u^2+1},\quad x-a=\frac{(1-a)u^2-(1+a)}{u^2+1},$$

zatem:

$$J'_3=\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{2du}{(1-a)u^2-(1+a)}=\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\log\frac{u\sqrt{1-a}-\sqrt{1}}{u\sqrt{1-a}+\sqrt{1}}$$

lub:

$$J_3'=\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}}=-\frac{2}{1+a}\int\frac{du}{\left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}u\right)^2+1}=$$

$$=-\int\frac{2du}{(a-1)u^2+(a+1)}=-\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\operatorname{arctg}\frac{u\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}},$$

czyli:

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\log\frac{\sqrt{(1-a)(1+x)}-\sqrt{(1+a)(1-x)}}{\sqrt{(1-a)(1+x)}+\sqrt{(1+a)(1-x)}},$$

gdy $a<1$,

lub:

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}}=-\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{(a-1)(1+x)}{(a+1)(1-x)}}+C,$$

gdy $a>1$.

5. Szczególne przypadki uproszczonych całek zasadniczych d
typu stanowią całki, w których $a=0$. Na podstawie powyższych
lub też wprost za pomocą stosownych podstawień, otrzymujemy nast
wzory:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}=\log\frac{x+\sqrt{x^2+1}-1}{x+\sqrt{x^2+1}+1}=\log\frac{-1+\sqrt{x^2+1}}{x},$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=2\,\text{arc tang}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=\text{arc sec}\,x,$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=\log\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x},$$

6. **Całki zasadnicze trzeciego typu z możliwie uproszczoną niewymiernością** przedstawiają się w jednej z następujących trzech postaci:

$$J_1''=\int\frac{(Ax+B)\,dx}{(x^2+px+q)\sqrt{x^2+1}},\quad J_2''=\int\frac{Ax+B)\,dx}{(x^2+px+q)\sqrt{x^2-1}},$$

$$J_3''=\int\frac{(Ax+B)\,dx}{(x^2+px+q)\sqrt{1-x^2}},$$

której trójmian x^2+px+q nie da się rozłożyć na czynniki rzeczywiste.

1) Kładąc $\sqrt{x^2+1}=u-x$, otrzymujemy $x=\frac{u^2-1}{2u}$,

$$Ax+B=\frac{A(u^2-1)+B\,.\,2u}{2u},\quad x^2+px+q=\frac{(u^2-1)^2+2u\,.\,(u^2-1)\,.\,p+4u^2q}{4u^2},$$

zatem:

$$J_1''=\int\frac{(Ax+B)\,dx}{(x^2+px+q)\sqrt{x^2+1}}=2\int\frac{A(u^2-1)+2Bu}{(u^2-1)^2+2pu\,(u^2-1)+4qu^2}\,du,$$

gdzie $u=x+\sqrt{x^2+1}$.

Używając zaś podstawienia:

$$\sqrt{x^2+1}=xu-1,\ \text{otrzymujemy}\ x=\frac{2u}{u^2-1},$$

$$Ax+B=\frac{2Au+B(u^2-1)}{u^2-1},\quad x^2+px+q=\frac{4u^2+2u(u^2-1)\,.\,p+q(u^2-1)^2}{(u^2-1)^2},$$

zatem także:

$$J_1''=\int\frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)\sqrt{x^2+1}}=-2\int\frac{2Au+B(u^2-1)}{4u^2+2u(u^2-1)p+q(u^2-1)^2}\,du,$$

gdzie $u=\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$.

2) Kładąc $\sqrt{x^2+1}=u-x$, otrzymujemy $x=\frac{u^2+1}{2u}$,

$$Ax+B=\frac{A(u^2+1)+B\,.\,2u}{2u},\quad x^2+px+q=\frac{(u^2+1)^2+2pu\,(u^2+1)+4qu^2}{4u^2},$$

zatem:

$$J_2''=\int\frac{(Ax+B)\,dx}{(x^2+px+q)\sqrt{x^2-1}}=2\int\frac{A(u^2+1)+2Bu}{(u^2+1)^2+2pu(u^2+1)+4qu^2}\,du,$$

gdzie $u=x+\sqrt{x^2-1}$.

Używając zaś podstawienia: $\sqrt{x^2-1}=(x+1)\,u$, otrzymujemy:

$$x=\frac{1+u^2}{1-u^2},\quad Ax+B=\frac{A(1+u^2)+B(1-u^2)}{1-u^2},$$

$$x^2+px+q=\frac{(1+u^2)^2+p\,(1+u^2)(1-u^2)+q\,(1-u^2)^2}{(1-u^2)^2},$$

zatem także:

$$J''_2=\int\frac{(Ax+B)\,dx}{(x^2+px+q)\sqrt{x^2-1}}=2\int\frac{A(1+u^2)+B(1-u^2)}{(1+u^2)^2+p\,(1+u^2)(1-u^2)+q(1-u^2)^2}\,du,$$

$$\text{gdzie } u=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

3) Kładąc $\sqrt{1-x^2}=1-xu$, otrzymujemy $x=\frac{2u}{u^2+1}$,

$$Ax+B=\frac{2Au+B(u^2+1)}{u^2+1},\quad x^2+px+q=\frac{4u^2+2pu\,(u^2+1)+q\,(u^2+1)^2}{(u^2+1)^2},$$

zatem:

$$J_3''=\int\frac{(Ax+B)\,dx}{(x^2+px+q)\sqrt{1-x^2}}=2\int\frac{2Au+B(u^2+1)}{4u^2+2pu\,(u^2+1)+q\,(u^2+1)^2}\,du,$$

$$\text{gdzie } u=\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Używając zaś podstawienia: $\sqrt{1-x^2}=(1+x)u$, otrzymujemy:

$$x=\frac{1+u^2}{1-u^2},\quad Ax+B=\frac{A(1+u^2)+B(1-u^2)}{1-u^2},$$

zatem także:

$$J''_3=\int\frac{Ax+B)\,dx}{(x^2+px+q)\sqrt{1-x^2}}=2\int\frac{A(1+u^2)+B\,(1-u^2)}{(1+u^2)^2+p\,(1+u^2)\,(1-u^2)+q\,(1-u^2)^2}\,du,$$

$$\text{gdzie } u=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Podstawiwszy każdą z funkcyj czwartego stopnia ze względu na u, występujących w mianowniku funkcyi ułamkowej, w postaci:

$$[(u-\gamma_1)^2+\delta_1^{\,2}][(u-\gamma_2)^2+\delta_2^{\,2}],$$

otrzymamy każdą z całek, w ogólnej postaci:

$$J''=M\log\frac{(u-\gamma_1)^2+\delta^2_1}{(u-\gamma_2)^2+\delta^2_2}+N.\operatorname{arc\,tang}\frac{u-\gamma_1}{\delta_1}-N.\operatorname{arctg}\frac{u-\gamma_2}{\delta_2},\qquad(11)$$

gdzie spółczynniki M, N, są pewnemi liczbami stałemi.

7. Przekształcenie całki zasadniczej trzeciego typu przez sprowadzenie trójmianów drugiego stopnia, w niej występujących, do form dwuwyrazowych. Wprowadźmy do całki zasadniczej trzeciego typu:

$$J''=\int\frac{(Ax+B)\,dx}{(x^2+px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

nową zmienną t za pomocą podstawienia:

$$x=\frac{at+\beta}{a'\,t+\beta'},$$

natenczas otrzymamy:

$$dx=\frac{(a't+\beta')\,a-(at+\beta)\,a'}{(a't+\beta')^2}\,dt=\frac{(a\beta'-a'\beta)\,dt}{(a't+\beta')^2}=\frac{\lambda dt}{(a't+\beta')^2},$$

$$Ax+B=\frac{A(at+\beta)+B(a't+\beta')}{a't+\beta'}=\frac{(Aa+Ba')\,t+(A\beta+B\beta')}{a't+\beta'}=\frac{A_1t+B_1}{a't+\beta'},$$

$$x^2+px+q=\frac{(at+\beta)^2+p(at+\beta)\,(a't+\beta')+q(a't+\beta')^2}{(a't+\beta')^2}=\frac{A_2t^2+B_2t+C_2}{(a't+\beta')^2},$$

$$ax^2+bx+c=\frac{a(\alpha t+\beta)^2+b(\alpha t+\beta)(\alpha' t+\beta')+c(\alpha' t+\beta')^2}{(\alpha' t+\beta')^2}=\frac{A_3t^2+B_3t+C_3}{(\alpha' t+\beta')^2},$$

zatem:

$$J''=\int\frac{(Ax+B)\,dx}{(x^2+px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{(A_1t+B_1)\,\lambda dt}{(A_2t^2+B_2t+C_2)\sqrt{A_3t^2+B_3t+C_3}}. \quad (12)$$

Mając do rozporządzenia cztery stałe α, β, α', β' możemy je przedewszystkiem tak obrać, aby było zarówno $B_2=0$, jak $B_3=0$.

W tym celu otrzymujemy dwa równania warunkowe w postaci:

$$2\alpha\beta+p(\alpha\beta'+\alpha'\beta)+2q\alpha'\beta'=0,$$
$$2a\alpha\beta+b(\alpha\beta'+\alpha'\beta)+2c\alpha'\beta'=0,$$

z których wynika:

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha'\beta'}=\frac{pc-bq}{b-ap},\quad \frac{\alpha}{\alpha'}+\frac{\beta}{\beta'}=\frac{2(aq-c)}{b-ap}.$$

Stosunki $\frac{\alpha}{\alpha'}$ i $\frac{\beta}{\beta'}$ wyznaczone są w tych warunkach równaniem drugiego stopnia:

$$y^2-\frac{2(aq-c)}{b-ap}y+\frac{pc-bq}{b-ap}=0, \quad (a)$$

którego pierwiastki $y_1=\frac{\alpha}{\alpha'}$, $y_2=\frac{\beta}{\beta'}$ są liczbami rzeczywistemi, skoro:

$$(aq-c)^2-(pc-bq)(b-ap)>0.$$

Warunkowi temu stanie się zawsze zadość, skoro będzie $4q>p^2$, t. j. skoro trójmian: x^2+px+q, nie da się rozłożyć na czynniki stopnia pierwszego z rzeczywistemi spółczynnikami, co stanowi właśnie istotę całki zasadniczej trzeciego typu.

Przyjąwszy dalej $\alpha'=\beta'=1$, a więc, sprowadzając przyjęte podstawienia do postaci:

$$x=\frac{\alpha t+\beta}{t+1},$$

gdzie spółczynniki α i β są pierwiastkami równania (a), otrzymamy daną całkę zasadniczą, trzeciego typu, w postaci:

$$J''=\lambda\int\frac{(A_1t+B_1)\,dt}{(A_2t^2+C_2)\sqrt{A_3t^2+C_3}}, \quad (13)$$

gdzie:

$$\lambda=\alpha-\beta,\ B_1=A\alpha+B,\ A_1=A\beta+B,$$
$$A_2=\alpha^2+p\alpha+q,\ C_2=\beta^2+p\beta+q,$$
$$A_3=a\alpha^2+b\alpha+c,\ C_3=a\beta^2+b\beta+c.$$

8. Otrzymaną całkę możemy rozłożyć na dwie całki w postaci:

$$J''=\lambda A_1\int\frac{t\,dt}{(A_2t^2+C_2)\sqrt{A_3t^2+C_3}}+\lambda B_1\int\frac{dt}{(A_2t^2+C_2)\sqrt{A_3t^2+C_3}}. \quad (14)$$

Pierwsza z tych całek sprowadza się wprost do całki funkcyi wymiernej, za pomocą podstawienia:

$$\sqrt{A_3t^2+C_3}=z,\ \text{czyli:}\ A_3t^2+C_3=z^2,\ t^2=\frac{z^2-C_3}{A_3},$$

z którego dostajemy:

$$A_3t\,dt=z\,dz,\ t\,dt=\frac{z\,dz}{A_3},\ A_2t^2+C_2=\frac{A_2(z^2-C_3)+A_3C_2}{A_3}=\frac{A_2z^2-(A_2C_3-A_3C_2)}{A_3},$$

zatem: $$\int\frac{tdt}{(A_2t^2+C_2)\sqrt{A_3t^2+C_3}}=\int\frac{dz}{A_2z^2-(A_2C_3-A_3C_2)}.$$

Druga całka, wobec tego, że spółczynniki A_2 i C_2 mają jednakowe znaki, zależnie od znaków, jakie mają spółczynniki A_3 i C_3, sprowadza się do jednej z następujących trzech postaci typowych:

$$1)\ \int\frac{dx}{(x^2+k^2)\sqrt{a^2+x^2}}\qquad 2)\ \int\frac{dx}{(x^2+k^2)\sqrt{x^2-a^2}},$$

$$3)\ \int\frac{dx}{(x^2+k^2)\sqrt{a^2-x^2}},$$

do których należałoby dopiero stosować poznane podstawienia algebraiczne, sprowadzające je do całek funkcyj wymiernych.

9. Wyznaczanie całek zasadniczych trzeciego typu za pomocą podstawień goniometrycznych. Sprowadziwszy daną całkę zasadniczą trzeciego typu do jednej z powyżej podanych postaci typowych, możemy, celem wyznaczenia otrzymanych całek, używać z korzyścią podstawień goniometrycznych, których rodzaj zależy od rodzaju dwumianu, występującego w danej całce pod pierwiastkiem kwadratowym.

10. Wyznaczanie całki pierwszego rodzaju:

$$J_1=\int\frac{dx}{(x^2+k^2)\sqrt{x^2+a^2}}.$$

Podstawmy: $x=a\operatorname{tang}\varphi$, a otrzymamy:

$$dx=a.\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi},\quad \sqrt{x^2+a^2}=a\sec\varphi=\frac{a}{\cos\varphi},$$

$$x^2+k^2=a^2\operatorname{tang}^2\varphi+k^2=\frac{a^2\sin^2\varphi+k^2\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi},$$

zatem daną całkę otrzymamy w postaci:

$$J_1=\int a.\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\cdot\frac{\cos^2\varphi}{a^2\sin^2\varphi+k^2\cos^2\varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{a}=\int\frac{\cos\varphi d\varphi}{a^2\sin^2\varphi+k^2\cos^2\varphi},$$

czyli: $$J_1=\int\frac{\cos\varphi d\varphi}{(a^2-k^2)\sin^2\varphi+k^2}=\int\frac{d(\sin\varphi)}{(a^2-k^2)\sin^2\varphi+k^2},$$

w której znowu odróżnić możemy trzy przypadki:

1) $a^2>k^2$. W tym razie mamy:

$$J_1=\int\frac{d(\sin\varphi)}{(a^2-k^2)\sin^2\varphi+k^2}=\int\frac{d\sin\varphi}{k^2\left\{\left(\frac{\sin\varphi\sqrt{a^2-k^2}}{k}\right)^2+1\right\}}=$$

$$=\frac{1}{k\sqrt{a^2-k^2}}\operatorname{arctang}\frac{\sin\varphi\sqrt{a^2-k^2}}{k},$$

a że, na mocy podstawienia:

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{x}{a},\ \text{a więc}\ \frac{\sin\varphi}{x}=\frac{\cos\varphi}{a}=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}},$$

zatem: $$\sin\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}},$$

przeto dostajemy wzór:

$$\int\frac{dx}{(x^2+k^2)\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{k\sqrt{a^2-k^2}}\,\mathrm{arctang}\,\frac{x\sqrt{a^2-k^2}}{k\sqrt{x^2+a^2}}+C. \qquad (15)$$

2) $a^2<k^2$. W tym razie mamy:

$$J_1=\int\frac{d(\sin\varphi)}{k^2-(k^2-a^2)\sin^2\varphi}=\int\frac{d(\sin\varphi)}{[k+\sin\varphi\sqrt{k^2-a^2}][k-\sin\varphi\sqrt{k^2-a^2}]},$$

$$\frac{1}{\text{in}\,\varphi\sqrt{k^2-a^2}][k-\sin\varphi\sqrt{k^2-a^2}]}=\frac{1}{2k}\left\{\frac{1}{k+\sin\varphi\sqrt{k^2-a^2}}+\frac{1}{k-\sin\varphi\sqrt{k^2-a^2}}\right\},$$

› otrzymujemy:

$$J_1=\frac{1}{2k\sqrt{k^2-a^2}}\log\frac{k+\sin\varphi\sqrt{k^2-a^2}}{k-\sin\varphi\sqrt{k^2-a^2}}+C,$$

dostajemy wzór:

$$\int\frac{dx}{(x^2+k^2)\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{2k\sqrt{k^2-a^2}}\log\frac{k\sqrt{x^2+a^2}+x\sqrt{k^2-a^2}}{k\sqrt{x^2+a^2}-x\sqrt{k^2-a^2}}+C. \qquad (16)$$

3) $a^2=k^2$. W tym razie mamy:

$$J_1=\int\frac{d\sin\varphi}{k^2}=\frac{1}{k^2}\sin\varphi,$$

ı dostajemy:

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{k^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}+C. \qquad (17)$$

11. Wyznaczanie całki drugiego rodzaju:

$$J_2=\int\frac{dx}{(x^2+k^2)\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Podstawmy $x=a\sec\varphi$, a otrzymamy:

$$dx=\frac{a\sin\varphi d\varphi}{\cos^2\varphi},\quad \sqrt{x^2-a^2}=a\sqrt{\sec^2\varphi-1}=a\,\mathrm{tang}\,\varphi=\frac{a\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

$$x^2+k^2=a^2\sec^2\varphi+k^2=\frac{a^2+k^2\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi},$$

a daną całkę otrzymamy w postaci:

$$J_2=\int a\,.\frac{\sin\varphi d\varphi}{\cos^2\varphi}\cdot\frac{\cos^2\varphi}{a^2+k^2\cos^2\varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{a\sin\varphi}=\int\frac{\cos\varphi d\varphi}{a^2+k^2\cos^2\varphi},$$

li:

$$J_2=\int\frac{\cos\varphi d\varphi}{(a^2+k^2)-k^2\sin^2\varphi}=\int\frac{d(\sin\varphi)}{(a^2+k^2)-k^2\sin^2\varphi},$$

, ze względu na to, że:

$$\frac{1}{(a^2+k^2)-k^2\sin^2\varphi}=\frac{1}{2\sqrt{a^2+k^2}}\left\{\frac{1}{\sqrt{a^2+k^2}+k\sin\varphi}+\frac{1}{\sqrt{a^2+k^2}-k\sin\varphi}\right\},$$

mujemy:

$$J_2=\frac{1}{2k\sqrt{a^2+k^2}}\log\frac{\sqrt{a^2+k^2}+k\sin\varphi}{\sqrt{a^2+k^2}-k\sin\varphi},$$

a mocy podstawienia mamy:

zatem: $$\int\frac{tdt}{(A_2t^2+C_2)\sqrt{A_3t^2+C_3}}=\int\frac{dz}{A_2z^2-(A_2C_3-A_3C_2)}.$$

Druga całka, wobec tego, że spółczynniki A_2 i C_2 mają jednakowe znaki, zależnie od znaków, jakie mają spółczynniki A_3 i C_3, sprowadza się do jednej z następujących trzech postaci typowych:

$$1)\ \int\frac{dx}{(x^2+k^2)\sqrt{a^2+x^2}}\qquad 2)\ \int\frac{dx}{(x^2+k^2)\sqrt{x^2-a^2}},$$

$$3)\ \int\frac{dx}{(x^2+k^2)\sqrt{a^2-x^2}},$$

do których należałoby dopiero stosować poznane podstawienia algebraiczne, sprowadzające je do całek funkcyj wymiernych.

9. Wyznaczanie całek zasadniczych trzeciego typu za pomocą podstawień goniometrycznych. Sprowadziwszy daną całkę zasadniczą trzeciego typu do jednej z powyżej podanych postaci typowych, możemy, celem wyznaczenia otrzymanych całek, używać z korzyścią podstawień goniometrycznych, których rodzaj zależy od rodzaju dwumianu, występującego w danej całce pod pierwiastkiem kwadratowym.

10. Wyznaczanie całki pierwszego rodzaju:

$$J_1=\int\frac{dx}{(x^2+k^2)\sqrt{x^2+a^2}}.$$

Podstawmy: $x=a\operatorname{tang}\varphi$, a otrzymamy:

$$dx=a.\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi},\quad \sqrt{x^2+a^2}=a\sec\varphi=\frac{a}{\cos\varphi},$$

$$x^2+k^2=a^2\operatorname{tang}^2\varphi+k^2=\frac{a^2\sin^2\varphi+k^2\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi},$$

zatem daną całkę otrzymamy w postaci:

$$J_1=\int a.\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\cdot\frac{\cos^2\varphi}{a^2\sin^2\varphi+k^2\cos^2\varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{a}=\int\frac{\cos\varphi d\varphi}{a^2\sin^2\varphi+k^2\cos^2\varphi},$$

czyli: $$J_1=\int\frac{\cos\varphi d\varphi}{(a^2-k^2)\sin^2\varphi+k^2}=\int\frac{d(\sin\varphi)}{(a^2-k^2)\sin^2\varphi+k^2},$$

w której znowu odróżnić możemy trzy przypadki:

1) $a^2>k^2$. W tym razie mamy:

$$J_1=\int\frac{d(\sin\varphi)}{(a^2-k^2)\sin^2\varphi+k^2}=\int\frac{d\sin\varphi}{k^2\left\{\left(\frac{\sin\varphi\sqrt{a^2-k^2}}{k}\right)^2+1\right\}}=$$

$$=\frac{1}{k\sqrt{a^2-k^2}}\operatorname{arctang}\frac{\sin\varphi\sqrt{a^2-k^2}}{k},$$

a że, na mocy podstawienia:

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{x}{a},\ \text{a więc}\ \frac{\sin\varphi}{x}=\frac{\cos\varphi}{a}=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}},$$

zatem: $$\sin\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}},$$

przeto dostajemy wzór:

$$2)\ J_3=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{a\,d\sec\varphi}{a\,\mathrm{tang}\,\varphi}=\int\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\cos^2\varphi\,.\,\mathrm{tang}\,\varphi}=\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi}=\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi},$$

$$\sec\varphi=\frac{x}{a},\quad \cos\varphi=\frac{a}{x},\quad \sin\varphi=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x},$$

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{2}\log\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}}+C. \tag{21}$$

$$3)\ J_3=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{a\,.\,d\sin\varphi}{a\cos\varphi}=\int d\varphi=\varphi,$$

$$\sin\varphi=\frac{x}{a},\ \text{a więc}\ \varphi=\arcsin\frac{x}{a},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C. \tag{22}$$

$$J'_1=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}}=\int\frac{a\,.\,d\,\mathrm{tang}\,\varphi}{a\,\mathrm{tang}\,\varphi\,.\,a\sec\varphi}=\frac{1}{a}\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi}=\frac{1}{a}\log\mathrm{tang}\,\frac{\varphi}{2}=$$

$$=\frac{1}{a}\log\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}}=\frac{1}{a}\log\frac{\sqrt{1-\cos\varphi}}{\sqrt{1+\cos\varphi}}=\frac{1}{2a}\log\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi},$$

$$\mathrm{tang}\,\varphi=\frac{x}{a},\quad \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}},$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{2a}\log\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+a^2}+a}+C. \tag{23}$$

$$J'_2=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{a\,.\,d\sec\varphi}{a\,.\,\sec\varphi\,.\,\mathrm{tang}\,\varphi}=\frac{1}{a}\int d\varphi=\frac{1}{a}\varphi,$$

$$\sec\varphi=\frac{x}{a},\ \text{a więc}\ \varphi=\mathrm{arc\,sec}\,\frac{x}{a},$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\mathrm{arc\,sec}\,\frac{x}{a}+C. \tag{24}$$

$$J'_3=\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{a\,.\,d\sin\varphi}{a\,.\,\sin\varphi\,.\,a\cos\varphi}=\frac{1}{a}\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi}=$$

$$=\frac{1}{a}\log\mathrm{tang}\,\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{2a}\log\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi},$$

$$\sin\varphi=\frac{x}{a},\quad \cos\varphi=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a},$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{2}\log\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}}+C. \tag{25}$$

Ćwiczenia VI.

a) $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}+C,$ b) $\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}+C,$

c) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}=\sqrt{1+x^2}+C,$ d) $\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx=\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}+C.$

2) *a*) $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}$, *b*) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\log\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$,

c) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}$, *d*) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\log\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

3) *a*) $\int x\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{x^2-1}$, *b*) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \text{arc sec}\, x + C$,

c) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x^2-1}$, *d*) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-1} - \text{arc sin}\, x + C$.

4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{a+bx^2}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx^2}+\sqrt{a}}$.

5) $\int x\sqrt{a+bx^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a+bx^2}}{3b}$. 6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{-a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\text{arc sec}\,\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + C$.

7) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \left(\frac{x^2}{3b} - \frac{2a}{3b^2}\right)\sqrt{a+bx^2} + C$. 8) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx^2}} = -\frac{\sqrt{a+bx^2}}{ax} + C$.

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx^2)^3}} = \frac{x}{a\sqrt{a+bx^2}} + C$. 10) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(a+bx^2)^3}} = -\frac{1}{b\sqrt{a+bx^2}} + C$.

11) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(a+bx^2)^3}} = \left(\frac{x^2}{b} + \frac{2a}{b^2}\right)\frac{1}{\sqrt{a+bx^2}} + C$.

12) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(a+bx^2)^3}} = \left\{\frac{1}{ax} + \frac{2bx}{a^2}\right\}\cdot\frac{1}{\sqrt{a+bx^2}} + C$.

13) $\int x\sqrt{(a+bx^2)^3}\,dx = \frac{(a+bx^2)^2\sqrt{a+bx^2}}{5b} + C$.

14) $\int \frac{dx}{(a+bx)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\log\frac{a+b(x+\sqrt{1+x^2})+\sqrt{a^2+b^2}}{a+b(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{a^2+b^2}} + C$.

15) $\int \frac{dx}{(a+bx)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\log\frac{\sqrt{(a+b)(1+x)}+\sqrt{(b-a)(1-x)}}{\sqrt{(a+b)(1+x)}-\sqrt{(b-a)(1-x)}} + C$.

16) $\int \frac{dx}{(x+\alpha)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\,\text{arc cos}\,\frac{1+\alpha x}{x+\alpha} + C$.

17) $\int \frac{dx}{(x+\alpha)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}\,\text{arc sin}\,\frac{1+\alpha x}{x+\alpha} + C$.

18) $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} = -\frac{1}{\sqrt{c}}\log\left\{\frac{\sqrt{c}+\sqrt{ax^2+bx+c}}{x} + \frac{b}{2\sqrt{c}}\right\} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{-c}}\,\text{arc sin}\,\frac{bx+2c}{x\sqrt{b^2-4}}$$

19) $\int \frac{dx}{(1+a^2x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\,\text{arc tang}\,\frac{x\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1-x^2}} + C$.

20) $\int \frac{dx}{(1+\alpha x)^2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\alpha^2-1}\left\{-\frac{\alpha\sqrt{1-x^2}}{1+\alpha x} + \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}\log\frac{\alpha+x+\sqrt{(\alpha^2-1)(1-x^2)}}{1+\alpha x}\right\}$

$$= \frac{1}{1-\alpha^2}\left\{\frac{\alpha\sqrt{1-x^2}}{1+\alpha x} - \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\,\text{arc cos}\,\frac{\alpha+x}{1+\alpha x}\right\}$$

21) $\int \frac{dx}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}} = \frac{2-x}{3(1-x)}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$.

22) $\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{3-2x^2}} = 7\log\frac{3-2x-\sqrt{3-2x^2}}{x-1} - \left\{\frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{3}{x-1}\right\}\sqrt{3-2x^2} + C$

23) $\int \frac{1-x^2}{x^3\sqrt{1+x^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} + \frac{3}{2}\log\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} + C.$

24) $\int \frac{(3x-5)\,dx}{(x-1)^2\sqrt{4+x^2}} = \frac{2}{5}\,\frac{\sqrt{4+x^2}}{x-1} - \frac{17}{5\sqrt{5}}\log\frac{x+4+\sqrt{4+x^2}\,.\,\sqrt{5}}{x-1} + C.$

25) $\int \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = x\sqrt{1+x^2} + C.$

26) $\int \frac{(4x+17)\,dx}{(x^2+x-6)\sqrt{5-2x^2}} = -\frac{5}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{4x-5}{(x-2)\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{13}}\arcsin\frac{6x+5}{(x+3)\sqrt{10}} + C.$

27) $\int \frac{dx}{(\alpha+\beta x^2)\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a\alpha\beta - b\alpha^2}}\arcsin x\sqrt{\frac{a\beta-b\alpha}{a\alpha+a\beta x^2}}$, jeżeli $a\beta > b\alpha$

$= \frac{1}{\sqrt{b\alpha^2 - a\alpha\beta}}\log\frac{\alpha\sqrt{a+bx^2}+x\sqrt{b\alpha^2-a\alpha\beta}}{\sqrt{\alpha+\beta x^2}}$, jeżeli $a\beta < b\alpha$

$= -\frac{x}{\alpha\sqrt{a+bx^2}}$, jeżeli $a\beta = b\alpha$.

28) Wykazać, że całka kształtu: $\int \frac{(Ax+B)dx}{(a'x^2+b'x+c')\sqrt{ax^2+bx+c}}$, da się za- mocą podstawienia: $x = \frac{\alpha z+\beta}{z+1}$ sprowadzić do postaci:

$$\int \frac{(A_1 z + B_1)\,dz}{(A_2 z^2 + C_2)\sqrt{A_3 z^2 + C_3}},$$

[po]dać warunki, pod jakimi spółczynniki, występujące w nowej całce będą liczbami rze[cz]ywistemi.

Wykazać, że:

29) $\int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+10x+41)\sqrt{x^2-4x+13}} = -\frac{3A+B}{40\sqrt{14}}\log\frac{(3-x)\sqrt{7}+2\sqrt{2}\sqrt{x^2-4x+13}}{(3-x)\sqrt{7}-2\sqrt{2}\sqrt{x^2-4x+13}} +$

$+ \frac{B-7A}{10\sqrt{14}}\,\mathrm{arctang}\,\frac{(x+7)\sqrt{7}}{\sqrt{2}\sqrt{x^2-4x+13}} + C.$

30) $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{a\sqrt{1-a^2}}\,\mathrm{arctang}\,\frac{a\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{1-x^2}} =$

$= \frac{1}{a\sqrt{a^2-1}}\log\frac{x\sqrt{a^2-1}-a\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-a^2}} + C.$

31) $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{a\sqrt{1+a^2}}\log\frac{x\sqrt{a^2+1}-a\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+a^2}} + C.$

32) $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2a\sqrt{a^2+1}}\log\frac{x\sqrt{a^2+1}-a\sqrt{x^2+1}}{x\sqrt{a^2+1}+a\sqrt{x^2+1}} + C.$

33) $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2a\sqrt{a^2-1}}\log\frac{x\sqrt{a^2-1}+a\sqrt{x^2+1}}{x\sqrt{a^2-1}-a\sqrt{x^2+1}} =$

$= \frac{1}{a\sqrt{1-a^2}}\,\mathrm{arctang}\,\frac{x\sqrt{1-a^2}}{a\sqrt{x^2+1}}.$

34) $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{a\sqrt{1-a^2}}\log\frac{a\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{x^2-a^2}} + C =$

$= -\frac{1}{a\sqrt{a^2-1}}\,\mathrm{arctang}\,\frac{x\sqrt{a^2-1}}{a\sqrt{1-x^2}} + C.$

35) $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{a\sqrt{a^2+1}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x\sqrt{a^2+1}}{a\sqrt{1-x^2}} + C.$

2) *a*) $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}$, *b*) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\log\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$,

c) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}$, *d*) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\log\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

3) *a*) $\int x\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{x^2-1}$, *b*) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arc\,sec} x + C$,

c) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x^2-1}$, *d*) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-1} - \operatorname{arc\,sin} x + C$.

4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{a+bx^2}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx^2}+\sqrt{a}}$.

5) $\int x\sqrt{a+bx^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a+bx^2}}{3b}$. 6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{-a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arc\,sec}\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + C$.

7) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \left(\frac{x^2}{3b} - \frac{2a}{3b^2}\right)\sqrt{a+bx^2} + C$. 8) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx^2}} = -\frac{\sqrt{a+bx^2}}{ax} + C$.

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx^2)^3}} = \frac{x}{a\sqrt{a+bx^2}} + C$. 10) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(a+bx^2)^3}} = -\frac{1}{b\sqrt{a+bx^2}} + C$.

11) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(a+bx^2)^3}} = \left(\frac{x^2}{b} + \frac{2a}{b^2}\right)\frac{1}{\sqrt{a+bx^2}} + C$.

12) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(a+bx^2)^3}} = \left\{\frac{1}{ax} + \frac{2bx}{a^2}\right\}\cdot\frac{1}{\sqrt{a+bx^2}} + C$.

13) $\int x\sqrt{(a+bx^2)^3}\,dx = \frac{(a+bx^2)^2\sqrt{a+bx^2}}{5b} + C$.

14) $\int \frac{dx}{(a+bx)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\log\frac{a+b(x+\sqrt{1+x^2})+\sqrt{a^2+b^2}}{a+b(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{a^2+b^2}} + C$.

15) $\int \frac{dx}{(a+bx)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\log\frac{\sqrt{(a+b)(1+x)}+\sqrt{(b-a)(1-x)}}{\sqrt{(a+b)(1+x)}-\sqrt{(b-a)(1-x)}} + C$.

16) $\int \frac{dx}{(x+\alpha)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\operatorname{arc\,cos}\frac{1+\alpha x}{x+\alpha} + C$.

17) $\int \frac{dx}{(x+\alpha)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}\operatorname{arc\,sin}\frac{1+\alpha x}{x+\alpha} + C$.

18) $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} = -\frac{1}{\sqrt{c}}\log\left\{\frac{\sqrt{c}+\sqrt{ax^2+bx+c}}{x} + \frac{b}{2\sqrt{c}}\right\} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{-c}}\operatorname{arc\,sin}\frac{bx+2c}{x\sqrt{b^2-4ac}}.$$

19) $\int \frac{dx}{(1+a^2x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\operatorname{arc\,tang}\frac{x\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1-x^2}} + C$.

20) $\int \frac{dx}{(1+\alpha x)^2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\alpha^2-1}\left\{-\frac{\alpha\sqrt{1-x^2}}{1+\alpha x} + \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}\log\frac{\alpha+x+\sqrt{(\alpha^2-1)(1-x^2)}}{1+\alpha x}\right\} + C$

$$= \frac{1}{1-\alpha^2}\left\{\frac{\alpha\sqrt{1-x^2}}{1+\alpha x} - \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\operatorname{arc\,cos}\frac{\alpha+x}{1+\alpha x}\right\} + C.$$

21) $\int \frac{dx}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}} = \frac{2-x}{3(1-x)}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$.

22) $\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{3-2x^2}} = 7\log\frac{3-2x-\sqrt{3-2x^2}}{x-1} - \left\{\frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{3}{x-1}\right\}\sqrt{3-2x^2} + C$.

23) $\int \frac{1-x^2}{x^3\sqrt{1+x^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} + \frac{3}{2}\log\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} + C.$

24) $\int \frac{(3x-5)\,dx}{(x-1)^2\sqrt{4+x^2}} = \frac{2}{5}\frac{\sqrt{4+x^2}}{x-1} - \frac{17}{5\sqrt{5}}\log\frac{x+4+\sqrt{4+x^2}\,.\,\sqrt{5}}{x-1} + C.$

25) $\int \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = x\sqrt{1+x^2} + C.$

26) $\int \frac{(4x+17)\,dx}{(x^2+x-6)\sqrt{5-2x^2}} = -\frac{5}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{4x-5}{(x-2)\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{13}}\arcsin\frac{6x+5}{(x+3)\sqrt{10}} + C.$

27) $\int \frac{dx}{(\alpha+\beta x^2)\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a\alpha\beta-b\alpha^2}}\arcsin x\sqrt{\frac{a\beta-b\alpha}{a\alpha+a\beta x^2}}$, jeżeli $a\beta > b\alpha$

$= \frac{1}{\sqrt{b\alpha^2-a\alpha\beta}}\log\frac{\alpha\sqrt{a+bx^2}+x\sqrt{b\alpha^2-a\alpha\beta}}{\sqrt{\alpha+\beta x^2}}$, jeżeli $a\beta < b\alpha$

$= \frac{x}{\alpha\sqrt{a+bx^2}}$, jeżeli $a\beta = b\alpha$.

28) **Wykazać**, że całka kształtu: $\int \frac{(Ax+B)\,dx}{(a'x^2+b'x+c')\sqrt{ax^2+bx+c}}$, da się zapomocą podstawienia: $x = \frac{\alpha z+\beta}{z+1}$ sprowadzić do postaci:

$$\int \frac{(A_1 z+B_1)\,dz}{(A_2 z^2+C_2)\sqrt{A_3 z^2+C_3}},$$

i podać warunki, pod jakimi spółczynniki, występujące w nowej całce będą liczbami rzeczywistemi.

Wykazać, że:

29) $\int \frac{(Ax+B)\,dx}{(x^2+10x+41)\sqrt{x^2-4x+13}} = -\frac{3A+B}{40\sqrt{14}}\log\frac{(3-x)\sqrt{7}+2\sqrt{2}\sqrt{x^2-4x+13}}{(3-x)\sqrt{7}-2\sqrt{2}\sqrt{x^2-4x+13}} +$

$+ \frac{B-7A}{10\sqrt{14}}\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{(x+7)\sqrt{7}}{\sqrt{2}\sqrt{x^2-4x+13}} + C.$

30) $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{a\sqrt{1-a^2}}\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{a\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{1-x^2}} =$

$= \frac{1}{a\sqrt{a^2-1}}\log\frac{x\sqrt{a^2-1}-a\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-a^2}} + C.$

31) $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{a\sqrt{1+a^2}}\log\frac{x\sqrt{a^2+1}-a\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+a^2}} + C.$

32) $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2a\sqrt{a^2+1}}\log\frac{x\sqrt{a^2+1}-a\sqrt{x^2+1}}{x\sqrt{a^2+1}+a\sqrt{x^2+1}} + C.$

33) $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2a\sqrt{a^2-1}}\log\frac{x\sqrt{a^2-1}+a\sqrt{x^2+1}}{x\sqrt{a^2-1}-a\sqrt{x^2+1}} =$

$= \frac{1}{a\sqrt{1-a^2}}\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{x\sqrt{1-a^2}}{a\sqrt{x^2+1}}.$

34) $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{a\sqrt{1-a^2}}\log\frac{a\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{x^2-a^2}} + C =$

$= -\frac{1}{a\sqrt{a^2-1}}\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{x\sqrt{a^2-1}}{a\sqrt{1-x^2}} + C.$

35) $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{a\sqrt{a^2+1}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x\sqrt{a^2+1}}{a\sqrt{1-x^2}} + C.$

w której wykładniki m, n, p są dowolnemi liczbami wymiernemi (całkowitemi, lub ułamkowemi).

Aby wyznaczyć przypadki, w których całka dwumienna tego kształtu da się przekształcić na całkę funkcyi wymiernej, połóżmy przedewszystkiem $ax^n+b=z$, natenczas otrzymamy:

$$x=\left(\frac{z-b}{a}\right)^{1/n},\quad dx=\frac{1}{a}\left(\frac{z-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}-1}dz,$$

zatem:

$$\int x^m(ax^n+b)^p dx=\frac{1}{na}\int\left(\frac{z-b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}-1}z^p\,.\,dz, \tag{4}$$

skąd poznajemy, że otrzymaną całką będzie całką funkcyi wymiernej, jeżeli wykładniki m i n mają tę własność, że iloraz $\frac{m+1}{n}$ jest liczbą całkowitą. Warunek ten zasługuje tem na uwagę, że jest niezależny od wykładnika ułamkowego p.

Stosując ten warunek do całki danej dwumiennej, przedstawionej w następującem przekształceniu:

$$\int x^m(ax^n+b)^p dx=\int x^{m+np}(a+bx^{-n})^p dx, \tag{5}$$

dochodzimy do wniosku, że dana całka dwumienna da się także sprowadzić do całki funkcyi wymiernej, skoro iloraz:

$$\frac{m+np+1}{n},\ \text{czyli suma}\ \frac{m+1}{n}+p, \tag{6}$$

będzie liczbą całkowitą.

Mamy zatem twierdzenie:

Całka dwumienna $J_{mp}=\int x^m(ax^n+b)^p dx$, da się zamienić na całkę funkcyi wymiernej, jeżeli wykładnik zewnętrzny m powiększony o 1, a podzielony przez wykładnik wewnętrzny n, daje liczbę całkowitą wprost, lub wtedy, gdy do otrzymanego ilorazu dodamy wykładnik ułamkowy p potęgi dwumianu: (ax^n+b).

3. Do powyższego wyniku możemy dojść także wprost, na podstawie podstawienia $x^n=z$.

Mamy bowiem tedy:

$$x=\sqrt[n]{z}\quad dx=\frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}dz.$$

Daną całkę dwumienną otrzymujemy tedy w postaci:

$$\int x^m(ax^n+b)^p dx=\frac{1}{n}\int z^{\frac{m+1}{n}-1}(az+b)^p dz, \tag{7}$$

lub też:

$$\int x^m(ax^n+b)^p dx=\frac{1}{n}\int z^{\frac{m+1}{n}+p-1}\left(\frac{az+b}{z}\right)^p dz, \tag{8}$$

a więc w postaci całek, które, jak wiemy z wykładu IV. art. 4. i 6., dadzą się zawsze przekształcić na całki funkcyj wymiernych za pomocą podstawień $az+b=t$, względnie $\frac{az+b}{z}=t$, skoro wykładnik przy zmiennej z, a więc $\frac{m+1}{n}-1$, względnie wykładnik $\frac{m+1}{n}+p-1$, są liczbami całkowitemi.

Całka dwumienna $\int x^m (ax^n+b)^p dx$, da się zawsze przekształcić na całkę akcyi wymiernej, skoro jeden z ilorazów $\frac{m+1}{n}$, lub $\frac{m+1}{n}+p$, jest liczbą łkowitą.

Warunki te nazywają się też zwykle warunkami całkowalności całki rumiennej.

4. **Przykłady.** Wyznaczyć całkę:

$$J=\int x^5 (1-x^2)^{2/7} dx.$$

Mamy tu iloraz: $\frac{m+1}{n}=\frac{5+1}{2}=3$, połóżmy zatem $1-x^2=z$, a więc: $x=(1-z)^{1/2}$, $dx=-\frac{dz}{2x}=-\frac{dz}{2(1-z)^{1/2}}$, a otrzymamy:

$$\int x^5(1-x^2)^{2/7} dx=-\int \frac{(1-z)^{5/2-1/2}\cdot z^{2/7}}{2} dz=-\frac{1}{2}\int z^{2/7}(1-z)^2 dz=-\frac{7}{18}z^{9/7}+\frac{7}{16}z^{16/7}-\frac{7}{46}z^{23/7}+C,$$

zatem:

$$\int x^5 (1-x^2)^{2/7} dx=-{}^7\!/_{18}(1-x^2)^{9/7}+{}^7\!/_{16}(1-x^2)^{16/7}-{}^7\!/_{46}(1-x^2)^{23/7}+C.$$

2) Wyznaczyć całkę $J=\int x^3(1+x^8)^{-1/2} dx$.

Mamy tu: $\frac{m+1}{n}=\frac{3+1}{8}=\frac{1}{2}$, natomiast $\frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$, przeto:

$$\int x^3(1+x^8)^{-1/2} dx=\int x^{-1}(x^{-8}+1)^{-1/2} dx.$$

Kładąc $x^{-8}+1=z^2$, a więc $x=(z^2-1)^{-1/8}$, $dx=-{}^1\!/_4\, z(z^2-1)^{-9/8}$, otrzymujemy:

$$\int x^{-1}(x^{-8}+1)^{-1/2} dx=-\frac{1}{4}\int\frac{dz}{z^2-1}=\frac{1}{8}\log\frac{z+1}{z-1}=\frac{1}{4}\log(x^4+\sqrt{1+x^8}),$$

zatem:

$$\int x^3(1+x^8)^{-1/2} dx=\log\sqrt[4]{x^4+\sqrt{1+x^8}}+C.$$

5. **Wzory redukcyjne całki dwumiennej.** Bez względu na warunki całkowalności możemy dla całek dwumiennych wyprowadzić t. z. w z o r y r e d u k c y j n e, które wyznaczanie danej całki dwumiennej sprowadzają do wyznaczania całki możliwie najprostszej.

Niech będzie daną całka dwumienna kształtu:

$$J_{m,p}=\int x^m (ax^n+b)^p dx. \tag{9}$$

Połóżmy:	a zatem:
$u=x^{m-n+1}$	$du=(m-n+1)x^{m-n} dx$
$dv=(ax^n+b)^p x^{n-1}dx$	$v=\frac{(ax^n+b)^{p+1}}{na(p+1)}$,

stenczas, na podstawie całkowania przez części, otrzymujemy wzór I.:

$$J_{m,p}=\frac{x^{m-n+1}(ax^n+b)^{p+1}}{na(p+1)}-\frac{m-n+1}{na(p+1)}J_{m-n,\,p+1}, \tag{10}$$

który, zniżając wykładnik m o n, zwiększa wykładnik p o 1, a więc może być przydatny, gdy wykładnik p jest liczbą ujemną, a wykładnik m liczbą dodatnią, większą od n.

Kładąc zaś:	a więc:
$du=x^m dx$	$u=\frac{x^{m+1}}{m+1}$,
$v=(ax^n+b)^p$	$dv=anp(ax^n+b)^{p-1}\cdot x^{n-1} dx$,

otrzymujemy wzór II.:

$$J_{m,p}=\frac{x^{m+1}(ax^n+b)^p}{m+1}-\frac{anp}{m+1}J_{m+n,\,p-1}, \tag{11}$$

który, zniżając wykładnik p o 1, zwiększa wykładnik m o n, a wię być z korzyścią użyty, gdy wykładnik m jest ujemny, a wykładni datni.

Całkę $J_{m-n,\,p+1}$, występującą we wzorze (10), możemy prze w postaci:

$$J_{m-n,\,p+1}=\int x^{m-n}(ax^n+b)^{p+1}\,dx=\int x^{m-n}(ax^n+b)^p.(ax^n+b)\,dx=$$
$$=a\int x^m(ax^n+b)^p\,dx+b\int x^{m-n}(ax^n+b)^p\,dx,$$

czyli:

$$J_{m-n,\,p+1}=aJ_{m,\,p}+b\,J_{m-n,\,p},$$

natomiast całkę $J_{m+n,\,p-1}$, występującą we wzorze (11), możemy prze w postaci:

$$J_{m+n,\,p-1}=\int x^{m+n}(ax^n+b)^{p-1}\,dx=\int\frac{x^m(ax^n+b)-bx^m}{a}(ax^n+b)^{p-1}\,dx=$$
$$=\frac{1}{a}\int x^m(ax^n+b)^p\,dx-\frac{b}{a}\int x^m(ax^n+b)^{p-1}\,dx,$$

czyli:

$$J_{m+n,\,p-1}=\frac{1}{a}J_{m,\,p}-\frac{b}{a}J_{m,\,p-1}.$$

Wprowadzając powyższe przekształcenia kolejno we wzory (10 otrzymujemy najpierw ze wzoru (10):

$$J_{m,\,p}=\frac{x^{m-n+1}(ax^n+b)^{p+1}}{na(p+1)}-\frac{m-n+1}{n(p+1)}J_{m,\,p}-\frac{b(m-n+1)}{na(p+1)}J_{m-n,\,p},$$

a stąd wzór III.:

$$J_{m,\,p}=\frac{x^{m-n+1}(ax^n+b)^{p+1}}{(m+1+np)\,a}-\frac{(m+1-n)b}{(m+1+np)a}J_{m-n,\,p},$$

a następnie ze wzoru (11):

$$J_{m,\,p}=\frac{x^{m+1}(ax^n+b)^p}{m+1}-\frac{anp}{m+1}\left\{\frac{1}{a}J_{m,\,p}-\frac{b}{a}J_{m,\,p-1}\right\},$$

czyli:

$$J_{m,\,p}=\frac{x^{m+1}(ax^n+b)^p}{m+1}-\frac{np}{m+1}J_{m,\,p}+\frac{bnp}{m+1}J_{m,\,p-1},$$

a stąd wzór IV.:

$$J_{m,\,p}=\frac{x^{m+1}(ax^n+b)^p}{m+1+np}+\frac{bnp}{m+1+np}J_{m,\,p-1},$$

a więc wzory, z których pierwszy (12) zmniejsza wykładnik m o n, ruszając wykładnika p, przydatny, gdy m jest za wielką liczbą d drugi (13) zmniejsza wykładnik p o jedynkę, nie naruszając wykład przydatny, gdy wykładnik p jest ułamkiem większym od 1.

Zastąpmy we wzorze (12) wykładnik m przez $m+n$, a we wzc wykładnik p przez $p+1$, natenczas otrzymamy:

$$J_{m+n,\,p}=\frac{x^{m+1}(ax^n+b)^{p+1}}{(m+n+1+np)a}-\frac{(m+1)\,b}{(m+n+1+np)\,a}J_{m,\,p},$$
$$J_{m,\,p+1}=\frac{x^{m+1}(ax^n+b)^{p+1}}{m+1+np+n}+\frac{bn(p+1)}{m+1+np+n}J_{m,\,p},$$

a stąd wzory redukcyjne:

V. $$J_{m,p}=\frac{x^{m+1}(ax^n+b)^{p+1}}{(m+1)b}-\frac{(m+1+n+np)a}{(m+1)b}J_{m+n,p},\tag{14}$$

VI. $$J_{m,p}=-\frac{x^{m+1}(ax^n+b)^{p+1}}{bn(p+1)}+\frac{m+1+p+np}{bn(p+1)}J_{m,p+1},\tag{15}$$

:tórych pierwszy (14), zwiększa wykładnik m, nie zmieniając wykładnika przydatny, gdy wykładnik m jest liczbą ujemną, drugi (15) zwiększa kładnik p, nie zmieniając wykładnika m, przydatny, gdy wykładnik p : liczbą ujemną.

6. Za pomocą powyższych sześciu wzorów redukcyjnych możemy wy-.ać wszelką zamierzoną redukcyą danej całki dwumiennej. Zauważyć ɪo należy, że wzory (11) i (14) są nieprzydatne, gdy $m+1=0$, a więc i $\frac{m+1}{n}=0$, wzory (12) i (13) są nieprzydatne, gdy $m+1+np=0$, czyli, y $\frac{m+1}{n}+p=0$, wtedy atoli mamy te oba poznane już powyżej przypadki, których całka dwumienna za pomocą znanych podstawień, daje się sprowadzić do całki funkcyi wymiernej.

Wykluczając tedy oba te przypadki całkowalności, możemy zapomocą wzorów (12) i (14) daną całkę dwumienną sprowadzić do takiej całki, w której wykładnik m byłby zawarty między liczbami 0 i n, albo między liczbami $-\frac{n}{2}$ i $+\frac{n}{2}$ przy niezmienionym wykładniku p; za pomocą wzorów redukcyjnych (13) i (15), możemy znowu daną całkę sprowadzić do takiej, w której wykładnik p byłby zawarty między liczbami 0 i 1, albo między liczbami $-\frac{1}{2}$ i $+\frac{1}{2}$.

7. **Przykłady wyznaczania całek dwumiennych zapomocą wzorów redukcyjnych.** Niech będzie daną całka dwumienna:

$$J=\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int x^m(1-x^2)^{-1/2}dx=J_{m,\,-1/2}.$$

Mamy tu $a=-1$, $b=1$, $p=-\frac{1}{2}$, $n=2$; przy całkowitym wykładniku m będzie także całkowitym, albo iloraz: $\frac{m+1}{n}=\frac{m+1}{2}$, albo suma $\frac{m+1}{n}+p=\frac{m+1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{m}{2}$.

Funkcya $x^m(1-x^2)^{-1/2}$ jest więc przy całkowitem m zawsze całkowalną.

Jeżeli m jest liczbą całkowitą, dodatnią, użyjemy wzoru redukcyjnego (12), z którego otrzymujemy:

$$J_{m,\,-1/2}=\frac{x^{m-2+1}(1-x^2)^{-1/2+1}}{(m+1-1)\,.\,-1}-\frac{(m+1-2)}{m\,.\,-1}J_{m-2,\,-1/2},$$

a więc wzór redukcyjny danej całki w postaci:

$$J_{m,\,-1/2}=-\frac{x\sqrt{1-x^2}}{m}+\frac{m-1}{m}J_{m-2,\,-1/2}.$$

Na podstawie tego wzoru dojdziemy, przy parzystem m, w końcu do całki.

$$J_{0,\,-1/2}=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x.$$

Wobec tego otrzymujemy następujące wzory bezpośrednie:

$$\int\frac{x^{2m}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2m}\left\{x^{2m-1}+\frac{2m-1}{2m-2}x^{2m-3}+\frac{(2m-1)(2m-3)}{(2m-2)(2m-4)}\,.\,x^{2m-5}+\right.$$
$$\left.+\dots+\frac{(2m-1)\dots 3}{(2m-2)\dots 2}x\right\}+\frac{(2m-1)(2m-4)\dots 3\,.\,1}{2m\,(2m-2)\dots 4\,.\,2}\arcsin x+C,\tag{16}$$

$$\int\frac{x^{2m+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2m+1}\left\{x^{2m}+\frac{2m}{2m-1}x^{2m-2}+\frac{2m(2m-2)}{(2m-1)(2m-3)}x^{2m-4}+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{2m(2m-2)\ldots2}{(2m-1)(2m-3)\ldots1}\right\}+C. \tag{17}$$

Jeżeli wykładnik m jest liczbą całkowitą ujemną, użyjemy wzoru redukcyjnego (14), na mocy którego otrzymujemy:

$$J_{m,\,-1/2}=\frac{x^{m+1}(1-x^2)^{1/2}}{(m+1)}+\frac{(m+1+2-1)}{m+1}J_{m+2,\,-1/2},$$

a więc odpowiedni wzór redukcyjny danej całki w postaci wzoru:

$$J_{m,\,-1/2}=\frac{x^{m+1}\sqrt{1-x^2}}{m+1}+\frac{m+2}{m+1}J_{m+2,\,-1/2},$$

za pomocą którego, przy parzystym wykładniku m, dochodzimy w końcu do całki:

$$J_{-2,\,-1/2}=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

a przy nieparzystym wykładniku m, do całki:

$$J_{-1,\,-1/2}=\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=\log\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}.$$

Otrzymujemy tedy nowe dwa wzory:

$$\int\frac{dx}{x^{2m}\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2m-1}\left\{\frac{1}{x^{2m-1}}+\frac{2m-2}{2m-3}\cdot\frac{1}{x^{2m-3}}+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{(2m-2)\ldots2}{(2m-3)\ldots1}\cdot\frac{1}{x}\right\}+C, \tag{18}$$

$$\int\frac{dx}{x^{2m+1}\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2m}\left\{\frac{1}{x^{2m}}+\frac{2m-1}{2m-2}\cdot\frac{1}{x^{2m-2}}+\ldots+\frac{(2m-1)(2m-3)\ldots3}{(2m-2)(2m-4)\ldots2}\cdot\frac{1}{x^2}\right\}+$$
$$+\frac{(2m-1)(2m-3)\ldots1}{2m(2m-2)\ldots2}\log\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}+C. \tag{19}$$

8. Całki funkcyj algebraicznych, niewymiernych, sprowadzalne do całek dwumiennych. Do całek dwumiennych dadzą się sprowadzić niektóre całki funkcyj algebraicznych, niewymiernych.

Zaliczyć tu możemy przedewszystkiem całki następujących kształtów:

1) $\int x^m(ax^n+bx^p)^q\,dx$,
2) $\int(ax+b)^p(\alpha x+\beta)^{r/s}\,dx$,
3) $\int(\alpha x+\beta)^m[a(\alpha x+\beta)^n+b]^p\,dx$,
4) $\int x^m(ax^n+b)^p(ax^{2n}+2bx^n+c)^q\,dx$,
5) $\int x^m(bx^n+c)^p(ax^{2n}+2bx^n+c)^q\,dx$,
6) $\int x^m(ax^n+b)^p(\alpha x^n+\beta)^{r/s}\,dx$.

Całka kształtu 1) sprowadza się wprost do całki dwumiennej, jest bowiem:

$$\int x^m(ax^n+bx^p)^q\,dx=\int x^{m+pq}(ax^{n-p}+b)^q\,dx,$$

da się wyznaczyć, skoro, albo iloraz:

$$\frac{m+pq+1}{n-p},\ \text{albo suma}\ \frac{m+pq+1}{n-p}+q=\frac{m+nq+1}{n-p},$$

jest liczbą całkowitą.

Całka kształtu 2), wskutek podstawienia $(\alpha x+\beta)=z^s$, na podstawie którego otrzymujemy:

$$x=\frac{z^s-\beta}{a},\ ax+b=\frac{az^s+ab-a\beta}{a},\ dx=\frac{s}{a}z^{s-1}dz,$$

›wadza się do postaci:

$$\int(ax+b)^p(ax+\beta)^{\frac{r}{s}}dx=\frac{1}{a^{p+1}}\int z^{r+s-1}[az^s+(ab-a\beta)]^p dz,$$

się więc wyznaczyć, skoro, albo iloraz:

$$\frac{r+s}{s},\ \text{albo suma}\ \frac{r+s}{s}+p$$

liczbą całkowitą.

Całka kształtu 3) wskutek podstawienia: $ax+\beta=z$, sprowadza się do ci:

$$\int(ax+\beta)^m[a(ax+\beta)^n+b]^p dx=\frac{1}{a}\int z^m(az^n+b)^p dz,$$

się więc wyznaczyć, skoro, albo iloraz $\frac{m+1}{n}$, albo suma $\frac{m+1}{n}+p$ jest ą całkowitą.

Całka kształtu 4) wskutek podstawienia: $ax^n+b=z$, a więc:

$$x=\left(\frac{z-b}{a}\right)^{1/n},\ dx=\frac{1}{na^{1/n}}(z-b)^{\frac{1}{n}-1}dz,$$

›wadza się do postaci:

$$\int x^m(ax^n+b)^p(ax^{2n}+2bx^n+c)^q dx=$$

$$=\frac{1}{na^{\frac{m+1}{n}+q}}\int(z-b)^{\frac{m+1}{n}-1}z^p[z^2+(ac-b^2)]^q dz,$$

ę się więc w przypadku, gdy różnica: $\frac{m+1}{n}-1$ jest liczbą całkowitą, stnią rozłożyć na $\frac{m+1}{n}$ całek dwumiennych.

Całka kształtu 5) da się przedstawić w postaci:

$\int x^m(bx^n+c)^p[ax^{2n}+2bx^n+c]^q dx=\int x^{m+np+2nq}(cx^{-n}+b)^p(cx^{-2n}+2bx^{-n}+a)^q dx.$

Wskutek podstawienia:

$$cx^{-n}+b=z,\ \text{a więc}\ x^n=\frac{c}{z-b},$$

$$dx=-\frac{1}{n}c^{1/n}\frac{dz}{(z-b)^{\frac{1}{n}+1}},$$

adza się zatem do postaci:

$$\int x^m(bx^n+c)^p[ax^{2n}+2bx^n+c]^q dx=$$

$$=-\frac{1}{n}c^{\frac{m+1}{n}+p+q}\int(z-b)^{-\frac{m+1}{n}-p-2q-1}.z^p[z^2+(ac-b^2)]^q dz,$$

ę więc, gdy wykładnik $-\left[\frac{m+1}{n}+p+2q+1\right]$ jest liczbą całkowitą, do- nią, rozłożyć na skończoną ilość całek dwumiennych.

Całki kształtu 4) i 5) dają w przypadku, gdy $p=0$, całkę kształtu:

$$\int x^m(ax^{2n}+2bx^n+c)^q dx,$$

ı, wskutek podstawienia: $ax^n+b=z$, sprowadza się do postaci:

$$\int x^m (ax^{2n}+2bx^n+c)^q dx = \frac{1}{na^{\frac{m+1}{n}+q}} \int (z-b)^{\frac{m+1}{n}-1} [z^2+(ac-b^2)]^q dz,$$

a wskutek podstawienia $cx^{-n}+b=z$, do postaci:

$$\int x^m (ax^{2n}+2bx^n+c)^q dx =$$

$$= -\frac{1}{n} c^{\frac{m+1}{n}+q} \int (z-b)^{-\frac{m+1}{n}-2q-1} . [z^2+(ac-b^2)]^q dz,$$

z których wynika, że dana całka da się rozłożyć na skończoną ilość całek dwumiennych, zarówno w przypadku, gdy różnica $\frac{m+1}{n}-1$ jest liczbą całkowitą dodatnią, jakoteż w przypadku, gdy wyraz $-\left[\frac{m+1}{n}+2q+1\right]$ przedstawia liczbę całkowitą dodatnią.

Całka kształtu 6) wskutek podstawienia:

$$ax^n+\beta=z^s, \qquad \text{a więc:}$$

$$ax^n+b=\frac{1}{a}(az^s+ab-a\beta), \quad \frac{dx}{x}=\frac{s}{n}\frac{z^{s-1}}{z^s-\beta}dz,$$

sprowadza się do postaci:

$$\int x^m (ax^n+b)^p (ax^n+\beta)^{\frac{r}{s}} dx = \frac{s}{na^{\frac{m+1}{n}+p}} \int z^{r+s-1} (z^s-\beta)^{\frac{m+1}{n}-1} (az^s+ab-a\beta)^p . dz,$$

da się więc w przypadku, gdy różnica: $\frac{m+1}{n}-1$, jest liczbą całkowitą, dodatnią, rozłożyć na skończoną ilość całek dwumiennych.

Przedstawiwszy całkę kształtu 6) w postaci:

$$\int x^m (ax^n+b)^p (ax^n+\beta)^{\frac{r}{s}} dx = \int x^{m+np+nr/s+1} (bx^{-n}+a)^p (\beta x^{-n}+a)^{\frac{r}{s}} . \frac{dx}{x},$$

podstawmy:

$$\beta x^{-n}+a=z^s, \qquad \text{a więc:}$$

$$x^n=\frac{\beta}{z^s-a}, \quad \frac{dx}{x}=-\frac{s}{n}\frac{z^{s-1}}{z^s-a}dz,$$

natenczas otrzymamy wzór:

$$\int x^m (ax^n+b)^p (ax^n+\beta)^{\frac{r}{s}} dx = -\frac{s}{n} \beta^{\frac{m+1}{n}+q} \int \frac{z^{r+s-1} [bz\beta+\beta a-ab]^p}{(z^s-a)^{\frac{m+1}{n}+p+r/s+1}} dz,$$

z którego wypływa, że dana całka 6) da się także w tym przypadku rozłożyć na skończoną ilość całek dwumiennych, gdy wykładnik $\frac{m+1}{n}+p+\frac{r}{s}+1$ jest liczbą całkowitą, ujemną.

9. Przekształcenie całki dwumiennej przez sprowadzenie funkcyi dwuwyrazowej do funkcyi stopnia pierwszego. W całce dwumiennej:

$$J_{m,p}=\int x^m (ax^n+b)^p dx,$$

możemy wykładnik całkowity n sprowadzić zawsze do jedynki. Kładąc bowiem:

$x^n=t$, a więc $x=t^{\frac{1}{n}}$, $dx=\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt$, otrzymujemy:

$$J_{m,p}=\int x^m(ax^n+b)^p dx=\frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(at+b)^p dt,$$

a więc:

$$\int x^m(ax^n+b)^p dx=\frac{1}{n}\int t^q(at+b)^p dt,$$

gdzie wykładnik $q=\frac{m+1}{n}-1$, będzie wogóle ułamkiem.

Stosując do tak przekształconej całki dwumiennej:

$$J_{q,p}=\int t^q(at+b)^p dt,$$

wzory redukcyjne, zmieniające wykładnik q, możemy ten wykładnik sprowadzić między granice: 0 i 1, albo: $-\frac{1}{2}$ i $+\frac{1}{2}$.

10. Kładąc wreszcie:

$$t=\frac{b}{a}z, \text{ a więc: } dt=\frac{b}{a}dz,$$

otrzymujemy:

$$J_{q,p}=\int t^q(at+b)^p dt=\left(\frac{b}{a}\right)^{q+1}.b^p\int z^q(1+z)^p dz=\frac{b^{p+q+1}}{a^{q+1}}\int z^q(1+z)^p dz,$$

a więc daną całkę dwumienną, w postaci:

$$J_{m,p}=\int x^m(ax^n+b)^p dx=\frac{1}{n}\frac{b^{p+q+1}}{a^{q+1}}\int z^q(1+z)^p dz,$$

w której oba wykładniki p i q zawarte są między liczbami: 0 i +1, albo między liczbami: $-\frac{1}{2}$ i $+\frac{1}{2}$.

Dochodzimy zatem do wniosku:

Całkę dwumienną ogólnego kształtu: $J_{m,p}=\int x^m(ax^n+b)^p dx$, o jakichkolwiek wymiernych wykładnikach m, n, p, możemy zawsze sprowadzić do całki dwumiennej kształtu:

$$J_{q,p}=\int z^q(1+z)^p dz,$$

w której wykładniki p i q są liczbami zawartemi między $-\frac{1}{2}$ i $+\frac{1}{2}$, przyczem, zależnie od znaków, z jakimi występują spółczynniki liczebne a i b dwumianu ax^n+b, dwumian $1+z$ przedstawić możemy ostatecznie także w postaci $1-z$, lub $z-1$.

11. Całka dwumienna kształtu: $J_{p,q}=\int z^p(1+z)^q dz$ sprowadza się do całki funkcyi wymiernej tylko w przypadku, gdy albo p, albo suma $p+q$ jest liczbą całkowitą. W tych też przypadkach całka $J_{p,q}$ da się wyrazić przez znane funkcye przestępne.

W przypadkach, w których powyższe warunki całkowalności nie są spełnione, całka $J_{p,q}=\int z^p(1+z)^q dz$, nie da się wyrazić przez znane funkcye przestępne i prowadzi do nowego rodzaju funkcyj przestępnych, które nazywamy całkami Eulera.

12. Przekształcenie całki dwumiennej $J_{p,q}$ za pomocą podstawień goniometrycznych. Stosując do całki dwumiennej:

$$J_{p,q}=\int x^p(1+x)^q\,dx,$$

podstawienie goniometryczne $x=\operatorname{tang}^2\varphi$, otrzymujemy:

$$1+x=\sec^2\varphi=\frac{1}{\cos^2\varphi},\quad dx=2\operatorname{tang}\varphi\,.\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi},$$

przez co sprowadzimy całkę $J_{p,q}$ do postaci:

$$J_{p,q}=\int x^p(1+x)^q\,dx=\int\frac{\sin^{2p}\varphi}{\cos^{2p}\varphi}\cdot\frac{1}{\cos^{2q}\varphi}\cdot 2\frac{\sin\varphi d\varphi}{\cos^3\varphi}=$$

$$=2\int\sin^{2p+1}\varphi\,.\cos^{-2p-2q-3}\varphi\,d\varphi,$$

czyli:

$$J_{p,q}=2\int\sin^s\varphi\cos^k\varphi d\varphi,$$

a więc ostatecznie do całki funkcyi goniometrycznej kształtu:

$$J_{s,k}=\int\sin^s\varphi\cos^k\varphi\,d\varphi.$$

Do całek tego rodzaju sprowadzimy także całkę $J_{p,q}$ kształtu:

$$J_{p,q}=\int x^p(1-x)^q\,dx,$$

za pomocą podstawienia $x=\sin^2\varphi$, a całkę:

$$J_{p,q}=\int x^p(x-1)^q\,dx,$$

za pomocą podstawienia $x=\sec^2\varphi$.

W następnym wykładzie zajmiemy się też przedewszystkiem całkami funkcyj goniometrycznych kształtu: $J_{s,k}=\int\sin^s x\cos^k x dx$.

Ćwiczenia VII.

1) Wyznaczyć przypadki, w których całka $\int x^m(ax^n+b)^{\frac{\mu}{\nu}}dx$ da się przekształcić na całkę funkcyi wymiernej.

Wykazać, że następujące całki dwumienne dadzą się przekształcić na całki funkcyj wymiernych:

2) $\int(ax^2+b)^{1/2}dx$, 3) a) $\int(ax^3+b)^{2/3}dx$, b) $\int x(ax^3+b)^{1/3}dx$.

5) a) $\int(ax^4+b)^{3/4}dx$, b) $\int x^2(ax^4+b)^{1/4}dx$. 6) a) $\int(ax^5+b)^{4/5}dx$, b) $\int x(ax^5+b)^{3/5}dx$,

c) $\int x^2(ax^5+b)^{3/5}dx$, d) $\int x^3(ax^5+b)^{1/5}dx$.

7) a) $\int x^{n\alpha}(ax^n+b)^{\frac{n-1}{n}+\beta}dx$, b) $\int x^{r+n\alpha}(ax^n+b)^{\frac{n-r-1}{n}+\beta}dx$.

8) Wykazać, że całka kształtu: $\int x^{m+\alpha n}(ax^n+b)^{\frac{\mu}{\nu}}dx$, gdzie α jest dowolną liczbą całkowitą, da się sprowadzić do całek kształtu: $\int x^m(ax^n+b)^{\frac{\mu}{\nu}}dx$.

9) Podobnie całka kształtu: $\int x^m(ax^n+b)^{\frac{\mu}{\nu}+\beta}dx$, gdzie β jest dowolną liczbą całkowitą, dodatnią, lub ujemną.

10) Wykazać, że w ogólności całki kształtu: $\int x^{m+\alpha n}(ax^n+b)^{\frac{\mu}{\nu}+\beta}dx$, gdzie α i β są dowolnemi liczbami całkowitemi, dadzą się sprowadzić do całki dwumiennej:

$$\int x^m(ax^n+b)^{\frac{\mu}{\nu}}dx.$$

Wyprowadzić następujące całki:

11) $$\int \frac{x^3 dx}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + 2\sqrt{1-x^2} + C.$$

12) $$\int x^5\sqrt{x^3+1}\,dx = \frac{2}{15}x^3\sqrt{(x^3+1)^3} - \frac{4}{45}\sqrt{(x^3+1)^3} + C.$$

13) $$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + \log(x+\sqrt{x^2+1}) + C.$$

14) $$\int x^2\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{4}x^3\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{8}x\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{8}\log(x+\sqrt{x^2+1}) + C.$$

15) $$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + C.$$

16) $$\int \frac{dx}{(\sqrt{1-x^2})^3} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

Wyprowadzić następujące wzory redukcyjne:

17) $$\int (a^2+x^2)^{\frac{n}{2}} dx = \frac{x(a^2+x^2)^{\frac{n}{2}}}{n+1} + \frac{na^2}{n+1}\int (a^2+x^2)^{\frac{n-2}{2}} dx.$$

18) $$\int \frac{x^n dx}{(a^2+x^2)^p} = -\frac{x^{n-1}}{2(p-1)(a^2+x^2)^{p-1}} + \frac{n-1}{2(p-1)}\int \frac{x^{n-2}dx}{(a^2+x^2)^{p-1}}.$$

19) $$\int \frac{dx}{x^n(ax+b)^{1/2}} = -\frac{(ax+b)^{1/2}}{(n-1)bx^{n-1}} - \frac{(2n-3)a}{2(n-1)b}\int \frac{(ax+b)^{1/2}dx}{x^{n-1}}.$$

20) $$\int \frac{x^n dx}{(a^2-x^2)^{1/2}} = -\frac{x^{n-1}(a^2-x^2)^{1/2}}{n} + \frac{n-1}{n}a^2\int \frac{x^{n-2}dx}{(a^2-x^2)^{1/2}}.$$

21) $$\int \frac{x^n dx}{(2ax-x^2)^{1/2}} = -\frac{x^{n-1}(2ax-x^2)^{1/2}}{n} + \frac{2n-1}{n}a\int \frac{x^{n-1}dx}{(2ax-x^2)^{1/2}}.$$

22) $$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{1}{2n-2}\cdot\frac{x}{a^2(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}.$$

23) $$\int \frac{x^n dx}{(a^2+x^2)^m} = -\frac{1}{2m-2}\cdot\frac{x^{n-1}}{(a^2+x^2)^{m-1}} + \frac{n-1}{2m-2}\int \frac{x^{n-2}dx}{(a^2+x^2)^{m-1}}.$$

24) $$\int (a^2-x^2)^{\frac{n}{2}} dx = \frac{x(a^2-x^2)^{\frac{n}{2}}}{n+1} + \frac{na^2}{n+1}\int (a^2-x^2)^{\frac{n-2}{2}} dx.$$

25) $$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{(n-2)a^2}\cdot\frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{n}{2}-1}} + \frac{n-3}{(n-2)a^2}\cdot\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{n}{2}-1}}.$$

26) $$\int (ax+b)^m.(a'x+b')^n dx = \frac{(ax+b)^m.(a'x+b')^{n+1}}{(m+n+1)a'} -$$
$$- \frac{m(ab'-a'b)}{(m+n+1)a'b)}\int (ax+b)^{m-1}(a'x+b')^n dx.$$

27) $$\int x^{m-1}(ax^n+b)^p dx = \frac{x^{m-n}(ax^n+b)^{p+1}}{(m+pn)a} - \frac{(m-n)b}{(m+pn)a}\int x^{m-n-1}(ax^n+b)^p dx.$$

28) $$\int x^{m-1}(ax^n+b)^p dx = \frac{x^m(ax^n+b)^p}{m+pn} + \frac{pnb}{m+pn}\int x^{m-1}(ax^n+b)^{p-1}dx.$$

29) $$\int x^m(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}}dx = \frac{x^{m-1}(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}+1}}{b(m+n+1)} - \frac{a(m+\frac{1}{2}n)}{b(m+n+1)}\int x^{m-1}(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}}dx.$$

30) $$\int\frac{(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}}}{x^m}dx=-\frac{(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}+1}}{ax^m(m-{}^1\!/_2\,n-1)}+\frac{b(2-m+n)}{a(m-{}^1\!/_2\,n-1)}\int\frac{(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}}}{x^{m-1}}dx.$$

Następujące całki wyznaczyć wprost i za pomocą wzorów redukcyjnych:

31) $$\int\frac{x^3dx}{(a^2-x^2)^{1/2}}=-\frac{(a^2-x^2)^{1/2}}{3}(x^2+2a^2)+C.$$

32) $$\int\frac{x^6dx}{(a^2-x^2)^{1/2}}=-(a^2-x^2)^{1/2}\left\{\frac{x^5}{6}+\frac{5a^2x^3}{6.4}+\frac{5.3a^4x}{6.4.2}\right\}+\frac{5.3}{6.4.2}a^6\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

33) $$\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^4}=\frac{1}{6}\cdot\frac{x}{a^2(a^2+x^2)^3}+\frac{5}{6.4}\cdot\frac{x}{a^4(a^2+x^2)^2}+$$
$$+\frac{5.3}{6.4.2}\cdot\frac{x}{a^6(a^2+x^2)}+\frac{5.3.1}{6.4.2}\cdot\frac{1}{a^7}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}.$$

34) $$\int\frac{x^2dx}{(a^2+x^2)^3}=-\frac{x}{4(a^2+x^2)^2}+\frac{x}{4.2a^2(a^2+x^2)}+\frac{1}{4.2}\cdot\frac{1}{a^3}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{a}.$$

35) $$\int\frac{x^4dx}{(a^2+x^2)^2}=\frac{x^3}{2(a^2+x^2)}+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}a.\operatorname{arctg}\frac{x}{a}.$$

36) $$\int(a^2-x^2)^{5/2}dx=\frac{x(a^2-x^2)^{5/2}}{6}+\frac{5}{6.4}a^2x(a^2-x^2)^{3/2}+\frac{5.3}{6.4.2}a^4x(a^2-x^2)^{1/2}+$$
$$+\frac{5.3}{6.4.2}a^6.\arcsin\frac{x}{a}.$$

37) $$\int\frac{dx}{x^3(x^2-1)^{1/2}}=\frac{(x^2-1)^{1/2}}{2x^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sec}x+C.$$

38) $$\int\frac{dx}{x^4(x^2-1)^{1/2}}=\frac{(x^2-1)^{1/2}}{3x^3}+\frac{2}{3}\frac{(x^2-1)^{1/2}}{x}+C.$$

39) $$\int\frac{dx}{x^6(1+x^2)^{1/2}}=-\frac{1}{5}\frac{(1+x^2)^{1/2}}{x^5}+\frac{4}{5.3}\frac{(1+x^2)^{1/2}}{x^3}-\frac{4.2}{5.3}\frac{(1+x^2)^{1/2}}{x}+C.$$

40) $$\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{5/2}}=\left\{\frac{1}{a^2+x^2}+\frac{2}{a^2}\right\}\cdot\frac{x}{3a^2(a^2+x^2)^{1/2}}+C.$$

41) $$\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{7/2}}=\left\{\frac{1}{(a^2+x^2)^2}+\frac{4}{3a^2(a^2+x^2)}+\frac{1}{3a^4}\right\}\cdot\frac{x}{5a^2(a^2+x^2)^{1/2}}+C.$$

Rozwiązania VII. Wskazówki podane w wykładzie.

Literatura. A. Cauchy. Vorlesungen über die Integralrechnung, bearbeitet von Moigno, deutsch von Schnuse. Braunschweig 1846. J. Hoüel. Cours de calcul infinitesimal. Tom. premier. Paris 1878. George Peacock. Collection of examples of the differential and integral calculus. Cambridge 1820.

Tematy do rozprawek naukowych.

1. Związki, zachodzące między całkami, kształtu:
$$J_1=\int R(x)\sqrt{1\pm x^2}\,dx,$$
$$J_2=\int\frac{R(x)}{\sqrt{1\pm x^2}}dx.$$
2. Wzory redukcyjne całek trójmiennych kształtu:
$$J_{m,\,p}=\int x^m(ax^{2n}+bx^n+c)^p\,dx.$$
3. Rozwijanie całek Eulera: $\int x^p(1+x)^q dx$ na szeregi potęgowe kształtu:
$$\mathfrak{P}(x),\ \mathfrak{P}(1+x)\ \text{i}\ \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Wykład VIII.

Całki funkcyj goniometrycznych kształtu: $J_{s,k}=\int \sin^s x \cos^k x dx$.

1. Wzory redukcyjne całki $J_{s,k}$. Dla całek kształtu:

$$J_{s,k}=\int \sin^s x \cos^k x\, dx, \tag{1}$$

możemy wyprowadzić wzory redukcyjne, analogiczne do wzorów redukcyjnych, jakie wyprowadziliśmy w poprzednim wykładzie dla całek dwumiennych.

Opierając się mianowicie na wzorze całkowania przez części:

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

położmy:	a zatem:
$du=\sin^s x \cos x\, dx$	$u=\dfrac{\sin^{s+1} x}{s+1}$
$v=\cos^{k-1} x dx$	$dv=-(k-1)\cos^{k-2}x \sin x dx,$

a otrzymamy wzór redukcyjny I. w postaci:

$$\text{I...}\quad J_{sk}=\frac{\sin^{s+1}x\cos^{k-1}x}{s+1}+\frac{k-1}{s+1}J_{s+2,\,k-2},$$

z którego, zastępując s przez $s-2$, a k przez $k+2$, dostajemy:

$$J_{s-2,\,k+2}=\frac{\sin^{s-1}x\cos^{k+1}x}{s-1}+\frac{k+1}{s-1}J_{s,k},$$

a stąd nowy wzór redukcyjny w postaci:

$$\text{II...}\qquad J_{s,k}=-\frac{\sin^{s-1}x\cos^{k+1}x}{k+1}+\frac{s-1}{k+1}J_{s-2,\,k+2}. \tag{3}$$

Otrzymane dwa wzory dozwalają nam jeden z obu wykładników s i k powiększyć o dwie jednostki, a równocześnie drugi o dwie jednostki pomniejszyć.

Z wzoru I. otrzymujemy dalej, mając na uwadze, że:

$$J_{s+2,\,k-2}=J_{s,\,k-2}-J_{s,k},$$

następujące równanie:

$$J_{s,k}=\frac{\sin^{s+1}x\cos^{k-1}x}{s+1}+\frac{k-1}{s+1}J_{s,k-2}-\frac{k-1}{s+1}J_{s,k},$$

z którego wypada trzeci wzór redukcyjny:

$$\text{III...}\qquad J_{s,k}=\frac{\sin^{s+1}x\cos^{k-1}x}{s+k}+\frac{k-1}{s+k}J_{s,\,k-2}. \tag{4}$$

Podobnie otrzymamy z drugiego wzoru redukcyjnego, mając znowu na uwadze, że:

$$J_{s-2,\,k+2}=J_{s-2,\,k}-J_{s,\,k},$$

równanie:

$$J_{s,k}=-\frac{\sin^{s-1}x\cos^{k+1}x}{k+1}+\frac{s-1}{k+1}J_{s-2,\,k}-\frac{s-1}{k+1}J_{s,\,k},$$

z którego wypływa czwarty wzór redukcyjny w postaci:

$$\text{IV...}\qquad J_{s,k}=-\frac{\sin^{s-1}x\cos^{k+1}x}{s+k}+\frac{s-1}{s+k}J_{s-2,\,k}. \qquad (5)$$

Zastępując w trzecim wzorze redukcyjnym $k+2$ przez k, a więc k przez $k-2$, a w czwartym wzorze redukcyjnym $s+2$ przez s, a więc s przez $s-2$, dostajemy dwa równania:

$$J_{s,\,k+2}=\frac{\sin^{s+1}x\cos^{k+1}x}{s+k+2}+\frac{k+1}{s+k+2}J_{s,\,k},$$

$$J_{s+2,\,k}=-\frac{\sin^{s+1}x\cos^{k+1}x}{s+k+2}+\frac{s+1}{s+k+2}J_{s,\,k},$$

z których wypadają nowe dwa wzory redukcyjne:

$$\text{V...}\qquad J_{s,k}=-\frac{\sin^{s+1}x\cos^{k+1}x}{k+1}+\frac{s+k+2}{k+1}J_{s,\,k+2}, \qquad (6)$$

$$\text{VI...}\qquad J_{s,k}=\frac{\sin^{s+1}x\cos^{k+1}x}{s+1}+\frac{s+k+2}{s+1}J_{s+2,\,k}. \qquad (7)$$

Ostatnie cztery wzory redukcyjne dozwalają nam powiększać, lub pomniejszać jeden wykładnik o dwie jednostki, nie zmieniając wcale drugiego wykładnika.

2. Wzory redukcyjne: I. i VI. są nieprzydatne, gdy $s=-1$, wzory II. i V. są nieprzydatne, gdy $k=-1$, a wzory III. i IV. są znowu nieprzydatne, gdy $s=-k$, możemy jednak w takim razie, w pierwszym przypadku $(s=-1)$ i drugim $(k=-1)$, nie zmieniając wykładnika s, lub k, wedle potrzeby zwiększać lub zmniejszać drugi wykładnik, używając wzorów redukcyjnych III. i V-go względnie IV-go i VI-go; w trzecim przypadku $(s=-k)$ możemy, powiększając ujemny wykładnik, zmniejszać drugi wykładnik dodatni, używając wzorów redukcyjnych I-go, lub II-go.

3. Redukcya całek $J_{s,k}$ przy całkowitych wykładnikach. Jeżeli wykładniki s i k całki $J_{sk}=\int\sin^s x\cos^k x\,dx$ są liczbami całkowitemi (dodatniemi, lub ujemnemi), natenczas, korzystając z powyższych sześciu wzorów redukcyjnych, dojdziemy, w każdym razie, w końcu do jednej z następujących, wprost, lub metodami elementarnemi wyznaczalnych, całek, jako to:

$$\begin{aligned}
J_{0,0}&=\int dx=x+C,\\
J_{0,1}&=\int\cos x\,dx=\sin x+C.\\
J_{1,0}&=\int\sin x\,dx=-\cos x+C.\\
J_{11}&=\int\sin x\cos x\,dx=\frac{\sin^2 x}{2}+C.\\
J_{-1,-1}&=\int\frac{dx}{\sin x\cos x}=\log\operatorname{tang}x+C.\\
J_{-1,0}&=\int\frac{dx}{\sin x}=\log\operatorname{tang}\frac{x}{2}+C.
\end{aligned} \qquad (8)$$

$$J_{0,\,-1}=\int\frac{dx}{\cos x}=-\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+C.$$

$$J_{-1,\,1}=\int\frac{\cos x\,dx}{\sin x}=\log\sin x+C.$$

$$J_{1,\,-1}=\int\frac{\sin x\,dx}{\cos x}=-\log\cos x+C.$$

Całki funkcyj goniometrycznych kształtu: $J_{s,k}=\int\sin^s x\cos^k x\,dx$ dadzą ię więc przy całkowitych wykładnikach s i k, dodatnich, lub ujemnych, wsze wyznaczyć i składają się z funkcyj goniometrycznych i z logarytmów tych funkcyj.

4. Przykłady. 1) Wyznaczyć za pomocą wzorów redukcyjnych całkę: $J_{-3,\,5}=\int\frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}dx.$ żyjemy tu wzoru redukcyjnego I., zwiększającego o 2 wykładnik przy $\sin x$, przy równocześnem zmniejszaniu wykładnika przy $\cos x$ również o 2, t. j. wzoru:

$$J_{s,\,k}=\frac{\sin^{s+1}x\cos^{k-1}x}{s+1}+\frac{k-1}{s+1}J_{s+2,\,k-2},$$

zymujemy tedy:

$$J_{-3,\,5}=\frac{\sin^{-2}x\cos^4 x}{-2}-\frac{4}{2}J_{-1,\,3},$$

li:

$$\int\frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}dx=-\frac{\cos^4 x}{2\sin^2 x}-2\int\frac{\cos^3 x}{\sin x}dx.$$

Stosując teraz do otrzymanej nowej całki wzór redukcyjny III., zmniejszający wykładnik przy $\cos x$, bez zmiany wykładnika przy $\sin x$, t. j. wzór:

$$J_{s,\,k}=\frac{\sin^{s+1}x\cos^{k-1}x}{s+k}+\frac{k-1}{s+k}J_{s,\,k-2},$$

zymujemy wzór:

$$J_{-1,\,3}=\frac{\cos^2 x}{2}+\frac{2}{2}J_{-1,\,+1},$$

li:

$$\int\frac{\cos^3 x}{\sin x}dx=\frac{\cos^2 x}{2}+\int\frac{\cos x\,dx}{\sin x}=\frac{\cos^2 x}{2}+\log\sin x,$$

em:

$$\int\frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}dx=-\frac{\cos^4 x}{2\sin^2 x}-\cos^2 x-2\log\sin x+C.$$

2) Wyznaczyć za pomocą wzorów redukcyjnych całkę: $J_{3,\,-8}=\int\frac{\sin^3 x}{\cos^8 x}dx.$

Użyjemy tu wzoru redukcyjnego II., który zmniejsza s, a równocześnie zwiększa k 2, czyli wzoru:

$$J_{s,k}=-\frac{\sin^{s-1}x\cos^{k+1}x}{k+1}+\frac{s-1}{k+1}J_{s-2,\,k+2},$$

którego otrzymujemy:

$$J_{3,\,-8}=-\frac{\sin^2 x\cos^{-7}x}{-7}+\frac{2}{-7}J_{1,\,-6},$$

yli:

$$\int\frac{\sin^3 x}{\cos^8 x}dx=\frac{\sin^2 x}{7\cos^7 x}-\frac{2}{7}\int\frac{\sin x\,dx}{\cos^6 x},$$

że mamy bezpośrednio:

$$\int\frac{\sin x\,dx}{\cos^6 x}=-\int\frac{d\cos x}{\cos^6 x}=\frac{\cos^{-5}x}{5}=\frac{1}{5\cos^5 x},$$

tem:

$$\int\frac{\sin^3 x}{\cos^8 x}dx=\frac{\sin^2 x}{7\cos^7 x}-\frac{2}{35\cos^5 x}+C.$$

3) Wyznaczyć zapomocą wzorów redukcyjnych całkę $J_{0,5}=\int\cos^5 x\,dx$.

Użyjemy tu wzoru redukcyjnego III., zmniejszającego k o 2, bez zmiany s, tj. wzoru:

$$J_{s,k}=\frac{\sin^{s+1}x\cos^{k-1}x}{s+k}+\frac{k-1}{s+k}J_{s,k-2},$$

z którego otrzymujemy:

$$J_{0,5}=\frac{\sin x\cos^4 x}{5}+\frac{4}{5}J_{0,3},$$

a zarazem:

$$J_{0,3}=\frac{\sin x\cos^2 x}{3}+\frac{2}{3}J_{0,1},$$

a więc:

$$J_{0,5}=\frac{\sin x\cos^4 x}{5}+\frac{4\sin x\cos^2 x}{15}+\frac{8}{15}J_{0,1},$$

gdzie:

$$J_{0,1}=\int\cos x\,dx=\sin x,$$

czyli:

$$\int\cos^5 x\,dx=\frac{\sin x}{5}\left\{\cos^4 x+\frac{4}{3}\cos^2 x+\frac{8}{3}\right\}+C.$$

4) Wyznaczyć za pomocą wzorów redukcyjnych całkę: $J_{4,3}=\int\sin^4 x\cos^3 x\,dx$.

Zastosujmy najpierw wzór redukcyjny IV.:

$$J_{s,k}=-\frac{\sin^{s-1}x\cos^{k+1}x}{s+k}+\frac{s-1}{s+k}J_{s-2,k},$$

z którego otrzymujemy:

$$J_{4,3}=-\frac{\sin^3 x\cos^4 x}{7}+\frac{3}{7}J_{2,3},$$

a zarazem:

$$J_{2,3}=-\frac{\sin x\cos^4 x}{5}+\frac{1}{5}J_{0,3},$$

zatem:

$$J_{4,3}=-\frac{\sin^3 x\cos^4 x}{7}-\frac{3\sin x\cos^4 x}{35}+\frac{3}{35}J_{0,3}.$$

Na podstawie wzoru redukcyjnego III. mamy znowu:

$$J_{0,3}=\frac{\sin x\cos^2 x}{3}+\frac{2}{3}J_{0,1}=\frac{\sin x\cos^2 x}{3}+\frac{2}{3}\sin x,$$

otrzymujemy zatem:

$$\int\sin^4 x\cos^3 x\,dx=-\frac{\sin^3 x\cos^4 x}{7}-\frac{3\sin x\cos^4 x}{35}+\frac{\sin x\cos^2 x}{35}+\frac{2}{35}\sin x+C.$$

5. Całki $J_{s,0}=\int\sin^s x\,dx$ i $J_{0,k}=\int\cos^k x\,dx$. Na podstawie IV. i III. wzoru redukcyjnego całki: $J_{s,k}=\int\sin^s x\cos^k x\,dx$, otrzymujemy wzory redukcyjne całek $J_{s,0}$ i $J_{0,k}$ w postaci:

$$J_{s,0}=-\frac{\sin^{s-1}x\cos x}{s}+\frac{s-1}{s}J_{s-2,0},$$

$$J_{0,k}=\frac{\sin x\cos^{k-1}x}{k}+\frac{k-1}{k}J_{0,k-2},$$

czyli wzory:

$$\int\sin^s x\,dx=-\frac{\sin^{s-1}x\cos x}{s}+\frac{s-1}{s}\int\sin^{s-2}x\,dx, \tag{9}$$

$$\int\cos^k x\,dx=\frac{\sin x\cos^{k-1}x}{k}+\frac{k-1}{k}\int\cos^{k-2}x\,dx. \tag{10}$$

a) Korzystając z tych wzorów, otrzymujemy najpierw z wzoru (9):

1) dla parzystego $s=2m$, kolejno:

$$\int \sin^{2m}x\,dx = -\frac{\sin^{2m-1}x\cos x}{2m} + \frac{2m-1}{2m}\int \sin^{2m-2}x\,dx,$$

$$\int \sin^{2m-2}x\,dx = -\frac{\sin^{2m-3}x\cos x}{2m-1} + \frac{2m-3}{2m-2}\int \sin^{2m-4}x\,dx,$$

. . . .

$$\int \sin^{2}x\,dx = -\frac{\sin x\cos x}{2} + \frac{x}{2},$$

ąd wzór bezpośredni:

$$\int \sin^{2m}x\,dx = -\frac{\cos x}{2m}\left\{\sin^{2m-1}x + \frac{2m-1}{2m-2}\sin^{2m-3}x + \ldots + \frac{(2m-1)(2m-3)\ldots 3}{(2m-2)(2m-4)\ldots 2}\sin x\right\} +$$

$$+\frac{(2m-1)(2m-3)\ldots 1}{(2m-2)(2m-4)\ldots 2}\frac{x}{2m} + C; \qquad (11)$$

2) dla nieparzystego $s=2m+1$, zaś kolejno:

$$\int \sin^{2m+1}x\,dx = -\frac{\sin^{2m}x\cos x}{2m+1} + \frac{2m}{2m+1}\int \sin^{2m-1}x\,dx,$$

$$\int \sin^{2m-1}x\,dx = -\frac{\sin^{2m-2}\cos x}{2m-1} + \frac{2m-2}{2m-1}\int \sin^{2m-3}x\,dx,$$

. . . .

$$\int \sin^{3}x\,dx = -\frac{\sin^{2}x\cos x}{3} + \frac{2}{3}\int \sin x\,dx,$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x,$$

d wzór bezpośredni:

$$\int \sin^{2m+1}x\,dx = -\frac{\cos x}{2m+1}\left\{\sin^{2m}x + \frac{2m}{2m-1}\sin^{2m-2}x + \right.$$

$$\left. + \frac{2m(2m-2)}{(2m-1)(2m-3)}\sin^{2m-4} + \ldots + \frac{2m(2m-2)\ldots 2}{(2m-1)(2m-3)\ldots 1}\right\} + C. \qquad (12)$$

b) Podobnie, otrzymamy z wzoru (10):

a) dla parzystego $k=2n$, kolejno:

$$\int \cos^{2n}x\,dx = \frac{\sin x\cos^{2n-1}x}{2n} + \frac{2n-1}{2n}\int \cos^{2n-2}x\,dx,$$

$$\int \cos^{2n-2}x\,dx = \frac{\sin x\cos^{2n-3}x}{2n-2} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \cos^{2n-4}x\,dx,$$

. . . .

$$\int \cos^{2}x\,dx = \frac{\sin x\cos x}{2} + \frac{1}{2}x,$$

ąd wzór bezpośredni:

$$\int \cos^{2n}x\,dx = \frac{\sin x}{2n}\left\{\cos^{2n-1}x + \frac{2n-1}{2n-2}\cos^{2n-3}x + \ldots + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3}{(2n-2)(2n-4)\ldots 2}\cos x\right\} +$$

$$+\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3}{(2n-2)(2n-4)\ldots 2}\cdot\frac{x}{2n} + C; \qquad (13)$$

b) dla nieparzystego $k=2n+1$, zaś kolejno:

$$\int \cos^{2n+1}x\,dx = \frac{\sin x\cos^{2n}x}{2n+1} + \frac{2n}{2n+1}\int \cos^{2n-1}x\,dx,$$

$$\int \cos^{2n-1}x\,dx = \frac{\sin x\cos^{2n-2}x}{2n-1} + \frac{2n-2}{2n-1}\int \cos^{2n-3}x\,dx,$$

. . . .

$$\int \cos^3 x\,dx = \frac{\sin x \cos^2 x}{3} + \frac{2}{3}\int \cos x\,dx,$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

zatem wzór bezpośredni:

$$\int \cos^{2n+1} x\,dx = \frac{\sin x}{2n+1}\left\{\cos^{2n} x + \frac{2n}{2n-1}\cos^{2n-2} x + \ldots + \frac{2n(2n-2)\ldots 2}{(2n-1)(2n-3)\ldots 1}\right\} + ($$

6. Zastosowania. Na podstawie powyżej wyprowadzonych wzorów bezpoś otrzymujemy kolejno następujące całki:

$$\int \sin^2 x\,dx = -\frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{x}{2} + C.$$

$$\int \sin^4 x\,dx = -\frac{\cos x}{4}\left\{\sin^3 x + \frac{3}{2}\sin x\right\} + \frac{3 \cdot x}{2 \cdot 4},$$

$$\int \sin^6 x\,dx = -\frac{\cos x}{6}\left\{\sin^5 x + \frac{5}{4}\sin^3 x + \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 2}\sin x\right\} + \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 2} \cdot \frac{x}{6} + C,$$

. . . .

$$\int \sin^3 x\,dx = -\frac{\cos^3 x}{3}\left\{\sin^2 x + 2\right\} + C,$$

$$\int \sin^5 x\,dx = -\frac{\cos x}{5}\left\{\sin^4 x + \frac{4}{5}\sin^2 x + \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 1}\right\} + C,$$

$$\int \sin^7 x\,dx = -\frac{\cos x}{7}\left\{\sin^6 x + \frac{6}{5}\sin^4 x + \frac{6 \cdot 4}{5 \cdot 3}\sin^2 x + \frac{6 \cdot 4 \cdot 2}{5 \cdot 3 \cdot 1}\right\} + C.$$

. . . .

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{x}{2} + C.$$

$$\int \cos^4 x\,dx = \frac{\sin x}{4}\left\{\cos^3 x + \frac{3}{2}\cos x\right\} + \frac{3}{2} \cdot \frac{x}{4} + C,$$

$$\int \cos^6 x\,dx = \frac{\sin x}{6}\left\{\cos^5 x + \frac{5}{4}\cos^3 x + \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 2}\cos x\right\} + \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 2} \cdot \frac{x}{6} + C,$$

. . . .

$$\int \cos^3 x\,dx = \frac{\sin x}{3}\left\{\cos^2 x + 2\right\} + C,$$

$$\int \cos^5 x\,dx = \frac{\sin x}{5}\left\{\cos^4 x + \frac{4}{3}\cos^2 x + \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 1}\right\} + C,$$

$$\int \cos^7 x\,dx = \frac{\sin x}{7}\left\{\cos^6 x + \frac{6}{5}\cos^4 x + \frac{6 \cdot 4}{5 \cdot 3}\cos^2 x + \frac{6 \cdot 4 \cdot 2}{5 \cdot 3 \cdot 1}\right\} + C,$$

. . . .

7. Całki kształtu $J_m = \int \operatorname{tang}^m x\,dx$. Całki te należą również do całek k $J_{s,k} = \int \sin^s x \cos^k x\,dx$. Mianowicie otrzymujemy:

$$\int \operatorname{tang}^m x\,dx = \int \frac{\sin^m x}{\cos^m x}\,dx = \int \sin^m x \cos^{-m} x\,dx = J_{m,\,-m},$$

a zatem na mocy II. wzoru redukcyjnego:

$$J_{s,k} = -\frac{\sin^{s-1} x \cos^{k+1} x}{k+1} + \frac{s-1}{k+1} J_{s-2,\,m+2},$$

dostajemy wzór:

$$J_{m,\,-m} = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{-m+1} x}{-m+1} + \frac{m-1}{-m+1} J_{m-2,\,-m+2},$$

czyli wzór redukcyjny całki: $J_m = \int \operatorname{tang}^m x\,dx$, w postaci:

$$\int \operatorname{tang}^m x\,dx = \frac{\sin^{m-1} x}{(m-1)\cos^{m-1} x} - \int \operatorname{tang}^{m-2} x\,dx,$$

czyli:

$$\int \operatorname{tang}^m x\,dx = \frac{1}{m-1}\operatorname{tang}^{m-1} x - \int \operatorname{tang}^{m-2} x\,dx.$$

Z tego wzoru redukcyjnego otrzymujemy:

a) dla parzystego $m=2r$ kolejno:

$$\int \operatorname{tang}^{2r} x dx = \frac{\operatorname{tang}^{2r-1} x}{2r-1} - \int \operatorname{tang}^{2r-2} x dx,$$

$$\int \operatorname{tang}^{2r-2} x dx = \frac{\operatorname{tang}^{2r-3} x}{2r-3} - \int \operatorname{tang}^{2r-4} x\, dx,$$

. . . .

$$\int \operatorname{tang}^2 x\, dx = \operatorname{tang} x - x + C,$$

zatem wzór bezpośredni:

$$\int \operatorname{tang}^{2r} x dx = \frac{\operatorname{tang}^{2r-1} x}{2r-1} - \frac{\operatorname{tang}^{2r-2} x}{2r-2} + \ldots + (-1)^{r+1} \operatorname{tang} x + (-1)^r x + C. \quad (15)$$

b) dla nieparzystego $m=2r+1$, zaś kolejno:

$$\int \operatorname{tang}^{2r+1} x\, dx = \frac{\operatorname{tang}^{2r} x}{2r} - \int \operatorname{tang}^{2r-1} x\, dx,$$

$$\int \operatorname{tang}^{2r-1} x\, dx = \frac{\operatorname{tang}^{2r-2} x}{2r-2} - \int \operatorname{tang}^{2r-3} x\, dx,$$

. . . .

$$\int \operatorname{tang}^3 x\, dx = \frac{\operatorname{tang}^2 x}{2} - \int \operatorname{tang} x\, dx,$$

a że:

$$\int \operatorname{tang} x\, dx = -\log\cos x + C,$$

przeto otrzymujemy wzór bezpośredni w postaci:

$$\int \operatorname{tang}^{2r+1} x\, dx = \frac{\operatorname{tang}^{2r} x}{2r} - \frac{\operatorname{tang}^{2r-2} x}{2r-2} + \ldots + (-1)^{r+1} \frac{\operatorname{tang}^2 x}{2} + (-1)^r \log\cos x + C. \quad (16)$$

8. **Zastosowania.** Na podstawie wzorów, powyżej wyprowadzonych, otrzymujemy następujące całki:

$$\int \operatorname{tang}^2 x\, dx = \operatorname{tang} x - x + C,$$

$$\int \operatorname{tang}^4 x\, dx = \frac{\operatorname{tang}^3 x}{3} - \operatorname{tang} x + x + C,$$

$$\int \operatorname{tang}^6 x\, dx = \frac{\operatorname{tang}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{tang}^3 x}{3} + \operatorname{tang} x - x + C,$$

$$\int \operatorname{tang}^8 x\, dx = \frac{\operatorname{tang}^7 x}{7} - \frac{\operatorname{tang}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{tang}^3 x}{3} - \operatorname{tang} x + x + C,$$

. . . .

$$\int \operatorname{tang}^3 x\, dx = \frac{\operatorname{tang}^2 x}{2} - \log\cos x + C,$$

$$\int \operatorname{tang}^5 x\, dx = \frac{\operatorname{tang}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tang}^2 x}{2} + \log\cos x + C,$$

$$\int \operatorname{tang}^7 x\, dx = \frac{\operatorname{tang}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{tang}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{tang}^2 x}{2} - \log\cos x + C.$$

. . . . , . . .

9. **Całki kształtu:** $J_n = \int \frac{dx}{\operatorname{tang}^n x}$ należą również do całek kształtu: $J_{s,k} = \int \sin^s x \cos^k x dx$, jest bowiem:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{tang}^n x} = \int \frac{\cos^n x\, dx}{\sin^n x} = \int \sin^{-n} x \cos^n x dx = J_{-n,\,n}.$$

Dla całek tego kształtu otrzymujemy wprost, lub na mocy I. wzoru redukcyjnego odnośny wzór redukcyjny, w postaci:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{tang}^n x} = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{\operatorname{tang}^{n-1} x} - \int \frac{dx}{\operatorname{tang}^{n-2} x}.$$

Z wzoru tego otrzymujemy:

a) dla parzystego $n=2r$, wzór redukcyjny:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{tang}^{2r} x} = -\frac{1}{2r-1} \cdot \frac{1}{\operatorname{tang}^{2r-1} x} - \int \frac{dx}{\operatorname{tang}^{2r-2} x},$$

a stąd wzór bezpośredni:

$$\int\frac{dx}{\mathrm{tang}^{2r}x}=-\frac{\mathrm{cotg}^{2r-1}x}{2r-1}+\frac{\mathrm{cotg}^{2r-3}x}{2r-3}+\ldots+(-1)^r\mathrm{cotg}\,x+(-1)^r x+C; \tag{17}$$

b) dla nieparzystego $n=2r+1$, wzór redukcyjny:

$$\int\frac{dx}{\mathrm{tang}^{2r+1}x}=-\frac{1}{2r}\cdot\frac{1}{\mathrm{tang}^{2r}x}-\int\frac{dx}{\mathrm{tang}^{2r-1}x},$$

a stąd wzór bezpośredni:

$$\int\frac{dx}{\mathrm{tang}^{2r+1}x}=-\frac{\mathrm{cotg}^{2r}x}{2r}+\frac{\mathrm{cotg}^{2r-2}x}{2r-2}-\ldots+(-1)^r\frac{\mathrm{cotg}^2x}{2}+(-1)^r\log\sin x+C. \tag{18}$$

10. Wyznaczanie całek $J_{s,k}$ za pomocą podstawień. Całki kształtu:

$$J_{s,k}=\int\sin^s x\cos^k x\,dx,$$

dadzą się za pomocą podstawień sprowadzić do całek funkcyj algebraicznych. Uwzględniając wyniki, do których dochodzimy zapomocą wzorów redukcyjnych, możemy odróżnić następujące podstawienia: 1) $\sin x=u$, 2) $\cos x=u$, 3) $\mathrm{tang}\,x=u$, 4) $\mathrm{tang}\frac{1}{2}x=u$, 5) $\mathrm{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=u$, znane u nas pod nazwą „podstawień Żmurkowskich".

1) Kładąc $\sin x=u$, mamy:

$$\cos x=\sqrt{1-u^2},\quad dx=\frac{du}{\sqrt{1-u^2}},$$

otrzymujemy zatem:

$$J_{s,k}=\int\sin^s x\cos^k x\,dx=\int u^s(1-u^2)^{\frac{k-1}{2}}du, \tag{19}$$

a więc wprost całkę funkcyi algebraicznej, całkowitej (wymiernej, lub niewymiernej), gdy wynik k jest liczbą nieparzystą dodatnią.

2) Kładąc $\cos x=u$, otrzymujemy:

$$\sin x=\sqrt{1-u^2},\quad dx=-\frac{du}{\sqrt{1-u^2}},$$

zatem:

$$J_{s,k}=\int\sin^s x\cos^k x\,dx=-\int u^k(1-u^2)^{\frac{s-1}{2}}du, \tag{20}$$

a więc wprost całkę funkcyi algebraicznej, całkowitej (wymiernej, lub nie wymiernej), gdy wykładnik s jest liczbą nieparzystą dodatnią.

3) Kładąc $\mathrm{tang}\,x=u$, mamy:

$$\frac{\sin x}{u}=\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}},$$

a więc:
$$\sin x=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}},\quad \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}},$$

wreszcie:
$$d\,\mathrm{tang}\,x=\frac{dx}{\cos^2x}=du,\ \text{przeto}\ dx=\frac{du}{1+u^2}.$$

Otrzymujemy zatem:

$$J_{sk}=\int\sin^s x\cos^k x\,dx=\int\frac{u^s\,du}{(1+u^2)^{\frac{s+k}{2}+1}}, \tag{21}$$

a więc wprost całkę funkcyi całkowitej, gdy suma $s+k$ jest liczbą parzystą ujemną.

Kładąc $\tan g\frac{1}{2}x=u$, mamy:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}x}{u}=\frac{\cos\frac{1}{2}x}{1}=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}},$$

$$\sin\frac{1}{2}x=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}},\quad \cos\frac{1}{2}x=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}},$$

ając na uwadze, że:

$$\sin x=2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x,$$

$$\cos x=\cos^2\frac{1}{2}x-\sin^2\frac{1}{2}x,$$

jemy:

$$\sin x=\frac{2u}{1+u^2},\quad \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

y nadto $d\tan g\frac{1}{2}x=\frac{{}^1/_2 dx}{\cos^2\frac{1}{2}x}=du$, a więc $dx=\frac{2du}{1+u^2}$, przeto otrzy-

:

$$J_{s,k}=\int\sin^s x\cos^k x dx=2^{s+1}\int\frac{u^s(1-u^2)^k}{(1+u^2)^{s+k+1}}du, \tag{22}$$

wprost całkę funkcyi wymiernej, całkowitej, gdy wykładnik k jest ałkowitą, dodatnią, a suma $s+k$ liczbą całkowitą, ujemną.

Kładąc $\tan g\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=u$, mamy:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{u}=\frac{\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1}=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}},$$

$$\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}},\quad \cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}},$$

e względu na to, że:

$$\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

$$\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

my:

$$\sin x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\quad \cos x=\frac{2u}{1+u^2}.$$

dy nadto $d\tan g\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\frac{1}{2}\frac{dx}{\cos^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=du$,

::

$$dx=-\frac{2du}{1+u^2},$$

otrzymujemy:

$$J_{s,k}=\int\sin^s x\cos^k x\,dx=-2^{k+1}\int\frac{u^k(1-u^2)^s}{(1+u^2)^{s+k+1}}du, \tag{23}$$

a więc całkę funkcyi wymiernej, całkowitej, gdy wykładnik s jest liczb całkowitą, dodatnią, a suma $s+k$ liczbą całkowitą, ujemną.

11. Ograniczając się na wykładnikach całkowitych s i k, musimy jeszcz rozważyć trzy przypadki, w których żadne z powyższych pięciu podstawie nie prowadzi do pożądanego celu, a to 1) gdy oba wykładniki s i k s ujemne, a ich suma jest liczbą ujemną, nieparzystą, 2) gdy jeden wykładni jest dodatni i parzysty, a drugi ujemny, ale suma ich dodatnią, 3) gdy ob wykładniki s i k są dodatnie, a ich suma liczbą dodatnią, parzystą.

1) W pierwszym przypadku mamy całkę kształtu:

$$J=\int\frac{dx}{\sin^m x\cos^{2r+1-m}x},$$

gdzie liczby m i r są całkowite dodatnie.

Mnożąc w tym przypadku licznik przez $1=(\cos^2 x+\sin^2 x)^r$, otrzymujemy daną całkę w postaci:

$$J=\int\frac{(\cos^2 x+\sin^2 x)^r}{\sin^m x\cos^{2r+1-m}x}dx=\int\sum_{n=0}^{n=r}\binom{r}{n}\frac{\cos^{2r-2n}x\sin^{2n}x}{\sin^m x\cos^{2r+1-m}x}dx, \tag{24}$$

a więc w postaci sumy $(r+1)$ całek, z których każda, wobec tego, że suma wykładników przy $\cos x$ i $\sin x$ będzie równa -1, za pomocą jednego z podstawień: $\operatorname{tang}\frac{1}{2}x=u$, lub $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=u$, da się sprowadzić do całki funkcyi wymiernej, całkowitej.

2) Jeżeli z obu wykładników s i k jest jeden dodatni, a drugi ujemny, ale tak, że suma ich jest dodatnią, przyczem wykładnik dodatni, jest zarazem parzysty, wówczas możemy, korzystając z relacyi: $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, uwolnić się od jednej z tych funkcyj.

Otrzymamy mianowicie:

$$\begin{aligned}\int\frac{\sin^{2r}x\,dx}{\cos^{2r-m}x}&=\int\frac{(1-\cos^2 x)^r\,dx}{\cos^{2r-m}x},\\ \int\frac{\cos^{2r}x\,dx}{\sin^{2r-m}x}&=\int\frac{(1-\sin^2 x)^r\,dx}{\sin^{2r-m}x},\end{aligned} \tag{25}$$

a więc całki, do których możemy zastosować podstawienia powyżej wskazane.

3) W trzecim pozostałym przypadku mamy całkę kształtu:

$$J_{s,k}=\int\sin^s x\cos^k x\,dx,$$

gdzie wykładniki s i k są liczbami dodatniemi i parzystemi.

W tym przypadku możemy iloczyn $P=\sin^s x\cos^k x$, rozłożyć na dodajniki.

12. Rozkładanie iloczynu $\sin^s x\cos^k x$ na dodajniki. Połóżmy w tym celu:

$$\cos x+i\sin x=e^{xi}=1_x=u^1,$$
$$\cos x+i\sin x=e_{-xi}=1_{-x}=u^{-1},$$

a zatem:

$$\cos x=\frac{u^1+u^{-1}}{2},\quad \sin x=\frac{u^1-u^{-1}}{2i},$$

a sprowadzimy iloczyn $P=\sin^s x\cos^k x$ do postaci:

$$P=\sin^s x\cos^k x=\frac{(u^1-u^{-1})^s(u^1+u^{-1})^k}{2^{s+k}i^s}.$$

Wykonawszy wskazane mnożenia, otrzymujemy iloczyn:

$$P=\frac{A_1u^{\alpha_1}+A_2u^{\alpha_2}+\ldots+B_1u^{-\beta_1}+B_2u^{-\beta_2}+\ldots}{2^{s+k}i^s}. \tag{a}$$

Jeżeli w iloczynie P zastąpimy u^1 przez u^{-1}, natenczas otrzymamy jako wartość iloczynu: $\frac{P}{(-1)^s}$ jest zatem:

$$P=(-1)^s \frac{A_1 u^{-\alpha_1}+A_2 u^{-\alpha_2}+\ldots+B_1 u^{\beta_1}+B_2 u^{\beta_2}+\ldots}{2^{s+k} i^s}. \qquad (b)$$

Aby wyrażenia (a) i (b) były tożsamościowe, musi być:

$$A_1 u^{\alpha_1} = (-1)^s B_1 u^{\beta_1},$$

przeto:

$$A_1=(-1)^s B_1, \text{ zaś } \alpha_1=\beta_1.$$

Wobec tego, otrzymamy dany iloczyn w postaci:

$$P=\frac{\Sigma A_r[u^{\alpha_r}+(-1)^s u^{-\alpha_r}]}{2^{s+k} i^s},$$

a więc w przypadku, gdy wykładnik s jest liczbą parzystą, w postaci:

$$P=\frac{\Sigma A_r(u^{\alpha_r}+u^{-\alpha_r})}{2^{s+k}(-1)^{\frac{s}{2}}} \qquad (\alpha)$$

a w przypadku, gdy wykładnik s jest liczbą nieparzystą w postaci:

$$P=\frac{\Sigma A_r(u^{\alpha_r}-u^{-\alpha_r})}{2^{s+k}(-1)^{\frac{s}{2}}}. \qquad (\beta)$$

Mając na uwadze, że wobec:

$$\cos ax+i\sin ax=e^{axi}=1_{ax}=u^{\alpha},$$
$$\cos ax-i\sin ax=e^{-axi}=1_{-ax}=u^{-\alpha},$$

mamy:

$$u^{\alpha}+u^{-\alpha}=2\cos ax, \text{ zaś } u^{\alpha}-u^{-\alpha}=2i\sin ax,$$

otrzymujemy zatem iloczyn P, w przypadku parzystego s w postaci:

$$P=\sin^s x\cos^k x=\frac{\Sigma 2A_r\cos\alpha_r x}{2^{s+k}(-1)^{\frac{s}{2}}}, \qquad (26)$$

w przypadku nieparzystego s w postaci:

$$P=\sin^s x\cos^k x=\frac{\Sigma 2A_r\sin\alpha_r x}{2^{s+k}(-1)^{\frac{s-1}{2}}}. \qquad (27)$$

Iloczyn $P=\sin^s x\cos^k x$ da się więc w przypadku, gdy wykładniki s i k są liczbami całkowitemi, przedstawić, jako suma cos, lub sin wielokrotności, zmiennej x, stosownie do tego, czy s liczbą parzystą, czy też nieparzystą.

Całka kształtu $J_{s,k}$ rozpada się w tym przypadku na całki kształtu:

$$\int\cos mx\,dx=\frac{\sin mx}{m}+C,$$

$$\int\sin mx\,dx=-\frac{\cos mx}{m}+C.$$

13. Prawidła Żmurki. Z powyższych wywodów wypływają następujące prawidła praktyczne, dotyczące wyznaczania całek kształtu:

$$J_{s,k}=\int\sin^s x\cos^k x\,dx,$$

zwane u nas powszechnie prawidłami Żmurki.

Pierwsze prawidło: Jeżeli wykładnik przy $\cos x$ jest liczbą nieparzystą, a więc $k=2r+1$, podstawiamy $\sin x=u$.

Drugie prawidło: Jeżeli wykładnik x przy $\sin x$ jest liczbą nieparzystą, a więc $s=2r+1$, podstawiamy $\cos x=u$.

Trzecie prawidło: Jeżeli suma wykładników przy $\sin x$ i $\cos x$ jest liczbą parzystą, ujemną, a więc $s+k=-2r$, podstawiamy $\operatorname{tang} x=u$.

Czwarte prawidło: Jeżeli wykładniki przy $\sin x$ i $\cos x$ są liczbami całkowitemi, ale znaków przeciwnych, przyczem suma tych wykładników jest liczbą ujemną, a więc, gdy $s+k=-r$, natenczas używamy podstawienia $\operatorname{tang}\frac{1}{2}x=u$, gdy wykładnik k przy $\cos x$ jest liczbą dodatnią, a podstawienia $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=u$, gdy wykładnik s przy $\sin x$ jest liczbą dodatnią.

Piąte prawidło. Jeżeli oba wykładniki przy $\sin x$ i $\cos x$ są ujemne, a ich suma jest liczbą nieparzystą, a więc $(s+k)=-(2r+1)$, natenczas mnożymy licznik przez $1=(\cos^2 x+\sin^2 x)^r$ i rozkładamy całkę na szereg całek, do których możemy zastosować czwarte prawidło.

Szóste prawidło. Jeżeli z obu wykładników przy $\sin x$ i $\cos x$ jeden jest dodatni, a drugi ujemny, jednakże tak, że suma obu wykładników jest dodatnią, a przytem wykładnik dodatni jest liczbą parzystą, natenczas, zapomocą relacyi $\cos^2 x+\sin^2 x=1$, uwalniamy się od jednej z tych funkcyi, mianowicie tej, która występuje w liczniku, a otrzymujemy tym sposobem szereg całek, do których dadzą się zastosować poprzednie prawidła.

Siódme prawidło. Jeżeli wykładniki przy $\sin x$ i $\cos x$ są liczbami całkowitemi, dodatniemi, natenczas rozkładamy wpierw iloczyn $\sin^s x\cos^k x$ za pomocą podstawienia $\cos x+i\sin x=u$ na sumę złożoną z sinusów, lub cosinusów wielokrotności zmiennej x.

Na mocy tych prawideł możemy całkę $J_{s,k}=\int\sin^s x\cos^k x dx$ przy wykładnikach całkowitych, dodatnich, lub ujemnych zawsze wyznaczyć, a przy wykładnikach ułamkowych tylko w tych przypadkach, w których stanie się zadość jednemu z wymaganych warunków całkowalności.

14. Przykłady wyznaczania całek $J_{s,k}$ za pomocą prawideł Żmurki.

1) Wyznaczyć całkę $J=\int\cos^5 x\sin^2 x\,dx$. Mamy tu $k=5$, użyjemy więc podstawienia $\sin x=u$, a otrzymamy:

$$\int\cos^5 x\sin^2 x\,dx=\int(1-u^2)^2u^2du=\frac{u^3}{3}-\frac{2u^5}{5}+\frac{u^7}{7}+C,$$

zatem:

$$\int\cos^5 x\sin^2 dx=\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{2\sin^5 x}{5}+\frac{\sin^7 x}{7}+C.$$

2) Wyznaczyć całkę $J=\int\cos^4 x\sin^5 x\,dx$. Mamy tu $s=5$, podstawimy zatem $\cos x=u$, a otrzymamy:

$$J=-\int u^4(1-u^2)^2du=-\left[\frac{u^5}{5}-\frac{2u^7}{7}+\frac{u^9}{9}\right]+C,$$

zatem:

$$\int\cos^4 x\sin^5 x\,dx=C-\frac{\cos^5 x}{5}+\frac{2\cos^7 x}{7}-\frac{\cos^9 x}{9}+C.$$

3) Wyznaczyć całkę $J=\int\frac{dx}{\cos^6 x}$. Mamy tu: $s+k=-6$, podstawimy zatem $\operatorname{tang} x=u$, a więc $\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$, $dx=\frac{du}{1+u^2}$, a otrzymamy:

$$J=\int(1+u^2)^2du=u+\frac{2}{3}u^3+\frac{u^5}{5}+C,$$

zatem:

$$\int\frac{dx}{\cos^6 x}=\operatorname{tang} x+\frac{2}{3}\operatorname{tang}^3 x+\frac{1}{5}\operatorname{tang}^5 x+C.$$

4) Wyznaczyć całkę $J=\int\frac{dx}{\sin^5 x}$. Mamy tu $s+k=-5$, $k=0$, podstawiamy zatem według czwartego prawidła:

$$\operatorname{tang}\frac{x}{2}=u,\ \text{a więc: } \sin x=\frac{2u}{1+u^2},\quad dx=\frac{2du}{1+u^2}.$$

Wskutek tego otrzymujemy:

$$\int\frac{dx}{\sin^5 x}=\frac{1}{2^4}\int\frac{(1+u^2)^4\,du}{u^5}=\frac{1}{16}\int(u^{-5}+4u^{-3}+6u^{-1}+4u+u^3)\,du=$$

$$=\frac{1}{16}\left\{-\frac{u^{-4}}{4}-2u^{-2}+6\log u+2u^2+\frac{u^4}{4}\right\}+C,$$

zatem:

$$\int\frac{dx}{\sin^5 x}=\frac{1}{16}\left\{-\frac{1}{4\operatorname{tang}^4\frac{x}{2}}-\frac{2}{\operatorname{tang}^2\frac{x}{2}}+6\log\operatorname{tang}\frac{x}{2}+2\operatorname{tang}^2\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tang}^4\frac{x}{2}\right\}.$$

5) Wyznaczyć całkę $J=\int\frac{dx}{\cos^3 x}$. Mamy tu $s+k=-3$, $s=0$, podstawiamy zatem według czwartego prawidła:

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=u,\ \text{a więc: } \cos x=\frac{2u}{1+u^2},\quad dx=-\frac{2du}{1+u^2}.$$

Otrzymujemy tedy:

$$\int\frac{dx}{\cos^3 x}=-\frac{1}{4}\int\frac{(1+u^2)^2\,du}{u^3}=-\frac{1}{4}\int\left\{u^{-3}+2u^{-1}+u\right\}du=$$

$$=-\frac{1}{4}\left\{\frac{u^{-2}}{-2}+2\log u+\frac{u^2}{2}\right\}+C,$$

czyli:

$$\int\frac{dx}{\cos^3 x}=-\frac{1}{4}\left\{-\frac{1}{2\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+\right.$$

$$\left.+2\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\frac{\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2}\right\}+C,$$

przyczem możemy wynik przekształcić na podstawie relacyi:

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sec x-\operatorname{tang}x,\qquad \frac{1}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\sec x+\operatorname{tang}x,$$

mogąc otrzymać w rozwiązaniu funkcye goniometryczne samej zmiennej x.

6) Wyznaczyć całkę $J=\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^3 x}$. Mamy tu $s+k=-5$, przyczem $s=-2$, $k=-3$, pomnożymy zatem, w myśl piątego prawidła Żmurki, licznik danej różniczki przez:

$$1=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2,$$

a otrzymamy:

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^3 x}=\int\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2\,dx}{\sin^2 x\cos^3 x}=\int\frac{\sin^2 x\,dx}{\cos^3 x}+2\int\frac{dx}{\cos x}+\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}.$$

Z otrzymanych trzech całek, wyznaczamy pierwsze dwie za pomocą podstawienia $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=u$, otrzymujemy tedy najpierw:

$$\int\frac{\sin^2 x\,dx}{\cos^3 x}=-\frac{1}{4}\int\frac{(1-u^2)^2}{u^3}\,du=-\frac{1}{4}\left\{\frac{u^{-2}}{-2}-2\log u+\frac{u^2}{2}\right\},$$

zatem:

$$\int\frac{\sin^2 x\,dx}{\cos^3 x}=\frac{1}{8\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+\frac{1}{2}\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\frac{1}{8}\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

następnie:

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{du}{u}=-\log u=-\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

ostatnią całkę wyznaczamy za pomocą podstawienia $\sin x=u$, w postaci:

$$\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}=\int\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{u}=-\frac{1}{\sin x}=-\operatorname{cosec} x,$$

przeto, otrzymujemy ostatecznie:

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^3 x}=\frac{1}{8}\,\frac{1}{\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}-\frac{1}{8}\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-$$

$$-\frac{3}{2}\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\operatorname{cosec} x+C.$$

7) Wyznaczyć całkę $J=\int\frac{\cos^4 x}{\sin x}dx$. Mamy tu $s+k=3$, $s=-1$, $k=4$. Kładąc zatem: $\cos^4 x=(1-\sin^2 x)^2$, otrzymujemy:

$$\int\frac{\cos^4 x}{\sin x}dx=\int\frac{(1-\sin^2 x)^2}{\sin x}dx=\int\frac{dx}{\sin x}-2\int\sin x\,dx+\int\sin^3 x\,dx,$$

a że:

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\log\operatorname{tang}\frac{x}{2},$$

$$\int\sin x\,dx=-\cos x,\quad \int\sin^3 x\,dx=-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3},$$

przeto, otrzymujemy ostatecznie:

$$\int\frac{\cos^4 x\,dx}{\sin x}=\log\operatorname{tang}\frac{x}{2}+\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+C.$$

8) Wyznaczyć całkę $J=\int\sin^2 x\cos^4 x\,dx$. Kładąc $\sin x=\frac{u^1-u^{-1}}{2i}$, $\cos x=\frac{u^1+u^{-1}}{2}$, otrzymujemy:

$$\sin^2 x\cos^4 x=\frac{(u^1-u^{-1})^2(u^1+u^{-1})^4}{2^6 i^2}=-\frac{1}{64}(u^2-2+u^{-2})(u^4+4u^2+6+4u^{-2}+u^{-4})=$$

$$=-\frac{1}{64}\{u^6+2u^4-u^2-12-u^{-2}+2u^{-4}+u^{-6}\}=-\frac{1}{64}\{2\cos 6x+4\cos 4x-2\cos 2x-12\}=$$

$$=-\frac{1}{32}\{\cos 6x+2\cos 4x-\cos 2x-6\}.$$

przeto:

$$\int\sin^2 x\cos^4 x\,dx=-\frac{1}{32}\int(\cos 6x+2\cos 4x-\cos 2x-6)\,dx,$$

a więc:

$$\int\sin^2 x\cos^4 x\,dx=-\frac{1}{32}\left\{\frac{\sin 6x}{6}+\frac{\sin 4x}{2}-\frac{\sin 2x}{2}-6x\right\}+C.$$

15. Wzory, rozkładające funkcye goniometryczne $\sin^s x$ i $\cos^k x$ na dodajniki. Kładąc $\cos x+i\sin x=u^1$, $\cos x-i\sin x=u^{-1}$, a więc:

$$\cos x=\frac{u^1+u^{-1}}{2},\quad \sin x=\frac{u^1-u^{-1}}{2i},\quad \text{gdzie } u=e^{xi},$$

(porównaj Tom I. str. 594.), otrzymujemy:

$$\sin^s x=\frac{(u^1-u^{-1})^s}{2^s i^s}=\frac{1}{2^s i^s}\left[u^s-\binom{s}{1}u^{s-2}+\binom{s}{2}u^{s-4}-\ldots+(-1)^r\binom{s}{r}u^{s-2r}+\ldots+(-1)^s u^{-s}\right],$$

$$\cos^k x=\frac{(u^1+u^{-1})^k}{2^k}=\frac{1}{2^k}\left[u^k+\binom{k}{1}u^{k-2}+\ldots+\binom{k}{r}u^{k-2r}+\ldots+u^{-k}\right],$$

czyli:

$$\sin^s x=\frac{1}{2^s i^s}\sum_{r=0}^{r=s}(-1)^r\binom{s}{r}u^{s-2r};\quad \cos^k x=\frac{1}{2^k}\sum_{r=0}^{r=k}\binom{k}{r}u^{k-2r}.$$

Dla parzystego $s=2n$ będzie zatem:

a) $$\sin^{2n} x=\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\left\{[u^{2n}+u^{-2n}]-\binom{2n}{1}[u^{2n-2}+u^{-(2n-2)}]+\ldots+\right.$$

$$\left.+(-1)^r\binom{2n}{r}[u^{2n-2r}+u^{-(2n-2r)}]+\ldots+(-1)^{n-1}\binom{2n}{n-1}[u^2+u^{-2}]\right\}+\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n},\quad \text{czyli:}$$

$$\sin^{2n}x=\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\sum_{r=0}^{r=n}(-1)^r\binom{2n}{r}[u^{2n-2r}+u^{-(2n-2r)}]+\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n},$$

dla nieparzystego $s=2n+1$, będzie zaś:

$$b)\ \sin^{2n+1}x=\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}i}\Big\{[u^{2n+1}-u^{-(2n+1)}]-\binom{2n+1}{1}[u^{2n-1}-u^{-(2n-1)}]+\ldots+$$

$$+(-1)^r\binom{2n+1}{r}[u^{2n+1-2r}-u^{-(2n+1-2r)}]+\ldots+(-1)^n\binom{2n+1}{n}[u^1-u^{-1}]\Big\},$$

czyli:

$$\sin^{2n+1}x=\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}i}\sum_{r=0}^{r=n}(-1)^r\binom{2n+1}{r}[u^{2n+1-2r}-u^{-(2n+1-2r)}].$$

Podobnie otrzymamy dla parzystego $k=2n$:

$$c)\qquad \cos^{2n}x=\frac{1}{2^{2n}}\Big\{[u^{2n}+u^{-2n}]+\binom{2n}{1}[u^{2n-2}+u^{-(2n-2)}]+\ldots+$$

$$+\binom{2n}{r}[u^{2n-2r}+u^{-(2n-2r)}]+\ldots+\binom{2n}{n-1}[u^2+u^{-2}]\Big\}+\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n},$$

czyli:

$$\cos^{2n}x=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{r=0}^{r=n-1}\binom{2n}{r}[u^{2n-2r}+u^{-(2n-2r)}]+\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n},$$

dla nieparzystego $k=2n+1$, zaś:

$$d)\quad \cos^{2n+1}x=\frac{1}{2^{2n+1}}\Big\{[u^{2n+1}+u^{-(2n+1)}]+\binom{2n+1}{1}[u^{2n-1}+u^{-(2n-1)}]+$$

$$+\ldots+\binom{2n+1}{r}[u^{2n+1-2r}+u^{-(2n+1-2r)}]+\ldots+\binom{2n+1}{n}[u^1+u^{-1}],$$

czyli:

$$\cos^{2n+1}x=\frac{1}{2^{2n+1}}\sum_{r=0}^{r=n}\binom{2n+1}{r}[u^{2n+1-2r}+u^{-(2n+1-2r)}].$$

Na mocy wzoru Moivre'a [Tom I. str. 139.] mamy:

$$u^n=(\cos x+i\sin x)^n=\cos nx+i\sin nx,$$

zatem:

$$u^n+u^{-n}=2\cos nx,\ u^n-u^{-n}=2i\sin nx.$$

Wobec tego otrzymujemy następujące wzory, rozkładające funkcye: $\sin^k x$ i $\cos^k x$, na dodajniki:

$$\alpha)\qquad \sin^{2n}x=\frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\Big\{\cos 2nx-\binom{2n}{1}\cos(2n-2)x+\ldots+$$

$$+(-1)^r\binom{2n}{r}\cos(2n-2r)x+\ldots(-1)^{n-1}\binom{2n}{2n-1}\cos 2x\Big\}+\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n},$$

czyli:

$$\sin^{2n}x=\frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\sum_{r=0}^{r=n-1}(-1)^r\binom{2n}{r}\cos(2n-2r)x+\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n};\qquad(28)$$

$$\beta)\quad \sin^{2n+1}x=\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\Big\{\sin(2n+1)x-\binom{2n+1}{1}\sin(2n-1)x+\ldots+$$

$$+(-1)^r\binom{2n+1}{r}\sin(2n+1-2r)x+\ldots+(-1)^n\binom{2n+1}{n}\sin x\Big\},$$

czyli:

$$\sin^{2n+1}x = \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\sum_{r=0}^{r=n}(-1)^r\binom{2n+1}{r}\sin(2n+1-2r)x; \tag{29}$$

następnie:

γ)
$$\cos^{2n}x = \frac{1}{2^{2n-1}}\left\{\cos 2nx + \binom{2n}{1}\cos(2n-2)x + \ldots + \right.$$
$$\left. + \binom{2n}{r}\cos(2n-2r)x + \binom{2n}{n-1}\cos 2x\right\} + \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n},$$

czyli:

$$\cos^{2n}x = \frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{r=0}^{r=n-1}\binom{2n}{r}\cos(2n-2r)x + \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}, \tag{30}$$

δ)
$$\cos^{2n+1}x = \frac{1}{2^{2n}}\left\{\cos(2n+1)x + \binom{2n+1}{1}\cos(2n-1)x + \ldots + \right.$$
$$\left. + \binom{2n+1}{r}\cos(2n+1-2r)x + \ldots + \binom{2n+1}{n}\cos x\right\},$$

czyli:

$$\cos^{2n+1}x = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{r=0}^{r=n}\binom{2n+1}{r}\cos(2n+1-2r)x. \tag{31}$$

Stąd wniosek:

Parzyste potęgi funkcyi $\sin x$ dadzą się rozłożyć na sumę cosinusów parzystych wielokrotności, zaś nieparzyste potęgi funkcyi $\sin x$ na sumę sinusów nieparzystych wielokrotności zmiennej x, opatrzonych pewnymi spółczynnikami, mającymi znaki, naprzemian dodatnie i ujemne, natomiast parzyste potęgi funkcyi $\cos x$ dadzą się rozłożyć na sumę cosinusów parzystych, a nieparzyste potęgi na sumę cosinusów nieparzystych wielokrotności zmiennej x, opatrzonych pewnymi spółczynnikami, stale dodatnimi.

16. Wzory szczególne. Z powyższych wzorów ogólnych, otrzymujemy następujące wzory szczególne:

$$\sin^2 x = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2},$$

$$\sin^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8},$$

$$\sin^6 x = -\frac{1}{32}\cos 6x + \frac{3}{16}\cos 4x - \frac{15}{32}\cos 2x + \frac{5}{16},$$

$$\sin^8 x = \frac{1}{128}\cos 8x - \frac{1}{16}\cos 6x + \frac{7}{32}\cos 4x - \frac{7}{16}\cos 2x + \frac{35}{128},$$

. . . .

$$\sin^3 x = -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x,$$

$$\sin^5 x = \frac{1}{16}\sin 5x - \frac{5}{16}\sin 3x + \frac{5}{8}\sin x,$$

$$\sin^7 x = -\frac{1}{64}\sin 7x + \frac{7}{64}\sin 5x - \frac{21}{64}\sin 3x + \frac{35}{64}\sin x,$$

. . . .

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2},$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8},$$

$$\cos^6 x=\frac{1}{32}\cos 6x+\frac{3}{16}\cos 4x+\frac{15}{32}\cos 2x+\frac{5}{16},$$

$$\cos^8 x=\frac{1}{128}\cos 8x+\frac{1}{16}\cos 6x+\frac{7}{32}\cos 4x+\frac{7}{16}\cos 2x+\frac{35}{128},$$

. . . .

$$\cos^3 x=\frac{1}{4}\cos 3x+\frac{3}{4}\cos x,$$

$$\cos^5 x=\frac{1}{16}\cos 5x+\frac{5}{16}\cos 3x+\frac{5}{8}\cos x,$$

$$\cos^7 x=\frac{1}{64}\cos 7x+\frac{7}{64}\cos 5x+\frac{21}{64}\cos 3x+\frac{35}{64}\cos x,$$

. . . .

17. Całki $J_{s,0}=\int \sin^s x\,dx$, $J_{0,k}=\int \cos^k x\,dx$, wyznaczone zapomocą rozkładania funkcyj $\sin^s x$ i $\cos^k x$ na dodajniki. Na podstawie wzorów rozkładających funkcye goniometryczne $\sin^s x$ i $\cos^k x$ na dodajniki, otrzymujemy wprost następujące wzory całkowe:

$$1)\quad \int \sin^{2n} x\,dx=\frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\sum_{r=0}^{r=n-1}(-1)^r\binom{2n}{r}\frac{\sin(2n-2r)x}{2n-2r}+\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}x+C.$$

$$2)\quad \int \sin^{2n+1} x\,dx=\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}}\sum_{r=0}^{r=n}(-1)^r\binom{2n+1}{r}\frac{\cos(2n+1-2r)x}{2n+1-2r}+C.$$

$$3)\quad \int \cos^{2n} x\,dx=\frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{r=0}^{r=n-1}\binom{2n}{r}\frac{\sin(2n-2r)x}{2n-2r}+\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}x+C.$$

$$4)\quad \int \cos^{2n+1} x\,dx=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{r=0}^{r=n}\binom{2n+1}{r}\frac{\sin(2n+1-2r)x}{2n+1-2r}+C.$$

18. W szczególności, otrzymujemy stąd:

$$\int \sin^2 x dx=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2x}{2}+\frac{1}{2^2}\binom{2}{1}x+C.$$

$$\int \sin^4 x dx=\frac{1}{2^3}\left\{\frac{\sin 4x}{4}-\binom{4}{1}\frac{\sin 2x}{2}\right\}+\frac{1}{2^4}\cdot\binom{4}{2}x+C.$$

$$\int \sin^6 x dx=-\frac{1}{2^5}\left\{\frac{\sin 6x}{6}-\binom{6}{1}\frac{\sin 4x}{4}+\binom{6}{2}\frac{\sin 2x}{2}\right\}+\frac{1}{2^6}\binom{6}{3}x+C.$$

. . . .

$$\int \sin^3 x dx=\frac{1}{2^2}\left\{\frac{\cos 3x}{3}-\binom{3}{1}\frac{\cos x}{1}\right\}+C.$$

$$\int \sin^5 x dx=-\frac{1}{2^4}\left\{\frac{\cos 5x}{5}-\binom{5}{1}\frac{\cos 3x}{3}+\binom{5}{2}\frac{\cos x}{1}\right\}+C.$$

$$\int \sin^7 x dx=\frac{1}{2^6}\left\{\frac{\cos 7x}{7}-\binom{7}{1}\frac{\cos 5x}{5}+\binom{7}{2}\frac{\cos 3x}{3}-\binom{7}{3}\cos x\right\}+C.$$

. . . .

$$\int \cos^2 x dx=\frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2}+\frac{1}{2^2}\binom{2}{1}x+C,$$

$$\int \cos^4 x dx=\frac{1}{2^3}\left\{\frac{\sin 4x}{4}+\binom{4}{1}\frac{\sin 2x}{2}\right\}+\frac{1}{2^4}\binom{4}{2}x+C,$$

$$\int \cos^6 x dx=\frac{1}{2^5}\left\{\frac{\sin 6x}{6}+\binom{6}{1}\frac{\sin 4x}{4}+\binom{6}{2}\frac{\sin 2x}{2}\right\}+\frac{1}{2^6}\binom{6}{3}x+C,$$

. . . .

$$\int \cos^3 x dx = \frac{1}{2^2}\left\{\frac{\sin 3x}{3} + \binom{3}{1}\sin x\right\} + C.$$

$$\int \cos^5 x dx = \frac{1}{2^4}\left\{\frac{\sin 5x}{5} + \binom{5}{1}\frac{\sin 3x}{3} + \binom{5}{2}\sin x\right\} + C.$$

$$\int \cos^7 x dx = \frac{1}{2^6}\left\{\frac{\sin 7x}{7} + \binom{7}{1}\frac{\sin 5x}{5} + \binom{7}{2}\frac{\sin 3x}{3} + \binom{7}{3}\sin x\right\} + C.$$

. . . .

19. Całki $J_{s,k}=\int \sin^s x \cos^k x\, dx$ o wykładnikach ułamkowych dadzą się wyrazić przez funkcye znane, tylko pod warunkiem, że, albo:

$$\frac{k+1}{2}, \text{ albo } \frac{s+1}{2}, \text{ albo } \frac{s+1}{2}+\frac{k+1}{2}=\frac{s+k}{2}$$

jest liczbą całkowitą (dodatnią, lub ujemną).

Warunki te stanowią t. z. warunki całkowalności całek dwumiennych. (Por. art. 2. str. 106.).

Jeżeli jeden z tych warunków jest spełniony, możemy wyznaczyć odnośną całkę za pomocą jednego z pierwszych trzech prawideł Żmurki.

Mając n. p. wyznaczyć całkę $J=\int \frac{\sin^{1/2} x}{\cos^{5/2} x} dx$, zauważymy, że mamy tu $s+k=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}=-2$, że więc suma wykładników jest liczbę ujemną, parzystą, użyjemy zatem, na podstawie trzeciego prawidła Żmurki, podstawienia:

$$\text{tang}\, x=u, \text{ a więc } \sin x=\frac{u}{\sqrt{u^2+1}},\ \cos x=\frac{1}{\sqrt{u^2+1}},\ dx=\frac{du}{u^2+1}.$$

Otrzymujemy tedy:

$$\int \frac{\sin^{1/2} x dx}{\cos^{5/2} x} = \int \frac{u^{1/2}(u^2+1)^{5/4} . du}{(u^2+1)^{1/4}(u^2+1)} = \int u^{1/2} du = \frac{2}{3} u^{3/2},$$

zatem:

$$\int \frac{\sin^{1/2} x dx}{\cos^{5/2} x} = \frac{2}{3}\, \text{tang}^{3/2} x + C.$$

Jeżeli zaś nie spełnia się żaden z powyższych warunków, wówczas całka: $J_{s,k}=\int \sin^s x \cos^k x\, dx$ nie da się żadnem z powyższych podstawień przekształcić na całkę funkcyi wymiernej, a więc nie da się wyrazić przez funkcye znane. Całki tego rodzaju dadzą się, za pomocą wzorów redukcyjnych, sprowadzić do całek, w których wykładniki s i k będą leżały między granicami -1 i $+1$, a dalsze ich wyznaczanie mogłoby się odbyć za pomocą szeregów.

Za pomocą podstawienia $\sin x=u$ te całki sprowadzają się do całki dwumiennej:

$$J_{s,k}=\int \sin^s x \cos^k x\, dx=\int u^s (1-u^2)^{\frac{k-1}{2}} du,$$

która ostatecznie, wskutek podstawienia $u^2=z$, otrzyma postać:

$$J_{s,k}=\tfrac{1}{2}\int z^{\frac{s-1}{2}} (1-z)^{\frac{k-1}{2}} dz = \int z^p (1-z)^q dz,$$

a więc prowadzi do nowych funkcyj przestępnych, zwanych całkami Eulera (patrz T. II. str. 113. art. 11.).

Ćwiczenia VIII.

Wyprowadzić następujące wzory redukcyjne:

1) $\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x\, dx.$

2) $\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx.$

3) $\int \sin^m x \cos^n x dx = -\frac{1}{m+n} \sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} x \cos^n x\, dx.$

4) $\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{1}{m+n} \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x\, dx.$

5) $\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x} dx = -\frac{1}{m-n} \frac{\sin^{m-1} x}{\cos^{n-1} x} + \frac{m-1}{m-n} \int \frac{\sin^{m-2} x}{\cos^n x} dx.$

6) $\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x} dx = \frac{1}{n-1} \frac{\sin^{m+1} x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-m-2}{n-1} \int \frac{\sin^m x}{\cos^{n-2} x} dx.$

7) $\int \frac{\cos^n x}{\sin^m x} dx = -\frac{1}{m-1} \frac{\cos^{n+1} x}{\sin^{m-1} x} + \frac{m-n-2}{m-1} \int \frac{\cos^n x}{\sin^{m-2} x} dx.$

8) $\int \frac{dx}{\sin^m x} = -\frac{1}{m-1} \frac{\cos x}{\sin^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin^{m-2} x}.$

9) $\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1} \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}.$

10) $\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = -\frac{1}{m-1} \cdot \frac{1}{\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x} + \frac{m+n-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin^{m-2} x \cos^n x}.$

11) $\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x} + \frac{m+n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^m x \cos^{n-2} x}.$

12) $\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = \frac{(m-1)\sin^2 x - (n-1)\cos^2 x}{(m-1)(n-1)\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x} +$

$+ \frac{(m+n-2)(m+n-4)}{(m-1)(n-1)} \int \frac{dx}{\sin^{m-2} x \cos^{n-2} x}.$

13) $\int \text{tang}^n x\, dx = \frac{\text{tang}^{n-1} x}{n-1} - \int \text{tang}^{n-2} x\, dx.$

14) $\int \frac{dx}{\text{tang}^n x} = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{\text{tang}^{n-1} x} - \int \frac{dx}{\text{tang}^{n-2} x}.$

Wyprowadzić następujące wzory całkowe:

15) $\int \sin^2 x\, dx = -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{x}{2} + C.$

16) $\int \sin^3 x dx = -\frac{1}{2} \sin^2 x \cos x + \frac{2}{3} \cos x + C.$

17) $\int \sin^4 x\, dx = -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x - \frac{1.3}{2.4} \sin x \cos x + \frac{1.3}{2.4} x + C.$

18) $\int \sin^5 x\, dx = -\frac{1}{5} \sin^4 x \cos x - \frac{1.4}{3.5} \sin^2 x \cos x - \frac{2.4}{3.5} \cos x + C.$

19) $\int \sin^6 x\, dx = -\frac{1}{6} \sin^5 x \cos x - \frac{1.5}{4.6} \sin^3 x \cos x - \frac{1.3.5}{2.4.6} \sin x \cos x + \frac{1.3.5}{2.4.6} x + C.$

20) $\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} x + C.$

21) $\int \cos^3 x\, dx = \frac{1}{3} \sin x \cos^2 x + \frac{2}{3} \sin x + C.$

22) $\int \cos^4 x dx = \frac{1}{4} \sin x \cos^3 x + \frac{1.3}{2.4} \sin x \cos x + \frac{1.3}{2.4} x + C.$

23) $\int \cos^5 x dx = \frac{1}{5} \sin x \cos^4 x + \frac{1.4}{3.5} \sin x \cos^2 x + \frac{2.4}{3.5} \sin x + C.$

24) $\int \cos^6 x dx = \frac{1}{6} \sin x \cos^5 x + \frac{1.5}{4.6} \sin x \cos^3 x + \frac{1.3.5}{2.4.6} \sin x \cos x + \frac{1.3.5}{2.4.6} x + C.$

25) $\int \frac{dx}{\sin x} = \log \operatorname{tang} \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \log \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} + C.$ 26) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = - \frac{\cos x}{\sin x} + C.$

27) $\int \frac{dx}{\sin^3 x} = - \frac{1}{2} \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2} \log \operatorname{tang} \frac{x}{2} + C.$

28) $\int \frac{dx}{\sin^4 x} = - \frac{1}{3} \frac{\cos x}{\sin^3 x} - \frac{2}{3} \frac{\cos x}{\sin x} + C.$

29) $\int \frac{dx}{\sin^5 x} = - \frac{1}{4} \frac{\cos x}{\sin^4 x} - \frac{1.3}{2.4} \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1.3}{2.4} \log \operatorname{tang} \frac{x}{2} + C.$

30) $\int \frac{dx}{\cos x} = - \log \operatorname{tang} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \log \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \log \frac{1 + \operatorname{tang} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tang} \frac{x}{2}} =$

$= \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} = \log \operatorname{tang} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = \log (\sec x + \operatorname{tang} x) + C.$

31) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} + C.$ 32) $\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{2} \log \operatorname{tang} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + C$

33) $\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \frac{1}{3} \frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{2}{3} \frac{\sin x}{\cos x} + C.$

34) $\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{1}{4} \frac{\sin x}{\cos^4 x} + \frac{1.3}{2.4} \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1.3}{2.4} \log \operatorname{tang} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + C.$

35) $\int \frac{dx}{\cos^6 x} = \frac{1}{5} \frac{\sin x}{\cos^5 x} + \frac{1.4}{3.5} \frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{2.4}{3.5} \frac{\sin x}{\cos x} + C.$

36) $\int \frac{\sin x \, dx}{\cos x} = - \log \cos x + C = \log \sec x + C.$

37) $\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos x} = - \sin x - \log \operatorname{tang} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + C.$

38) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x} = - \frac{1}{2} \sin^2 x - \log \cos x + C.$

39) $\int \frac{\sin^4 x dx}{\cos x} = - \frac{1}{3} \sin^3 x - \sin x - \log \operatorname{tang} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + C.$

40) $\int \frac{\sin^5 x dx}{\cos x} = - \frac{1}{4} \sin^4 x - \frac{1}{2} \sin^2 x - \log \cos x + C.$

41) $\int \frac{\sin^6 x dx}{\cos x} = - \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{1}{3} \sin^3 x - \sin x - \log \operatorname{tang} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + C.$

42) $\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + \log \operatorname{tang} \frac{x}{2} + C.$

43) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = - \frac{1}{\sin x} - \log \operatorname{tang} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + C.$

44) $\int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\cos^3 x} + \frac{1}{\cos x} + \log \operatorname{tang} \frac{x}{2} + C.$

45) $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos x} = - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{\sin x} - \log \operatorname{tang} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + C.$

46) $\int \sin^3 x dx = - \cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C.$

47) $\int \sin^5 x dx = - \cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + C.$

48) $\int \cos^3 x\,dx = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$

49) $\int \cos^5 x\,dx = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$

50) $\int \sin^4 x \cos^3 x\,dx = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + C.$

51) $\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \text{tang}\,x + \frac{1}{3}\text{tang}^3 x + C.$ 52) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \text{tang}\,x - \text{cotg}\,x + C$

53) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\,dx = \frac{1}{4}\text{tang}^4 x + C.$

54) $\int \frac{dx}{\cos^6 x} = \text{tang}\,x + \frac{2}{3}\text{tang}^3 x + \frac{1}{5}\text{tang}^5 x + C.$

55) $\int \frac{dx}{\sin^5 x} = \frac{1}{16}\left\{-\frac{1}{4\,\text{tang}^4 \frac{x}{2}} - \frac{2}{\text{tang}^2 \frac{x}{2}} + 6\log\text{tang}\frac{x}{2} + 2\,\text{tang}^2\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\text{tang}^4\frac{x}{2}\right\} + C.$

56) $$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^3 x} = \frac{1}{4}\left\{-\frac{1}{2\,\text{tang}^2 \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} + 6\log\text{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + \frac{\text{tang}^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2}\right\} + C.$$

57) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\,dx = \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}\log\text{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + C.$

58) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x}\,dx = -\frac{1}{\cos^2 x}\left\{\sin^3 x - \frac{3}{2}\sin x\right\} + \frac{3}{2}\log\text{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + C.$

59) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}\,dx = -\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \frac{1}{2}\log\text{tang}\frac{x}{2} + C.$

60) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\,dx = \frac{1}{\sin^2 x}\left\{\cos^3 x - \frac{3}{2}\cos x\right\} - \frac{3}{2}\log\text{tang}\frac{x}{2} + C.$

61) $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x} = \frac{1}{2\cos^2 x} + \log\text{tang}\,x + C.$

62) $\int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x} = \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{1}{\cos x} + \log\text{tang}\frac{x}{2} + C.$

63) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = -\frac{1}{\sin x} - \log\text{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + C.$

64) $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cos x} - \frac{3}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{3}{2}\log\text{tang}\frac{x}{2} + C.$

65) $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos x} = -\frac{1}{3\sin^3 x} - \frac{1}{\sin x} - \log\text{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + C.$

66) $\int \sin^2 x\,dx = -\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x + C.$

67) $\int \sin^3 x\,dx = \frac{1}{12}\cos 3x - \frac{3}{4}\cos x + C.$

68) $\int \sin^4 x\,dx = \frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x + C.$

69) $\int \sin^5 x\,dx = -\frac{1}{80}\cos 5x + \frac{5}{48}\cos 3x - \frac{5}{8}\cos x + C.$

70) $\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x + C.$ 71) $\int \cos^3 x\,dx = \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x + C.$

72) $\int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x + C.$

73) $\int \cos^5 x\, dx = \frac{1}{80} \sin 5x + \frac{5}{48} \sin 3x + \frac{5}{8} \sin x + C.$

74) $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C.$

75) $\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx = -\frac{1}{16}\left\{\frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{3} \sin 3x - 2 \sin x\right\} + C.$

76) $\int \sin^5 x \cos^5 x dx = -\frac{1}{20}\left\{\frac{1}{10} \cos 10x - \frac{5}{6} \cos 6x + 5 \cos 2x\right\} + C.$

77) $\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx = \frac{1}{32}\left\{\frac{1}{6} \sin 6x - \frac{1}{2} \sin 2x\right\} + C.$

78) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx = -\frac{1}{32}\left\{\frac{1}{6} \sin 6x + \frac{1}{2} \sin 4x - \frac{1}{2} \sin 2x\right\} + \frac{1}{16} x + C.$

79) $\int \sin^4 x \cos^4 x\, dx = \frac{1}{128}\left\{\frac{1}{8} \sin 8x - \sin 4x\right\} + \frac{3}{128} x + C.$

Wykazać, że:

80) $2^{2n-1} \sin^{2n} x = (-1)^n \left\{\cos 2nx - \binom{2n}{1} \cos (2n-2) x + \ldots + (-1)^{n-1} \binom{2n}{n-1} \cos 2x\right\} + \frac{1}{2}\binom{2n}{n}.$

81) $2^{2n} \sin^{2n+1} x = (-1)^n \left\{\sin (2n+1) x - \binom{2n+1}{1} \sin (2n-1) x + \ldots + (-1)^n \binom{2n+1}{n} \sin x\right\}.$

82) $2^{2n-1} \cos^{2n} x = \cos 2nx + \binom{2n}{1} \cos (2n-2) x + \ldots + \binom{2n}{n-1} \cos 2x + \frac{1}{2}\binom{2n}{n}.$

83) $2^{2n} \cos^{2n+1} x = \cos (2n+1) x + \binom{2n+1}{1} \cos (2n-1) x + \ldots + \binom{2n+1}{n} \cos x.$

84) $\int \sqrt{\sin x} \cos^3 x\, dx = \frac{1}{3}\sqrt{\sin^3 x} - \frac{2}{7}\sqrt{\sin^7 x} + C.$

85) $\int \sin^3 x \sqrt{\cos x} . dx = \frac{2}{7}\sqrt{\cos^7 x} - \frac{2}{3}\sqrt{\cos^3 x} + C.$

86) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x \cos x}} = 3 \sqrt[3]{\operatorname{tang} x} + C.$

87) $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x . \cos x}} = -2\sqrt{\operatorname{cotg} x} - \frac{2}{3} \operatorname{tang} x \sqrt{\operatorname{tang} x} + C.$

Rozwiązania VIII. Za pomocą metody całkowania przez części, lub za pomocą różniczek kształtu: $d(\sin^r x \cos x)$, $d(\cos^r x \sin x)$, $d\left(\frac{\cos x}{\sin^r x}\right)$, $d\left(\frac{\sin x}{\cos^r x}\right)$ i t. d. 15)—43) za pomocą wzorów redukcyjnych, 44)—87) za pomocą prawideł Żmurki.

Literatura. Leonhard Euler's vollständige Anleitung zur Integralrechnung. Aus dem Lateinischen ins deutsche übersetzt von Joseph Salomon. Erster Band. Wien, 1828. Matematyka, kurs I. podług wykładów Dra Placyda Dziwińskiego w c. k. szkole politechnicznej we Lwowie z roku naukowego 1885—86. Część IV. Zasady analizy wyższej, we Lwowie, Autografia nakładem słuchaczy matematyki kursu I. 1886.

Tematy do rozprawek naukowych:

1. Funkcye goniometryczne bezpośrednio całkowalne.
2. Sposoby rozkładania iloczynów: $\sin^s mx \cos^k nx$ na sumy.
3. Rozwijanie całek kształtu: $\int \sin^p x \cos^q x dx$ na szeregi potęgowe.

Wykład IX.

Całkowanie niektórych funkcyj algebraicznych za pomocą całek typu: $J_{s,k}=\int \sin^s x \cos^k x\, dx$.

1. **Wyznaczanie całek funkcyj algebraicznych** staje się często bardzo łatwionem, jeżeli można daną całkę, za pomocą stosownych podstawień niometrycznych, przekształcić na całkę funkcyj goniometrycznych.

Liczne przekształcenia, jakie na funkcyach goniometrycznych przedsięwziąć można, dozwalają w wielu razach otrzymaną całkę funkcyi goniometrycznej przerobić na całki typu: $J_{s,k}=\int \sin^s x \cos^k x\, dx$, które, w myśl wodów, podanych w poprzednim wykładzie, dadzą się, przy całkowitych ykładnikach s i k zawsze, a przy ułamkowych wykładnikach pod pewnymi runkami za pomocą znanych funkcyi wyrazić.

Zajmiemy się tu przedewszystkiem całkami dwumiennemi i szczególmi całkami trójmiennemi.

2. **Wyznaczanie całki dwumiennej $J_{m,p}=\int x^m (ax^n+b)^p\, dx$ za pomocą dstawień goniometrycznych.** Uwzględniając znaki spółczynników a i b umianu n-go stopnia: ax^n+b, możemy wogóle odróżnić trzy przypadki:

1) spółczynniki a i b mają jednakowe znaki:
2) spółczynnik a ma znak $+$, b zaś znak $-$.
3) spółczynnik a ma znak $-$, b zaś znak $+$.

ad 1). W pierwszym przypadku całka dwumienna ma kształt:

$$J_{m,p}=\int x^m (ax^n+b)^p\, dx.$$

Połóżmy:

$$ax^n=b\,\mathrm{tang}^2\varphi,$$

otrzymamy:

$$x=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}.\mathrm{tang}^{\frac{2}{n}}\varphi,\quad dx=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\cdot\frac{2}{n}\,\mathrm{tang}^{\frac{2}{n}-1}\varphi.\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}=\frac{2}{n}\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\cdot\frac{\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi}{\cos^{\frac{2}{n}+1}\varphi}\,d\varphi,$$

$$ax^n+b=b(1+\mathrm{tang}^2\varphi)=b\sec^2\varphi=\frac{b}{\cos^2\varphi},$$

tem:

$$J_{m,p}=\int\frac{b^{\frac{m}{n}}\sin^{\frac{2m}{n}}\varphi.b^p.2.b^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{m}{n}}\cos^{\frac{2m}{n}}\varphi.\cos^{2p}\varphi.n.a^{\frac{1}{n}}}\cdot\frac{\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi}{\cos^{\frac{2}{n}+1}\varphi}\,d\varphi,$$

i:

$$\int x^m (ax^n+b)^p\,dx = \frac{2}{n}\,\frac{b^{\frac{m+1}{n}+p}}{a^{\frac{m+1}{n}}}\int \frac{\sin^{\frac{2(m+1)}{n}-1}\varphi}{\cos^{\frac{2(m+1)}{n}+2p+1}\varphi}\,d\varphi,$$

dochodzimy zatem do całki kształtu: $J_{s,k}=\int \sin^s\varphi\cos^k\varphi\,d\varphi$, gdzie:

$$s=\frac{2(m+1)}{n}-1,\quad k=-\frac{2(m+pn+1)+n}{n},\ \text{przyczem}\ \varphi=\operatorname{arctang}\sqrt{\frac{ax^n}{b}}.$$

Jeżeliby spółczynniki a i b były ujemne, natenczas jednostka uj wystąpiłaby przed znakiem całkowania z wykładnikiem p.

ad 2) Jeżeli spółczynnik a jest dodatni, b zaś ujemny, natenczas całka dwumienna ma kształt:

$$J_{m,p}=\int x^m(ax^n-b)^p\,dx.$$

Połóżmy w tym przypadku:

$$ax^n=b\sec^2\varphi,$$

a otrzymamy:

$$x=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\,.\,\sec^{\frac{2}{n}}\varphi=\frac{b^{1/n}}{a^{1/n}}\,.\,\frac{1}{\cos^{2/n}\varphi},$$

$$dx=\frac{b^{1/n}}{a^{1/n}}\,.\,\frac{2}{n}\sec^{\frac{2}{n}-1}\varphi\sin\varphi\,.\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}=\frac{2}{n}\,.\,\frac{b^{1/n}}{a^{1/n}}\,.\,\frac{\sin\varphi}{\cos^{\frac{2}{n}+1}\varphi}\,d\varphi,$$

$$ax^n-b=b(\sec^2\varphi-1)=b\,\operatorname{tang}^2\varphi=\frac{b\sin^2\varphi}{b\cos^2\varphi},$$

zatem:

$$J_{m,p}=\int\frac{b^{m/n}\,.\,b^p\sin^{2p}\varphi\,.\,2\,.\,b^{1/n}\,.\sin\varphi}{a^{m/n}\,.\cos^{\frac{2m}{n}}\varphi\,.\cos^{2p}\varphi\,.n\,.\,a^{1/n}.\cos^{\frac{2}{n}+1}\varphi}\,d\varphi,$$

czyli:

$$\int x^m(ax^n-b)^p\,dx=\frac{2}{n}\,.\,\frac{b^{\frac{m+1}{n}+p}}{a^{\frac{m+1}{n}}}\int\frac{\sin^{2p+1}\varphi}{\cos^{\frac{2m+2}{n}+2p+1}\varphi}\,d\varphi,$$

dochodzimy więc znowu do całki $J_{s,k}=\int\sin^s\varphi\cos^k\varphi d\varphi$, gdzie:

$$s=2p+1,\quad k=-\frac{2(m+1+np)+n}{n},\ \text{przyczem}\ \varphi=\operatorname{arc\,sec}\sqrt{\frac{ax^n}{b}}.$$

ad 3). Jeżeli spółczynnik a jest ujemny, b zaś dodatni, natenczas dwumienna ma kształt:

$$J_{m,p}=\int x^m(b-ax^n)^p\,dx.$$

Podstawmy w tym przypadku:

$$ax^n=b\sin^2\varphi,$$

a otrzymamy:

$$x=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\,.\,\sin^{\frac{2}{n}}\varphi,$$

$$dx=\frac{2}{n}\,.\,\frac{b^{1/n}}{a^{1/n}}\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos\varphi\,d\varphi,$$

$$b-ax^n=b(1-\sin^2\varphi)=b\cos^2\varphi,$$

zatem:

$$J_{m,p}=\int \frac{b^{\frac{m}{n}}.\sin^{\frac{2m}{n}}\varphi\, b^p \cos^{2p}\varphi . 2 . b^{1/n}.\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos\varphi}{a^{\frac{m}{n}}.n.a^{1/n}}d\varphi,$$

czyli:

$$\int x^m(b-ax^n)^p\,dx=\frac{2}{n}\cdot\frac{b^{\frac{m+1}{n}+p}}{a^{\frac{m+1}{n}}}\int \sin^{\frac{2(m+1)}{n}-1}\varphi\cos^{2p+1}\varphi\,d\varphi, \qquad (3)$$

dochodzimy więc znowu do całki $J_{s,k}=\int \sin^s\varphi\cos^k\varphi d\varphi$, gdzie:

$$s=\frac{2(m+1)}{n}-1,\ k=2p+1,\ \text{przyczem}\ \varphi=\arc\sin\sqrt{\frac{ax^n}{b}}.$$

3. Przykłady. 1) Wyznaczyć całkę $J=\int\frac{xdx}{x^4-1}$ za pomocą podstawień goniometrycznych. Podstawiwszy tu $x^2=\sec\varphi$, a zatem: $x\,dx=\frac{1}{2}\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}d\varphi$, $x^4-1=\tan^2\varphi=\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}$, otrzymujemy:

$$J=\int\frac{1}{2}\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\cdot\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}d\varphi=\frac{1}{2}\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi}=\frac{1}{2}\log\text{tang}\frac{\varphi}{2}+C.$$

że:

$$\text{tang}\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}}=\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}},$$

przeto jest ostatecznie:

$$\int\frac{xdx}{x^4-1}=\frac{1}{4}\log\frac{x^2-1}{x^2+1}+C.$$

2) Wyznaczyć za pomocą podstawień goniometrycznych całkę $J=\int\sqrt{a^2-x^2}.dx$, podstawimy tu $x=a\sin\varphi$, a więc $dx=a\cos\varphi\,d\varphi$, $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos\varphi$, otrzymujemy zatem:

$$J=\int a^2\cos^2\varphi\,d\varphi=a^2\int\cos^2\varphi d\varphi=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi=\frac{a^2}{2}\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)+C,$$

że:

$$\varphi=\arc\sin\frac{x}{a},\ \ \frac{1}{2}\sin 2\varphi=\sin\varphi\cos\varphi=\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2},$$

przeto mamy ostatecznie:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\arc\sin\frac{x}{a}+C.$$

3) $J=\int\sqrt{1+\left(\frac{a}{x}\right)^{2/3}}\,dx=?$

Kładąc: $\frac{a}{x}=\text{tang}^3\varphi$, zatem $x=a\,\text{cotg}^3\varphi$, $dx=-3a\frac{\text{cotg}^2\varphi.d\varphi}{\sin^2\varphi}=-3a\frac{\cos^2\varphi}{\sin^4\varphi}d\varphi$,

$$1+\left(\frac{a}{x}\right)^{2/3}=1+\text{tang}^2\varphi=\sec^2\varphi=\frac{1}{\cos^2\varphi},$$

otrzymujemy:

$$\int\sqrt{1+\left(\frac{a}{x}\right)^{2/3}}\,dx=\int\frac{-3a\cos^2\varphi}{\cos\varphi.\sin^4\varphi}d\varphi=-3a\int\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\sin^4\varphi}=\frac{a}{\sin^3\varphi}+C,$$

że:

$$\text{tang}\,\varphi=\sqrt[3]{\frac{a}{x}},$$

więc:

$$\sin\varphi=\frac{\sqrt[3]{\frac{a}{x}}}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{x}\right)^{2/3}}},\ \ \sin^3\varphi=\frac{a}{x\left[1+\left(\frac{a}{x}\right)^{2/3}\right]^{3/2}},$$

przeto otrzymujemy:

$$\int\sqrt{1+\left(\frac{a}{x}\right)^{2/3}}\,dx=x\left[1+\left(\frac{a}{x}\right)^{2/3}\right]^{3/2}+C.$$

4. **Całki kształtu**: $J_{m,p}=\int x^m(ax^2+b)^p dx$ stanowią szczególny przypadek całek dwumiennych, dadzą się też zawsze sprowadzić do całek: $J_{s,k}=\int \sin^s\varphi \cos^k\varphi d\varphi$ za pomocą podstawień, których rodzaj zależy od znaków, jakie mają spółczynniki a i b dwumianu ax^2+b.

W szczególności, otrzymujemy w przypadku, gdy spółczynniki a i b mają jednakowe znaki za pomocą podstawienia:

$$ax^2=b\,\mathrm{tang}^2\varphi, \text{ czyli } x\sqrt{a}=\sqrt{b}\,.\,\mathrm{tang}\,\varphi,$$

wzór:

$$\int x^m(ax^2+b)^p dx=\frac{b^{\frac{m+1}{2}+p}}{a^{\frac{m+1}{2}}}\int\frac{\sin^m\varphi}{\cos^{m+2+2p}\varphi}d\varphi, \tag{4}$$

w przypadku, gdy spółczynnik a jest dodatni, b zaś ujemny, za pomocą podstawienia:

$$ax^2=b\sec^2\varphi, \text{ czyli: } x\sqrt{a}=\sqrt{b}\sec\varphi,$$

wzór:

$$\int x^m(ax^2-b)^p dx=\frac{b^{\frac{m+1}{2}+p}}{a^{\frac{m+1}{2}}}\int\frac{\sin^{2p+1}\varphi}{\cos^{m+2+2p}\varphi}d\varphi, \tag{5}$$

wreszcie w przypadku, gdy spółczynnik a jest ujemny, a b dodatni, za pomocą podstawienia:

$$ax^2=b\sin^2\varphi, \text{ czyli: } x\sqrt{a}=\sqrt{b}\,.\sin\varphi,$$

wzór:

$$\int x^m(b-ax^2)^p dx=\frac{b^{\frac{m+1}{2}+p}}{a^{\frac{m+1}{2}}}\int\sin^m\varphi\cos^{2p+1}\varphi\, d\varphi. \tag{6}$$

5. Dla $a=\pm b=\pm 1$ otrzymujemy stąd następujące wzory:

1) $\int x^m(x^2+1)^p dx=\int\frac{\sin^m\varphi}{\cos^{m+2+2p}\varphi}d\varphi$, gdzie $\mathrm{tang}\,\varphi=x$;

2) $\int x^m(x^2-1)^p dx=\int\frac{\sin^{2p+1}\varphi}{\cos^{m+2+2p}}d\varphi$, gdzie $\sec\varphi=x$;

3) $\int x^m(1-x^2)^p dx=\int\sin^m\varphi\cos^{2p+1}\varphi d\varphi$, gdzie $\sin\varphi=x$.

Wzory te sprowadzają się niekiedy do całki kształtu $\int d\varphi=\varphi+C$, a mianowicie:

w pierwszym przypadku, gdy $m=0$, $m+2+2p=0$, a więc $p=-1$, otrzymujemy:

$$\int\frac{dx}{x^2+1}=\varphi+C=\mathrm{arc\,tang}\,x+C;$$

w drugim przypadku, gdy $2p+1=0$, $m+2+2p=0$, a więc, gdy $p=-\frac{1}{2}$, $m=-1$, otrzymujemy:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\varphi+C=\mathrm{arc\,sec}\,x+C;$$

w trzecim przypadku, gdy $m=0$, $2p+1=0$, a więc $p=-\frac{1}{2}$, otrzymujemy:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\varphi+C=\mathrm{arc\,sin}\,x+C.$$

Są to trzy wzory zasadnicze, według których całki funkcyj algebraicznych przedstawiają się, jako funkcye cyklometryczne.

6. Wyznaczanie całek trójmiennych, kształtu: $J=\int x^m(ax^2+bx+c)^{\frac{p}{2}}dx$ pomocą podstawień goniometrycznych. Sprowadzając funkcyę drugiego pnia: ax^2+bx+c do formy dwuwyrazowej, na podstawie przekształcenia:

$$ax^2+bx+c=\frac{(2ax+b)^2+(4ac-b^2)}{4a},$$

zymujemy całkę trójmienną w postaci:

$$J=\int x^m(ax^2+bx+c)^{\frac{p}{2}}dx=\int x^m\left\{\frac{(2ax+b)^2+(4ac-b^2)}{4a}\right\}^{\frac{p}{2}}dx,$$

której możemy również zastosować podstawienia goniometryczne.

Zastosujmy w przypadku, gdy $4ac-b^2>0$ podstawienie:

$$(2ax+b)^2=(4ac-b^2)\operatorname{tang}^2\varphi,$$

czas, otrzymamy:

$$x=\frac{\sqrt{4ac-b^2}.\operatorname{tang}\varphi-b}{2a},\quad dx=\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\cdot\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi},$$

$$\frac{(2ax+b)^2+(4ac-b^2)}{4a}=\frac{4ac-b^2}{4a}.\sec^2\varphi,$$

, daną całkę w postaci:

$$J=\int x^m(ax^2+bx+c)^{\frac{p}{2}}dx=\frac{(4ac-b^2)^{\frac{p+1}{2}}}{2^{m+p+1}a^{m+\frac{p}{2}+1}}\int\frac{[\sqrt{4ac-b^2}.\operatorname{tang}\varphi-b]^m}{\cos^{p+2}\varphi}d\varphi.\qquad(7)$$

Otrzymana całka rozkłada się w przypadku, gdy wykładnik m jest całkowitą na $(m+1)$ całek typu: $J_{s,k}=\int\sin^s\varphi\cos^k\varphi\,d\varphi$, gdzie:

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}.$$

Mianowicie, otrzymujemy tedy:

$$\int\frac{[\sqrt{4ac-b^2}.\operatorname{tang}\varphi-b]^m}{\cos^{p+2}\varphi}d\varphi=\int\sum_{r=0}^{r=m}\binom{m}{r}\frac{(\sqrt{4ac-b^2})^{m-r}.b^r.\operatorname{tang}^{m-r}\varphi}{\cos^{p+2}\varphi}d\varphi,$$

wzór:

$$J=\int x^m(ax^2+bx+c)^{\frac{p}{2}}dx=$$

$$=\frac{(4ac-b^2)^{\frac{p+1}{2}}}{2^{m+p+1}a^{m+\frac{p}{2}+1}}\int\sum_{r=0}^{r=m}(-1)^r\binom{m}{r}(4ac-b^2)^{\frac{m-r}{2}}b^r.\sin^{m-r}\varphi\cos^{-m+r-p-2}\varphi\,d\varphi.$$

W przypadku, gdy $4ac-b^2<0$, mamy:

$$ax^2+bx+c=\frac{(2ax+b)^2-(b^2-4ac)}{4a};$$

stawiając tedy $(2ax+b)^2=(b^2-4ac)\sec^2\varphi$, otrzymujemy:

$$x=\frac{\sqrt{b^2-4ac}\sec\varphi-b}{2a},\quad dx=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\cos^2\varphi},$$

$$ax^2+bx+c=\frac{(b^2-4ac)\operatorname{tang}^2\varphi}{4a},$$

daną całkę w postaci:

$$J=\int x^m (ax^2+bx+c)^{\frac{p}{2}}\,dx=$$

$$\int\frac{[\sqrt{b^2-4ac}\sec\varphi-b]^m\,(b^2-4ac)^{\frac{p}{2}}\operatorname{tang}^p\varphi\,\sqrt{b^2-4ac}}{2^m\,a^m\,2^p\,a^{\frac{p}{2}}\,2a\,.\,\cos^2\varphi}\sin\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{(b^2-4ac)^{\frac{p+1}{2}}}{2^{m+p+1}\,a^{m+\frac{p}{2}+1}}\int\frac{[\sqrt{b^2-4ac}\sec\varphi-b]^m\operatorname{tang}^p\varphi\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi,\qquad(8)$$

która w przypadku, gdy wykładnik m jest liczbą całkowitą, dodatnią, rozpada się również na $(m+1)$ całek typu:

$$J_{s,k}=\int\sin^s\varphi\cos^k\varphi\,d\varphi,\quad\text{gdzie }\sec\varphi=\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Mianowicie otrzymujemy:

$$\int\frac{[\sqrt{b^2-4ac}\sec\varphi-b]^m\operatorname{tang}^p\varphi\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=\int\sum_{r=0}^{r=m}(-1)^r\binom{m}{r}(\sqrt{b^2-4ac})^{m-r}\,b^r\,.\,\frac{\sec^{m-r}\varphi\operatorname{tang}^p\varphi\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi,$$

zatem:

$$J=\int x^m(ax^2+bx+c)^{\frac{p}{2}}\,dx=$$

$$=\frac{(b^2-4ac)^{\frac{p+1}{2}}}{2^{m+p+1}\,a^{m+\frac{p}{2}+1}}\int\sum_{r=0}^{r=m}(-1)^r\binom{m}{r}(b^2-4ac)^{\frac{m-r}{2}}\,b^r\,.\,\sin^{p+1}\varphi\cos^{-m+r-2}\varphi\,d\varphi.$$

Jeżeli obok $4ac-b^2<0$ jest także $a<0$, wówczas możemy położyć:

$$ax^2+bx+c=\frac{(b^2-4ac)-(2ax+b)^2}{-4a}.$$

Podstawiając:

$$(2ax+b)^2=(b^2-4ac)\sin^2\varphi,$$

otrzymujemy:

$$x=\frac{\sqrt{b^2-4ac}\sin\varphi-b}{2a},\quad dx=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cos\varphi\,d\varphi,$$

$$ax^2+bx+c=\frac{b^2-4ac}{-4a}\cos^2\varphi,$$

zatem daną całkę w postaci:

$$\int x^m(ax^2+bx+c)^{\frac{p}{2}}\,dx=(-1)^{m+1}\frac{(b^2-4ac)^{\frac{p+1}{2}}}{2^{m+p+1}(-a)^{m+\frac{p}{2}+1}}\int[\sqrt{b^2-4ac}\sin\varphi-b]^m\cos^{p+1}\varphi\,d\varphi,\qquad(9)$$

skąd otrzymujemy:

$$J=\int x^m(ax^2+bx+c)^{\frac{p}{2}}\,dx=$$

$$=(-1)^{m+1}\frac{(b^2-4ac)^{\frac{p+1}{2}}}{2^{m+p+1}(-a)^{m+\frac{p}{2}+1}}\int\sum_{r=0}^{r=m}(-1)^r\binom{m}{r}(b^2-4ac)^{\frac{m-r}{2}}\,b^r\,.\,\sin^{m-r}\varphi\cos^{p+1}\varphi\,d\varphi$$

a więc znowu $(m+1)$ całek typu $J_{s,k}$.

Powyżej wskazane przekształcenia wymagają, aby wykładnik m był liczbą całkowitą, dodatnią.

7. W przypadku, gdy wykładnik m jest liczbą całkowitą, ujemną, a więc potęga x^m znajduje się w mianowniku, możemy odróżnić dwa przypadki:

a) wykładnik całkowity p jest także ujemny,

b) wykładnik całkowity p jest dodatni.

W pierwszym z tych przypadków mamy całkę kształtu:

$$J_2 = \int \frac{dx}{x^m (ax^2 + bx + c)^{\frac{p}{2}}}.$$

Kładąc $x = \frac{1}{z}$, zatem $dx = -\frac{dz}{z^2}$; $ax^2 + bx + c = \frac{a + bz + cz^2}{z^2}$,

otrzymujemy daną całkę w postaci:

$$J_2 = \int \frac{dx}{x^m (ax^2 + bx + c)^{\frac{p}{2}}} = -\int \frac{z^{m+p-2}\,dz}{(a + bz + cz^2)^{\frac{p}{2}}}, \tag{10}$$

która należy do postaci, poprzednio rozważanych, skoro $m+p \geqq 2$, co zawsze nastąpi, gdy wykładniki m i p w całce J_2 są liczbami całkowitemi, dodatniemi, gdyż wtedy każdy z nich musi być co najmniej równy 1.

W drugim przypadku mamy całkę kształtu:

$$J_3 = \int \frac{(ax^2 + bx + c)^{\frac{p}{2}}}{x^m}\,dx,$$

natenczas podstawmy:

$$x = \frac{1}{z}, \text{ zatem } dx = -\frac{dz}{z^2}, \; ax^2 + bx + c = \frac{a + bz + cz^2}{z^2},$$

a otrzymamy daną całkę w postaci:

$$J_3 = \int \frac{(ax^2 + bx + c)^{\frac{p}{2}}}{x^m}\,dx = -\int z^{m-p-2} (a + bz + cz^2)^{\frac{p}{2}} dz, \tag{11}$$

która należy do postaci poprzednio rozważanych, skoro liczba $m-p-2$ jest liczbą całkowitą, dodatnią, a więc, skoro $m \geqq p+2$.

Gdyby się okazało, że $m < p+2$, wówczas możemy danej całce nadać kształt:

$$J_3 = \int \frac{(ax^2 + bx + c)^{\frac{p}{2}}}{x^m}\,dx = \int \frac{(ax^2 + bx + c)^{\frac{p+1}{2}}\,dx}{x^m (ax^2 + bx + c)^{1/2}}, \tag{12}$$

a otrzymamy, przy nieparzystym wykładniku $p = 2n+1$, daną całkę w postaci:

$$J_3 = \int \frac{(ax^2 + bx + c)^n\,dx}{x^m (ax^2 + bx + c)^{1/2}},$$

która, wobec dodatniego wykładnika n, po rozwinięciu potęgi: $(ax^2 + bx + c)^n$, przedstawi się w postaci:

$$J_3 = \int \frac{(a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + a_2 x^{2n-2} + \ldots + a_{2n-1} x + a_{2n})dx}{x^m (ax^2 + bx + c)^{1/2}},$$

a więc rozpada się na dwa rodzaje całek, z których jedne są kształtu:

$$J = \int \frac{x^r\,dx}{(ax^2 + bx + c)^{1/2}}, \text{ gdzie } r \geqq 0,$$

a więc dadzą się wyznaczyć za pomocą metod, w art. 6. poznanych, drugie zaś są kształtu:

$$J_2 = \int \frac{dx}{x^s (ax^2+bx+c)^{1/2}}, \text{ gdzie znów } s > 0,$$

a więc, należą do całek powyżej rozważanych.

8. **Przykłady.** 1) Wyznaczyć całkę $J_1 = \int \frac{x^2 dx}{(x^2-2x-1)^{1/2}}$ za pomocą podstawień goniometrycznych. Mając tu $x^2-2x-1=(x-1)^2-2$, podstawmy $(x-1)^2 = 2\sec^2\varphi$, a więc:

$$x = 1+\sqrt{2}.\sec\varphi;\ dx = \sqrt{2}.\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\cos^2\varphi},\ (x^2-2x-1)^{1/2} = \sqrt{2}.\text{tang}\,\varphi,$$

a otrzymamy:

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2-2x-1)^{1/2}} = \int \frac{(1+\sqrt{2}\sec\varphi)^2\sqrt{2}\sin\varphi}{\sqrt{2}\cos^2\varphi.\text{tang}\,\varphi} d\varphi = \int \frac{(1+\sqrt{2}\sec\varphi)^2}{\cos\varphi} d\varphi,$$

a że:

$$\int \frac{(1+\sqrt{2}\sec\varphi)^2}{\cos\varphi} d\varphi = \int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} + 2\sqrt{2}\int\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} + 2\int \frac{d\varphi}{\cos^3\varphi} = \log\text{cotg}\,\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) +$$

$$+ 2\sqrt{2}\,\text{tang}\,\varphi + \sec\varphi.\text{tg}\,\varphi + \log\text{cotg}\,\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \log\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} + (2\sqrt{2}+\sec\varphi)\,\text{tang}\,\varphi,$$

przeto, ze względu na to, że:

$$\sec\varphi = \frac{x-1}{\sqrt{2}},\ \cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{x-1},\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{(x-1)^2-2}}{x-1} = \frac{\sqrt{x^2-2x-1}}{x-1},\ \text{tang}\,\varphi = \frac{\sqrt{x^2-2x-1}}{\sqrt{2}},$$

otrzymujemy ostatecznie:

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2-2x-1)^{1/2}} = \log\frac{x-1+\sqrt{x^2-2x-1}}{x-1-\sqrt{x^2-2x-1}} + \frac{(x+3)\sqrt{x^2-2x-1}}{2} + C.$$

2) Wyznaczyć całkę: $J_2 = \int \frac{dx}{x^2(x^2-2x-1)^{1/2}}$. Kładąc $x = \frac{1}{z}$, zatem: $dx = -\frac{dz}{z^2}$ $x^2-2x-1 = \frac{1-2z-z^2}{z^2}$, otrzymujemy:

$$J_2 = -\int \frac{z dz}{(1-2z-z^2)^{1/2}}.$$

Otrzymany trójmian: $1-2z-z^2$, sprowadza się do postaci:

$$1-2z-z^2 = 2-(z+1)^2,$$

podstawmy przeto:

$(z+1)^2 = 2\sin^2\varphi$, a więc $z+1 = \sqrt{2}.\sin\varphi$, $dz = \sqrt{2}.\cos\varphi.d\varphi$, $1-2z-z^2 = 2\cos^2\varphi$,
natenczas otrzymamy:

$$J_2 = -\frac{(\sqrt{2}\sin\varphi-1)\sqrt{2}.\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{2}\cos\varphi} = \int(1-\sqrt{2}\sin\varphi)d\varphi = \varphi + \sqrt{2}\cos\varphi + C,$$

a że: $\sin\varphi = \frac{z+1}{\sqrt{2}},\ \cos\varphi = \frac{\sqrt{2-(z+1)^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1-2z-z^2}}{\sqrt{2}},\ \varphi = \text{arc}\sin\frac{z+1}{\sqrt{2}},$

przeto:

$$J_2 = \text{arc}\sin\frac{z+1}{\sqrt{2}} + \sqrt{1-2z-z^2} + C,$$

gdzie $z = \frac{1}{x}$. Otrzymujemy zatem ostatecznie:

$$J_2 = \int \frac{dx}{x^2(x^2-2x-1)^{1/2}} = \text{arc}\sin\frac{x+1}{x\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{x^2-2x-1}}{x} + C.$$

3) Wyznaczyć całkę $J_3 = \int \frac{(x^2-2x-1)^{1/2}}{x^2}dx$. Ponieważ w tej całce $m = 2 < p+2$, przedstawimy ją w postaci:

$$J_3 = \int \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2(x^2 - 2x - 1)^{1/2}} dx,$$

a otrzymamy:

$$J_3 = \int \frac{dx}{(x^2-2x-1)^{1/2}} - 2\int \frac{dx}{x(x^2-2x-1)^{1/2}} - \int \frac{dx}{x^2(x^2-2x-1)^{1/2}}.$$

Pierwsza z otrzymanych całek sprowadza się, za pomocą podstawienia: $(x-1)^2 = 2\sec^2\varphi$, do postaci:

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x-1)^{1/2}} = \int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = -\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \log(\sec\varphi + \operatorname{tg}\varphi),$$

zatem, ze względu na to, że:

$$\sec\varphi = \frac{x-1}{\sqrt{2}},\quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{\sqrt{x^2-2x-1}}{\sqrt{2}},$$

otrzymujemy:

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x-1)^{1/2}} = \log\frac{x-1+\sqrt{x^2-2x-1}}{\sqrt{2}} + C.$$

Do drugich dwu całek zastosujemy najpierw podstawienie: $x = \frac{1}{z}$, następnie: $(z+1)^2 = 2\sin^2\varphi$, a otrzymamy:

$$\int \frac{dx}{x(x^2-2x-1)^{1/2}} = -\int \frac{dz}{(1-2z-z^2)^{1/2}} = -\int d\varphi = -\arcsin\frac{x+1}{x\sqrt{2}} + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^2(x^2-x-1)^{1/2}} = \arcsin\frac{x+1}{x\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{x^2-2x-1}}{x} + C, \text{ (patrz przykład (2)).}$$

Wobec tego, otrzymujemy ostatecznie:

$$J_3 = \int \frac{(x^2-2x-1)^{1/2}}{x^2} dx = \log[x-1+\sqrt{x^2-2x-1}] + \arcsin\frac{x+1}{x\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{x^2-2x-1}}{x} + C.$$

9. Całki trójmienne, kształtu: $J = \int x^m(ax^{2n} + bx^n + c)^p dx$, można również sprowadzić do całek typu: $J_{s,k} = \int \sin^s x \cos^k x dx$. Przedstawiwszy trójmian: $ax^{2n} + bx^n + c$, w postaci:

$$ax^{2n} + bx^n + c = \frac{(2ax^n + b)^2 + (4ac - b^2)}{4a},$$

i kładąc:

$$(2ax^n + b)^2 = (4ac - b^2)\operatorname{tang}^2\varphi, \text{ jeżeli: } 4ac - b^2 > 0,$$

albo:

$$(2ax^n + b)^2 = (b^2 - 4ac)\sec^2\varphi,$$

lub:

$$(2ax^n + b)^2 = (b^2 - 4ac)\sin^2\varphi, \text{ jeżeli: } 4ac - b^2 > 0,$$

otrzymamy w przypadku, gdy: $\frac{m+1}{n} - 1$ jest liczbą całkowitą, dodatnią: $\frac{m+1}{n}$ całek typu J_{sk}.

10. Rozmaite inne całki funkcyj algebraicznych, sprowadzalne do całek typu: $J_{s,k} = \int \sin^s x \cos^k x dx$. Do całek tego rodzaju należą oczywiście wszystkie całki, które dadzą się sprowadzić do całek dwumiennych, kształtu:

$J_{m,p} = \int x^m(ax^n + b)^p dx$, (patrz Wykład VII. art. 8. str. 110.)

Sprowadzanie tych całek do typu: $J_{sk} = \int \sin^s x \cos^k x dx$, można w niektórych przypadkach wykonać bezpośrednio, bez uprzedniego sprowadzania całek do kształtu: $J_{m,p} = \int x^m(ax^n + b)^p dx$.

W szczególności, przy całkach kształtu:

$$J_1 = \int x^m(ax^n + bx^p)^q dx, \tag{13}$$

uskutecznić to można za pomocą podstawienia:

$$ax^n = bx^p \operatorname{tang}^2 \varphi,$$

przy całkach kształtu:

$$J_1 = \int x^m (ax^n - bx^p)^q\, dx,$$

za pomocą podstawienia:

$$ax^n = bx^p \sec^2 \varphi,$$

lub za pomocą podstawienia:

$$bx^p = ax^n \sin^2 \varphi.$$

Całki kształtu:

$$J_2 = \int (ax+b)^p (ax+\beta)^{r/s}\, dx, \tag{14}$$

sprowadzają się do całek J_{sk} wprost za pomocą podstawienia:

$$a(ax+\beta) = (ab - a\beta) \operatorname{tang}^2 \varphi, \text{ jeżeli: } a > 0,\ ab > a\beta,$$

lub

$$a(ax+\beta) = (a\beta - ab) \sec^2 \varphi, \text{ jeżeli: } a < 0,\ a\beta > ab,$$

lub

$$a(ax+\beta) = (ab - a\beta) \sin^2 \varphi, \text{ jeżeli: } a < 0,\ ab > a\beta.$$

W całkach kształtu:

$$J_3 = \int (ax+\beta)^m [a(ax+\beta)^n + b]^p\, dx, \tag{15}$$

należy podstawić:

$$a(ax+\beta)^n = b \operatorname{tang}^2 \varphi, \text{ jeżeli } a > 0 \text{ i } b > 0,$$

lub:

$$a(ax+\beta)^n = b \sec^2 \varphi, \text{ jeżeli } a > 0,\ b < 0,$$

lub:

$$-a(ax+\beta)^n = b \sin^2 \varphi, \text{ jeżeli } a < 0,\ b > 0.$$

Podobne uwagi dotyczą także całek, sprowadzających się do całek trójmiennych.

11. Przykłady. 1) Wyznaczyć całkę: $J = \int \frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}}$, za pomocą podstawień goniometrycznych.

Kładąc $x^2 = ax \sin^2 \varphi$, czyli: $x = a \sin^2 \varphi$, a więc: $dx = 2a \sin\varphi \cos\varphi d\varphi$, otrzymujemy:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}} = 2a \int \frac{\sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi}{a \sin\varphi \cos\varphi} = 2\varphi + C,$$

a więc:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}} = 2 \arcsin \sqrt{\frac{x}{a}} + C.$$

2) Wyznaczyć całkę $J = \int \frac{x dx}{(x^4 - 2x^2 - 1)^{1/2}}$, za pomocą podstawień goniometrycznych.

Mamy tu $x^4 - 2x^2 - 1 = (x^2-1)^2 - 2$, podstawiamy: $(x^2-1)^2 = 2\sec^2\varphi$, czyli $x^2 - 1 = \sqrt{2} \sec\varphi$. dostajemy:

$$x = (\sqrt{2} \sec\varphi - 1)^{1/2};\ dx = \frac{1}{2} (\sqrt{2}\sec\varphi - 1)^{-1/2} \cdot \frac{\sqrt{2}\sin\varphi}{\cos^2\varphi} d\varphi,$$

$$x^4 - 2x^2 - 1 = 2\operatorname{tang}^2\varphi,\ (x^4 - 2x^2 - 1)^{1/2} = \sqrt{2} . \operatorname{tang}\varphi,$$

zatem:

$$J = \frac{1}{2} \int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \frac{1}{2} \log(\sec\varphi + \operatorname{tang}\varphi) + C,$$

skąd, ze względu na to, że: $\sec\varphi = \frac{x^2-1}{\sqrt{2}}$; $\operatorname{tang}\varphi = \frac{\sqrt{x^4 - 2x^2 - 1}}{\sqrt{2}}$,

otrzymujemy:

$$\int \frac{x dx}{(x^4 - 2x^2 - 1)^{1/2}} = \log \sqrt{x^2 - 1 + \sqrt{x^4 - 2x^2 - 1}}.$$

12. Korzyści podstawień goniometrycznych, przy wyznaczaniu całek niektórych funkcyj algebraicznych są widoczne, o ile te całki potrafimy sprowadzić do całek typu: $J_{s,k} = \int \sin^s \varphi \cos^k \varphi\, d\varphi$, co jest zawsze możliwem przy tych całkach, które dadzą się sprowadzić do całek dwumiennych jakiegokolwiek stopnia.

Odnośne podstawienia goniometryczne mogą być trojakiego rodzaju, w postaci:

$$x = a \operatorname{tang}^m \varphi, \text{ albo } x = b \sec^n \varphi, \text{ albo } x = c \sin^r \varphi,$$

względnie, w postaci:

$$x = a \operatorname{cotg}^m \varphi, \text{ lub } x = b \operatorname{cosec}^n \varphi, \text{ lub } x = c \cos^r \varphi,$$

gdzie wykładniki m, n, r są liczbami wymiernemi (całkowitemi, lub ułamkowemi), a spółczynniki a, b, c są liczbami rzeczywistemi.

Dopuszczając także spółczynniki urojone, możemy daną całkę funkcyi algebraicznej, za pomocą któregokolwiek z powyższych trzech rodzajów podstawień sprowadzić do całek typu $J_{s,k} = \int \sin^s \varphi \cos^k \varphi d\varphi$.

Tym sposobem otrzymujemy rozwiązanie danej całki w rozmaitych postaciach, z których jedno rozwiązanie przedstawiać będzie funkcyę zmiennej x o spółczynnikach rzeczywistych, pozostałe zaś rozwiązania będą przedstawione funkcyami zmiennej x o spółczynnikach urojonych.

Otrzymane funkcye, jako rozwiązania danej całki, mogą się tylko różnić o pewną liczbę stałą. Wyznaczywszy zatem tę liczbę stałą, dochodzimy tą drogą do związków między otrzymanemi funkcyami.

13. Zastosowania rachunku całkowego do wyznaczania związków między funkcyami cyklometrycznemi, a funkcyami logarytmicznemi. Związki między funkcyami cyklometrycznemi, a funkcyami logarytmicznemi, wypływają bezpośrednio z następujących całek:

1) $J_1 = \int \frac{dx}{x^2+1}$ sprowadza się, przy podstawieniu $x = \operatorname{tg}\varphi$, do postaci:

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \int d\varphi = \varphi + c = \operatorname{arctang} x + C,$$

przy podstawieniu $x = i\sec\varphi$, lub $x = i\sin\varphi$ do postaci:

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{i}\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1}{i}\log\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} + C = \frac{1}{i}\log(\operatorname{cosec}\varphi - \operatorname{cotang}\varphi) + C = \frac{i}{2}\log\frac{x+i}{x-i} + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{i}\int \frac{dx}{\cos\varphi} = \frac{1}{i}\log\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + C = \frac{1}{i}\log(\sec\varphi + \operatorname{tang}\varphi) + C = \frac{1}{2i}\log\frac{1+xi}{1-xi} + C.$$

Wobec tego, otrzymujemy:

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arc\,tang} x + C = \frac{i}{2}\log\frac{x+i}{x-i} + C = \frac{1}{2i}\log\frac{1+xi}{1-xi} + C,$$

a stąd:

$$\operatorname{arc\,tang} x = \frac{i}{2}\log\frac{x+i}{x-i} + C_1 = \frac{1}{2i}\log\frac{1+xi}{1-xi} + C_2.$$

Kładąc $x = 0$ i mając na uwadze główną wartość: $\operatorname{arctang} 0 = 0$, otrzymujemy na wyznaczenie stałych C_1 i C_2 relacyę:

$$0 = \frac{i}{2}\log(-1) + C_1 = C_2, \text{ zatem: } C_1 = -\frac{i}{2}\log(-1),\ C_2 = 0,$$

a więc, związek między funkcyami $\operatorname{arctang} x$, a funkcyami logarytmicznemi w postaci:

$$\operatorname{arc\,tang} x = \frac{i}{2}\log\frac{i+x}{i-x} = \frac{1}{2i}\log\frac{1+xi}{1-xi}. \tag{16}$$

2) Całka $J_2 = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$, sprowadza się, przy podstawieniu $x = \sec\varphi$ do postaci:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{i}\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1}{i}\log(\operatorname{cosec}\varphi - \operatorname{cotg}\varphi) + C = \frac{1}{i}\log\frac{\sqrt{x^2-1}-i}{x} + C.$$

Otrzymujemy zatem:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arc\,sec} x + C' = \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{x^2-1}-i}{x} + C,$$

a stąd:

$$\operatorname{arc\,sec} x = \frac{1}{i}\log\frac{\sqrt{x^2-1}-i}{x} + C_1.$$

Kładąc $x = 1$, $\operatorname{arc}\sec 1 = 0$, otrzymujemy, na wyznaczenie stałej C_1 relacyę:

$$0 = \frac{1}{i}\log(-i) + C_1, \quad \text{zatem:} \quad C_1 = -\frac{1}{i}\log(-i),$$

a więc, związek między funkcyą $\operatorname{arc}\sec x$, a funkcyami logarytmicznemi w postaci:

$$\operatorname{arc}\sec x = \frac{1}{i}\log\frac{1 + i\sqrt{x^2-1}}{x}. \tag{17}$$

3) Całka $J_3 = \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ sprowadza się, przy podstawieniu $x = \sin\varphi$ do postaci:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int d\varphi = \varphi + C = \operatorname{arc}\sin x + C,$$

przy podstawieniu $ix = \operatorname{tang}\varphi$ do postaci:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{i}\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \frac{1}{i}\log(\sec\varphi + \operatorname{tang}\varphi) + C = \frac{1}{i}\log(xi + \sqrt{1-x^2}) + C_1.$$

otrzymujemy zatem:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc}\sin x + C = \frac{1}{i}\log(xi + \sqrt{1-x^2}) + C'_1,$$

a stąd:

$$\operatorname{arc}\sin x = \frac{1}{i}\log(xi + \sqrt{1-x^2}) + C_1.$$

Dla $x = 0$, mamy $\operatorname{arc}\sin 0 = 0$, $\log 1 = 0$, zatem $C_1 = 0$, otrzymujemy zatem związek między funkcyą $\operatorname{arc}\sin x$, a funkcyami logarytmicznemi w postaci:

$$\operatorname{arc}\sin x = \frac{1}{i}(xi + \sqrt{1-x^2}). \tag{18}$$

14. Związki między funkcyami goniometrycznemi, a funkcyami wykładniczemi. Otrzymane związki między funkcyami cyklometrycznemi, a funkcyami logarytmicznemi prowadzą do związku między funkcyami goniometrycznemi, a funkcyami wykładniczemi, określonego wzorami:

$$\cos x + i\sin x = e^{xi}, \quad \cos x - i\sin x = e^{-xi},$$

z których powszechnie wszystkie inne związki się wyprowadzają.

15. Związki między funkcyami hiperbolometrycznemi, a funkcyami logarytmicznemi, tudzież związki między funkcyami hiperbolicznemi i funkcyami wykładniczemi. Wyprowadziwszy pojęcie funkcyj hiperbolicznych według wzorów:

$$\frac{\sin xi}{i} = \sin\operatorname{hip} x, \quad \cos xi = \cos\operatorname{hip} x,$$

$$\frac{\operatorname{tang} xi}{i} = \operatorname{tang}\operatorname{hip} x, \quad i\operatorname{cotang} xi = \operatorname{cotg}\operatorname{hip} x,$$

$$i\operatorname{cosec} xi = \operatorname{cosec}\operatorname{hip} x, \quad \sec xi = \sec\operatorname{hip} x,$$

a na tej podstawie także pojęcie funkcyj odwrotnych względem funkcyj hiperbolicznych, które nazywamy funkcyami hiperbolometrycznemi:

$$\arg\sin\operatorname{hip} x = \frac{1}{i}\operatorname{arc}\sin xi, \quad \arg\cos\operatorname{hip} x = \frac{1}{i}\operatorname{arc}\cos x,$$

$$\arg\operatorname{tang}\operatorname{hip} x = \frac{1}{i}\operatorname{arc}\operatorname{tang} xi, \quad \arg\operatorname{cotang}\operatorname{hip} x = \frac{1}{i}\operatorname{arc}\operatorname{cotg}\frac{x}{i},$$

$$\arg\operatorname{cosec}\operatorname{hip} x = \frac{1}{i}\operatorname{arc}\operatorname{cosec}\frac{x}{i}, \quad \arg\sec\operatorname{hip} x = \frac{1}{i}\arg\sec x,$$

otrzymamy analogiczne związki między funkcyami hiperbolometrycznemi, a funkcyami logarytmicznemi.

W szczególności, otrzymujemy, zapomocą stosownych podstawień goniometrycznych, lub wprost z wzorów (16), (17) i (18), następujące całki:

$$\int\frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} + C = \frac{1}{i}\operatorname{arc}\operatorname{tang} xi + C' = \arg\operatorname{tang}\operatorname{hip} x + C'', \tag{19}$$

$$\int\frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\log\frac{x-1}{x+1} + C = -\frac{1}{i}\operatorname{arc}\operatorname{cotg}\frac{x}{i} + C' = -\arg\operatorname{cotg}\operatorname{hip} x + C'',$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=-\log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}+C=-\frac{1}{i}\operatorname{arc\,sec}x+C'=-\operatorname{arg\,sec\,hip}x+C'',$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}=\log\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x}+C=-\frac{1}{i}\operatorname{arc\,cosec}\frac{x}{i}+C'=-\operatorname{arg\,cosec\,hip}x+C'',$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\log(x+\sqrt{x^2+1})+C=\frac{1}{i}\arcsin xi+C'=\operatorname{arg\,sin\,hip}x+C'',$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\log(x+\sqrt{x^2-1})+C=\frac{1}{i}\arccos x+C'=\operatorname{arg\,cos\,hip}x+C'',$$

a stąd związki:

$$\operatorname{arg\,tang\,hip}x=\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x},\quad \operatorname{arg\,cotg\,hip}x=\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1},\qquad (16)'$$

$$\operatorname{arg\,sec\,hip}x=\log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x},\quad \operatorname{arg\,cosec\,hip}x=\log\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x},\qquad (17)'$$

$$\operatorname{arg\,sin\,hip}x=\log(x+\sqrt{x^2+1}),\quad \operatorname{arg\,cos\,hip}x=\log(x+\sqrt{x^2-1}),\qquad (18)'$$

które prowadzą do wzorów odwrotnych:

$$\sin\operatorname{hip}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \cos\operatorname{hip}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad \operatorname{tang\,hip}x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},$$

$$\operatorname{cotang\,hip}x=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}},\quad \sec\operatorname{hip}x=\frac{2}{e^x+e^{-x}},\quad \operatorname{cosec\,hip}x=\frac{2}{e^x-e^{-x}},$$

określających związki między funkcyami hiperbolicznemi, a funkcyami wykładniczemi.

16. Całki Abelowe. Całki funkcyj algebraicznych wymiernych, tudzież całki funkcyj algebraicznych, niewymiernych, z powyżej wykazanemi niewymiernościami, sprowadzające się do całek funkcyj wymiernych, a więc wyrażające się ostatecznie przez nowe funkcye algebraiczne i funkcye logarytmiczne, względnie cyklometryczne, lub hiperbolometryczne, stanowią szczególny przypadek całek kształtu: $\int R(x, y)dx$, w których zmienne x i y związane są równaniem algebraicznem n-go rzędu, ze względu na zmienną y w postaci:

$$f_0(x)y^n+f_1(x)y^{n-1}+\ldots+f_{n-1}(x)y+f_n(x)=0,$$

zwanych całkami Ablowemi.

Dalszemi szczególnymi przypadkami całek Abelowych są:

1) t. z. całki eliptyczne, t. j. całki kształtu: $\int R(x, y)dx$, w których zmienna y jest pierwiastkiem kwadratowym, z wielomianu trzeciego, lub czwartego stopnia, czyli:

$$y=\sqrt{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3},\ \text{lub}\ y=\sqrt{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4};$$

2) t. z. całki hypereliptyczne, t. j. całki kształtu: $\int R(x, y)dx$, w których zmienna y jest pierwiastkiem kwadratowym z wielomianu n-go stopnia, czyli:

$$y=\sqrt{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}\quad (n>4).$$

Całki tego rodzaju nie dadzą się w ogólności żadnemi podstawieniami sprowadzić do całek funkcyj algebraicznych, wymiernych, nie dadzą się też wyrazić przez funkcye znane algebraiczne, lub przestępne i prowadzą do nowego rodzaju funkcyj przestępnych, których badanie, wymagające oddzielnych metod, pozostawiamy późniejszym wykładom. W następnych wykładach zajmiemy się przedewszystkiem całkowaniem funkcyj złożonych z funkcyj przestępnych elementarnych, zaczynając od funkcyj goniometrycznych.

Ćwiczenia IX.

Wyznaczyć za pomocą podstawień goniometrycznych następujące całki:

1) $\int \frac{8x^3\,dx}{(4x^4+9)^3} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(4x^4+9)^2} + C.$

2) $\int \frac{8x^3\sqrt{x}\,dx}{(1+x^3)^{7/2}} = \frac{2}{3} \frac{x^4\sqrt{x}}{(1+x^3)^{3/2}} - \frac{2}{5} \frac{x^7\sqrt{x}}{(1+x^3)^{5/2}} + C.$

3) $\int \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{(4+\sqrt[3]{x^2})^{3/2}} = 3\sqrt{4+\sqrt[3]{x^2}} + \frac{12}{\sqrt{4+\sqrt[3]{x^2}}} + C.$

4) $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{4} \operatorname{arc\,sin}(x^2) - \frac{x^2\sqrt{1-x^4}}{4} + C.$

5) $\int \frac{x^{11}\,dx}{\sqrt{x^6-4}} = \frac{4}{3}\sqrt{x^6-4} + \frac{1}{9}\sqrt{(x^6-4)^3} + C.$

6) $\int \frac{x dx}{x-1} = x + \log(x-1) + C.$ 7) $\int \frac{(x^{17}-3x^{11})\,dx}{(x^6-9)^{3/2}} = \frac{x^{12}+27(x^6-18)}{9\sqrt{x^6-9}} + C.$

8) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{9-4x^2}} = -\frac{1}{18} \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x^2} + \frac{1}{27} \log \frac{3-\sqrt{9-4x^2}}{3+\sqrt{9-4x^2}} + C.$

9) $\int x^{13/2}(1-4x^3)\,dx = \frac{2}{21} x^{15/2} \left\{\frac{7}{5} - 4x^3\right\} + C.$

10) $\int \frac{x^4\,dx}{(1-x^2)^{3/2}} = -\frac{x(x^2-3)}{2(1-x^2)^{1/2}} - \frac{3}{2} \operatorname{arc\,sin} x + C.$

11) $\int \frac{dx}{x^4(1+x^2)^{1/2}} = \left\{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{3} \frac{1}{x^3}\right\}\sqrt{1+x^2} + C.$

12) $\int (a^2-x^2)^{5/2}\,dx = \frac{1}{6} x(a^2-x^2)^{5/2} + \frac{5}{24} a^2 x(a^2-x^2)^{3/2} + \frac{5}{16} a^4 x(a^2-x^2)^{1/2} +$
$+ \frac{5}{16} a^6 \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a}$

13) $\int \frac{dx}{x^{1/2}-1} = 4\log\sqrt{1-\sqrt{x}} - 2(1-\sqrt{x}) + C.$

14) $\int x^7(1+x^4)^{1/2}\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{(1+x^4)^{5/2}}{5} - \frac{(1+x^4)^{3/2}}{2}\right] + C.$

15) $\int \frac{x^3 dx}{(b+ax^2)^{5/2}} = -\frac{+2b+3ax^2}{3a^2(b+ax^2)^{3/2}} + C.$

16) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{3x^3}(2x^2+1) + C.$

17) $\int \frac{dx}{x^6\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{5x}\left\{\frac{8}{3} + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right\} + C.$

18) $\int \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} \operatorname{arc\,sin} x - \frac{\sqrt{1-x^2}}{2}\left[x^{2n-1} + \frac{2n-1}{2n-2}x^{2n-3} + \ldots +\right.$
$\left. + \frac{(2n-1)\ldots 5.3}{(2n-2)\ldots 4.2} x\right] +$

19) $\int \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2n+1}\left[x^{2n} + \frac{2n}{2n-1}x^{2n-2} + \ldots + \frac{2n(2n-2)\ldots 2}{(2n-1)(2n-3)\ldots 1}\right] +$

20) $\int \frac{dx}{x^{2n}\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2n-1}\left[\frac{1}{x^{2n-1}} + \frac{2n-2}{2n-3}\frac{1}{x^{2n-3}} + \ldots + \frac{(2n-2)(2n-4)\ldots}{(2n-3)(2n-5)\ldots}\right.$

21) $$\int \frac{dx}{x^{2n+1}\sqrt{1-x^2}} = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1}{2n(2n-2)\ldots 4.2} \log \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{2n}\left\{\frac{1}{x^{2n}} + \right.$$
$$\left. + \frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{1}{x^{2n-2}} + \ldots + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3}{(2n-2)(2n-4)\ldots 2}\cdot\frac{1}{x^2}\right] + C.$$

22) $$\int \frac{(1+x^{3/4})^{1/3}}{x}\,dx = \frac{4}{3}\,\frac{x^{3/8}}{\sqrt{1+x^{3/4}}} - \frac{4}{3}\operatorname{arctang}\sqrt[8]{\frac{1}{x^3}} + C.$$

23) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x}\,(\sqrt[3]{x}-1)^{1/2}} = 2(\sqrt[3]{x}-1)^{1/2}.\frac{1+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} + C.$$

24) $$\int \frac{x\,dx}{(1-x^3)^{1/2}} = -\frac{2}{3}\,\frac{\sqrt{1-x^3}}{x\sqrt{x}} + C.$$

25) $$\int \frac{x^2dx}{x^2+x+1} = \frac{2x+1}{6} - \frac{1}{6}\log(x^2+x+1) - \frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tang}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

26) $$\int \frac{x^3\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctang}\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} - \frac{1}{4}(x^2+2)\sqrt{1-x^4} + C.$$

27) $$\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,\frac{dx}{\sqrt{1-ax^2+x^4}} = \frac{1}{\sqrt{a-2}}\operatorname{arc\,sec}\frac{x^2-1}{x\sqrt{a-2}} + C.$$

28) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}} = \operatorname{arc\,sin}\frac{x-1}{x\sqrt{2}} + C.$$ 29) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}} = \operatorname{arc\,sin}\frac{x-2}{x\sqrt{5}} + C.$$

30) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = \log\frac{x}{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}} + C.$$

31) $$\int \frac{dx}{(1+2x+3x^2)^{3/2}} = \frac{(3x+1)}{2(1+2x+3x^2)^{1/2}} + C.$$ 32) $$\int \frac{x\,dx}{(1+2x+3x^2)^{3/2}} = -\frac{(1+x)}{2(1+2x+3x^2)^{1/2}} + C.$$

33) $$\int \frac{dx}{(4+5x)\sqrt{1+2x+3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{33}}\log\frac{1+7x+\sqrt{33}\sqrt{1+2x+3x^2}}{4+5x} + C.$$

34) $$\int \sqrt[3]{x-1+\sqrt{x^2-2x-1}}\,dx = \frac{3}{8}[x-1+\sqrt{x^2-2x-1}]^{4/3} +$$
$$+ \frac{3}{2}[x-1+\sqrt{x^2-2x-1}]^{-2/3} + C.$$

35) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{4}\log\frac{\sqrt{1+x^4}-1}{\sqrt{1+x^4}+1} + C.$$

36) $$\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\log\frac{\sqrt{2}\sqrt{x^2-1}+x\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{x-1}-x\sqrt{3}} + C.$$

37) $$\int \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctang}\left[\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right] + C.$$

38) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x} + C.$$ 39) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x} + C.$$

40) $$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2}{2}\left\{\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a} - \frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right\} + C.$$

41) $$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{3}\sqrt{a^2+x^2}\,(x^2-2a^2) + C.$$

42) $$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{3a^4x^3}(2x^2-a^2) + C.$$

43) $$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{3a^4x^3}(2x^2+a^2) + C$$

44) $$\int \frac{x^6dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}\left\{\frac{x^5}{6} + \frac{5a^2x^3}{6.4} + \frac{5.3a^4x}{6.4.2}\right\} + \frac{5.3.1\,a^6}{6.4.2}\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a} + C.$$

45) $\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sqrt{a^2+x^2}\left\{\frac{x^5}{6} - \frac{5a^2x^3}{6.4} + \frac{5.3a^4x}{6.4.2}\right\} - \frac{5.3.1}{6.4.2}a^6 \log(x+\sqrt{a^2+x^2})$.

46) $\int \frac{x^7 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}\left\{\frac{x^6}{7} + \frac{6a^2x^4}{7.5} + \frac{6.4a^4x^2}{7.5.3} + \frac{6.4.2a^6}{7.5.3.1}\right\} + C.$

47) $\int \frac{x^7 dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sqrt{a^2+x^2}\left\{\frac{x^6}{7} - \frac{6a^2x^4}{7.5} + \frac{6.4a^4x^2}{7.5.3} - \frac{6.4.2a^6}{7.5.3.1}\right\} + C.$

48) $\int \frac{dx}{(x^2+b^2)\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{b\sqrt{a^2+b^2}} \operatorname{arc\,tang} \frac{x\sqrt{a^2+b^2}}{b\sqrt{a^2-x^2}} + C.$

49) $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{2a^2\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{x^2-a^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-a^2}-x\sqrt{2}} + C.$

50) $\int \frac{dx}{(x^2+b^2)\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{b\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arc\,tang} \frac{x\sqrt{a^2-b^2}}{b\sqrt{a^2+x^2}} + C.$

Wykazać, że:

51) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \arg\sin\operatorname{hip} x + C = \log(x+\sqrt{x^2+1}) + C'.$

52) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \arg\cos\operatorname{hip} x + C = \log(x+\sqrt{x^2-1}) + C'.$

53) $\int \frac{dx}{1-x^2} = \arg\operatorname{tang}\operatorname{hip} x + C = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} + C'.$

54) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = -\arg\operatorname{cotg}\operatorname{hip} x + C = \frac{1}{2} \log \frac{x-1}{x+1} + C'.$

55) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \arg\sin\operatorname{hip} \frac{x}{a} + C = \log(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C'.$

56) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \arg\cos\operatorname{hip} \frac{x}{a} + C = \log(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C'.$

57) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+x^2}} = \arg\cos\operatorname{hip}(1+x) + C = \log(1+x+\sqrt{2x+x^2}) + C'.$

58) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\arg\sec\operatorname{hip} x + C = \log \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} + C'.$

59) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = -\arg\operatorname{cosec}\operatorname{hip} x + C = \log \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} + C'.$

Rozwiązania IX. Wskazówka. Należy używać odpowiednich podstawień goniometrycznych.

Literatura. D. Gregory. Examples of the processes of the Differential and Integralcalculus. Cambridge 1841. Houël. Cours de calcul infinitesimal. Paris 1878—1881. L. Kiepert. Grundriss der Differential- und Integralrechnung. II. Theil Integralrechnung. Hannover. 1900.

Tematy do rozprawek naukowych.

1. Całkowanie funkcyj algebraicznych, niewymiernych za pomocą podstawień goniometrycznych.

2. O całkach kształtu: $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. O wyprowadzaniu funkcyj goniometrycznych i hyperbolicznych na zasadzie rachunku całkowego.

Wykład X.

Całki złożonych funkcyj goniometrycznych.

1. Całki kształtu: $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$. Wszelką funkcyę wymierną całkowitą, lub ułamkową, złożoną z funkcyj goniometrycznych tej samej zmiennej x, kształtu: $R(\sin x, \cos x, \operatorname{tang} x, ...)$ możemy ostatecznie sprowadzić do funkcyi wymiernej dwu tylko funkcyj goniometrycznych $\sin x$ i $\cos x$, a więc jej całkę do postaci: $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$.

2. Podstawienia $\sin x = u$ względnie $\cos x = u$ sprowadzają tę całkę do całki funkcyi algebraicznej.

W szczególności:

a) kładąc $\sin x = u$, a więc $\cos x = \sqrt{1-u^2}$, $dx = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$, otrzymujemy:

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R(u, \sqrt{1-u^2})\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}; \tag{1}$$

b) a kładąc $\cos = u$, $\sin x = +\sqrt{1-u^2}$, $dx = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$, dostajemy:

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = -\int R(u, \sqrt{1-u^2})\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}. \tag{2}$$

Z powyższych przekształceń dochodzimy do wniosku, że podstawienie $\sin x = u$ jest szczególnie wówczas przydatne, gdy funkcya $R(\sin x, \cos x)$ jest ze względu na $\cos x$ stopnia nieparzystego, czyli, gdy jest kształtu: $R(\sin x, \cos^2 x)\cos x$, otrzymujemy bowiem wówczas:

$$\int R(\sin x, \cos^2 x)\cos x\,dx = \int R(u, 1-u^2)\,du,$$

a więc całkę funkcyi wymiernej, podobnie przydatne jest podstawienie $\cos x = u$, w przypadku, gdy funkcya $R(\sin x, \cos x)$ jest stopnia nieparzystego, ze względu na $\sin x$, a więc ma kształt: $R(\sin^2 x, \cos x)\sin x$.

Przykłady: 1) Wyznaczyć całkę: $\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x \pm a^2}$.

Kładąc $\sin x = u$, otrzymujemy:

$$\int\frac{\cos x dx}{\sin^2 x + a^2} = \int\frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tang}\frac{u}{a}, \text{ zatem: } \int\frac{\cos x dx}{\sin^2 x + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tang}\frac{\sin x}{a} + C.$$

a następnie:

$$\int\frac{\cos x dx}{\sin^2 x - a^2} = \int\frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\log\frac{u-a}{u+a},$$

a zatem:

$$\int\frac{\cos x dx}{\sin^2 x - a^2} = \frac{1}{2a}\log\frac{\sin x - a}{\sin x + a} + C.$$

2) Wyznaczyć całkę: $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x \pm a^2}$.

Kładąc $\cos x = u$, otrzymujemy:

$$\int \frac{\sin x\, dx}{\cos^2 x + a^2} = -\int \frac{du}{u^2 + a^2} = -\frac{1}{a} \operatorname{arctang} \frac{u}{a},$$

zatem:

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x + a^2} = -\frac{1}{a} \operatorname{arctang} \frac{\cos x}{a} + C,$$

a następnie:

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x - a^2} = -\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \frac{u+a}{u-a},$$

zatem:

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x - a^2} = \frac{1}{2a} \log \frac{\cos x + a}{\cos x - a} + C.$$

3. Podstawienie tang $x = u$, a więc: $\sin x = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$, $dx = \frac{du}{1+u^2}$ sprowadza całkę: $\int R(\sin x, \cos x) dx$ do postaci:

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\right) \frac{du}{1+u^2}, \tag{3}$$

a więc zawsze do całki funkcyi wymiernej zmiennej u, skoro funkcya: $R(\sin x, \cos x)$ jest stopnia parzystego ze względu na $\sin x$ i $\cos x$, czyli, skoro jest kształtu: $R(\sin^2 x, \cos^2 x)$.

To samo dotyczy podstawienia: $\operatorname{cotg} x = u$.

Przykład. Wyznaczyć całkę: $2\int \frac{dx}{\sin^2 x - 6 \sin x \cos x + 13 \cos^2 x}$.

Kładąc $\operatorname{tang} x = u$, otrzymujemy:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x - 6 \sin x \cos x + 13 \cos^2 x} = \int \frac{du}{u^2 - 6u + 13} = \int \frac{du}{(u-3)^2 + 4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctang} \frac{u-3}{2},$$

zatem:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x - 6 \sin x \cos x + 13 \cos^2 x} = \frac{1}{2} \operatorname{arctang} \frac{\sin x - 3 \cos x}{2 \cos x} + C.$$

4. Podstawienie tang $\frac{1}{2} x = u$, a więc: $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $dx = \frac{2du}{1+u^2}$, sprowadza całkę: $\int R(\sin x, \cos x) dx$ do postaci:

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = 2\int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right) \frac{du}{1+u^2}, \tag{4}$$

a więc zawsze do funkcyi wymiernej zmiennej u, skoro tylko funkcya: $R(\sin x, \cos x)$ jest wymierną ze względu na $\sin x$ i $\cos x$. To samo dotyczy podstawienia: tang $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, na podstawie którego:

$$\sin x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad dx = -\frac{2du}{1+u^2},$$

a więc:

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = -2\int R\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2}\right) \frac{du}{1+u^2}.$$

Przykłady. 1) Wyznaczyć całkę: $\dfrac{dx}{a\cos x+b}$.

Kładąc $\operatorname{tang}\dfrac{x}{2}=u$, otrzymujemy:

$$\int\frac{dx}{a\cos x+b}=2\int\frac{du}{a(1-u^2)+b(1+u^2)}=2\int\frac{du}{(b-a)u^2+(b+a)},$$

a stąd:

a) w przypadku $a<b$:

$$\int\frac{dx}{a\cos x+b}=\frac{2}{\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{arc\,tang}\left[\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}\operatorname{tang}\frac{x}{2}\right]+C.$$

b) w przypadku $a>b$:

$$\int\frac{dx}{a\cos x+b}=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\log\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\operatorname{tang}\frac{x}{2}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\operatorname{tang}\frac{x}{2}}+C.$$

c) w przypadku $a=b$:

$$\int\frac{dx}{a(\cos x+1)}=\frac{1}{a}\operatorname{tang}\frac{x}{2}+C.$$

2) W podobny sposób możemy wyznaczyć całkę kształtu: $\int\dfrac{dx}{a\sin x+b}$, którą także otrzymać możemy wprost z poprzedniego przykładu, zastępując w niem x przez $\dfrac{\pi}{2}-x$.

Otrzymujemy tedy:

a) w przypadku $a<b$:

$$\int\frac{dx}{a\sin x+b}=-\frac{2}{\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{arc\,tang}\left[\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}\,.\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]+C.$$

b) w przypadku $a>b$:

$$\int\frac{dx}{a\sin x+b}=-\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\log\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+C.$$

c) w przypadku $a=b$:

$$\int\frac{dx}{a(\sin x+1)}=-\frac{1}{a}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+C.$$

5. **Całki kształtu: $\int G(\sin x,\ \cos x)\,dx$.** Jeżeli funkcya $R(\sin x,\ \cos x)$ jest ze względu na funkcye $\sin x$ i $\cos x$ funkcyą całkowitą, wymierną $G(\sin x,\ \cos x)$, wówczas da się przedstawić, jako suma wyrazów, kształtu: $A_{s,k}\sin^s x\cos^k x$.

Mamy tedy:

$$\int G(\sin x,\ \cos x)\,dx=\int\Sigma A_{sk}\sin^s x\cos^k x dx=\Sigma\int A_{s,k}\sin^s x\cos^k x\,dx,\qquad(5)$$

a więc sumę całek typu: $J_{sk}=\int\sin^s x\cos^k x dx$, które możemy wyznaczyć na podstawie wskazówek w wykładzie VIII. podanych, bądźto za pomocą wzorów redukcyjnych, bądź za pomocą t. z. prawideł Żmurki.

6. **Całki kształtu: $\int R(\sin mx,\ \cos nx)\,dx$.** Wszelką funkcyę wymierną ze względu na funkcye goniometryczne $\sin mx$, $\cos nx$, w których spółczynniki m i n są liczbami całkowitemi, możemy przekształcić na funkcyę wy-

mierną ze względu na funkcye goniometryczne $\sin x$ i $\cos x$. W tym celu, otrzymamy z wzoru Moivre'a (patrz T. I. str. 592.):

$$\cos nx + i\sin nx = (\cos x + i\sin x)^n$$

pod założeniem, że wykładnik n jest liczbą całkowitą, podług dwumianu Newtona relacyę: $\cos nx + i\sin nx =$

$$= \left\{\cos^n x - \binom{n}{2}\cos^{n-2}x\sin^2 x + \binom{n}{4}\cos^{n-4}x\sin^4 x - \ldots\right\} +$$

$$+ i\left\{\binom{n}{1}\cos^{n-1}x\sin x - \binom{n}{3}\cos^{n-3}x\sin^3 x + \binom{n}{5}\cos^{n-5}x\sin^5 x - \ldots\right\},$$

z której, porównywując części rzeczywiste i urojone obu stron i zastępując przy $\sin nx$ spółczynnik n przez m, otrzymujemy wzory:

$$\cos nx = \cos^n x - \binom{n}{2}\cos^{n-2}x\sin^2 x + \binom{n}{4}\cos^{n-4}x\sin^4 x - \ldots$$

$$\sin mx = \binom{m}{1}\cos^{m-1}x\sin x - \binom{m}{3}\cos^{m-3}x\sin^3 x + \binom{m}{5}\cos^{m-5}x\sin^5 x - \ldots$$

Przy pomocy tych wzorów sprowadza się funkcya wymierna

$$R(\sin mx, \cos nx)$$

do innej funkcyi wymiernej $R(\sin x, \cos x)$, a zatem całka kształtu:

$\int R(\sin mx, \cos nx)\,dx$ do całki kształtu: $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$,

którą możemy wyznaczyć według wskazówek w poprzednich artykułach podanych.

7. Sprowadzanie całek funkcyj goniometrycznych kształtu: $\int\frac{\cos nx}{\cos^m x}dx$, $\int\frac{\sin nx}{\sin^m x}dx$, do całek kształtu: $J_{s,k} = \int\sin^s x\cos^k x\,dx$. Na podstawie wzoru Moivre'a: $\cos nx + i\sin nx = (\cos x + i\sin x)^n$ otrzymujemy, dla całkowitego, dodatniego n, następujące wzory:

$$\cos nx = \cos^n x - \binom{n}{2}\cos^{n-2}x\sin^2 x + \ldots + (-1)^r\binom{n}{2r}\cos^{n-2r}x\sin^{2r}x + \ldots$$

$$\sin nx = \binom{n}{1}\cos^{n-1}x\sin x - \binom{n}{3}\cos^{n-3}x\sin^3 x + \ldots + (-1)^r\binom{n}{2r+1}\cos^{n-2r-1}x\sin^{2r+1}x + \ldots$$

czyli:

$$\cos nx = \sum_{r=0}^{r \leqq \frac{n}{2}} (-1)^r\binom{n}{r}\cos^{n-2r}x\sin^{2r}x, \qquad (6)$$

$$\sin nx = \sum_{r=0}^{r \leqq \frac{n}{2}} (-1)^r\binom{n}{2r+1}\cos^{n-2r-1}x\sin^{2r+1}x, \qquad (7)$$

rozkładające funkcye goniometryczne $\cos nx$ i $\sin nx$ na iloczyny, kształtu: $\sin^s x\cos^k x$, gdzie $s+k=n$.

Podzieliwszy obie strony powyższych równań tożsamościowych kolejno przez $\cos^m x$, i $\sin^m x$, otrzymujemy następujące wzory całkowe:

$$\int \frac{\cos nx}{\cos^m x}\,dx = \sum_{r=0}^{r \overline{\overline{<}} \frac{n}{2}} (-1)^r \binom{n}{2r} \int \cos^{n-2r-m} x \sin^{2r} x\,dx, \tag{8}$$

$$\int \frac{\sin nx}{\sin^m x}\,dx = \sum_{r=0}^{r \overline{\overline{<}} \frac{n}{2}} (-1)^r \binom{n}{2r+1} \int \cos^{n-2r-1} x \sin^{2r+1-m} x\,dx, \tag{9}$$

$$\int \frac{\cos nx}{\sin^m x}\,dx = \sum_{r=0}^{r \overline{\overline{<}} \frac{n}{2}} (-1)^r \binom{n}{2r} \int \cos^{n-2r} x \sin^{2r-m} x\,dx, \tag{10}$$

$$\int \frac{\sin nx}{\cos^m x}\,dx = \sum_{r=0}^{r \overline{\overline{<}} \frac{n}{2}} (-1)^r \binom{n}{2r+1} \int \cos^{n-2r-1-m} x \sin^{2r+1} x\,dx, \tag{11}$$

które wyznaczanie danych całek sprowadzają do wyznaczania całek typu: $J_{k,s}=\int \cos^k x \sin^s x dx$, w których: $s+k=n-m$.

Ilość tych całek jest widocznie, przy $\cos nx$, równa ilości liczb parzystych, a przy $\sin nx$, ilości liczb nieparzystych, zawartych w granicach 0 i n, więc, dla parzystego n równa $\frac{n}{2}+1$, względnie $\frac{n}{2}$, dla nieparzystego n, zaś stale równa $\frac{n+1}{2}$.

8. **Przykłady.** 1) Wyznaczyć całkę: $J=\int \frac{\cos 3x}{\cos^3 x} dx$.

Mamy tu: $\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x$, a zatem:

$$\int \frac{\cos 3x}{\cos^3 x} dx = \int dx - 3 \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = x - 3 \int \frac{dx}{\cos^2 x} + 3 \int dx.$$

więc:

$$\int \frac{\cos 3x}{\cos^3 x} dx = 4x - 3 \operatorname{tang} x + C.$$

2) $\int \frac{\sin 3x}{\sin^3 x} dx = ?$

Mamy tu: $\sin 3x = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x$; $\frac{\sin 3x}{\sin^3 x} = 3 \frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x$, zatem:

$$\int \frac{\sin 3x}{\sin^3 x} dx = 3 \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx - \int \sin x\,dx = 3 \int \frac{dx}{\sin x} - 4 \int \sin x\,dx,$$

więc:

$$\int \frac{\sin 3x}{\sin^3 x} dx = 3 \log \operatorname{tang} \frac{x}{2} + 4 \cos x + C.$$

9. **Wzory redukcyjne całek kształtu:**

$\int \frac{\cos nx}{\cos^m x} dx$, $\int \frac{\sin nx}{\sin^m x} dx$, $\int \frac{\cos nx}{\sin^m x} dx$, $\int \frac{\sin nx}{\cos^m x} dx$. Dla całek powyższego kształtu, możemy, przy całkowitym spółczynniku n, wyprowadzić także odpowiednie wzory redukcyjne, sprowadzające wyznaczanie tych całek do wyznaczania całek typu: $J_{s,k}=\int \sin^s x \cos^k x\,dx$.

W tym celu wyjdźmy z dwu tożsamości:

$$\sin \alpha = \sin(\alpha-\beta+\beta) = \sin(\alpha-\beta)\cos\beta + \cos(\alpha-\beta)\sin\beta,$$
$$\cos \alpha = \cos(\alpha-\beta+\beta) = \cos(\alpha-\beta)\cos\beta - \sin(\alpha-\beta)\sin\beta.$$

Pierwszą z nich możemy przedstawić także w postaci:

$$\sin\alpha=2\sin(\alpha-\beta)\cos\beta-[\sin(\alpha-\beta)\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)\sin\beta],$$

lub:

$$\sin\alpha=2\cos(\alpha-\beta)\sin\beta+[\sin(\alpha-\beta)\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)\sin\beta],$$

czyli:

$$\sin\alpha=2\sin(\alpha-\beta)\cos\beta-\sin(\alpha-2\beta),$$

lub:

$$\sin\alpha=2\cos(\alpha-\beta)\sin\beta+\sin(\alpha-2\beta).$$

Podobnie możemy przedstawić drugą tożsamość w postaci:

$$\cos\alpha=2\cos(\alpha-\beta)\cos\beta-[\cos(\alpha-\beta)\cos\beta+\sin(\alpha-\beta)\sin\beta],$$

lub:

$$\cos\alpha=-2\sin(\alpha-\beta)\sin\beta+[\cos(\alpha-\beta)\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)\sin\beta],$$

czyli:

$$\cos\alpha=2\cos(\alpha-\beta)\cos\beta-\cos(\alpha-2\beta),$$
$$\cos\alpha=-2\sin(\alpha-\beta)\sin\beta+\cos(\alpha-2\beta),$$

Połóżmy w tych tożsamościach: $\alpha=mx$, $\beta=x$, a otrzymamy następujące cztery wzory goniometryczne:

$$\begin{aligned}
\sin nx&=2\sin(n-1)x\cos x-\sin(n-2)x,\\
\sin nx&=2\cos(n-1)x\sin x+\sin(n-2)x,\\
\cos nx&=2\cos(n-1)x\cos x-\cos(n-2)x,\\
\cos nx&=-2\sin(n-1)x\sin x+\cos(n-2)x,
\end{aligned}\tag{12}$$

z których wypływają następujące cztery wzory redukcyjne:

$$\begin{aligned}
\int\frac{\sin nx}{\cos^m x}dx&=2\int\frac{\sin(n-1)x}{\cos^{m-1}x}dx-\int\frac{\sin(n-2)x}{\cos^m x}dx,\\
\int\frac{\sin nx}{\sin^m x}dx&=2\int\frac{\cos(n-1)x}{\sin^{m-1}x}dx+\int\frac{\sin(n-2)x}{\sin^m x}dx,\\
\int\frac{\cos nx}{\cos^m x}dx&=2\int\frac{\cos(n-1)x}{\cos^{m-1}x}dx-\int\frac{\cos(n-2)x}{\cos^m x}dx,\\
\int\frac{\cos nx}{\sin^m x}dx&=-2\int\frac{\sin(n-1)x}{\sin^{m-1}x}dx+\int\frac{\cos(n-2)x}{\sin^m x}dx.
\end{aligned}\tag{13}$$

Na podstawie otrzymanych wzorów redukcyjnych, możemy, w przypadku, gdy spółczynnik n jest liczbą całkowitą, sprowadzić dane całki do całek typu: $J_{s,k}=\int\sin^s x\cos^k x\,dx$.

10. Inaczej należałoby postąpić przy całkowaniu funkcyj goniometrycznych, w których funkcye $\sin nx$, lub $\cos nx$ występują w mianowniku, a więc przy całkowaniu funkcyj, kształtu:

$$\frac{\cos^m x}{\sin nx},\ \frac{\sin^m x}{\cos nx},\ \text{względnie}\ \frac{\sin^m x}{\sin nx},\ \frac{\cos^m x}{\cos nx}.$$

Funkcye tego rodzaju można rozłożyć na dodajniki. Aby tego dokonać, zastanowimy się najpierw nad rozkładaniem funkcyj $\sin nx$ i $\cos nx$ na czynniki.

11. Rozkładanie funkcyi $\sin nx$ na czynniki. Wychodząc z wzoru:

$$\sin nx=\binom{n}{1}\cos^{n-1}x\sin x-\binom{n}{3}\cos^{n-3}x\sin^3x+\ldots$$

otrzymujemy:

a) dla parzystego spółczynnika $n=2m+1$, wzór:

$$\sin 2mx = \sin x \cos x \left\{ \binom{2m}{1} \cos^{2m-2} x - \binom{2m}{3} \cos^{2m-4} x \sin^2 x + \right.$$
$$\left. + \ldots + (-1)^r \binom{2m}{2r+1} \cos^{2m-2r-2} x \sin^{2r} x + \ldots \right\}. \tag{14}$$

b) dla nieparzystego spółczynnika $n = 2m+1$, zaś wzór:

$$\sin(2m+1)x = \sin x \left\{ \binom{2m+1}{1} \cos^{2m} x - \binom{2m+1}{3} \cos^{2m-2} x \sin^2 x + \right.$$
$$\left. + \ldots + (-1)^r \binom{2m+1}{2r+1} \cos^{2m-2r} x \sin^{2r} x + \ldots \right\}. \tag{15}$$

Zastępując w tych wzorach $\sin^2 x$ przez $1-\cos^2 x$, otrzymujemy:

$$\sin 2m x = \sin x \cos x \sum_{r=0}^{r=m} (-1)^r \binom{2m}{2r+1} \cos^{2m-2r-2} x (1-\cos^2 x)^r, \tag{16}$$

$$\sin(2m+1)x = \sin x \sum_{r=0}^{r=m} (-1)^r \binom{2m+1}{2r+1} \cos^{2m-2r} x (1-\cos^2 x)^r, \tag{17}$$

Rozwinąwszy odnośne potęgi $(1-\cos^2 x)^r$, otrzymamy sumę Σ w pierwszym wzorze, jako wielomian $(2m-2)$-go, a w drugim, jako wielomian $2m$-go stopnia, ze względu na $\cos x$.

Kładąc te wielomiany równemi zeru, otrzymujemy, w pierwszym przypadku, równanie $(2m-2)$-go, a w drugim, równanie $2m$-go stopnia ze względu na $\cos x$. Pierwiastki tych równań możemy wyznaczyć bezpośrednio, bez faktycznego rozwiązywania odnośnych równań $(2m-2)$-go, względnie $2m$-go stopnia.

Zważywszy bowiem, że równanie $\sin 2mx = 0$, ma pierwiastki:

$$x = \frac{\pi}{2m}, \frac{2\pi}{2m}, \frac{3\pi}{2m}, \ldots, \frac{(m-1)\pi}{2m},$$

czyli **kształtu**:

$$x = \frac{r\pi}{2m}, \ (r = 1, \ldots, m-1),$$

równanie **zaś** $\sin(2m+1)x = 0$, ma pierwiastki:

$$x = \frac{\pi}{2m+1}, \frac{2\pi}{2m+1}, \ldots, \frac{m\pi}{2m+1},$$

czyli **kształtu**:

$$x = \frac{r\pi}{2m+1}, \ (r = 1, \ldots, m),$$

przekonamy się, na podstawie wzorów (16) i (17), że funkcya $\sin 2mx$ zawierać musi czynniki kształtu: $\left(\cos x - \cos \frac{r\pi}{2m}\right)$, gdzie $r = 1, 2, \ldots, m-1$, zaś funkcya $\sin(2m+1)x$, czynniki kształtu: $\left(\cos x - \cos \frac{r\pi}{2m+1}\right)$, gdzie $r = 1, 2, 3, \ldots, m$.

Ponieważ jednak odnośne równania są, ze względu na $\cos x$, stopnia parzystego, i zawierają tylko parzyste potęgi funkcyi $\cos x$, zatem pierwiastkami tych równań będą nie tylko wyrazy $\cos \frac{r\pi}{2m}$, względnie $\cos \frac{r\pi}{2m+1}$, lecz także wyrazy $-\cos \frac{r\pi}{2m}$, względnie $-\cos \frac{r\pi}{2m+1}$, z czego wnosimy, że funkcya $\sin mx$ musi mieć czynniki kształtu:

$$\left(\cos x-\cos\frac{r\pi}{2m}\right)\left(\cos x+\cos\frac{r\pi}{2m}\right)=\left(\cos^2 x-\cos^2\frac{r\pi}{2m}\right),\ r=1,\ 2,\ldots,\ m-1\ ,$$

funkcya zaś $\sin(2m+1)x$ musi mieć czynniki kształtu:

$$\left(\cos x-\cos\frac{r\pi}{2m+1}\right)\left(\cos x+\cos\frac{r\pi}{2m+1}\right)=\left(\cos^2 x-\cos^2\frac{r\pi}{2m+1}\right),$$
$$r=1,\ 2,\ldots,\ m.$$

Możemy zatem położyć:

$$\sin 2mx=A\sin x\cos x\left(\cos^2 x-\cos^2\frac{\pi}{2m}\right).$$
$$\left(\cos^2 x-\cos^2\frac{2\pi}{2m}\right).\ldots.\left(\cos^2 x-\cos^2\frac{(m-1)\pi}{2m}\right),$$

czyli:

$$\sin 2mx=A\sin x\cos x\prod_{r=1}^{r=m-1}\left(\cos^2 x-\cos^2\frac{r\pi}{2m}\right),\tag{18}$$

a natomiast: $$\sin(2m+1)x=B\sin x\left(\cos^2 x-\cos^2\frac{\pi}{2m+1}\right).$$
$$\left(\cos^2 x-\cos^2\frac{2\pi}{2m+1}\right).\ldots.\left(\cos^2 x-\cos^2\frac{m\pi}{2m+1}\right),$$

czyli:

$$\sin(2m+1)x=B\sin x\prod_{r=1}^{r=m}\left(\cos^2 x-\cos^2\frac{r\pi}{2m+1}\right),\tag{19}$$

gdzie spółczynniki A i B przedstawiają pewne liczby stałe.

Ażeby je wyznaczyć, porównajmy oba wzory na $\sin 2mx$, (16) i (18) i na $\sin(2m+1)x$, (17) i (19), a więc obie strony tożsamości:

$$\sum_{r=0}^{r=m}(-1)^r\binom{2m}{2r+1}\cos^{2m-2r-2}x(1-\cos^2 x)^r=A\prod_{r=1}^{r=m-1}\left[\cos^2 x-\cos^2\frac{r\pi}{2m}\right],\tag{a}$$

$$\sum_{r=0}^{r=m}(-1)^r\binom{2m+1}{2r+1}\cos^{2m-2r}x(1-\cos^2 x)^r=B\prod_{r=1}^{r=m}\left[\cos^2 x-\cos^2\frac{r\pi}{2m+1}\right].\tag{b}$$

Porównywając w pierwszej tożsamości spółczynniki przy $\cos^{2m-2}x$, otrzymamy wzór:

$$\sum_{r=0}^{r=m}\left[\begin{matrix}2m\\2r+1\end{matrix}\right]=A,$$

czyli:

$$A=\left[\begin{matrix}2m\\1\end{matrix}\right]+\left[\begin{matrix}2m\\3\end{matrix}\right]+\ldots+\left[\begin{matrix}2m\\2m-1\end{matrix}\right],$$

porównywając zaś w drugiej tożsamości spółczynniki przy $\cos^{2m}x$, otrzymamy: wzór:

$$\sum_{r=0}^{r=m}\left[\begin{matrix}2m+1\\2r+1\end{matrix}\right]=B,$$

czyli:

$$B=\left[\begin{matrix}2m+1\\1\end{matrix}\right]+\left[\begin{matrix}2m+1\\3\end{matrix}\right]+\ldots+\left[\begin{matrix}2m+1\\2m+1\end{matrix}\right].$$

Na podstawie dwumianu Newtona, wiemy, że:

$$2^{2m}=(1+1)^{2m}=1+\binom{2m}{1}+\binom{2m}{2}+\ldots+\binom{2m}{2m-1}+\binom{2m}{2m},$$
$$0^{2m}=(1-1)^{2m}=1-\binom{2m}{1}+\binom{2m}{2}-\ldots-\binom{2m}{2m-1}+\binom{2m}{2m}.$$

Odejmując od siebie te równania, otrzymujemy:

$$2^{2m}=2\left\{\begin{bmatrix}2m\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2m\\3\end{bmatrix}+\dots+\begin{bmatrix}2m\\2m-1\end{bmatrix}\right\},$$

czyli:
$$2^{2m}=2A,$$
zatem:
$$A=2^{2m-1}.$$

Podobnie otrzymamy z równań:

$$2^{2m+1}=(1+1)^{2m+1}=1+\begin{bmatrix}2m+1\\1\end{bmatrix}+\dots+\begin{bmatrix}2m+1\\2m\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2m+1\\2m+1\end{bmatrix},$$

$$0^{2m+1}=(1-1)^{2m+1}=1-\begin{bmatrix}2m+1\\1\end{bmatrix}+\dots+\begin{bmatrix}2m+1\\2m\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2m+1\\2m+1\end{bmatrix},$$

po odjęciu:

$$2^{2m+1}=2\left\{\begin{bmatrix}2m+1\\1\end{bmatrix}+\dots+\begin{bmatrix}2m+1\\2m+1\end{bmatrix}\right\},$$

czyli:
$$2^{2m+1}=2B,$$
zatem:
$$B=2^{2m}.$$

Wobec tego wzory, (18) i (19), rozkładające funkcye: $\sin 2mx$ i $\sin(2m+1)x$, na czynniki, przedstawiają się w postaciach:

$$\sin 2mx=2^{2m-1}\sin x\cos x\prod_{r=1}^{r=m-1}\left[\cos^2 x-\cos^2\frac{r\pi}{2m}\right], \tag{20}$$

$$\sin(2m+1)x=2^{2m}\sin x\prod_{r=1}^{r=m}\left[\cos^2 x-\cos^2\frac{r\pi}{2m+1}\right], \tag{21}$$

a że:
$$\cos^2 x-\cos^2\frac{r\pi}{2m}=1-\sin^2 x-1+\sin^2\frac{r\pi}{2m}=\sin^2\frac{r\pi}{2m}-\sin^2 x,$$

przeto, możemy powyższe wzory przedstawić także w postaci:

$$\sin 2mx=2^{2m-1}\sin x\cos x\prod_{r=1}^{r=m-1}\left[\sin^2\frac{r\pi}{2m}-\sin^2 x\right], \tag{22}$$

$$\sin(2m+1)x=2^{2m}\sin x\prod_{r=1}^{r=m}\left[\sin^2\frac{r\pi}{2m+1}-\sin^2 x\right]. \tag{23}$$

12. Rozkładanie funkcyi $\cos nx$ na czynniki jest o tyle prostsze, że we wzorze:

$$\cos nx=\cos^n x-\begin{bmatrix}n\\2\end{bmatrix}\cos^{n-2}x\sin^2 x+\dots+(-1)^r\begin{bmatrix}n\\2r\end{bmatrix}\cos^{n-2r}x\sin^{2r}x+\dots$$

występują tylko parzyste potęgi funkcyi $\sin x$, które dadzą się również wprost przez funkcyę $\cos x$ wyrazić tak, że otrzymujemy:

$$\cos nx=\cos^n x-\begin{bmatrix}n\\2\end{bmatrix}\cos^{n-2}x(1-\cos^2 x)+\dots+(-1)^r\begin{bmatrix}n\\2r\end{bmatrix}\cos^{n-2r}x(1-\cos^2 x)^r+\dots$$

a więc wielomian n-go stopnia ze względu na $\cos x$.

Dla parzystego $n=2m$, mamy tedy:

$$\cos 2mx=\cos^{2m}x-\begin{bmatrix}2m\\2\end{bmatrix}\cos^{2m-2}x(1-\cos^2 x)+\dots+$$
$$+(-1)^r\begin{bmatrix}2m\\2r\end{bmatrix}\cos^{2m-2r}x(1-\cos^2 x)^r+\dots+(-1)^m(1-\cos^2 x)^m,$$

czyli:

$$\cos 2mx = \sum_{r=0}^{r=m} (-1)^r \binom{2m}{2r} \cos^{2m-2r} x (1-\cos^2 x)^r,$$

dla nieparzystego $n=2m+1$ zaś:

$$\cos(2m+1)x = \cos^{2m+1} x - \binom{2m+1}{2} \cos^{2m-1} x (1-\cos^2 x) + \ldots +$$

$$+(-1)^r \binom{2m+1}{2r} \cos^{2m+1-2r} x (1-\cos^2 x)^r + \ldots + (-1)^m \binom{2m+1}{2m} \cos x (1-\cos^2$$

czyli:

$$\cos(2m+1)x = \cos x \sum_{r=0}^{r=m} (-1)^r \binom{2m+1}{2r} \cos^{2m-2r} x (1-\cos^2 x)^r.$$

Mając na uwadze, że równanie $\cos 2mx=0$, ma pierwiastki:

$$x = \frac{\pi}{4m}, \ \frac{3\pi}{4m}, \ldots, \ \frac{(2m-1)\pi}{4m},$$

czyli:
$$x = \frac{(2r+1)\pi}{4m}, \quad (r=0,\ 1, \ldots,\ m-1),$$

równanie $\cos(2m+1)x=0$, zaś pierwiastki:

$$x = \frac{\pi}{4m+2}, \ \frac{3\pi}{4m+2}, \ldots, \ \frac{(2m-1)\pi}{4m+2},$$

czyli:
$$x = \frac{(2r+1)\pi}{4m+2}, \quad (r=0,\ 1, \ldots,\ m-1),$$

i uwzględniając wzory (24) i (25), przekonamy się, że funkcya $\cos 2n$ czynniki kształtu:

$$\left(\cos^2 x - \cos^2 \frac{(2r+1)\pi}{4m}\right), \quad (r=0,\ 1, \ldots,\ m-1),$$

funkcya $\cos(2m+1)x$ zaś, obok czynnika $\cos x$, czynniki kształtu:

$$\left(\cos^2 x - \cos^2 \frac{(2r+1)\pi}{4m+2}\right).$$

Możemy zatem położyć:

$$\cos 2mx = A\left(\cos^2 x - \cos^2 \frac{\pi}{4m}\right)\left(\cos^2 x - \cos^2 \frac{3\pi}{4m}\right) \ldots \left(\cos^2 x - \cos^2 \frac{(2m-1)}{4m}\right.$$

czyli:

$$\cos 2mx = A \prod_{r=0}^{r=m-1} \left(\cos^2 x - \cos^2 \frac{(2r+1)\pi}{4m}\right),$$

zaś:
$$\cos(2m+1)x = B \cos x \prod_{r=0}^{r=m-1} \left(\cos^2 x - \cos^2 \frac{(2r+1)\pi}{4m+2}\right),$$

gdzie, na podstawie tożsamości:

$$\sum_{r=0}^{r=m} (-1)^r \binom{2m}{2r} \cos^{2m-2r} x (1-\cos^2 x)^r = A \prod_{r=0}^{r=m-1} \left(\cos^2 x - \cos^2 \frac{(2r+1)\pi}{4m}\right);$$

otrzymujemy, jako spółczynnik przy $\cos^{2m} x$:

$$A = 1 + \binom{2m}{2} + \binom{2m}{4} + \ldots + \binom{2m}{2m} = 2^{2m-1},$$

podobnie, dostajemy $B=2^{2m}$.

Otrzymujemy zatem:

$$\cos 2mx = 2^{2m-1} \prod_{r=0}^{r=m-1} \left(\cos^2 x - \cos^2 \frac{(2r+1)\pi}{4m}\right), \tag{26}$$

$$\cos(2m+1)x = 2^{2m} \cos x \prod_{r=0}^{r=m-1} \left(\cos^2 x - \cos^2 \frac{(2r+1)\pi}{4m+2}\right). \tag{27}$$

Wprowadzając w miejsce $\cos^2 x$ funkcyę $\sin^2 x$, otrzymujemy także:

$$\cos 2mx = -2^{2m-1} \prod_{r=0}^{r=m-1} \left(\sin^2 \frac{(2r+1)\pi}{4m} - \sin^2 x\right), \tag{28}$$

$$\cos(2m+1) = 2^{2m} \cos x \prod_{r=0}^{r=m-1} \left(\sin^2 \frac{(2r+1)\pi}{4m+2} - \sin^2 x\right), \tag{29}$$

wzory analogiczne do wzorów 20)—23).

13. **Uwaga.** Wzory, rozkładające funkcye $\sin nx$ i $\cos nx$ na czynniki, prowadzą do uwagi godnych relacyj.

Przedstawmy wzory (20) i (21) w postaci:

$$\frac{\sin 2mx}{\sin x} = 2^{2m-1} \cos x \prod_{r=1}^{r=m-1} \left[\cos^2 x - \cos^2 \frac{r\pi}{2m}\right],$$

$$\frac{\sin(2m+1)x}{\sin x} = 2^{2m} \prod_{r=1}^{r=m-1} \left[\cos^2 x - \cos^2 \frac{r\pi}{2m+1}\right],$$

i połóżmy w nich $x = 0$, a otrzymamy, z uwagi, że: $\frac{\sin nx}{\sin x}\Big/_{x=0} = n$, następujące relacye:

$$2m = 2^{2m-1} \prod_{r=1}^{r=m-1} \left(1 - \cos^2 \frac{r\pi}{2m}\right) = 2^{2m-1} \prod_{r=1}^{r=m-1} \sin^2 \frac{r\pi}{2m},$$

$$2m+1 = 2^{2m} \prod_{r=1}^{r=m-1} \left(1 - \cos^2 \frac{r\pi}{2m+1}\right) = 2^{2m} \prod_{r=1}^{r=m-1} \sin^2 \frac{r\pi}{2m+1},$$

a stąd:

$$\prod_{r=1}^{r=m-1} \sin^2 \frac{r\pi}{2m} = \frac{m}{2^{2m-2}}, \quad \prod_{r=1}^{r=m-1} \sin^2 \frac{r\pi}{2m+1} = \frac{2m+1}{2^{2m}},$$

zatem, dwa uwagi godne wzory:

$$\prod_{r=1}^{r=m-1} \sin \frac{r\pi}{2m} = \frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}, \quad \prod_{r=1}^{r=m-1} \sin \frac{r\pi}{2m+1} = \frac{\sqrt{2m+1}}{2^m},$$

czyli:

$$\sin \frac{\pi}{2m} \cdot \sin \frac{2\pi}{2m} \cdot \sin \frac{3\pi}{2m} \ldots \sin \frac{(m-1)\pi}{2m} = \frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}, \tag{30}$$

$$\sin \frac{\pi}{2m+1} \cdot \sin \frac{2\pi}{2m+1} \cdot \sin \frac{3\pi}{2m+1} \ldots \sin \frac{m\pi}{2m+1} = \frac{\sqrt{2m+1}}{2^m}. \tag{31}$$

Biorąc dalej pod uwagę wzory, rozkładające funkcyę $\cos nx$ na czynniki, w postaci:

$$\cos 2mx = 2^{2m-1} \prod_{r=1}^{r=m} \left[\sin^2 \frac{(2r-1)\pi}{4m} - \sin^2 x\right],$$

$$\cos(2m+1)x = 2^{2m}\cos x \prod_{r=1}^{r=m}\left[\sin^2\frac{(2r-1)\pi}{4m+2} - \sin^2 x\right],$$

i kładąc w nich $x=0$, otrzymujemy:

$$1 = 2^{2m-1}\prod_{r=1}^{r=m}\sin^2\frac{(2r-1)\pi}{4m};\quad 1 = 2^{2m}\prod_{r=1}^{r=m}\sin^2\frac{(2r-1)\pi}{4m+2},$$

a stąd:

$$\prod_{r=1}^{r=m}\sin^2\frac{(2r-1)\pi}{4m} = \frac{1}{2^{2m-1}};\quad \prod_{r=1}^{r=m}\sin^2\frac{(2r-1)\pi}{4m+2} = \frac{1}{2^{2m}},$$

zatem:

$$\prod_{r=1}^{r=m}\sin\frac{(2r-1)\pi}{4m} = \frac{\sqrt{2}}{2^m};\quad \prod_{r=1}^{r=m}\sin\frac{(2r-1)\pi}{4m+2} = \frac{1}{2^m},$$

czyli wzory:

$$\sin\frac{\pi}{4m}.\sin\frac{3\pi}{4m}.\sin\frac{5\pi}{4m}\ldots\sin\frac{(2m-1)\pi}{4m} = \frac{\sqrt{2}}{2^m},$$

$$\sin\frac{\pi}{4m+2}.\sin\frac{3\pi}{4m+2}.\sin\frac{5\pi}{4m+2}\ldots\ldots\sin\frac{(2m-1)\pi}{4m+2} = \frac{1}{2^m},$$

z których drugi wynika z pierwszego, jeżeli w nim m zastąpimy przez $m+\frac{1}{2}$.

14. Wyznaczanie całek kształtu: $\int\frac{\cos^n x}{\sin mx}dx$, $\int\frac{\sin^n x}{\sin mx}dx$, $\int\frac{\cos^n x}{\cos mx}dx$, $\int\frac{\sin^n x}{\cos mx}dx$. Zastępując mianowniki $\sin mx$, lub $\cos mx$, otrzymane, według wzorów powyższych artykułów, przez iloczyny czynników, złożonych z tych samych funkcyj $\sin x$, lub $\cos x$, jakie występują w licznikach ułamków, znajdujących się pod znakami całkowymi, przekształcimy dane funkcye ułamkowe na funkcye wymierne, złożone z samych funkcyj $\sin x$, lub $\cos x$. Rozkładając, tak otrzymane wymierne funkcye ułamkowe, na ułamki proste, dochodzimy do szeregu całek, kształtu:

$$\int\frac{dx}{a\cos x+b},\quad \frac{dx}{a\sin x+b},$$

których rozwiązanie poznaliśmy w art. 4.

15. Przykłady. 1) Wyznaczyć całkę: $\int\frac{\sin^2 x}{\sin 3x}dx$.

Mamy tu:

$$\sin 3x = 2^2.\sin x\left(\sin^2\frac{\pi}{3} - \sin^2 x\right),$$

zatem:

$$\frac{\sin^2 x}{\sin 3x} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{3} - \sin^2 x} = \frac{1}{3-4\sin^2 x},$$

a więc:

$$\int\frac{\sin^2 x}{\sin 3x}dx = \int\frac{dx}{3-4\sin^2 x}.$$

Kładąc $\tang x = u$, mamy:

$$\int\frac{dx}{3-4\sin^2 x} = \int\frac{du}{(1+u^2)\left[3-\frac{4u^2}{1+u^2}\right]} = \int\frac{du}{3-u^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\log\frac{\sqrt{3}+u}{\sqrt{3}-u} + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\log\frac{\sqrt{3}+\tang x}{\sqrt{3}-\tang x} + C,$$

zatem:
$$\int \frac{\sin^2 x}{\sin 3x}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{3}} \log \frac{\sqrt{3} + \operatorname{tang} x}{\sqrt{3} - \operatorname{tang} x} + C.$$

2) Wyznaczyć całkę: $\int \frac{\cos^3 x}{\cos 3x}\,dx.$

Mamy tu:
$$\cos 3x = 2^2 . \cos x \left(\cos^2 x - \cos^2 \frac{\pi}{6}\right),$$

zatem:
$$\frac{\cos^3 x}{\cos 3x} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x - \cos^2 \frac{\pi}{6}} = \frac{\cos^2 x}{4\cos^2 x - 3},$$

a więc:
$$\int \frac{\cos^3 x}{\cos 3x}\,dx = \int \frac{\cos^2 x}{4\cos^2 x - 3}\,dx.$$

Kładąc tu znowu $\operatorname{tang} x = u$, mamy:
$$\int \frac{\cos^2 x\,dx}{4\cos^2 x - 3} = \int \frac{du}{(1+u^2)[1-3u^2]},$$

a że:
$$\frac{1}{(1+u^2)(1-3u^2)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+u^2} + \frac{3}{8}\left[\frac{1}{1-u\sqrt{3}} + \frac{1}{1+u\sqrt{3}}\right],$$

przeto, otrzymujemy:
$$\int \frac{du}{(1+u^2)(1-3u^2)} = \frac{1}{4} \operatorname{arc\,tang} u + \frac{\sqrt{3}}{8} \log \frac{1+u\sqrt{3}}{1-u\sqrt{3}},$$

a zatem:
$$\int \frac{\cos^3 x}{\cos 3x}\,dx = \frac{x}{4} + \frac{\sqrt{3}}{8} \log \frac{1+\sqrt{3}\operatorname{tang} x}{1-\sqrt{3}\operatorname{tang} x} + C.$$

16. Całki kształtu: $\int \sin^s mx \cos^k nx\,dx$, możemy w przypadkach, gdy wykładniki s i k są liczbami całkowitemi, dodatniemi, podobnie, jak całki kształtu: $\int \sin^s x \cos^k x\,dx$, wyznaczyć za pomocą rozkładania iloczynu: $\sin^s mx \cos^k nx$ na dodajniki.

Kładąc mianowicie:
$$\cos nx + i \sin nx = e^{nxi} = u^n,$$
$$\cos nx - i \sin nx = e^{-nxi} = u^{-n},$$

a zatem:
$$\cos nx = \frac{u^n + u^{-n}}{2}, \quad \sin mx = \frac{u^m - u^{-m}}{2i},$$

otrzymujemy iloczyn:
$$\sin^s mx \cos^k nx = \frac{(u^m - u^{-m})^s (u^n + u^{-n})^k}{2^{s+k} i^s}.$$

Po wykonaniu wskazanych działań, uwzględniając uwagi, w art. 12. str. 127. podane, otrzymujemy stąd:
$$\sin^s mx \cos^k nx = \frac{\Sigma A_r (u^{\alpha_r} + (-1)^s u^{-\alpha_r})}{2^{s+k} i^s},$$

a więc w przypadku, gdy s jest liczbą parzystą, wzór:
$$\sin^s mx \cos^k nx = \frac{\Sigma A_r (u^{\alpha_r} + u^{-\alpha_r})}{2^{s+k} (-1)^{s/2}},$$

natomiast w przypadku, gdy s jest liczbą nieparzystą, wzór:
$$\sin^s mx \cos^k nx = \frac{\Sigma A_r (u^{\alpha_r} - u^{-\alpha_r})}{2^{s+k} (-1)^{s/2}},$$

skąd, mając na uwadze, że: $u^\alpha + u^{-\alpha} = 2\cos \alpha x$, $u^\alpha - u^{-\alpha} = 2i \sin \alpha x$, dostajemy, w przypadku parzystego s, rozwinięcie:

$$\sin^s mx \cos^k nx = \frac{\Sigma 2A_r \cos \alpha_r x}{2^{s+k}(-1)^{s/2}},$$

a natomiast, w przypadku nieparzystego s, rozwinięcie:

$$\sin^s mx \cos^k nx = \frac{\Sigma 2A_r \sin \alpha_r x}{2^{s+k}(-1)^{\frac{s-1}{2}}}.$$

Iloczyn $\sin^s mx \cos^k nx$ da się więc, przy całkowitych, dodatnich wykładnikach s i k przedstawić, jako suma sinusów, lub cosinusów α_r-krotności zmiennej x z pewnemi, ściśle określonemi spółczynnikami A_r.

To samo dotyczy wogóle iloczynów, kształtu:

$$P = \sin^{s_1} m_1 x \,.\, \sin^{s_2} m_2 x \,\ldots\, \cos^{k_1} n_1 x \,.\, \cos^{k_2} n_2 x \ldots$$

a zatem całki kształtu $\int P dx$ sprowadzają się ostatecznie do całek:

$$\int \cos \alpha x \, dx = \frac{\sin \alpha x}{\alpha} + C, \quad \int \sin \alpha x \, dx = -\frac{\cos \alpha x}{\alpha} + C.$$

17. Przykład. Wyznaczyć całkę: $J = \int \sin^3 2x \,.\, \cos^3 3x \,.\, dx$. Mamy tu:

$$\sin^3 2x \,.\, \cos^3 3x = \frac{(u^2 - u^{-2})^3 (u^3 + u^{-3})^2}{2^5 \,.\, i^3} = \frac{i}{32}(u^6 - 3u^2 + 3u^{-2} - u^{-6})(u^6 + 2 + u^{-6}) =$$

$$= \frac{i}{32}[(u^{12} - u^{-12}) - 3(u^8 - u^{-8}) + 2(u^6 - u^{-6}) + 3(u^4 - u^{-4}) - 6(u^2 - u^{-2})] =$$

$$= -\frac{1}{16}[\sin 12x - 3 \sin 8x + 2 \sin 6x + 3 \sin 4x - 6 \sin 2x],$$

zatem:

$$\int \sin^3 2x \,.\, \cos^3 3x \,.\, dx = \frac{1}{16}\left\{\frac{\cos 12x}{12} - \frac{3\cos 8x}{8} + \frac{\cos 6x}{3} + \frac{3\cos 4x}{4} - 3\cos 2x\right\} + C.$$

Ćwiczenia X.

1) $\int \frac{\cos x \, dx}{2\sin^2 x + 3 \sin x + 1} = \log \frac{2 \sin x + 1}{2(\sin x + 1)} + C.$

2) $\int \frac{\cos x + \frac{1}{2} \sin 2x}{\sin^3 x - 3 \sin^2 x + 3 \sin 3 - 1} dx = -\frac{\sin x}{\sin^2 x - 2 \sin x + 1} + C.$

3) $\int \frac{\cos^2 x \sin x}{2 + \cos^2 x - \cos^4 x} dx = \frac{1}{6} \log \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} + \frac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{arc\,tang} \frac{\cos x}{\sqrt{2}} + C.$

4) $\int \frac{dx}{\cos x} = \log \frac{1 + \sin x}{\cos x} + C.$ 5) $\int \frac{dx}{\sin x} = \log \frac{\sin x}{1 + \cos x} + C.$

6) $\int \frac{\sin^2 x \cos^2 x \, dx}{\cos^6 x - \sin^6 x} = \frac{1}{6} \log \frac{\operatorname{tang}^3 x + 1}{\operatorname{tang}^3 x - 1} + C.$

7) $\int \frac{a \cos x + b \sin x}{\cos^2 x \sin x} dx = a \log \operatorname{tang} x + b \operatorname{tang} x + C.$

8) $\int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tang} \left(\frac{b}{a} \operatorname{tang} x\right) + C.$

9) $\int \frac{dx}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^2} = \frac{b^2 - a^2}{2a^2 b^2} \frac{\cos x \sin x}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} + \frac{b^2 + a^2}{2 a^3 b^3} \operatorname{arc\,tang} \left(\frac{b}{a} \operatorname{tang} x\right) + C.$

10) $\int \frac{\cos^2 x dx}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^2} = \frac{\cos x \sin x}{2a^2 (a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)} + \frac{1}{2 a^3 b} \operatorname{arc\,tang} \left(\frac{b}{a} \operatorname{tang} x\right) + C.$

11) $\int \frac{\sin^2 x dx}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^2} = -\frac{\cos x \sin x}{2b^2 (a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)} + \frac{1}{2 a b^3} \operatorname{arc\,tang} \left(\frac{b}{a} \operatorname{tang} x\right) + C.$

12) $\int \frac{dx}{a \sin^2 x + b \cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tang} \left(\sqrt{\frac{b}{a}} \operatorname{tang} x\right) + C =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \log \frac{b + \sqrt{-ab} \,.\, \operatorname{tang} x}{b - \sqrt{-ab} \,.\, \operatorname{tang} x} + C.$$

13) $\int \frac{dx}{\cos x - 2} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tang}\left[\sqrt{3} \operatorname{tang} \frac{x}{2}\right] + C.$

14) $\int \frac{dx}{1-2\cos x} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \log \frac{1+\sqrt{3} \,.\, \operatorname{tang}\frac{1}{2}x}{1-\sqrt{3} \,.\, \operatorname{tang}\frac{1}{2}x} + C.$

15) $\int \frac{dx}{a\cos x + b} = \frac{2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \operatorname{arc\,tang}\left[\sqrt{\frac{b-a}{b+a}} \operatorname{tang}\frac{x}{2}\right] + C =$

$= \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \log \frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b} \,.\, \operatorname{tang}\frac{x}{2}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b} \,.\, \operatorname{tang}\frac{x}{2}} + C.$

16) $\int \frac{dx}{a\sin x + b} = -\frac{2}{\sqrt{b^2-a^2}} \operatorname{arc\,tang}\left[\sqrt{\frac{b-a}{b+a}} \operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right] + C =$

$= -\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \log \frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} + C.$

17) $\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c} = \frac{2}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}} \operatorname{arc\,tang} \frac{(c-a)\operatorname{tang}\frac{1}{2}x}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}} + C =$

$= -\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2-c^2}} \log \frac{(c-a)\operatorname{tang}\frac{1}{2}x + b + \sqrt{a^2+b^2-c^2}}{(c-a)\operatorname{tang}\frac{1}{2}x + b - \sqrt{a^2+b^2-c^2}} + C.$

18) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + C.$

19) $\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \log\operatorname{tang}\frac{x+\alpha}{2} + C$, gdzie $\operatorname{tang}\alpha = \frac{b}{a}$.

20) $\int \frac{(1+\sin x)\,dx}{\sin x(1+\cos x)} = \frac{1}{4}\operatorname{tang}^2\frac{x}{2} + \operatorname{tang}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\log\operatorname{tang}\frac{x}{2} + C.$

21) $\int \sin^{2m+1} x\,dx = -\frac{\cos x}{1} + \binom{m}{1}\frac{\cos^3 x}{3} - \binom{m}{2}\frac{\cos^5 x}{5} + \binom{m}{3}\frac{\cos^7 x}{7} - \ldots + C.$

22) $\int \cos^{2m+1} x\,dx = \frac{\sin x}{1} - \binom{m}{1}\frac{\sin^3 x}{3} + \binom{m}{2}\frac{\sin^5 x}{5} - \binom{m}{3}\frac{\sin^7 x}{7} + \ldots + C.$

23) $\int \operatorname{tang}^{2m+1} x\,dx = \frac{\operatorname{tang}^{2m} x}{2m} - \frac{\operatorname{tang}^{2m-2} x}{2m-2} + \ldots + C.$

24) $\int \sin^7 x\,dx = -\cos x + \cos^3 x - \frac{3}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x + C.$

25) $\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \operatorname{tang} x + \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3 x + C.$ 26) $\int \frac{dx}{\sin^4 x} = -\operatorname{cotg} x - \frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3 x + C.$

27) $\int \frac{\sin 2x}{\sin x}\,dx = 2\sin x + C.$ 28) $\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x}\,dx = -2\log\sin x + C.$

29) $\int \frac{\sin 2x}{\sin^3 x}\,dx = -\frac{2}{\sin^2 x} + C.$ 30) $\int \frac{\sin 2x}{\sin^n x}\,dx = -\frac{2}{(n-2)\sin^{n-2} x} + C.$

31) $\int \frac{\sin 2x}{\cos x}\,dx = -2\cos x + C.$ 32) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x}\,dx = -2\log\cos x + C.$

33) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x}\,dx = \frac{2}{\cos x} + C.$ 34) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^n x}\,dx = \frac{2}{(n-2)\cos^{n-2} x} + C.$

35) $\int \frac{\cos 2x}{\sin x}\,dx = 2\cos x + \log\operatorname{tang}\frac{x}{2} + C.$ 36) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x}\,dx = -2x - \operatorname{cotg} x + C.$

37) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^3 x}\,dx = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{3}{2}\log\operatorname{tang}\frac{x}{2} + C.$

38) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^4 x}\,dx = -\frac{\cos x}{3\sin^3 x} + \frac{4}{3}\operatorname{cotang} x + C.$

39) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x}\,dx = 2\sin x + \log\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + C.$ 40) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}\,dx = 2x - \operatorname{tang} x + C$

41) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^3 x}\,dx = -\frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{3}{2}\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + C.$

42) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^4 x}\,dx = \frac{\sin x}{3\cos^3 x} - \frac{4}{3}\operatorname{tang} x + C.$

Wykazać, że:

43) $\cos 2x = 2\left(\cos^2 x - \cos^2\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\sin^2\frac{\pi}{4} - \sin^2 x\right).$

44) $\sin 3x = 4\sin x\left(\cos^2 x - \cos^2\frac{\pi}{3}\right) = 4\sin x\left(\sin^2\frac{\pi}{3} - \sin^2 x\right).$

45) $\cos 3x = 4\cos x\left(\cos^2 x - \cos^2\frac{\pi}{6}\right) = 4\cos x\left(\sin^2\frac{\pi}{6} - \sin^2 x\right).$

46) $\sin 4x = 8\sin x\cos x\left(\cos^2 x - \cos^2\frac{\pi}{4}\right) = 8\sin x\cos x\left(\sin^2\frac{\pi}{4} - \sin^2 x\right).$

47) $\cos 4x = 8\left(\cos^2 x - \cos^2\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos^2 x - \cos^2\frac{3\pi}{8}\right) =$

$= 8\left(\sin^2\frac{\pi}{8} - \sin^2 x\right)\left(\sin^2\frac{3\pi}{8} - \sin^2 x\right).$

48) $\sin 5x = 16\sin x\left(\cos^2 x - \cos^2\frac{\pi}{5}\right)\left(\cos^2 x - \cos^2\frac{2\pi}{5}\right) =$

$= 16\sin x\left(\sin^2\frac{\pi}{5} - \sin^2 x\right)\left(\sin^2\frac{2\pi}{5} - \sin^2 x\right).$

49) $\cos 5x = 16\cos x\left(\cos^2 x - \cos^2\frac{\pi}{10}\right)\left(\cos^2 x - \cos^2\frac{3\pi}{10}\right) =$

$= 16\cos x\left(\sin^2\frac{\pi}{10} - \sin^2 x\right)\left(\sin^2\frac{3\pi}{10} - \sin^2 x\right).$

50) $\sin 2mx = 2^{2m-1}\sin x\cos x\left(\cos^2 x - \cos^2\frac{\pi}{2m}\right)\left(\cos^2 x - \cos^2\frac{2\pi}{2m}\right)\ldots\left(\cos^2 x - \cos^2\frac{(m-1)\pi}{2m}\right).$

$= 2^{2m-1}\sin x\cos x\left(\sin^2\frac{\pi}{2m} - \sin^2 x\right)\left(\sin^2\frac{2\pi}{2m} - \sin^2 x\right)\ldots\left(\sin^2\frac{(m-1)\pi}{2m} - \sin^2 x\right).$

51) $\cos 2mx = 2^{2m-1}\left(\cos^2 x - \cos^2\frac{\pi}{4m}\right)\left(\cos^2 x - \cos^2\frac{3\pi}{4m}\right)\ldots\left(\cos^2 x - \cos^2\frac{(2m-1)\pi}{4m}\right) =$

$= 2^{2m-1}\left(\sin^2\frac{\pi}{4m} - \sin^2 x\right)\left(\sin^2\frac{3\pi}{4m} - \sin^2 x\right)\ldots\left(\sin^2\frac{(2m-1)\pi}{4m} - \sin^2 x\right).$

52) $\sin(2m+1)x = 2^{2m}\sin x\left(\cos^2 x - \cos^2\frac{\pi}{2m+1}\right)\left(\cos^2 x - \cos^2\frac{2\pi}{2m+1}\right)\ldots$

$\ldots\left(\cos^2 x - \cos^2\frac{m\pi}{2m+1}\right) = 2^{2m}\sin x\left(\sin^2\frac{\pi}{2m+1} - \sin^2 x\right)\left(\sin^2\frac{2\pi}{2m+1} - \sin^2 x\right)\ldots\left(\sin^2\frac{m\pi}{2m+1} - \sin^2 x\right).$

53) $\cos(2m+1)x = 2^{2m}\cos x\left(\cos^2 x - \cos^2\frac{\pi}{4m+2}\right)\cdot\left(\cos^2 x - \cos^2\frac{3\pi}{4m+2}\right)\ldots$

$\ldots\left(\cos^2 x - \cos^2\frac{(2m-1)\pi}{4m+2}\right) = 2^{2m}\cos x\left(\sin^2\frac{\pi}{4m+2} - \sin^2 x\right)\left(\sin^2\frac{3\pi}{4m+2} - \sin^2 x\right)\ldots$

$\ldots\left(\sin^2\frac{(2m-1)\pi}{4m+2} - \sin^2 x\right).$

Wyprowadzić następujące całki:

54) $\int \frac{dx}{\sin 2x} = \frac{1}{2}\log\operatorname{tang} x + C.$ 55) $\int \frac{dx}{\cos 2x} = \frac{1}{2}\log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + C.$

56) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sin 2x} = \frac{1}{2}\log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C.$

57) $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos 2x} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \log \left[\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2}\right) \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}\right)\right] + C.$

58) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin 2x} = \frac{1}{2} \log \operatorname{tang} \frac{x}{2} + C.$ 59) $\int \frac{\cos x\,dx}{\cos 2x} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2}\right)} + C.$

60) $\int \frac{dx}{\sin 3x} = \frac{1}{3} \log \operatorname{tang}\left(\frac{3}{2}x\right).$ 61) $\int \frac{dx}{\cos 3x} = \log \operatorname{tang} \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right).$

62) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin 3x} = \frac{1}{6} \log \frac{\sin^3 x}{\sin 3x} + C.$ 63) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sin 3x} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \log \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)} + C.$

64) $\int \frac{\cos x\,dx}{\cos 3x} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \log \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)} + C.$ 65) $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos 3x} = \frac{1}{6} \log \frac{\cos^3 x}{\cos 3x} + C.$

66) $\int \frac{\cos^2 x\,dx}{\sin 3x} = \frac{1}{3} \log \operatorname{tang} \frac{3}{2} x - \frac{1}{4} \log \left[\cos \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} + x\right) . \cos \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\right] + C.$

67) $\int \frac{\cos^2 x}{\cos 3x} dx = \frac{1}{4} \log \left[\operatorname{tang} \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\right] + C.$

68) $\int \frac{\sin^2 x\,dx}{\sin 3x} = \frac{1}{4} \log \left[\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2}\right) . \operatorname{cotang}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right)\right] + C.$

69) $\int \frac{\sin^2 x\,dx}{\cos 3x} = \frac{1}{3} \log \operatorname{tang} \left[\frac{\pi}{4} + \frac{3x}{2}\right] - \frac{1}{4} \log \left[\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{12} + \frac{x}{2}\right) \operatorname{cotang}\left(\frac{\pi}{12} - \frac{x}{2}\right)\right] + C.$

70) $\int \sin^{n-1} x \cos(n+1)x \,.\, dx = \frac{\sin^n x \cos nx}{n} + C.$

71) $\int \sin^{n-1} x \sin(n+1)x \,.\, dx = \frac{\sin^n x \sin nx}{n} + C.$

72) $\int \cos^{n-1} x \cos(n+1)x \,.\, dx = \frac{\cos^n x \sin nx}{n} + C.$

73) $\int \cos^{n-1} x \sin(n+1)x \,.\, dx = -\frac{\cos^n x \cos nx}{n} + C.$

Rozwiązania X. 1)—2) $\sin x = u$. 3) $\cos x = u$. 4)—5) $\sin x = u$. 6)—12) $\operatorname{tang} x = u$. —20) $\operatorname{tang} \frac{1}{2} x = u$. 27)—42) wyrazić $\sin nx$ i $\cos nx$ przez $\sin x$ i $\cos x$. 43)—53) patrz t. 10. 54)—69) przez rozkładanie funkcyj na ułamki częściowe. 70) — 73) przez rozkła-nie funkcyj na dodajniki.

Literatura. A. Cauchy. Résumé des leçons données à l'ecole polytechnique sur le lcul infinitesimal. (Oeuvres complètes d' Augustin Cauchy). Paris 1899. H. A. Lorentz. ehrbuch der Differential- und Integralrechnung unter Mitwirkung des Verfassers über-etzt von Dr. G. C. Schmidt. Leipzig, 1900.

Tematy do rozprawek naukowych.

1. O rozkładaniu funkcyj $\sin nx$ i $\cos nx$ na czynniki.
2. O rozkładaniu funkcyj: $\frac{\cos^m x}{\cos nx}$ i $\frac{\sin^m x}{\sin nx}$, $\frac{\sin^m x}{\sin nx}$ i $\frac{\sin^m x}{\cos nx}$ na ułamki częściowe.
3. Ogólne wzory całek kształtu: $\int \frac{\cos^m x}{\cos nx} dx$, $\int \frac{\cos^m x}{\sin nx} dx$, $\int \frac{\sin^m x}{\sin nx} dx$, $\int \frac{\sin^m x}{\cos nx} dx$.

Wykład XI.

Całki funkcyj wykładniczych i logarytmicznych.

1. Całki funkcyj, złożonych z funkcyj wykładniczych dadzą się tylko w szczególnych przypadkach wyrazić przez funkcye znane i podać w formie skończonej. Zależy to głównie od tej okoliczności, czy dana całka funkcyi, złożonej z funkcyj wykładniczych, da się, za pomocą stosownych podstawień, sprowadzić do całki funkcyi algebraicznej, wymiernej, nowej zmiennej, czy też da się, za pomocą stosowania metody całkowania przez części, sprowadzić ostatecznie do znanych całek.

Zajmiemy się najpierw ważniejszymi typami całek złożonych z funkcyj wykładniczych, mając na uwadze całki zasadnicze:

$$\int e^x\,dx = e^x + C,\quad \int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + C,$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C,\quad \int a^{mx}\,dx = \frac{a^{mx}}{m\log a} + C. \tag{1}$$

2. Całki kształtu: $\int R(e^{ax})dx$ dadzą się za pomocą podstawienia: $e^{ax}=z$, na podstawie którego otrzymujemy: $ae^{ax}dx=dz$, a więc $dx=\frac{1}{a}\frac{dz}{z}$, sprowadzić do całek funkcyj wymiernych.

Otrzymujemy bowiem:

$$\int R(e^{ax})\,dx = \frac{1}{a}\int\frac{R(z)}{z}\,dz \tag{2}$$

Do tego rodzaju należą w ogólności całki kształtu:

$$\int R(a^{\alpha x},\ a^{\beta x},\ \dots,\ a^{\lambda x})\,dx,$$

w których funkcya R jest funkcyą wymierną ze względu na funkcye wykładnicze: $a^{\alpha x}$, $a^{\beta x}, \dots, a^{\lambda x}$, a spółczynniki $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ są liczbami wymiernemi, całkowitemi, lub ułamkowemi.

Jeżeli przez n oznaczymy wspólny mianownik ułamków; $\alpha, \beta, \dots, \lambda$, natenczas, podstawiając $a^x=z^n$, a więc $dx=\frac{n}{\log a}\frac{dz}{z}$, otrzymujemy:

$$\int R(a^{\alpha x},\ a^{\beta x},\ \dots,\ a^{\lambda x})\,dx = \frac{n}{\log a}\int R(z^{\alpha n},\ z^{\beta n},\ \dots,\ z^{\lambda n})\frac{dz}{z}, \tag{3}$$

a więc daną całkę, wobec całkowitych wykładników: αn, $\beta n, \dots, \lambda n$, sprowadzoną do całki funkcyi wymiernej ze względu na nową zmienną z. Mając na uwadze, że $a=e^{\log a}$, a więc $a^x=e^{x\log a}$, gdzie e jest zasadą logarytmów naturalnych, możemy też całki powyższego typu przedstawić w postaci:

$$\int R(e^{\alpha_1 x}, e^{\beta_1 x}, \ldots, e^{\lambda_1 x})\,dx,$$

w której spółczynniki: $\alpha_1 = \alpha \log a$, $\beta_1 = \beta \log a, \ldots, \lambda_1 = \lambda \log a$, pozostają do siebie w stosunku wymiernym. Kładąc $\log a = m$, otrzymujemy daną funkcyę w postaci:

$$R(e^{\alpha_1 x}, e^{\beta_1 x}, \ldots, e^{\lambda_1 x}) = R(e^{m\alpha x}, e^{m\beta x}, \ldots, e^{m\lambda x}) = R[(e^{mx})^\alpha, (e^{mx})^\beta, \ldots, (e^{mx})^\lambda] = F(e^{mx}),$$

a więc, przedstawioną w postaci funkcyi algebraicznej, wymiernej. lub niewymiernej, zawierającej jednak, jako niewymierność, wyłącznie ułamkowe potęgi funkcyi wykładniczej e^{mx}, której całkę zawsze wyznaczyć możemy.

3. Przykłady. 1) Wyznaczyć całkę kształtu: $\int \frac{dx}{pa^x + q}$. Podstawiając $a^x = z$, zatem: $dx = \frac{1}{\log a} \cdot \frac{dz}{z}$, otrzymamy: $\int \frac{dx}{pa^x + q} = \frac{1}{\log a} \int \frac{dz}{z(pz+q)}$,

a że:

$$\frac{1}{z(pz+q)} = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{z} - \frac{p}{q} \cdot \frac{1}{pz+q},$$

a więc:

$$\int \frac{dz}{z(pz+q)} = \frac{1}{q} \log z - \frac{1}{q} \log(pz+q) = \frac{1}{q} \log \frac{z}{pz+q},$$

przeto otrzymujemy, ostatecznie:

$$\int \frac{dx}{pa^x + q} = \frac{1}{q \log a} \log \frac{a^x}{pa^x + q} + C.$$

2) Wyznaczyć całkę: $J = \int \frac{dx}{e^{ax} + e^{-ax}}$. Kładąc $e^{ax} = z$, a zatem $ae^{ax}\,dx = dz$, a więc $dx = \frac{1}{a} \frac{dz}{z}$, otrzymujemy:

$$\int \frac{dx}{e^{ax} + e^{-ax}} = \frac{1}{a} \int \frac{dz}{z} \cdot \frac{1}{z + \frac{1}{z}} = \frac{1}{a} \int \frac{dz}{z^2 + 1} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tang} z + C.$$

zatem.

$$\int \frac{dx}{e^{ax} + e^{-ax}} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tang}(e^{ax}) + C.$$

3) Wyznaczyć całkę: $J = \int \frac{e^{1/2 x}\,dx}{e^x + 1}$. Kładąc $e^x = z^2$, a więc $e^{1/2 x} = z$, $dx = 2\frac{dz}{z}$, otrzymujemy:

$$\int \frac{e^{1/2 x}\,dx}{e^x + 1} = 2 \int \frac{dz}{z^2 + 1} = 2 \operatorname{arc\,tang} z + C,$$

zatem:

$$\int \frac{e^{1/2 x}\,dx}{e^x + 1} = 2 \operatorname{arc\,tang} (\sqrt{e^x}) + C.$$

4. Całki funkcyj niewymiernych, złożonych z funkcyj wykładniczych dadzą się także w tych przypadkach wyznaczyć, w których one, za pomocą stosownych podstawień, dadzą się sprowadzić do całek funkcyi wymiernej nowej zmiennej.

Mając n. p. wyznaczyć całkę, kształtu

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{pa^x + q}},$$

podstawmy: $pa^x + q = z^2$, a więc $p \cdot a^x \log a\,dx = 2z\,dz$, zatem:

$$dx = \frac{2}{\log a} \cdot \frac{z\,dz}{z^2 - q},$$

a otrzymamy:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{pa^x + q}} = \frac{2}{\log a} \int \frac{dz}{z^2 - q}.$$

W przypadku, gdy $q > 0$, mamy:

$$\frac{1}{z^2-q} = \frac{1}{2\sqrt{q}}\left\{\frac{1}{z-\sqrt{q}} - \frac{1}{z+\sqrt{q}}\right\}, \quad \int\frac{dz}{z^2-q} = \frac{1}{2\sqrt{q}}\log\frac{z-\sqrt{q}}{z+\sqrt{q}} + C,$$

zatem:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{pa^x+q}} = \frac{1}{\sqrt{q}\log a}\log\frac{\sqrt{pa^x+q}-\sqrt{q}}{\sqrt{pa^x+q}+\sqrt{q}} + C, \ (q>0).$$

W przypadku, gdy $q < 0$, otrzymujemy zaś:

$$\int\frac{dz}{z^2-q} = \frac{1}{\sqrt{-q}}\operatorname{arctang}\frac{z}{\sqrt{-q}} + C,$$

zatem:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{pa^x+q}} = \frac{2}{\sqrt{-q}\cdot\log a}\operatorname{arctang}\frac{\sqrt{pa^x+q}}{\sqrt{-q}} + C, \ (q<0).$$

5. Całka kształtu: $\int R(x).e^{ax}.dx$, w której $R(x)$ jest wymierną funkcyą ułamkową, niewłaściwą, rozpada się, skoro: $R(x) = G(x) + \frac{G_{n-1}(x)}{G_n(x)}$ na dwie całki: $\int G(x)e^{ax}dx$ i $\int\frac{G_{n-1}(x)}{G_n(x)}e^{ax}dx$, gdzie $G(x)$ przedstawia funkcyę wymierną, całkowitą, a iloraz $\frac{G_{n-1}(x)}{G_n(x)}$ funkcyę ułamkową, właściwą.

Pierwsza całka, kształtu: $\int G(x)e^{ax}dx$, sprowadza się do całek, kształtu $\int x^n e^{ax}dx$, druga, kształtu: $\int\frac{G_{n-1}(x)}{G_n(x)}e^{ax}dx$ rozpada się, po rozłożeniu funkcyi ułamkowej na ułamki proste, ostatecznie, na całki kształtu:

$$\int\frac{e^{ax}dx}{x-\alpha}, \text{ lub } \int\frac{e^{ax}dx}{(x-\alpha)^n},$$

których wyznaczaniem się zajmiemy.

6. Całka kształtu: $\int x^n e^{ax}dx$, da się, przy całkowitym wykładniku n, zawsze wyznaczyć. W tym celu, zastosujemy metodę całkowania przez części.

Kładąc:	a zatem:
$x^n = u$	$du = nx^{n-1}dx$,
$e^{ax}dx = dv$	$v = \frac{e^{ax}}{a}$

dochodzimy, mianowicie, do wzoru:

$$\int x^n e^{ax}dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx, \tag{4}$$

na podstawie którego, możemy widocznie wykładnik n zmniejszyć do zera.

Powtarzając działania, powyższym wzorem wskazane, otrzymujemy kolejno:

$$\int x^{n-1}e^{ax}dx = \frac{x^{n-1}e^{ax}}{a} - \frac{n-1}{a}\int x^{n-2}e^{ax}dx,$$

. . . .

$$\int x^2 e^{ax}dx = \frac{x^2 e^{ax}}{a} - \frac{2}{a}\int xe^{ax}dx,$$

$$\int xe^{ax}dx = \frac{xe^{ax}}{a} - \frac{1}{a}\frac{e^{ax}}{a},$$

a stąd, wzór bezpośredni:

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}\left\{x^n - \frac{n}{a}x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{a^2}x^{n-2} - \dots + \frac{(-1)^n . n!}{a^n}\right\} + C. \quad (5)$$

Na podstawie tego wzoru otrzymujemy n. p.:

$$\int xe^x dx = e^x\{x-1\} + C,$$
$$\int x^2 e^x dx = e^x\{x^2-2x+2\} + C,$$
$$\int x^3 e^x dx = e^x\{x^3-3x^2+6x-6\} + C,$$
$$\int x^n e^x dx = e^x\left\{x^n - nx^{n-1} + 2!\binom{n}{2}x^{n-2} - \dots + (-1)^r r!\binom{n}{r}x^{n-r} + \dots + (-1)^n n!\right\} + C.$$

7. **Wzór ogólny całki kształtu:** $\int G(x)e^{ax} dx$. Jeżeli $G(x)$ jest funkcyą całkowitą, wymierną n-go stopnia, której pochodne oznaczamy kolejno przez $G'(x)$, $G''(x)$,..., natenczas, stosując wprost do całki kształtu: $\int G(x) e^{ax} dx$, metodę całkowania przez części, otrzymujemy następujące wzory redukcyjne:

$$\int G(x) . e^{ax} dx = \frac{1}{a} G(x) e^{ax} - \frac{1}{a}\int G'(x) e^{ax} dx,$$
$$\int G'(x) . e^{ax} dx = \frac{1}{a} G'(x) e^{ax} - \frac{1}{a}\int G''(x) e^{ax} dx, \quad (6)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\int G^{(n-1)} x . e^{ax} dx = \frac{1}{a} G^{(n-1)}(x) e^{ax} - \frac{1}{a}\int G^{(n)}(x) e^{ax} dx,$$

których, ze względu na to, że $G^{(n)}(x)$, jako n-ta pochodna funkcyi wymiernej, całkowitej n-go stopnia, jest liczbą stałą, otrzymujemy wzór ogólny postaci:

$$\int G(x) . e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}\left\{G(x) - \frac{1}{a} G'(x) + \frac{1}{a^2} G''(x) - \dots + \frac{(-1)^n}{a^n} G^{(n)}(x)\right\} + C, \quad (7)$$

więc w przypadku $a=1$, w postaci:

$$\int G(x) . e^x dx = e^x\{G(x) - G'(x) + \dots + (-1)^n G^{(n)}(x)\} + C. \quad (8)$$

Na tej podstawie otrzymujemy n. p.:

$$\int (x^2-3x+2) e^x dx = e^x . \{x^2-3x+2-2x+3+2\} + C,$$

czyli:

$$\int (x^2-3x+2) e^x dx = e^x\{x^2-5x+7\} + C.$$

8. **Całki kształtu:** $\int \frac{G_{m-1}(x)}{(x-a)^m} e^{ax} dx$. Pierwiastek m-krotny mianownika $N(x)$ funkcyi ułamkowej, wymiernej $R(x)$, prowadzi, przy rozkładzie tejże funkcyi ułamkowej $R(x)$, na ułamki proste o mianownikach: $(x-a)$, $(x-a)^2$,..., $(x-a)^m$, które, sprowadzone do wspólnego mianownika $(x-a)^m$, dają ułamek właściwy, kształtu: $\frac{G_{m-1}(x)}{(x-a)^m}$, w którym $G_{m-1}(x)$ jest funkcyą całkowitą $(m-1)$-go stopnia. Tym sposobem dochodzimy do całki kształtu: $\int \frac{G_{m-1}(x)}{(x-a)^m} e^{ax} dx$.

Kładąc:
$$\frac{G_{m-1}(x)}{(x-a)^m} e^{ax} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{G_{m-2}(x)}{(x-a)^{m-1}} e^{ax}\right\} + \frac{A}{x-a} e^{ax}, \quad (9)$$

gdzie $G_{m-2}(x)$ jest funkcyą całkowitą $(m-2)$ go stopnia o niewiadomych spółczynnikach A_0, A_1,..., A_{m-2}, otrzymujemy, na jej wyznaczenie:

$$\frac{G_{m-1}(x)}{(x-a)^m} e^{ax} =$$
$$= \frac{(x-a)^{m-1}\{G'_{m-2}(x)e^{ax} + a\, G_{m-2}(x) e^{ax}\} - (m-1)(x-a)^{m-2} G_{m-2}(x)e^{ax}}{(x-a)^{2m-2}} + \frac{A}{x-a} e^{ax},$$

czyli równanie tożsamościowe:

$$G_{m-1}(x)=(x-a)\{G'_{m-2}(x)+a\,G_{m-2}(x)\}-(m-1)\,G_{m-2}(x)+A\,(x-a)^{m-1},$$

w którem, po obu stronach występują funkcye całkowite $(m-1)$-go stopnia.

Porównywając spółczynniki obu tych funkcyj, otrzymujemy m równań warunkowych pierwszego stopnia, koniecznych i wystarczających, do wyznaczenia m niewiadomych: A_0, $A_1,\ldots, A_{m-2}$, A.

Wobec tego, otrzymujemy ogólny wzór redukcyjny:

$$\int\frac{G_{m-1}(x)}{(x-a)^m}\,e^{ax}\,dx=\frac{G_{m-2}(x)}{(x-a)^{m-1}}\,e^{ax}+A\int\frac{e^{ax}\,dx}{x-a}, \tag{10}$$

który całkę kształtu: $\int\frac{G_{m-1}(x)}{(x-a)^m}e^{ax}\,dx$, wyraża przez funkcye znane i przez całkę kształtu: $\int\frac{e^{ax}\,dx}{x-a}$.

9. Całka kształtu: $\int\frac{e^{ax}\,dx}{x-a}$. Kładąc w tej całce $x-a=z$, otrzymujemy: $dx=dz$, $e^{ax}=e^{a(z+a)}=e^{aa}.e^{az}=k.e^{az}$, gdzie $k=e^{aa}$, a więc:

$$\int\frac{e^{ax}}{x-a}\,dx=k\int\frac{e^{az}}{z}\,dz.$$

Otrzymana całka kształtu: $\int\frac{e^{az}}{z}\,dz$ nie da się wyrazić przez funkcye znane. Możemy ją przedstawić w postaciach prostszych.

Podstawiając mianowicie: $az=u$, a zatem $z=\frac{u}{a}$, $dz=\frac{1}{a}\,du$, przedstawimy naszą całkę w postaci:

$$\int\frac{e^{az}\,dz}{z}=\int\frac{e^u.\,du}{u}.$$

Podstawiając zaś: $e^{az}=t$, zatem: $az=\log t$, $z=\frac{1}{a}\log t$, $dz=\frac{1}{a}\frac{dt}{t}$, otrzymujemy:

$$\int\frac{e^{az}\,dz}{z}=a\int\frac{dt}{\log t}.$$

Całki kształtu: $\int\frac{e^{ax}\,dx}{x-a}$, $\int\frac{e^{ax}\,dx}{x}$, $\int\frac{e^x\,dx}{x}$, sprowadzają się ostatecznie do całki kształtu: $\int\frac{dx}{\log x}$ i tworzą nowe funkcye przestępne, z których funkcya przestępna, przedstawiona całką: $\int\frac{dx}{\log x}$, nazwaną została logarytmem całkowym zmiennej x i oznacza się zwykle znakiem $Li(x)+C$.

Piszemy tedy:

$$\int\frac{dx}{\log x}=Li(x)+C,$$

a w następstwie tego:

$$\int\frac{e^x\,dx}{x}=Li(e^x)+C,\quad\int\frac{e^{ax}\,dx}{x}=Li(e^{ax})+C,\quad\int\frac{e^{ax}\,dx}{x-a}=e^{aa}\,Li(e^{ax})+C,$$

a ostatecznie:

$$\int\frac{G_{m-1}(x)\,e^{ax}\,dx}{(x-a)^m}=\frac{G_{m-2}(x)}{(x-a)^{m-1}}\,e^{ax}+Ae^{aa}\,Li(e^{ax})+C. \tag{10'}$$

10. Przykłady. 1) Wyznaczyć całkę $J=\int\frac{x^3-x^2+3x-1}{x-1}e^x dx$. Mamy tu:

$$\frac{x^3-x^2+3x-1}{x-1}=x^2+3+\frac{2}{x-1},$$

zatem:

$$\int\frac{x^3-x^2+3x-1}{x-1}e^x dx=\int\left(x^2+3+\frac{2}{x-1}\right)e^x dx=\int x^2e^x dx+3\int e^x dx+2\int\frac{e^x}{x-1}dx,$$

a że:
$$\int x^2e^x dx=e^x\left\{x^2-2x+2\right\},\ \int e^x dx=e^x,\ \int\frac{e^x dx}{x-1}=e\,Li(e^{x-1})+C,$$

zatem:

$$\int\frac{x^3-x^2+3x-1}{x-1}e^x dx=e^x\left\{x^2-2x+5\right\}+2e.Li(e^{x-1})+C.$$

2) Wyznaczyć całkę $J=\int\frac{x^2-3x+1}{x^4}e^x dx$. Kładąc tożsamościowo:

$$\frac{x^2-3x+1}{x^4}e^x=\frac{d}{dx}\left\{\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3}e^x\right\}+\frac{D}{x}e^x,$$

otrzymujemy, na wyznaczenie spółczynników A, B, C, D równanie tożsamościowe:

$$x^2-3x+1=x(Ax^2+Bx+C+2Ax+B)-3(Ax^2+Bx+C)+Dx^3,$$

a stąd, równania warunkowe:

$$A+D=0,\ B-A=1,\ C-2B=-3,\ -3C=1,$$

które dają:

$$A=\frac{1}{3},\ B=\frac{4}{3},\ C=-\frac{1}{3},\ D=-\frac{1}{3}.$$

Jest zatem:

$$\int\frac{x^2-3x+1}{x^4}e^x dx=\frac{x^2+4x-1}{3x^3}e^x-\frac{1}{3}\int\frac{e^x}{x}dx+C.$$

11. Całki kształtu: $\int\frac{e^{ax}}{x^n}dx$, jako szczególne przypadki całek kształtu: $\int\frac{G(x)}{(x-a)^n}e^{ax}dx$, sprowadzają się do całki: $\int\frac{e^{ax}}{x}dx=Li(e^{ax})+C$, za pomocą wzorów redukcyjnych, poznanych w art. 6. dla całek kształtu: $\int x^n e^{ax}dx$.

Z wzoru:

$$\int x^n e^{ax}dx=\frac{e^{ax}x^n}{a}-\frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx,$$

otrzymujemy, bowiem:

$$\int x^{n-1}e^{ax}dx=\frac{e^{ax}x^n}{n}-\frac{a}{n}\int x^n e^{ax}dx,$$

a stąd, zastępując $n-1$ przez n, więc n przez $n+1$, wzór:

$$\int x^n e^{ax}dx=\frac{e^{ax}x^{n+1}}{n+1}-\frac{a}{n+1}\int x^{n+1}e^{ax}dx,$$

który, dla ujemnego wykładnika n, przedstawia się w postaci:

$$\int\frac{e^{ax}}{x^n}dx=-\frac{e^{ax}}{(n-1)x^{n-1}}+\frac{a}{n-1}\int\frac{e^{ax}}{x^{n-1}}dx, \qquad (11)$$

którą także otrzymamy na podstawie wzoru dla całkowania częściowego wprost,

kładąc:	a zatem:
$e^{ax}=u$	$du=ae^{ax}dx,$
$\frac{dx}{x^n}=dv,$	$v=-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}.$

Stosując powyższy wzór redukcyjny do całki: $\int \frac{e^{ax}}{x^{n-1}} dx$, i t. d., dojdziemy w końcu do całki: $\int \frac{e^{ax}}{x} dx = Li(e^{ax}) + C.$

Dotyczący wzór bezpośredni przedstawi się w postaci:

$$\int \frac{e^{ax}}{x^n} dx = -e^{ax}\left\{\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} + \frac{a^2}{(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-3}} + \dots + \right.$$

$$\left. + \dots + \frac{a^{n-2}}{(n-1)(n-2)\dots 1 . x}\right\} + \frac{a^{n-1}}{(n-1)!}\int \frac{e^{ax}}{x} dx.$$

12. Stosując powyższe postępowanie do przykładu 2) art. 10. otrzymujemy:

$$\int \frac{x^2-3x+1}{x^4} e^x dx = \int \frac{e^x}{x^2} dx - 3\int \frac{e^x dx}{x^3} + \int \frac{e^x dx}{x^4},$$

a że:

$$\int \frac{e^x dx}{x^2} = -\frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x}{x} dx,$$

$$\int \frac{e^x dx}{x^3} = -e^x\left\{\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2.1x}\right\} + \frac{1}{2}\int \frac{e^x}{x} dx,$$

$$\int \frac{e^x dx}{x^4} = -e^x\left\{\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{3.2.x^2} + \frac{1}{3.2.1.x}\right\} + \frac{1}{6}\int \frac{e^x dx}{x},$$

zatem otrzymamy:

$$\int \frac{x^2-3x+1}{x^4} e^x dx = e^x \frac{x^2+4x-1}{3x^3} - \frac{1}{3}\int \frac{e^x}{x} dx + C.$$

13. **Całkowanie funkcyj logarytmicznych.** Jeżeli funkcye dane zawierają wyłącznie logarytmy zmiennej niezależnej x, a więc przedstawiają się w postaci $y = F(\log x)$, natenczas całkowanie takich funkcyj możemy zawsze sprowadzić do całkowania funkcyj wykładniczych, za pomocą podstawienia

$\log x = z$, a więc $x = e^z$, $dx = e^z dz$.

Otrzymujemy bowiem wówczas:

$$\int F(\log x) dx = \int F(z) . e^z dz, \tag{12}$$

a więc całki, które w przypadku, gdy $F(x)$ jest funkcyą wymierną, algebraiczną, dadzą się, na mocy poprzednich uwag, zawsze wyznaczyć, ewentualnie sprowadzić do logarytmu całkowego: $\int \frac{e^z}{z} dz = \int \frac{dx}{\log x} = Li(x).$

14. **Przykłady.** 1) $\int [(\log x)^2 + 3\log x - 7] dx = ?$

Kładąc $\log x = z$, mamy:

$$\int [(\log x)^2 + 3\log x - 7] dx = \int [z^2 + 3z - 7] e^z dz = e^z\{z^2 + 3z - 7 - 2z - 3 + 2\} = e^z(z^2 + z - 8),$$

a więc:

$$\int [(\log x)^2 + 3\log x - 7] dx = x\{(\log x)^2 + \log x - 8\} + C.$$

2) $\int \frac{(\log x)^2 + 3\log x - 7}{\log x} dx = ?$

Całka ta sprowadza się, zapomocą podstawienia $\log x = z$, do całki:

$$\int \frac{z^2+3z-7}{z} e^z dz = \int (z+3) e^z dz - 7\int \frac{e^z}{z} dz = (z+2)e^z - 7\int \frac{e^z}{z} dz.$$

Mamy zatem:

$$\int \frac{(\log x)^2 + \log x - 7}{\log x} dx = x(\log x + 2) - 7\int \frac{dx}{\log x} + C.$$

15. Całki kształtu: $\int (\log x)^n dx$. Kładąc:

$$\log x = z, \text{ a więc: } x = e^z, \; dx = e^z dz,$$

otrzymujemy:

$$\int (\log x)^n dx = \int z^n e^z dz. \tag{13}$$

Dla całkowitego, dodatniego wykładnika n, mamy, na podstawie wzoru 8) str. 175. wzór bezpośredni:

$$\int z^n e^z dz = e^z \left\{ z^n - n z^{n-1} + n(n-1) z^{n-2} + \ldots + (-1)^n n! \right\} + C,$$

przeto, otrzymujemy, w tym przypadku, wzór ogólny:

$$\int (\log x)^n dx = x \left\{ (\log x)^n - n (\log x)^{n-1} + n(n-1)(\log x)^{n-2} - \ldots + (-1)^n n! \right\} + C,$$

a więc n. p. wzory szczególne:

$$\int \log x \, dx = x \{\log x - 1\} + C,$$

$$\int (\log x)^2 dx = x\{(\log x)^2 - 2 \log x + 2!\} + C,$$

$$\int (\log x)^3 dx = x \{(\log x)^3 - 3 (\log x)^2 + 6 \log x - 3!\} + C.$$

Dla całkowitego, ujemnego wykładnika n, mamy, na podstawie art. 11. str. 177., wzór bezpośredni:

$$\int \frac{e^z dz}{z^n} = -e^z \left\{ \frac{1}{(n-1) z^{n-1}} + \frac{1}{(n-1)(n-2) z^{n-2}} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(n-1)(n-2)\ldots 2 . 1 . z} \right\} + \frac{1}{(n-1)!} \int \frac{e^z}{z} dz.$$

Wobec tego, otrzymujemy wzór ogólny:

$$\int \frac{dx}{(\log x)^n} = -x \left\{ \frac{1}{(n-1)(\log x)^{n-1}} + \frac{1}{(n-1)(n-2)(\log x)^{n-2}} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(n-1)(n-2)\ldots 2 . 1 \log x} \right\} + \frac{1}{(n-1)!} \int \frac{dx}{\log x} + C, \tag{14}$$

ważny dla całkowitego dodatniego n, większego od 1.

W szczególności, otrzymujemy:

$$\int \frac{dx}{(\log x)^2} = -\frac{x}{\log x} + \int \frac{dx}{\log x},$$

$$\int \frac{dx}{(\log x)^3} = -\frac{x(1+\log x)}{2(\log x)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\log x},$$

$$\int \frac{dx}{(\log x)^4} = -\frac{x\{2 + (\log x) + (\log x)^2\}}{6 (\log x)^3} + \frac{1}{6} \int \frac{dx}{\log x}, \text{ i t. d.}$$

gdzie $\int \frac{dx}{\log x} = Li(x)$ jest funkcyą przestępną, nie dającą się wyrazić przez funkcye znane, a nazwaną powyżej (art. 9.) logarytmem całkowym.

16. Całki kształtu: $\int R(x) . \log x \, dx$, gdzie $R(x)$ jest funkcyą algebraiczną, wymierną zmiennej x, rozpadają się, za pomocą rozkładu funkcyi $R(x)$, na dwa rodzaje całek, jeden kształtu:

$$\int G(x) . \log x . dx, \text{ drugi kształtu: } \int \frac{G_{n-1}(x)}{G_n(x)} \log x . dx.$$

Pierwszy rodzaj całek da się, za pomocą metody całkowania przez części, sprowadzić wprost do całek funkcyj algebraicznych, wymiernych.

Kładąc, bowiem:	a zatem:
$G(x) . dx = du$	$u = \int G(x) dx = \overline{G}(x)$
$\log x = v$	$dv = \frac{dx}{x}$,

otrzymujemy:

$$\int G(x).\log x\,dx = \overline{G}(x).\log x - \int \frac{\overline{G}(x)}{x}\,dx.$$

W szczególności, będzie:

$$\int x^n \log x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\log x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C.$$

Drugi rodzaj całek, gdy rozłożymy funkcyę ułamkową, w $\frac{G_{n-1}(x)}{G_n(x)}$ na ułamki częściowe, kształtu: $\frac{A}{x-a}$ i $\frac{A}{(x-a)^m}$, rozpada się częściowe, kształtu:

$$\int \frac{\log x}{x-a}dx \text{ i } \int \frac{\log x}{(x-a)^m}dx.$$

Całka kształtu: $\int \frac{\log x}{x-a}dx$ sprowadza się, za pomocą podst $x-a=az$, $x=a(1+z), dx=adz$ do postaci:

$$\int \frac{\log x}{x-a}dx = \int \frac{\log a + \log(1+z)}{z}dz = \log a \int \frac{dz}{z} + \int \frac{\log(1+z)}{z}dz =$$

$$= \log a.\log z + \int \frac{\log(1+z)}{z}dz,$$

prowadzi więc do całki: $\int \frac{\log(1+z)}{z}dz$, która nie da się wyrazić za znanych funkcyj elementarnych.

Całki kształtu: $\int \frac{\log x}{(x-a)^m}dx$ dadzą się, w przypadku, gdy $m>1$ mocą metody całkowania przez części, sprowadzić do całek funkcyj icznych, wymiernych.

Kładąc bowiem:	a zatem:
$\log x = u,$	$du = \frac{dx}{x},$
$\frac{dx}{(x-a)^m} = dv,$	$v = -\frac{1}{(m-1)(x-a)^{m-1}},$

otrzymujemy wzór redukcyjny:

$$\int \frac{\log x}{(x-a)^m}dx = -\frac{\log x}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + \frac{1}{m-1}\int \frac{dx}{x(x-a)^{m-1}},$$

przydatny, gdy $m>1$.

W szczególności, otrzymujemy stąd, dla $m>1$:

$$\int \frac{\log x}{x^m}dx = -\frac{\log x}{(m-1)x^{m-1}} - \frac{1}{(m-1)^2 x^{m-1}} + C,$$

podczas, gdy, dla $m=1$, mamy:

$$\int \frac{\log x}{x}dx = \frac{1}{2}(\log x)^2 + C.$$

17. Przykłady. 1) $\int (3x^2 - 5x + 7)\log x\,dx = ?$

Kładąc:	a zatem:
$\log x = u,$	$du = \frac{dx}{x},$
$(3x^2 - 5x + 7)dx = dv,$	$v = x^3 - {}^5/_2 x^2 + 7x,$

otrzymujemy:

$$\int (3x^2 - 5x + 7)\log x\,dx = (x^3 - {}^5/_2 x^2 + 7x)\log x - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{5}{4}x^2 + 7x\right) + C.$$

2) $\int \frac{\log x}{(x-1)^2} dx = ?$

Kładąc: $\log x = u$, $\frac{dx}{(x-1)^2} = dv$, | a zatem: $du = \frac{dx}{x}$, $v = -\frac{1}{x-1}$,

otrzymujemy:

$$\int \frac{\log x\, dx}{(x-1)^2} = -\frac{\log x}{x-1} + \int \frac{dx}{x(x-1)},$$

a że:

$$\int \frac{dx}{x(x-1)} = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) dx = \log \frac{x-1}{x},$$

zatem:

$$\int \frac{\log x\, dx}{(x-1)^2} = -\frac{\log x}{x-1} + \log \frac{x-1}{x} + C.$$

18. Całki kształtu: $\int R(x, \log x)\, dx$, gdzie $R(x, \log x)$ jest algebraiczną, wymierną funkcyą zmiennej x i jej funkcyi $\log x$, nie dadzą się, w całej ogólności, wyrazić przez funkcye znane.

Podstawienie $\log x = z$, a więc $x = e^z$, $dx = e^z dz$, sprowadza je zresztą do postaci:

$$\int R(x, \log x)\, dx = \int R(z, e^z)\, dz, \tag{18}$$

które, tylko w niektórych przypadkach, dadzą się wyrazić przez funkcye znane. W przypadku, gdy funkcya $R(x, \log x)$ jest funkcyą całkowitą, wymierną ze względu na x i $\log x$, dochodzimy do całek kształtu: $\int x^m (\log x)^n dx$, w których wykładniki m i n są liczbami całkowitemi, dodatniemi. Dla całek tego rodzaju możemy wyprowadzić wzory redukcyjne, stosując metodę całkowania przez części.

Kładąc mianowicie: $(\log x)^n = u$, $x^m dx = dv$, | a zatem: $du = n \frac{(\log x)^{n-1} dx}{x}$, $v = \frac{x^{m+1}}{m+1}$,

otrzymujemy wzór redukcyjny:

$$\int x^m (\log x)^n dx = \frac{x^{m+1} (\log x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int x^m (\log x)^{n-1} dx, \tag{19}$$

który dozwala, przy jakimkolwiek zresztą wykładniku m, różnym od -1, zniżać wykładnik n i sprowadza daną całkę ostatecznie do całki kształtu:

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$$

W szczególności, otrzymujemy, na podstawie tego wzoru, następujące całki:

$$\int x^m \log x\, dx = \frac{x^{m+1} \log x}{m+1} - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} + C.$$

$$\int x^m (\log x)^2 dx = \frac{x^{m+1} (\log x)^2}{m+1} - \frac{2x^{m+1} \log x}{(m+1)^2} + \frac{2x^{m+1}}{(m+1)^3} + C.$$

Dla $m = -1$ powyżej wyprowadzony wzór redukcyjny staje się nieprzydatny. W tym przypadku mamy jednak całkę zasadniczą:

$$\int \frac{(\log x)^n}{x} dx = \int (\log x)^n d(\log x) = \frac{(\log x)^{n+1}}{n+1} + C.$$

Jeżeli wykładnik n jest ujemny, a więc dana całka ma kształt $\int \frac{x^m dx}{(\log x)^n}$, natenczas:

kładąc:	a zatem:
$x^{m+1} = u$,	$du = (m+1)x^m dx$,
$\frac{dx}{x(\log x)^n} = dv$,	$v = -\frac{1}{(n-1)(\log x)^{n-1}}$,

otrzymujemy wzór redukcyjny:

$$\int \frac{x^m dx}{(\log x)^n} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(\log x)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1} \int \frac{x^m dx}{(\log x)^{n-1}}, \tag{20}$$

który dozwala znowu, przy niezmienionym wykładniku m, wykładnik n sprowadzić do jednostki, a więc daną całkę do postaci: $\int \frac{x^m dx}{\log x}$, która, w przypadku $m \lesseqgtr -1$, da się wyrazić już tylko przez logarytm całkowy.

Podstawiając mianowicie w tej całce:

$$x^{m+1} = z, \text{ a więc } \log x = \frac{\log z}{m+1}, \; x^m dx = \frac{dz}{m+1},$$

otrzymujemy:

$$\int \frac{x^m dx}{\log x} = \int \frac{dz}{\log z} + C = Li(z) + C,$$

zatem:

$$\int \frac{x^m dx}{\log x} = Li(x^{m+1}) + C.$$

Jeżeli $m = -1$, natenczas dana całka ma kształt: $\int \frac{dx}{x \log x}$ i sprowadza się do całki zasadniczej, jest bowiem:

$$\int \frac{dx}{x \log x} = \int \frac{d \log x}{\log x} = \log(\log x) + C. \tag{21}$$

19. Całki kształtu: $\int f(x).\log \varphi(x).dx$, dadzą się, pod pewnymi warunkami, sprowadzić do całek funkcyj, wyłącznie algebraicznych. Przyjmijmy bowiem, że funkcye $f(x)$ i $\varphi(x)$ są funkcyami algebraicznemi zmiennej x,

i połóżmy:	a zatem:
$\log \varphi(x) = u$,	$du = \frac{\varphi'(x) dx}{\varphi(x)}$,
$f(x) dx = dv$,	$v = \int f(x) dx = F(x)$

natenczas, otrzymamy wzór:

$$\int f(x) \log \varphi(x) dx = \log \varphi(x) . \int f(x) dx - \int \frac{F(x).\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx, \tag{22}$$

z którego wypływa, że dana całka sprowadza się do całek funkcyj algebraicznych, skoro tylko całka kształtu $\int f(x) dx = F(x)$ jest funkcyą algebraiczną.

20. Przykład. Wyznaczyć całkę kształtu: $\int \log(x + \sqrt{1+x^2}) dx$.

Kładąc:	a zatem:
$\log(x + \sqrt{1+x^2}) = u$,	$du = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$,
$dx = dv$,	$v = x$,

otrzymujemy:

$$\int \log(x + \sqrt{1+x^2}) dx = x \log(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

: $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2},$$

to mamy:

$$\int \log(x+\sqrt{1+x^2})dx = x\log(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.$$

Ogólnie, znajdziemy tą drogą:

$$\int x^n \log(x+\sqrt{1+x^2})\,dx = \frac{x^{n+1}\log(x+\sqrt{1+x^2})}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\,dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Ćwiczenia XI.

1) $\int \frac{dx}{e^{ax}+e^{-ax}} = \frac{1}{a}\,\text{arc tang}\, e^{ax} + C.$

2) $\int \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{ax}+e^{-ax}}\,dx = \frac{1}{a}\log(e^{ax}+e^{-ax}) + C.$

3) $\int \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{e^{ax}-e^{-ax}}\,dx = \frac{1}{a}\log(e^{ax}-e^{-ax}) + C.$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{ax}}} = \frac{1}{a}\log\frac{\sqrt{1+e^{ax}}-1}{\sqrt{1+e^{ax}}+1} + C.$

5) $\int \sqrt{1+e^{ax}}\,dx = \frac{2}{a}\left\{\sqrt{e^{ax}+1} - \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{e^{ax}+1}+1}{\sqrt{e^{ax}+1}-1}\right\} + C.$

6) $\int \frac{dx}{a+be^x} = \frac{1}{a}\left\{\log x - \log(a+be^x)\right\} + C.$

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{ae^{\alpha x}+b}} = \frac{1}{\alpha\sqrt{b}}\log\frac{\sqrt{ae^{\alpha x}+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ae^{\alpha x}+b}+\sqrt{b}} + C = \frac{2}{\alpha\sqrt{-b}}\,\text{arc tang}\,\frac{\sqrt{ae^{\alpha x}+b}}{\sqrt{-b}} + C.$

8) $\int a^x e^{\sqrt{ma^x+n}}\,dx = \frac{2}{\log a}\left[\sqrt{ma^x+n}-1\right]e^{\sqrt{ma^x+n}} + C.$

9) $\int xa^x\,dx = \frac{xa^x}{\log a} - \frac{a^x}{(\log a)^2} + C.$

10) $\int x^2a^x\,dx = \frac{x^2a^x}{\log a} - \frac{2xa^x}{(\log a)^2} + \frac{2.1.a^x}{(\log a)^3} + C.$

11) $\int x^n a^x\,dx = a^x\left\{\frac{x^n}{\log a} - \frac{nx^{n-1}}{(\log a)^2} + \ldots + (-1)^r\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)x^{n-r}}{(\log a)^{r+1}} + \ldots\right\} + C.$

12) $\int \frac{a^x\,dx}{x^n} = C - a^x\left\{\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{\log a}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} + \ldots + \frac{(\log a)^{n-2}}{(n-1)(n-2)\ldots 2.1.x}\right\} + $

$+ \frac{(\log a)^{n-1}}{(n-1)!}\int\frac{a^x}{x}\,dx.$

13) $\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x-\frac{1}{a}\right) + C.$

14) $\int x^4 e^{ax}\,dx = e^{ax}\left\{\frac{x^4}{a} - \frac{4x^3}{a^2} + \frac{12x^2}{a^3} - \frac{24x}{a^4} + \frac{24}{a^5}\right\} + C.$

15) $\int x^5 e^{-x}\,dx = C - e^{-x}(x^5 + 5x^4 + 20x^3 + 60x^2 + 120x + 120).$

16) $\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\sum_{r=0}^{r=n}(-1)^r\, r!\binom{n}{r}\frac{x^{n-r}}{a^r}.$

17) $\int x^m e^x\,dx = x^m e^x - m\int x^{m-1}e^x\,dx.$

18) $\int \frac{e^x\,dx}{x^m} = -\frac{e^x}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{1}{m-1}\int\frac{e^x\,dx}{x^{m-1}}.$

19) $\int x^m e^x\,dx = e^x \sum_{r=0}^{r=m} (-1)^r\, r!\binom{m}{r} x^{m-r}$.

20) $\int \frac{e^x\,dx}{x^m} = -e^x \sum_{r=1}^{r=m-1} \frac{1}{r!\binom{m-1}{r} x^{m-r}} + \frac{1}{(m-1)!}\int \frac{e^x}{x}\,dx$.

21) $\int G(x)\, e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\left\{G(x) - \frac{1}{a}G'(x) + \frac{1}{a^2}G''(x) - \dots\right\} + C$.

22) $\int G(x)\, e^x\,dx = e^x(G(x) - G'(x) + G''(x) - \dots) + C$.

23) $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx = \frac{e^x}{x+1} + C$. 24) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2} e^x\,dx = e^x \frac{x-1}{x+1} + C$.

25) $\int \frac{(1-x)^2}{(1+x^2)^2} e^x\,dx = \frac{e^x}{1+x^2} + C$.

26) $\int (\log x - 2)^3\,dx = x\{(\log x)^3 - 9(\log x)^2 + 30\log x - 38\} + C$.

27) $\int (\log x)^4\,dx = x\{(\log x)^4 - 4(\log x)^3 + 12(\log x)^2 - 24\log x + 24\} + C$.

28) $\int (\log x)^n\,dx = x\,\{(\log x)^n - n(\log x)^{n-1} + n(n-1)(\log x)^{n-2} - \dots +$

$+ (-1)^r r!\binom{n}{r}(\log x)^{n-r} + \dots + (-$

29) $\int x\log x\,dx = \frac{x^2}{2}\left(\log x - \frac{1}{2}\right) + C$. 30) $\int \frac{\log x}{x}\,dx = \frac{1}{2}(\log x)^2 + C$.

31) $\int \frac{dx}{x\log x} = \log(\log x) + C$. 32) $\int x^2\log x\,dx = \frac{1}{3}x^3\log x - \frac{1}{9}x^3 + C$.

33) $\int x^3\log x\,dx = \frac{1}{4}x^4\log x - \frac{1}{16}x^4 + C$. 34) $\int \frac{\log x}{x^2}\,dx = -\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x} +$

35) $\int \frac{\log x}{x^3}\,dx = -\frac{\log x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C$. 36) $\int x^n\log x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\log x -$

37) $\int \frac{(\log x)^n\,dx}{x} = \frac{(\log x)^{n+1}}{n+1} + C$.

38) $\int x^m(\log x)^2\,dx = x^{m+1}\left\{\frac{(\log x)^2}{m+1} - \frac{2\log x}{(m+1)^2} + \frac{2}{(m+1)^3}\right\} + C$.

39) $\int x^m(\log x)^n\,dx = x^{m+1}\sum_{r=0}^{r=n}(-1)^r r!\binom{n}{r}\frac{(\log x)^{n-r}}{(m+1)^{r+1}} + C$.

40) $\int (ax^2 + 2bx + c)\log x\,dx = \left(\frac{ax^3}{3} + bx^2 + cx\right)\log x - \left(\frac{ax^3}{9} + \frac{bx^2}{2} + cx +\right.$

41) $\int \frac{\log x}{(1-x)^2}\,dx = \frac{x\log x}{1-x} - \log\frac{1}{1-x} + C$.

42) $\int \frac{x^2+1}{x^4}\log x\,dx = -\frac{9x^2+1}{9x^3} - \frac{3x^2+1}{3x^3}\log x + C$.

43) $\int \frac{\log x}{x^2}\,dx = -\frac{\log x + 1}{x} + C$. 44) $\int \frac{\log x\,dx}{2\sqrt[4]{x^3}} = 2(\log x - 4)\sqrt[4]{x} + C$

45) $\int \frac{\log x\,dx}{(ax+b)^n} = -\frac{\log x}{(n-1)a(ax+b)^{n-1}} + \frac{1}{(n-1)ab}\left\{\frac{1}{(n-2)(ax+b)^{n-2}} + \right.$

$\left. + \frac{1}{(n-3)b(ax+b)^{n-3}} + \dots + \frac{1}{1\cdot b^{n-3}(ax+b)}\right\} + \frac{1}{(n-1)ab^{n-1}}\log$

46) $\int x^n\log(a + bx^m)\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\log(a + bx^m) - \frac{bm}{n+1}\int\frac{x^{m+n}}{a + bx^m}\,dx$.

47) $\int(\alpha x+\beta)^n \log\left[\frac{ax+b}{\sqrt{a}}+\sqrt{ax^2+2bx+c}\right]dx=$

$$=\frac{(\alpha x+\beta)^{n+1}}{(n+1)\alpha}\log\left[\frac{ax+b}{\sqrt{a}}+\sqrt{ax^2+2bx+c}\right]-\frac{\sqrt{a}}{(n+1)\alpha}\int\frac{(\alpha x+\beta)^{n+1}dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}.$$

Wykazać, że:

48) $\int x^m e^{ax}dx=\frac{1}{a^{m+1}}\int y^m e^y\,dy$, gdy $x=\frac{y}{a}$.

49) $\int x^m e^{ax}\,dx=\int(\log y)^m y^{a-1}\,dy$, gdy $x=\log y$.

50) $\int\frac{dx}{\log x}=\int\frac{e^y}{y}\,dy$, gdy $\log x=y$.

51) $\int R(x,\log x)\,dx=\int R(e^y,y)\,e^y\,dy$, gdzie $\log x=y$.

52) $\int R(a^x)\,dx=\frac{1}{\log a}\int R(e^y)\,dy$, gdy $x=\frac{y}{\log a}$.

53) $\int R(x)\log x\,.\,dx=\log x\int R(x)\,dx-\int\frac{\int R(x)\,dx}{x}\,dx.$

54) $$\int G(x,e^{ax})\,dx=\sum_{\substack{\alpha=0,\dots,m\\ \beta=0,\dots,n}}^{r=0,\dots\alpha}(-1)^r\frac{r!\binom{\alpha}{r}}{(a\beta)^{r+1}}A_{\alpha,\beta}\,x^{\alpha-r}e^{a\beta x}+C,$$

jeżeli $$G(x,e^{ax})=\sum_{\alpha=0,\dots m}^{\beta=0,\dots n}A_{\alpha,\beta}x^\alpha.(e^{ax})^\beta.$$

55) $$\int G(x,\log x)\,dx=\sum_{\substack{\alpha=0,\dots m\\ \beta=0,\dots n}}^{r=0,\dots\beta}(-1)^r\frac{r!\binom{\beta}{r}}{(\alpha+1)^{r+1}}A_{\alpha,\beta}\,.\,x^{\alpha+1}(\log x)^{\beta-r}+C,$$

jeżeli $$G(x,\log x)=\sum_{\alpha=0,\dots,m}^{\beta=0,\dots n}A_{\alpha\beta}\,x^\alpha(\log x)^\beta.$$

Rozwiązania XI. Wskazówki 1)—5) $e^x=z$. 7) $e^{ax}=z$. 8) $a^x=z$. 9)—22) całkowanie przez części 23)—25) Rozkładanie funkcyi wymiernej, ułamkowej na ułamki proste. —40) podstawienie $\log x=z$ i całkowanie przez części. 41)—42) rozkładanie na dodajniki —47) całkowanie przez części. 54) Patrz Ćw. 16. 55) Patrz Ćw. 39.

Literatura. H. Laurent. Traité d'analyse. Tome III. Calcul integral. Paris 1888. Schaar. Elémente du calcul différentiel et du calcul intégral. Bruxelles 1862.

Tematy do rozprawek naukowych:

1) O całkach kształtu: $\int R(x).e^{ax}dx$.

2) O całkach kształtu: $\int R(x,\log x)\,dx$.

3) O logarytmie całkowym: $Li(x)=\int\frac{dx}{\log x}+C$.

Wykład XII.

Całki funkcyj goniometrycznych i cyklometrycznych.

1. Całkowanie funkcyj goniometrycznych za pomocą podstawienia $e^{xi}=z$. Całkowanie funkcyj goniometrycznych kształtu: $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, gdzie $R(\sin x, \cos x)$ jest funkcyą algebraiczną, wymierną funkcyj $\sin x$ i $\cos x$, którem zajmowaliśmy się w wykładzie X., da się także sprowadzić do całkowania funkcyj wykładniczych.

W tym celu możemy oprzeć się na związku funkcyj goniometrycznych z funkcyami wykładniczemi, określonym wzorami:

$$\sin x = \frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}.$$

Otrzymujemy tedy:

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}, \frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}\right)dx = \int \overline{R}(e^{xi})\,dx, \quad (1)$$

całkę funkcyi algebraicznej, wymiernej ze względu na funkcyę wykładniczą e^{xi}, która to całka, wskutek podstawienia: $e^{xi}=z$, a więc $dx=\frac{1}{i}\frac{dz}{z}$ sprowadza się do całki funkcyi algebraicznej, wymiernej zmiennej z.

2. Mając n. p. tą drogą wyznaczyć całki:

$$\int\frac{dx}{\sin x} \text{ i } \int\frac{dx}{\cos x},$$

otrzymujemy:

$$\int\frac{dx}{\sin x} = 2i\int\frac{dx}{e^{xi}-e^{-xi}} = 2i\int\frac{e^{xi}\,dx}{e^{2xi}-1},$$

$$\int\frac{dx}{\cos x} = 2\int\frac{dx}{e^{xi}+e^{-xi}} = 2\int\frac{e^{xi}\,dx}{e^{2xi}+1},$$

stąd, kładąc $e^{xi}=z$, zatem: $dx=\frac{1}{i}\frac{dz}{z}$, dostajemy:

$$\int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{2dz}{z^2-1} = \log\frac{z-1}{z+1} = \log\frac{e^{xi}-1}{e^{xi}+1} + C = \log\operatorname{tang}\frac{x}{2} + C$$

$$\int\frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{i}\int\frac{2dz}{z^2+1} = -\log\frac{z-i}{z+i} = -\log\frac{e^{xi}-i}{e^{xi}+i} + C = -\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + C.$$

3. Bezpośrednie zastosowanie podstawienia funkcyi wykładniczej: $e^{xi}=z$ do funkcyi: $R(\sin x, \cos x)$ sprowadza ją, na mocy wzorów:

$$\sin x = \frac{z^2-1}{2iz}, \quad \cos x = \frac{z^2+1}{2z}$$

do postaci:

$$R(\sin x, \cos x) = R\left(\frac{z^2-1}{2iz}, \frac{z^2+1}{2z}\right) = \frac{G_m(z)}{G_n(z)}, \tag{2}$$

gdzie $G_m(z)$ i $G_n(z)$ są funkcyami całkowitemi, wymiernemi ze względu na z.

Rozkładowi funkcyi $\frac{G_m(z)}{G_n(z)}$ na ułamki proste, kształtu: $\frac{A_1}{z-a}$, $\frac{A_r}{(z-a)^r}$ odpowiada analogiczny rozkład funkcyi $R(\sin x, \cos x)$ na ułamki, kształtu:

$$\frac{A_1}{e^{xi}-a}, \quad \frac{A_r}{(e^{xi}-a)^r},$$

które dadzą odpowiednie typy elementarne funkcyj algebraicznych, wymiernych, złożonych z funkcyj goniometrycznych.

Zastępując, mianowicie, a przez $e^{\alpha i}$, otrzymujemy funkcyę $\frac{1}{e^{xi}-a}$ w postaci:

$$\frac{1}{e^{xi}-a} = \frac{1}{e^{xi}-e^{\alpha i}} = \frac{e^{-\alpha i}}{e^{(x-\alpha)i}-1} = \frac{e^{-\alpha i}}{\cos(x-\alpha)-1+i\sin(x-\alpha)},$$

której możemy nadać także kształt:

$$\frac{1}{e^{xi}-a} = -\frac{e^{-\alpha i}}{2\sin^2\frac{x-\alpha}{2} - 2i\sin\frac{x-\alpha}{2}\cos\frac{x-\alpha}{2}} = -\frac{e^{-\alpha i}}{2\sin\frac{x-\alpha}{2}\left\{\sin\frac{x-\alpha}{2} - i\cos\frac{x-\alpha}{2}\right\}},$$

czyli:

$$\frac{1}{e^{xi}-a} = -\frac{e^{-\alpha i}}{2\sin\frac{x-\alpha}{2}}\left\{\sin\frac{x-\alpha}{2} + i\cos\frac{x-\alpha}{2}\right\} = -\frac{e^{-\alpha i}}{2}\left\{1 + i\cot\!g\frac{x-\alpha}{2}\right\},$$

a więc, ostatecznie, kształt:

$$\frac{1}{e^{xi}-a} = -\frac{e^{-\alpha i}}{2}\left\{1 + i\cot\!g\frac{x-\alpha}{2}\right\}, \tag{3}$$

zatem:

$$\frac{1}{(e^{xi}-a)^r} = \frac{(-e^{-\alpha i})^r}{2^r}\left\{1 + i\cot\!g\frac{x-\alpha}{2}\right\}^r. \tag{4}$$

4. Tym ułamkom prostym odpowiadają całki częściowe w postaci:

$$\int\frac{dx}{e^{xi}-a} = -\frac{e^{-\alpha i}}{2}\int\left\{1 + i\cot\!g\frac{x-\alpha}{2}\right\}dx,$$

$$\int\frac{dx}{(e^{xi}-a)^r} = \frac{(-e^{-\alpha i})^r}{2^r}\int\left(1 + i\cot\!g\frac{x-\alpha}{2}\right)^r dx,$$

z których pierwsza, ze względu na to, że:

$$\int\cot\!g\frac{x-\alpha}{2}\,dx = 2\int\cot\!g\frac{x-\alpha}{2}\,d\frac{x-\alpha}{2} = 2\log\sin\frac{x-\alpha}{2},$$

wyraża się wzorem:

$$\int\frac{dx}{e^{xi}-a} = -\frac{e^{-\alpha i}}{2}x - \frac{ie^{-\alpha i}}{1}\log\sin\frac{x-\alpha}{2} + C.$$

Dla drugiej całki da się wyprowadzić wzór redukcyjny. W tym celu, wyjdźmy z wzoru różniczkowego:

$$\frac{d\left(1+i\cot\!g\frac{x-\alpha}{2}\right)^{r-1}}{dx} = -\frac{r-1}{2}\left(1+i\cot\!g\frac{x-\alpha}{2}\right)^{r-2}\cdot\frac{i}{\sin^2\frac{x-\alpha}{2}},$$

który, ze względu na to, że możemy położyć:

$$\frac{1}{\sin^2\frac{x-\alpha}{2}} = 1+\cot\!g^2\frac{x-\alpha}{2} = 2\left(1+i\cot\!g\frac{x-\alpha}{2}\right) - \left(1+i\cot\!g\frac{x-\alpha}{2}\right)^2,$$

da się przedstawić w postaci:

$$\frac{d\left(1+i\operatorname{cotg}\frac{x-\alpha}{2}\right)^{r-1}}{dx}=-(r-1)i\left(1+i\operatorname{cotg}\frac{x-\alpha}{2}\right)^{r-1}+\frac{(r-1)i}{2}\left(1+i\operatorname{cotg}\frac{x-\alpha}{2}\right)^{r}.$$

Z wzoru tego otrzymujemy:

$$\left(1+i\operatorname{cotg}\frac{x-\alpha}{2}\right)^{r}=2\left(1+i\operatorname{cotg}\frac{x-\alpha}{2}\right)^{r-1}-\frac{2i}{r-1}\,\frac{d\left(1+i\operatorname{cotg}\frac{x-\alpha}{2}\right)^{r-1}}{dx},$$

zatem wzór redukcyjny w postaci:

$$\int\left(1+i\operatorname{cotg}\frac{x-\alpha}{2}\right)^{r}dx=-\frac{2i}{r-1}\left(1+i\operatorname{cotg}\frac{x-\alpha}{2}\right)^{r-1}+2\int\left(1+i\operatorname{cotg}\frac{x-\alpha}{2}\right)^{r-1}dx, \qquad (5)$$

który dozwala wykładnik r zmniejszyć o 1, a więc całkę drugiego typu sprowadzić do całki pierwszej.

5. Całki kształtu: $\int R(x).\sin x\,dx$, lub $\int R(x).\cos x\,dx$. Jeżeli $R(x)$ jest funkcyą algebraiczną, wymierną ze względu na zmienną x, natenczas, w przypadku ogólnym, gdy ta funkcya jest zarazem funkcyą ułamkową, niewłaściwą, możemy ją przedstawić, jako sumę funkcyi całkowitej $G(x)$ i funkcyi ułamkowej, właściwej: $\frac{G_{n-1}(x)}{G_n(x)}$ w postaci:

$$R(x)=G(x)+\frac{G_{n-1}(x)}{G_n(x)}.$$

Całki kształtu $\int R(x)\sin x dx$, lub $\int R(x)\cos x dx$ rozpadają się tym sposobem każda na dwie całki w postaci:

$$\int R(x)\sin x\,dx=\int G(x)\sin x\,dx+\int\frac{G_{n-1}(x)}{G_n(x)}\sin x\,dx, \qquad (6)$$

$$\int R(x)\cos x\,dx=\int G(x)\cos x\,dx+\int\frac{G_{n-1}(x)}{G_n(x)}\cos x\,dx. \qquad (7)$$

6. Całki kształtu: $\int G(x)\sin x dx$, lub $\int G(x)\cos x\,dx$, gdzie $G(x)$ jest funkcyą całkowitą, wymierną ze względu na zmienną x, dadzą się, za pomocą metody całkowania przez części, sprowadzić ostatecznie do całek zasadniczych:

$$\int\sin x dx=\cos x+C;\ \int\cos x dx=-\sin x+C.$$

Kładąc, bowiem w pierwszej całce:	a więc:
$G(x)=u$	$du=G'(x)\,dx$
$\sin x\,dx=dv$	$v=-\cos x$
a w drugiej:	a zatem:
$G(x)=u$,	$du=G'(x)\,dx$
$\cos x dx=dv$,	$v=\sin x$

otrzymujemy następujące wzory:

$$\int G(x)\sin x\,dx=-G(x)\cos x+\int G'(x)\cos x\,dx,$$

$$\int G(x)\cos x\,dx=G(x)\sin x-\int G'(x)\sin x\,dx,$$

w których funkcya $G'(x)$ będzie również funkcyą całkowitą, wymierną względem x, jednak stopnia o 1 niższego od funkcyi $G(x)$.

Stosując, powyżej otrzymane wzory, ponownie do uzyskanych nowych całek, otrzymujemy dalej:

$$\int G'(x)\cos x\,dx = G'(x)\sin x - \int G''(x)\sin x\,dx,$$

$$\int G'(x)\sin x\,dx = -G'(x)\cos x + \int G''(x)\cos x\,dx,$$

skąd wynikają wzory redukcyjne:

$$\int G(x)\sin x dx = -G(x)\cos x + G'(x)\sin x - \int G''(x)\sin x dx, \quad (8)$$

$$\int G(x)\cos x dx = G(x)\sin x + G'(x)\cos x - \int G''(x)\cos x dx, \quad (9)$$

które dozwalają w każdej z danych całek zniżyć o dwie jednostki stopień odnośnej funkcyi całkowitej $G(x)$.

Na podstawie tych wzorów otrzymujemy ostatecznie wzory bezpośrednie:

$$\int G(x)\sin x dx = -G(x)\cos x + G'(x)\sin x + G''(x)\cos x - G'''(x)\sin x - \ldots$$

$$\int G(x)\cos x dx = G(x)\sin x + G'(x)\cos x - G''(x)\sin x - G'''(x)\cos x + \ldots$$

6. W myśl tych wzorów otrzymujemy n. p.:

1) $\int (x^2-2x+3)\sin x dx = -(x^2-2x+3)\cos x + (2x-2)\sin x + 2\cos x =$
$= 2(x-1)\sin x - (x^2-2x+1)\cos x + C.$

2) $\int (x^2-2x+3)\cos x\,dx = (x^2-2x+3)\sin x + (2x-2)\cos x - 2\sin x =$
$= (x^2-2x+1)\sin x + 2(x-1)\cos x + C.$

7. Wyznaczając całki powyższe, kształtu: $\int G(x)\sin x\,dx$, lub $\int G(x)\cos x\,dx$, na podstawie prawideł o całkowaniu sumy, dochodzimy do całek typu: $\int x^m \sin x\,dx$, względnie: $\int x^m \cos x\,dx$, w których wykładnik m jest liczbą całkowitą, dodatnią.

8. **Całki kształtu: $\int x^m \sin x\,dx$, lub $\int x^m \cos x dx$** przy dodatnim, całkowitym wykładniku m, dadzą się wyznaczyć wprost, za pomocą wzorów, otrzymanych powyżej dla całek, kształtu: $\int G(x)\sin x dx$, lub $\int G(x)\cos x\,dx$.

Bezpośrednio otrzymujemy odnośne wzory redukcyjne, kładąc w pierwszym przypadku:

$$u = x^m, \quad dv = \sin x\,dx, \quad \text{a zatem:} \quad du = mx^{m-1}\,dx, \quad v = -\cos x$$

w drugim przypadku, zaś:

$$u = x^m, \quad dv = \cos x\,dx, \quad \text{a zatem:} \quad du = mx^{m-1}dx, \quad v = \sin x,$$

w postaci:

$$\left.\begin{aligned} \int x^m \sin x dx &= -x^m \cos x + m\int x^{m-1}\cos x\,dx \\ \int x^m \cos x\,dx &= x^m \sin x - m\int x^{m-1}\sin x\,dx \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Z tych wzorów redukcyjnych możemy także korzystać, jeżeli wykładnik m jest liczbą całkowitą, ujemną.

Otrzymujemy bowiem stąd:

$$\int x^{m-1}\cos x\,dx = \frac{x^m \cos x}{m} + \frac{1}{m}\int x^m \sin x\,dx,$$

$$\int x^{m-1}\sin x dx = \frac{x^m \sin x}{m} - \frac{1}{m}\int x^m \cos x\,dx,$$

a zastępując $m-1$ przez m, dostajemy wzory redukcyjne, w postaci:

$$\int x^m \cos x dx = \frac{x^{m+1}\cos x}{m+1} + \frac{1}{m+1}\int x^{m+1}\sin x\,dx,$$

$$\int x^m \sin x dx = \frac{x^{m+1}\sin x}{m+1} - \frac{1}{m+1}\int x^{m+1}\cos x\,dr,$$

dozwalające, w przypadku $m \lesseqgtr -1$ wykładnik m powiększyć o 1, a więc przydatne przy wykładniku ujemnym m, różnym od -1.

Wzory te sprowadzają całki kształtu: $\int x^m \sin x dx$ do całek kształtu: $\int x^m \cos x dx$ i nawzajem. Stosując je dwukrotnie, otrzymujemy wzory:

$$\int x^m \cos x dx = \frac{x^{m+1}\cos x}{m+1} + \frac{x^{m+2}\sin x}{(m+1)(m+2)} - \frac{1}{(m+1)(m+2)}\int x^{m+2}\cos x dx,$$

$$\int x^m \sin x\, dx = \frac{x^{m+1}\sin x}{m+1} - \frac{x^{m+2}\cos x}{(m+1)(m+2)} - \frac{1}{(m+1)(m+2)}\int x^{m+2}\sin x\, dx, \quad (11)$$

które, w przypadkach $m \gtrless -1$ i $m \gtrless -2$ dozwalają powiększyć wykładnik m o dwie jednostki i zatrzymać ten sam rodzaj całki.

Korzystając z wzorów (10) i (11), możemy zatem całki, kształtu:

$$\int \frac{\cos x}{x^m} dx, \text{ lub: } \int \frac{\sin x}{x^m} dx,$$

gdzie m jest liczbą całkowitą, sprowadzić ostatecznie do jednej z całek:

$$\int \frac{\sin x}{x} dx, \text{ lub } \int \frac{\cos x}{x} dx.$$

Całki te nie dadzą się wyrazić w formie złożonej ze skończonej ilości znanych funkcyj i tworzą nowe funkcye przestępne, z których pierwszą nazywamy **sinusem całkowym zmiennej** x i oznaczamy przez $Si(x)$, drugą zaś **cosinusem całkowym zmiennej** x i oznaczamy przez $Ci(x)$. Piszemy też:

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = Si(x) + C; \quad \int \frac{\cos x}{x} dx = Ci(x) + C.$$

9. Całki kształtu: $\int \frac{G_{n-1}(x)}{G_n(x)} \sin x dx$, **lub** $\int \frac{G_{n-1}(x)}{G_n(x)} \cos x dx$, w których $\frac{G_{n-1}(x)}{G_n(x)}$ jest funkcyą wymierną, ułamkową zmiennej x, dającą się rozłożyć na ułamki proste, kształtu: $\frac{A}{x-a}$, względnie $\frac{A_r}{(x-a)^r}$ prowadzą, przy każdym pojedyńczym czynniku pierwiastkowym $x-a$ mianownika $G_n(x)$, do całek kształtu:

$$\int \frac{\sin x}{x-a} dx, \text{ lub } \int \frac{\cos x}{x-a} dx,$$

a przy r-krotnym czynniku pierwiastkowym funkcyi $G_n(x)$ do całek kształtu:

$$\int \frac{\sin x}{(x-a)^r} dx, \text{ lub } \int \frac{\cos x}{(x-a)^r} dx.$$

Do całek drugiego kształtu możemy zastosować metodę całkowania przez części.

Kładąc mianowicie w pierwszym przypadku:

$$\sin x = u \qquad du = \cos x dx$$

$$\frac{dx}{(x-a)^n} = dv, \text{ a zatem } v = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}},$$

a w drugim:

$$\cos x = u \qquad du = -\sin x dx$$

$$\frac{dx}{(x-a)^n} = dv, \text{ a zatem } v = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}},$$

otrzymujemy wzory:

$$\int \frac{\sin x}{(x-a)^n} dx = -\frac{\sin x}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{\cos x}{(x-a)^{n-1}} dx,$$

$$\int \frac{\cos x}{(x-a)^n} dx = -\frac{\cos x}{(n-1)(x-a)^{n-1}} - \frac{1}{n-1} \int \frac{\sin x}{(x-a)^{n-1}} dx, \quad (12)$$

które, po ponownem zastosowaniu, prowadzą do wzorów redukcyjnych:

$$\int \frac{\sin x}{(x-a)^n} dx = -\frac{\sin x}{(n-1)(x-a)^{n-1}} - \frac{\cos x}{(n-1)(n-2)(x-a)^{n-2}} - \\ - \frac{1}{(n-1)(n-2)} \int \frac{\sin x}{(x-a)^{n-2}} dx,$$

$$\int \frac{\cos x}{(x-a)^n} dx = -\frac{\cos x}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + \frac{\sin x}{(n-1)(n-2)(x-a)^{n-2}} - \\ - \frac{1}{(n-1)(n-2)} \int \frac{\cos x}{(x-a)^{n-2}} dx, \quad (13)$$

które dozwalają wykładnik n zmniejszyć o dwie jednostki, zatrzymując ten sam rodzaj całek.

Korzystając z równań (12) i (13) możemy więc całki kształtu:

$$\int \frac{\sin x}{(x-a)^n}, \text{ lub } \int \frac{\cos x}{(x-a)^n} dx,$$

sprowadzić ostatecznie do całek kształtu:

$$\int \frac{\sin x}{x-a} dx, \text{ lub } \int \frac{\cos x}{x-a} dx.$$

Podstawiając w tych całkach $x-a=z$, zatem $x=z+a$, $dx=dz$, otrzymujemy:

$$\int \frac{\sin x}{x-a} dx = \int \frac{\sin(z+a)}{z} dz = \cos a \int \frac{\sin z}{z} dz + \sin a \int \frac{\cos z}{z} dz,$$

$$\int \frac{\cos x}{x-a} dx = \int \frac{\cos(z+a)}{z} dz = \cos a \int \frac{\cos z}{z} dz - \sin a \int \frac{\sin z}{z} dz,$$

gdzie:

$$\int \frac{\sin z}{z} dz = Si(z) + C, \quad \int \frac{\cos z}{z} dz = Ci(z) + C,$$

zatem:

$$\int \frac{\sin x}{x-a} dx = \cos a \,.\, Si(x-a) + \sin a \,.\, Ci(x-a) + C.$$

$$\int \frac{\cos x}{x-a} dx = \cos a \,.\, Ci(x-a) - \sin a \,.\, Si(x-a) + C.$$

Całki kształtu: $\int R(x) \sin x\, dx$, lub $\int R(x) \cos x dx$ dadzą się zatem wyrazić przez funkcye znane i nowe funkcye przestępne, zwane sinusem, względnie cosinusem całkowym.

10. Całki kształtu: $\int \frac{x dx}{\sin^m x}$ i $\int \frac{x dx}{\cos^m x}$ prowadzą do nowych funkcyj przestępnych. Przedewszystkiem mamy:

$$\int \frac{x dx}{\sin^m x} = \int \frac{x(\sin^2 x + \cos^2 x)\, dx}{\sin^m x} = \int \frac{x dx}{\sin^{m-2} x} + \int \frac{x \cos^2 x\, dx}{\sin^m x}.$$

Stosując do drugiej całki metodę całkowania przez części, położm

$$x\cos x = u \qquad du = (\cos x - x\sin x)\,dx$$

$$\frac{\cos x dx}{\sin^m x} = dv \quad \text{a zatem} \quad v = -\frac{1}{(m-1)\sin^{m-1}x},$$

a otrzymamy:

$$\int\frac{x\cos^2 x dx}{\sin^m x} = -\frac{x\cos x}{(m-1)\sin^{m-1}x} + \frac{1}{m-1}\int\frac{\cos x - x\sin x}{\sin^{m-1}x}dx,$$

a, że:

$$\int\frac{\cos x - x\sin x}{\sin^{m-1}x}dx = \int\frac{\cos x\,dx}{\sin^{m-1}x} - \int\frac{xdx}{\sin^{m-2}x} = -\frac{1}{(m-2)\sin^{m-2}x} - \int\frac{xdx}{\sin^{m-2}}$$

przeto:

$$\int\frac{x\cos^2 x dx}{\sin^m x} = -\frac{x\cos x}{(m-1)\sin^{m-1}x} - \frac{1}{(m-1)(m-2)\sin^{m-2}x} - \frac{1}{m-1}\int\frac{xdx}{\sin^{m-2}}$$

Wobec tego, otrzymujemy:

$$\int\frac{xdx}{\sin^m x} = -\frac{(m-2)x\cos x + \sin x}{(m-1)(m-2)\sin^{m-1}x} + \frac{m-2}{m-1}\int\frac{xdx}{\sin^{m-2}x}, \qquad ($$

a podobnie:

$$\int\frac{xdx}{\cos^m x} = \frac{(m-2)x\sin x - \cos x}{(m-1)(m-2)\cos^{m-1}x} + \frac{m-2}{m-1}\int\frac{xdx}{\cos^{m-2}x}, \qquad ($$

a więc wzory redukcyjne, które w danych całkach dozwalają zniżyć kładnik m o dwie jednostki.

Jeżeli wykładnik m jest liczbą parzystą, natenczas dojdziemy, na stawie powyższych wzorów, ostatecznie do całek: $\int\frac{xdx}{\sin^2 x}$ i $\int\frac{xdx}{\cos^2 x}$, do rych powyższe wzory redukcyjne nie dadzą się już zastosować.

Kładąc raz:

$$x = u \qquad du = dx$$

$$\frac{dx}{\sin^2 x} = dv \quad \text{a zatem:} \quad v = -\operatorname{cotg} x,$$

to znowu:

$$x = u \qquad du = dx$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = dv, \quad \text{a zatem:} \quad v = \operatorname{tang} x,$$

otrzymujemy:

$$\int\frac{xdx}{\sin^2 x} = -x\operatorname{cotg} x + \int\operatorname{cotg} x dx = -x\operatorname{cotg} x + \log\sin x + C.$$

$$\int\frac{xdx}{\cos^2 x} = x\operatorname{tang} x - \int\operatorname{tang} x dx = x\operatorname{tang} x + \log\cos x + C,$$

co dowodzi, że całki: $\int\frac{xdx}{\sin^{2n}x}$ i $\int\frac{xdx}{\cos^{2n}x}$ przy parzystym wykładniku m dadzą się zawsze wyznaczyć i wyrazić za pomocą funkcyj znanych.

Jeżeli wykładnik m jest liczbą nieparzystą $m = 2n+1$, to można { pomocą powyższych wzorów redukcyjnych zniżyć do 1, dochodzi się więc tecznie do całek: $\int\frac{xdx}{\sin x}$ i $\int\frac{xdx}{\cos x}$, do których powyższe wzory nie (się zastosować. Otrzymane całki nie dadzą się jednakże żadnemi metc

razić w skończonej formie przez funkcye znane i stanowią osobny rodzaj kcyj przestępnych.

11. **Całki kształtu:** $\int x \operatorname{tang} x\,dx$ **i** $\int x \operatorname{cotg} x\,dx$ prowadzą także do noch funkcyj przestępnych. Kładąc, bowiem, raz:

$$x = u \qquad du = dx$$
$$\operatorname{tang} x\,dx = dv \quad \text{a zatem:} \quad v = -\log\cos x,$$

ıgi raz:

$$x = u \qquad du = dx$$
$$\operatorname{cotg} x\,dx = dv \quad \text{a zatem:} \quad v = \log\sin x,$$

:zymujemy:

$$\int x \operatorname{tang} x\,dx = -x\log\cos x + \int \log\cos x\,dx,$$
$$\int x \operatorname{cotg} x\,dx = x\log\sin x - \int \log\sin x\,dx, \tag{16}$$

chodzimy więc do całek:

$$\int \log\sin x\,dx \ \text{ i } \int \log\cos x\,dx,$$

ire nie dadzą się również wyrazić przez funkcye znane, tworząc nowy dzaj funkcyj przestępnych.

12. **Całki funkcyj cyklometrycznych, kształtu:** $\int R(\text{arc}\sin x)\,dx$, lub dobne, w których R przedstawia funkcyę algebraiczną, wymierną którejwiek elementarnej funkcyi cyklometrycznej: $\text{arc}\sin x$, $\text{arctg}\, x$, ..., dadzą zawsze sprowadzić do całek funkcyj, powyżej rozważanych.

Używając, bowiem n. p. w całce: $\int R(\text{arc}\sin x)\,dx$, podstawienia:

$$\text{arc}\sin x = z,\quad x = \sin z,\quad dx = \cos z\,dz,$$

trzymujemy:

$$\int R(\text{arc}\sin x)\,dx = \int R(z)\cos z\,dz,$$

podobnie, otrzymamy, za pomocą podstawienia: $\text{arc}\cos x = z$, wzór:

$$\int R(\text{arc}\cos x)\,dx = -\int R(z)\sin z\,dz.$$

Za pomocą podstawienia: $\text{arc}\operatorname{tang} x = z$, dostajemy:

$$\int R(\text{arc}\operatorname{tang} x)\,dx = \int R(z)\frac{dz}{\cos^2 z}.$$

a pomocą podstawienia: $\text{arc}\operatorname{cotg} x = z$, zaś:

$$\int R(\text{arc}\operatorname{cotg} x)\,dx = -\int R(z)\frac{dz}{\sin^2 z},$$

Podobnie, otrzymamy:

$$\int R(\text{arc}\sec x)\,dx = \int R(z)\frac{\sin z\,dz}{\cos^2 z},$$

$$\int R(\text{arc}\operatorname{cosec} x)\,dx = -\int R(z)\frac{\cos z\,dz}{\sin^2 z}.$$

13. **Wzory redukcyjne całek, kształtu:** $\int (\text{arc}\sin x)^n\,dx$ **i** $\int (\text{arc}\cos x)^n\,dx$.

Kładąc: a zatem:

$$(\text{arc}\sin x)^n = u, \qquad du = n(\text{arc}\sin x)^{n-1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$dx = dv, \qquad v = x,$$

trzymujemy:

$$\int (\text{arc}\sin x)^n\,dx = x(\text{arc}\sin x)^n - n\int (\text{arc}\sin x)^{n-1}\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{17}$$

dobnie, dostajemy:

$$\int (\arccos x)^n dx = x(\arccos x)^n + n\int (\arccos x)^{n-1}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (18)$$

Przyjąwszy, dalej, w pierwszej całce:

$u = (\arcsin x)^{n-1}$ a zatem: $du = (n-1)(\arcsin x)^{n-2}\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

$dv = \dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v = -\sqrt{1-x^2}$,

otrzymujemy:

$$\int (\arcsin x)^{n-1}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^{n-1} + (n-1)\int (\arcsin x)^{n-2}dx,$$

zatem, wzór redukcyjny:

$$\int (\arcsin x)^n dx = x(\arcsin x)^n + n\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^{n-1} - n(n-1)\int (\arcsin x)^{n-2}dx.$$

a podobnie:

$$\int (\arccos x)^n dx = x(\arccos x)^n - n\sqrt{1-x^2}(\arccos x)^{n-1} - n(n-1)\int (\arccos x)^{n-2}dx.$$

Otrzymane wzory redukcyjne dozwalają, przy całkowitym, dodatnim wykładniku n, sprowadzić dane całki, ostatecznie, do jednej z postaci:

$$\int (\arcsin x)\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C, \quad \int \arccos x\,dx = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C,$$

lub: $\int dx = x + C.$

Jeżeli wykładnik n jest liczbą całkowitą, ujemną: $n = -m$, a więc dana całka ma kształt:

$$\int \frac{dx}{(\arcsin x)^m}, \text{ lub } \int \frac{dx}{(\arccos x)^m},$$

nateneczas: kładąc: a zatem:

$u = \sqrt{1-x^2}$, $du = -\dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$,

$dv = \dfrac{1}{(\arcsin x)^m}\cdot\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v = -\dfrac{1}{(m-1)(\arcsin x)^{m-1}}$,

otrzymujemy:

$$\int \frac{dx}{(\arcsin x)^m} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(m-1)(\arcsin x)^{m-1}} - \frac{1}{m-1}\int \frac{1}{(\arcsin x)^{m-1}}\cdot\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (19)$$

a podobnie:

$$\int \frac{dx}{(\arccos x)^m} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{(m-1)(\arccos x)^{m-1}} + \frac{1}{m-1}\int \frac{1}{(\arccos x)^{m-1}}\cdot\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (20)$$

Stosując, do otrzymanych całek, metodę całkowania przez części, połóżmy, w pierwszej całce:

$x = u$, $du = dx$,

$\dfrac{1}{(\arcsin x)^{m-1}}\cdot\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dv$, a zatem $v = -\dfrac{1}{(m-2)(\arcsin x)^{m-2}}$,

a otrzymamy:

$$\int \frac{1}{(\arcsin x)^{m-1}}\cdot\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{(m-2)(\arcsin x)^{m-2}} + \frac{1}{(m-2)}\int \frac{dx}{(\arcsin x)^{m-2}},$$

zatem:

$$\int \frac{dx}{(\arcsin x)^m} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(m-1)(\arcsin x)^{m-1}} + \frac{x}{(m-1)(m-2)(\arcsin x)^{m-2}} -$$

$$-\frac{1}{(m-1)(m-2)}\int \frac{dx}{(\arcsin x)^{m-2}}.$$

Podobnie, znajdziemy:

$$\int\frac{dx}{(\arccos x)^m}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{(m-1)(\arccos x)^{m-1}}+\frac{x}{(m-1)(m-2)(\arccos x)^{m-2}}-$$

$$-\frac{1}{(m-1)(m-2)}\int\frac{dx}{(\arccos x)^{m-2}}.$$

Z otrzymanych wzorów, przydatnych, w przypadkach, gdy wykładnik różny jest od 1 i 2, poznajemy, że dane całki dadzą się ostatecznie sprowadzić do jednej z następujących całek:

$$\int\frac{dx}{\arcsin x},\quad \int\frac{dx}{\arccos x},\quad \int\frac{1}{\arcsin x}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}},\quad \int\frac{1}{\arccos x}\cdot\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}},$$

które przedstawiają nowe funkcye przestępne, nazwane powyżej sinusem i kosinusem całkowym.

Podstawiając bowiem:

$$\arcsin x=z,\ x=\sin z,\ dx=\cos z\,dz,$$

względnie:

$$\arccos x=z,\ x=\cos z,\ dx=-\sin z\,dz,$$

otrzymujemy:

$$\int\frac{dx}{\arcsin x}=\int\frac{\cos z}{z}dz=Ci(z)+C=Ci(\arcsin x)+C.$$

$$\int\frac{1}{\arcsin x}\cdot\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{\sin z}{z}dz=Si(z)+C=Si(\arcsin x)+C,$$

względnie:

$$\int\frac{dx}{\arccos x}=-\int\frac{\sin z}{z}dz=-Si(z)+C=-Si(\arccos x)+C.$$

$$\int\frac{1}{\arccos x}\cdot\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=-\int\frac{\cos z}{z}dz=Ci(z)+C=Ci(\arccos x)+C.$$

14. Całki kształtu: $\int R(x)\arcsin x\,dx$, lub podobne, w których funkcya, stojąca pod znakiem całkowania występuje, jako iloczyn z funkcyi algebraicznej wymiernej i jednej z funkcyj cyklometrycznych, przedstawiają się, wskutek rozwinięcia funkcyi $R(x)$, ostatecznie, jako zbiór całek, kształtu:

$$\int x^m\arcsin x\,dx,\quad \int\frac{\arcsin x}{x^m}dx,\quad \int\frac{\arcsin x}{(x-a)^m}dx,$$

i podobnych, w których występuje odpowiednio którakolwiek inna funkcya cyklometryczna.

Otrzymane całki sprowadzają się, wskutek podstawienia:

$$\arcsin x=z,\ \text{a więc}\ x=\sin z,\ dx=\cos z\,dz,\ \text{i t. p.}$$

do całek, kształtu:

$$\int z.\sin^m z\cos z\,dz,\quad \int\frac{z\cos z\,dz}{\sin^m z},\quad \int\frac{z\cos z\,dz}{(\sin z-a)^m}\ \text{i t. p.},$$

które należą do całek, rozważanych w artykułach poprzedzających.

Stosując do danych całek, kształtu: $\int R(x)\arcsin x\,dx$, i t. p. metodę całkowania przez części, a to, kładąc:

$$\arc\sin x = u, \quad \text{a więc:} \quad du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$R(x)\,dx = dv \qquad v = \int R(x)\,dx,$$

otrzymujemy:

$$\int R(x) \arc\sin x\, dx = \arc\sin x \int R(x)\,dx - \int [\int R(x)\,dx] \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (21)$$

podobnie:

$$\int R(x) \operatorname{arc\,tang} x dx = \operatorname{arc\,tang} x \int R(x)\,dx - \int [\int R(x)\,dx] \cdot \frac{dx}{1+x^2}, \qquad (22)$$

a więc wzory, które wyznaczanie danych całek sprowadzają do wyznaczania całek algebraicznych, skoro całka kształtu: $\int R(x)\,dx$ daje w wyniku funkcyę algebraiczną.

15. Całki kształtu: $\int x^n \arc\sin x\,dx$. Podstawiając we wzorze (21) $R(x)=x^n$, zatem $\int R(x)\,dx = \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, otrzymujemy wzór szczególny:

$$\int x^n \arc\sin x dx = \frac{x^{n+1} \cdot \arc\sin x}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (23)$$

a zarazem:

$$\int x^n \arc\cos x\,dx = \frac{x^{n+1} \cdot \arc\cos x}{n+1} + \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

co dowodzi, że całki tego rodzaju, przy całkowitym, dodatnim wykładniku n, dadzą się zawsze wyznaczyć.

W szczególności, dla $n=0$, otrzymujemy:

$$\int \arc\sin x\,dx = \frac{x \arc\sin x}{1} + \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$\int \arc\cos x\,dx = \frac{x \arc\cos x}{1} - \sqrt{1-x^2} + C.$$

Dla całkowitego, ujemnego wykładnika: $n = -m$, otrzymujemy powyższe wzory, w postaci:

$$\int \frac{\arc\sin x}{x^m}\,dx = -\frac{\arc\sin x}{(m-1)\,x^{m-1}} + \frac{1}{m-1} \int \frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \frac{\arc\cos x}{x^m}\,dx = -\frac{\arc\cos x}{(m-1)x^{m-1}} - \frac{1}{m-1} \int \frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}},$$

która przestaje być przydatną, gdy $m = -1$.

W tym przypadku, otrzymujemy całki, kształtu:

$$\int \frac{\arc\sin x}{x}\,dx \text{ i } \int \frac{\arc\cos x}{x}\,dx,$$

które, na mocy podstawień:

$$\arc\sin x = z, \quad x = \sin z, \quad dx = \cos z\,dz,$$

względnie:

$$\arc\cos x = z, \quad x = \cos z, \quad dx = -\sin z dz,$$

przedstawiają się w postaciach:

$$\int \frac{\arc\sin x}{x}\,dx = \int \frac{z \cos z}{\sin z}\,dz = \int z \operatorname{cotg} z \,.\, dz,$$

$$\int \frac{\arc\cos x}{x}\,dx = -\int \frac{z \sin z}{\cos z}\,dz = -\int z \operatorname{tg} z . dz,$$

prowadzących do nowych funkcyj przestępnych.

Jest bowiem:

$$\int z \operatorname{cotg} z \,.\, dz = z \log \sin z - \int \log \sin z \, dz,$$
$$\int z \operatorname{tang} z \,.\, dz = - z \log \cos z + \int \log \cos z \, dz,$$

...dzie $\int \log \sin z\, dz$ i $\int \log \cos z\, dz$ nie dadzą się wyrazić przez funkcye znane, ...rząc nowy rodzaj funkcyj przestępnych.

16. **Całki kształtu: $\int x^n \operatorname{arc\,tang} x \,.\, dx$.** Podstawiając we wzorze (22):

$$R(x) = x^n, \text{ zatem: } \int R(x)\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

...zymujemy wzór:

$$\int x^n \operatorname{arc\,tang} x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arc\,tang} x - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{x^2+1}\, dx, \tag{24}$$

...podstawie którego, możemy wyznaczyć daną całkę, przy jakimkolwiek ...kowitym, dodatnim wykładniku n. Jeżeli wykładnik n jest liczbą parzystą, ...$2m$, wówczas, otrzymujemy, pod znakiem całkowym, funkcyę ułamkową:

$$\frac{x^{2m+1}}{x^2+1} = x^{2m-1} - x^{2m-3} + \ldots + (-1)^{m-1} x + (-1)^m \,.\, \frac{x}{x^2+1},$$

...przypadku, zaś, gdy wykładnik n jest liczbą nieparzystą: $n = 2m+1$, otrzy...jemy:

$$\frac{x^{2m+2}}{x^2+1} = x^{2m} - x^{2m-2} + \ldots + (-1)^m + (-1)^{m+1} \,.\, \frac{1}{x^2+1},$$

...m dana całka przedstawia się, w pierwszym przypadku, w postaci:

$$\int x^{2m} \operatorname{arc\,tang} x\, dx = \frac{x^{2m+1}}{2m+1} \operatorname{arc\,tang} x - \frac{1}{2m+1} \left\{ \frac{x^{2m}}{2m} - \frac{x^{2m-2}}{2m-2} + \ldots + \right.$$
$$\left. + (-1)^{m-1} \frac{x^2}{2} + \frac{(-1)^m}{2} \log(x^2+1) \right\} + C,$$

...rugim, zaś, w postaci:

$$\int x^{2m+1} \operatorname{arc\,tang} x\, dx = \frac{x^{2m+2}}{2m+2} \operatorname{arc\,tang} x - \frac{1}{2m+2} \left\{ \frac{x^{2m+1}}{2m+1} - \frac{x^{2m-1}}{2m-1} + \ldots + \right.$$
$$\left. + (-1)^m x + (-1)^{m+1} \operatorname{arc\,tang} x \right\} + C.$$

W szczególności, otrzymujemy:

$$\int \operatorname{arc\,tang} x\, dx = x \operatorname{arc\,tang} x - \frac{1}{2} \log(x^2+1) + C,$$

$$\int x \operatorname{arc\,tang} x\, dx = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arc\,tang} x - \frac{1}{2} \{x - \operatorname{arc\,tang} x\} + C,$$

$$\int x^2 \operatorname{arc\,tang} x\, dx = \frac{1}{3} x^3 \operatorname{arc\,tang} x - \frac{1}{6} \{x^2 - \log(x^2+1)\} + C.$$

Jeżeli wykładnik n jest liczbą całkowitą, ujemną: $n = -m$, natenczas, na ...stawie wzoru (24), otrzymujemy wzór:

$$\int \frac{\operatorname{arc\,tang} x}{x^m}\, dx = - \frac{\operatorname{arc\,tang} x}{(m-1) x^{m-1}} + \frac{1}{m-1} \int \frac{dx}{x^{m-1}(x^2+1)},$$

...ydatny, jak długo $m > 1$.

Dla $m = 1$, otrzymujemy całkę kształtu: $\int \frac{\operatorname{arc\,tang} x}{x}\, dx$, która, wskutek ...stawienia: $\operatorname{arc\,tang} x = z$, $x = \operatorname{tang} z$, $dx = \frac{dz}{\cos^2 z}$, sprowadza się do postaci:

$$\int \frac{\operatorname{arc\,tang} x}{x}\,dx = \int \frac{z\,dz}{\sin z \cos z} = \int \frac{2z\,dz}{\sin 2z},$$

a więc do nowej funkcyi przestępnej kształtu: $\int \frac{t}{\sin t}\,dt.$

17. Całki kształtu: $\int x^n . \operatorname{arc\,sin} \varphi(x) . dx$, $\int x^n \operatorname{arc\,tang} \varphi(x) dx$ i tym podobne, w których $\varphi(x)$ jest funkcyą algebraiczną zmiennej x, stanowią uogólnienie całek powyżej rozważanych. Za pomocą metody całkowania przez części, otrzymujemy n. p. wzory następujące:

$$\int x^n . \operatorname{arc\,sin} \varphi(x) . dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arc\,sin} \varphi(x) - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1} . \varphi'(x)}{\sqrt{1-[\varphi(x)]^2}}\,dx, \quad (25)$$

$$\int x^n . \operatorname{arc\,tang} \varphi(x) . dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arc\,tang} \varphi(x) - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1} . \varphi'(x)}{1+[\varphi(x)]^2}\,dx, \quad (26)$$

i tym podobne, z których poznajemy, że całki tego rodzaju można zawsze, już za pomocą metody całkowania przez części, sprowadzić do całek funkcyj algebraicznych, a więc, pod pewnymi warunkami, zawsze wyznaczyć.

W szczególności, zauważamy, że, na mocy wzoru (26), całki kształtu: $\int x^n . \operatorname{arc\,tang} \varphi(x) . dx$ możemy, przy całkowitym wykładniku n, różnym od -1, zawsze wyznaczyć, skoro tylko funkcya $\varphi(x)$ jest funkcyą wymierną zmiennej x.

Uogólnieniem kształtu powyższych całek są całki kształtu:

$$\int f(x) \operatorname{arc\,sin} \varphi(x) . dx, \quad \int f(x) \operatorname{arc\,tang} \varphi(x) . dx$$

i tym podobne, w których $f(x)$ i $\varphi(x)$ są funkcyami algebraicznemi zmiennej x. Te całki dadzą się, w szczególnych przypadkach, także wyznaczyć, za pomocą stosownego połączenia metod całkowania przez części z metodami podstawienia, zależnie od danych przykładów.

Przykłady. 1) Wyznaczyć całkę kształtu: $\int \frac{x \operatorname{arc\,tang} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

Kładąc:

$$\operatorname{arc\,tang} x = u, \quad \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = dv, \quad \text{a zatem:} \quad du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = -\sqrt{1-x^2},$$

otrzymamy:

$$\int \frac{x \operatorname{arctang} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2} \operatorname{arc\,tang} x + \int \frac{\sqrt{1-x^2}\,dx}{1+x^2}.$$

Połóżmy w otrzymanej całce: $x = \sin\varphi$, zatem: $dx = \cos\varphi\, d\varphi$, natenczas, otrzymamy:

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}\,dx = \int \frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{1+\sin^2\varphi} = \int \left\{-1 + \frac{2}{1+\sin^2\varphi}\right\} d\varphi = -\varphi + 2\int \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi},$$

gdzie, na mocy art. 8. str. 156., za pomocą podstawienia: $\operatorname{tang}\varphi = u$, znajdziemy:

$$\int \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tang}(\sqrt{2} \operatorname{tang}\varphi) + C.$$

Wobec tego, będzie:

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}\,dx = -\operatorname{arc\,sin} x + \sqrt{2} \operatorname{arc\,tang} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} + C,$$

a zatem:

$$\int \frac{x \operatorname{arc\,tang} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = C - \sqrt{1-x^2} \operatorname{arc\,tang} x - \operatorname{arc\,sin} x + \sqrt{2} \operatorname{arc\,tang} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2) Wyznaczyć całkę kształtu:

$$\int \arccos\left(\sqrt{\frac{c}{ax^2+b}}\right).dx.$$

Stosując metodę całkowania przez części, otrzymujemy, najpierw:

$$\int \arccos\left(\sqrt{\frac{c}{ax^2+b}}\right)dx = x \arccos\left(\sqrt{\frac{c}{ax^2+b}}\right) - \sqrt{c}\int \frac{ax^2\,dx}{(ax^2+b)\sqrt{ax^2+b-c}},$$

że:

$$\int \frac{ax^2\,dx}{(ax^2+b)\sqrt{ax^2+b-c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+b-c}} - b\int \frac{dx}{(ax^2+b)\sqrt{ax^2+b-c}},$$

zatem, w przypadku $a>0$, otrzymujemy:

$$\int \arccos\left(\sqrt{\frac{c}{ax^2+b}}\right)dx = x \arccos\sqrt{\frac{c}{ax^2+b}} - \sqrt{\frac{c}{a}}\log[x\sqrt{a} + \sqrt{ax^2+b-c}] +$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{ac}}\log\frac{\sqrt{b}.\sqrt{ax^2+b-c}+x\sqrt{ac}}{\sqrt{b}.\sqrt{ax^2+b-c}-x\sqrt{ac}}+C,$$

w przypadku $a<0$, zaś:

$$\int \arccos\left(\sqrt{\frac{c}{ax^2+b}}\right)dx = x \arccos\sqrt{\frac{c}{ax^2+b}} + \sqrt{-\frac{c}{a}}\arccos\frac{x\sqrt{-a}}{\sqrt{b-c}} +$$

$$+\sqrt{-\frac{b}{ac}}\operatorname{arctang}\left[\sqrt{-\frac{ac}{b}}.\frac{x}{\sqrt{ax^2+b-c}}\right]+C.$$

Ćwiczenia XII.

Na podstawie określenia: $\sin x = \frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}$, $\cos x = \frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}$, wykazać, że:

1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. 2) $\operatorname{tang}^2 x = \sec^2 x - 1$. 3) $\operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1$.

4) $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$. 5) $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$.

6) $\sin 2x = 2\sin x \cos x$. 7) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

8) $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$. 9) $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$. 10) $\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$.

11) $\cos x \sin y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) - \sin(x-y)]$. 12) $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$.

13) $\sin x \sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$.

14) $$\sin 2nx = \sum_{r=0}^{r=n-1}(-1)^r\binom{2n}{2r+1}\cos^{2n-2r-1}x\sin^{2r+1}x =$$

$$= 2^{2n-1}\sin x\cos x\prod_{r=1}^{r=n-1}\left(\cos^2 x - \cos^2\frac{r\pi}{2n}\right).$$

15) $$\sin(2n+1)x = \sum_{r=0}^{r=n}(-1)^r\binom{2n+1}{2r+1}\cos^{2n+1-2r-1}x\sin^{2r+1}x =$$

$$= 2^{2n}\sin x\prod_{r=1}^{r=n}\left(\cos^2 x - \cos^2\frac{r\pi}{2n+1}\right).$$

16) $$\cos 2nx = \sum_{r=0}^{r=n}(-1)^r\binom{2n}{2r}\cos^{2n-2r}x\sin^{2r}x = 2^{2n-1}\prod_{r=0}^{r=n-1}\left(\cos^2 x - \cos^2\frac{(2r+1)\pi}{4n}\right).$$

17) $\cos(2n+1)x = \sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r \binom{2n+1}{2r} \cos^{2n+1-2r} x \sin^{2r} x =$

$$= 2^{2n} \cos x \prod_{r=0}^{r=n-1} \left(\cos^2 x - \cos^2 \frac{(2r+1)\pi}{4n+2}\right).$$

18) $\sin^{2n} x = \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} \sum_{r=0}^{r=n-1} (-1)^r \binom{2n}{r} \cos(2n-2r)x + \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.$

19) $\sin^{2n+1} x = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{r=0}^{r=n} (-1)^n \binom{2n+1}{r} \sin(2n+1-2r)x.$

20) $\cos^{2n} x = \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{r=0}^{r=n-1} \binom{2n}{r} \cos(2n-2r)x + \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.$

21) $\cos^{2n+1} x = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{r=0}^{r=n} \binom{2n+1}{r} \cos(2n+1-2r)x.$

Wyprowadzić następujące całki:

22) $\int \frac{(2\cos x + 3\sin x)}{3\cos x + 2\sin x} dx = \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}\log(3\cos x + 2\sin x) + C.$

23) $\int \sin 5x \cos 3x \, dx = C - \frac{\cos 8x}{16} - \frac{\cos 2x}{4}.$

24) $\int \cos 2x \cos 4x \, dx = \frac{\sin 6x}{12} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$

25) $\int \frac{dx}{\sin 2x - \sin x} = \frac{1}{6}\log(1+\cos x) + \frac{1}{2}\log(1-\cos x) - \frac{2}{3}\log(1-2\cos x) + C.$

26) $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \frac{\sin x}{1+\cos x} + C.$

27) $\int \frac{dx}{5+4\sin x} = \frac{2}{3} \operatorname{arc\,tang} \left(\frac{4+5\operatorname{tang}\frac{x}{2}}{3} \right) + C.$

28) $\int \frac{dx}{1-\sin^4 x} = \frac{1}{2}\operatorname{tang} x + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tang}(\sqrt{2}\operatorname{tang} x) + C.$

29) $\int \frac{\sin\frac{x}{2}\operatorname{tang}\frac{x}{2}}{\cos x} dx = \log \frac{1-\sin\frac{x}{2}}{1+\sin\frac{x}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}+1}{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}-1} + C.$

30) $\int \frac{\sqrt{\sin x}}{\cos^{5/2} x} dx = \frac{2}{3}(\operatorname{tang} x)^{3/2} + C.$ 31) $\int \frac{\cos x \, dx}{(1-a^2\cos^2 x)^{3/2}} = \frac{\sin x}{(1-a^2)\sqrt{1-a^2\cos^2 x}} + C.$

32) $\int (\cos 2x)^{3/2} . \cos x \, dx = \frac{\sin x}{8}(3+2\cos 2x)\sqrt{\cos 2x} + \frac{3}{8\sqrt{2}} \arcsin(\sqrt{2}\sin x) + C.$

33) $\int \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 x}} = -\log\left\{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2 x} + \cos x\right\} + C.$

34) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx = \frac{2}{5}\cos^{5/2} x - 2\cos^{1/2} x + C.$

35) $\int \sqrt{1+\cos x} \, . dx = 2\sqrt{1-\cos x} + C.$ 36) $\int \sqrt{1-\cos x} . dx = -2\sqrt{1+\cos x} + C.$

37) $\int \operatorname{tang}^4 x \, dx = \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3 x - \operatorname{tang} x + x + C.$ 38) $\int \frac{dx}{\operatorname{tang}^3 x} = -\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x} - \log\sin x + C.$

39) $\int \frac{dx}{\operatorname{tang}^5 x} = -\frac{1}{4\operatorname{tang}^4 x} + \frac{1}{2\operatorname{tang}^2 x} + \log(\sin x) + C.$

40) $\int \frac{\operatorname{tang} x\, dx}{a + b \operatorname{tang}^2 x} = \frac{1}{2(b-a)} \log (a \cos^2 x + b \sin^2 x) + C.$

41) $\int x \cos x\, dx = \cos x + x \sin x + C.$ 42) $\int x^2 \cos x\, dx = 2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x + C.$

43) $\int x^3 \cos x\, dx = (3x^2 - 6) \cos x + (x^3 - 6x) \sin x + C.$

44) $\int x^m \cos x dx = \sum_{r=0}^{r=m} \binom{m}{r} r!\, x^{m-r} \sin \left(x + r\frac{\pi}{2}\right) + C.$

45) $\int x \sin x\, dx = \sin x - x \cos x + C.$ 46) $\int x^2 \sin x\, dx = 2x \sin x - (x^2 - 2) \cos x + C.$

47) $\int x^3 \sin x\, dx = (3x^2 - 6) \sin x - (x^3 - 6x) \cos x + C.$

48) $\int x^m \sin x dx = -\sum_{r=0}^{r=m} \binom{m}{r} r!\, x^{m-r} \cos \left(x + r\frac{\pi}{2}\right) + C.$

49) $\int \frac{x\, dx}{\cos^2 x} = x \operatorname{tang} x + \log \cos x + C.$

50) $\int \frac{x dx}{\cos^4 x} = \frac{2x \sin x - \cos x}{6 \cos^3 x} + \frac{2}{3} (x \operatorname{tang} x + \log \cos x) + C.$

51) $\int \frac{x dx}{\sin^2 x} = -x \operatorname{cotg} x + \log \sin x + C.$

52) $\int \frac{x\, dx}{\sin^4 x} = -\frac{\sin x + 2x \cos x}{6 \sin^3 x} - \frac{2}{3} [x \operatorname{cotg} x - \log \sin x] + C.$

53) $\int x \operatorname{tang} x\, dx = -x \log \cos x + \int \log \cos x\, dx.$

54) $\int x \operatorname{cotg} x\, dx = x \log \sin x - \int \log \sin x\, dx.$

55) $\int x \operatorname{tang}^2 x\, dx = x \operatorname{tang} x + \log (\cos x) - \frac{x^2}{2} + C.$

56) $\int \operatorname{arc} \sin x\, dx = x \operatorname{arc} \sin x + \sqrt{1 - x^2} + C.$

57) $\int \operatorname{arc} \cos x\, dx = x \operatorname{arc} \cos x - \sqrt{1 - x^2} + C.$

58) $\int \operatorname{arc} \operatorname{tang} x\, dx = x \,.\, \operatorname{arc} \operatorname{tang} x - \log \sqrt{1 + x^2} + C.$

59) $\int \operatorname{arc} \operatorname{cotg} x\, dx = x \,.\, \operatorname{arc} \operatorname{cotg} x + \log \sqrt{1 + x^2} + C.$

60) $\int \operatorname{arc} \sec x\, dx = x \operatorname{arc} \sec x - \log (x + \sqrt{x^2 - 1}) + C.$

61) $\int \operatorname{arc} \operatorname{cosec} x\, dx = x \operatorname{arc} \operatorname{cosec} x + \log (x + \sqrt{x^2 - 1}) + C.$

62) $\int \frac{\operatorname{arc} \sin x\, dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2} (\operatorname{arc} \sin x)^2 + C.$ 63) $\int \frac{\operatorname{arc} \cos x\, dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{1}{2} (\operatorname{arc} \cos x)^2 + C.$

64) $\int \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tang} x dx}{1 + x^2} = \frac{1}{2} (\operatorname{arc} \operatorname{tang} x)^2 + C.$ 65) $\int \frac{\operatorname{arc} \operatorname{cotg} x\, dx}{1 + x^2} = -\frac{1}{2} (\operatorname{arc} \operatorname{cotg} x)^2 + C.$

66) $\int \frac{\operatorname{arc} \sec x\, dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{2} (\operatorname{arc} \sec x)^2 + C.$ 67) $\int \frac{\operatorname{arc} \operatorname{cosec} x\, dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = -\frac{1}{2} (\operatorname{arc} \operatorname{cosec} x)^2 + C.$

68) $\int \operatorname{arc} \sin x \,.\, \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}} = x - \sqrt{1 - x^2} \operatorname{arc} \sin x + C.$

69) $\int \operatorname{arc} \sin x \,.\, \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2} \,.\, \operatorname{arc} \sin x + \frac{1}{4} (\operatorname{arc} \sin x)^2 + C.$

70) $\int \operatorname{arc} \sin x \,.\, \frac{x^3 dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{9} x^3 + \frac{2}{3} x - \frac{1}{3} (x^2 + 2) \sqrt{1 - x^2} \operatorname{arc} \sin x + C.$

71) $\int \operatorname{arc} \sin x \,.\, \frac{x^4 dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{16} x^4 + \frac{3}{16} x^2 - \frac{1}{8} (2x^3 + 3x) \sqrt{1 - x^2} \,.\, \operatorname{arc} \sin x +$

$+ \frac{3}{16} (\operatorname{arc} \sin x)^2 + C.$

72) $\int \operatorname{arc} \sin x \,.\, \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)^3}} = \frac{x \,.\, \operatorname{arc} \sin x}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1}{2} \log (1 - x^2).$

73) $\int \arcsin x \,.\, \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \log \frac{1-x}{1+x} + C.$

74) $\int \operatorname{arc\,tang} x \,.\, \frac{x^2 dx}{1+x^2} = x \operatorname{arc\,tang} x - \frac{1}{2} \log (1+x^2) - \frac{1}{2} (\operatorname{arc\,tang} x)^2 + C.$

75) $\int \frac{x^4}{1+x^2} \operatorname{arc\,tang} x\,dx = -\frac{1}{6} x^2 + \frac{2}{3} \log(1+x^2) + \left(\frac{x^3}{3} - x\right) \operatorname{arc\,tang} x + \frac{1}{2} (\operatorname{arctang} x)^2.$

76) $\int (1+3x^2) \operatorname{arc\,tang} x = (x+x^3) \operatorname{arc\,tang} x - \frac{x^2}{2} + C.$

77) $\int (\arcsin x)^n dx = (\arcsin x)^n \left\{x + \frac{n\sqrt{1-x^2}}{\arcsin x} - 2 \binom{n}{2} \frac{x}{(\arcsin x)^2} + \ldots \right\} + C.$

78) $\int \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}} \,.\, dx = (x+a) \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}} - \sqrt{a} + x + C.$

79) $\int \arcsin \sqrt{\frac{2a-x}{4a}}\, dx = \frac{x}{2} \arcsin \sqrt{\frac{2a-x}{4a}} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{2a} - \frac{x}{8} \sqrt{4a^2 - x^2} + C.$

80) $\int x^2 \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{x}{a}}\, dx = \frac{x^3 + a^3}{3} \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{x}{a}} - \frac{\sqrt{ax}}{3} \left(\frac{x^2}{5} - \frac{ax}{3} + a^2\right) + C.$

81) $\int x^{2n} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{a}}\, dx = \frac{x^{2n+1} + a^{2n+1}}{2n+1} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{a}} - \frac{\sqrt{xa}}{2n+1} \sum_{r=0}^{r=2n} (-1)^r \frac{x^{2n-r} a^r}{4n-2r+1} + C.$

82) $\int x^{2n+1} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{a}}\, dx = \frac{x^{2n+2} - a^{2n+2}}{2n+2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{a}} -$

$$- \frac{\sqrt{ax}}{2n+2} \sum_{r=0}^{r=2n+1} (-1)^r \frac{x^{2n+1-r} a^r}{4n-2r+3} + C.$$

83) $\int e^x \sin x\, dx = \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} + C.$ 84) $\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + C.$

85) $\int e^x (\cos x + \sin x) dx = e^x \sin x + C.$

86) $\int e^{-x} \cos^3 x\, dx = \frac{e^{-x}}{10} \left\{3(\sin x - \cos x) + \cos^2 x (3 \sin x - \cos x)\right\} + C.$

Rozwiązania XII. 1)—82). Wskazówki zawarte w tym wykładzie i poprzedzających. 83)—86). Metodą całkowania przez części.

Literatura. J. Boussinesq. Cours d'analyse infinitesimal. Paris 1887—1892. A. G. Greenhil Differential and integral calculus with applications. London 1886. J. A. Serret. Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von Axel Harnack. Leipzig 1884—1885.

Tematy do rozprawek naukowych.

1. O rozkładaniu funkcyi wymiernej: $R(\sin x, \cos x)$ na ułamki częściowe.

2. O sinusie całkowym: $\int \frac{\sin x}{x} dx = Si(x) + C.$

3. O cosinusie całkowym: $\int \frac{\cos x}{x} dx = Ci(x) + C.$

Wykład XIII.

Całki funkcyj hiperbolicznych i hiperbolometrycznych.

1. Elementarne funkcye hiperboliczne, analogiczne do sześciu elementarnych funkcyj goniometrycznych, określone zostały w wykładzie XLIII. Tomu I. str. 595. i nast. wzorami:

$$\sin\text{hip}\, x = \frac{\sin xi}{i} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \cos\text{hip}\, x = \cos xi = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\text{tang}\,\text{hip}\, x = \frac{\text{tang}\, xi}{i} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}; \quad \text{cotg}\,\text{hip}\, x = i \,\text{cotg}\, xi = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \tag{1}$$

$$\sec\text{hip}\, x = \sec xi = \frac{2}{e^x + e^{-x}}; \quad \text{cosec}\,\text{hip}\, x = i\,\text{cosec}\, xi = \frac{2}{e^x - e^{-x}}.$$

Są one, podobnie, jak funkcye wykładnicze, funkcyami peryodycznemi. W szczególności, funkcye $\sin\text{hip}\, x$ i $\cos\text{hip}\, x$, jakoteż $\text{cosec}\,\text{hip}\, x$ i $\sec\text{hip}\, x$, mają peryod urojony: $2\pi i$, funkcye $\text{tang}\,\text{hip}\, x$ i $\text{cotg}\,\text{hip}\, x$ mają zaś peryod urojony: πi.

2. Znakowanie funkcyj hiperbolicznych nie jest ustalone. Autorowie niemieccy używają najczęściej znakowania, przyjętego dla funkcyj goniometrycznych, a pisanego tylko literami gotyckiemi, jak: $\mathfrak{Sin}\, x$, $\mathfrak{Cosin}\, x$, $\mathfrak{Tang}\, x$, $\mathfrak{Cotang}\, x$, $\mathfrak{Sec}\, x$, $\mathfrak{Cosec}\, x$, autorowie francuscy piszą, natomiast: Sh x, Ch x, Th x, Cth x, Sc x, Csc x, angielscy zaś, pisząc literę h na początku, używają znakowania hs x, hc x, ht x, hct x, hsc x, hcsc x.

3. Związki między elementarnemi funkcyami hiperbolicznemi. Z określenia funkcyj hiperbolicznych wypływają bezpośrednio następujące związki:

$$\cos\text{hip}^2 x - \sin\text{hip}^2 x = \sec\text{hip}^2 x + \text{tang}\,\text{hip}^2 x = \text{cotang}\,\text{hip}^2 x - \text{cosec}\,\text{hip}^2 x = 1,$$

$$\sin\text{hip}\, x \,.\, \text{cosec}\,\text{hip}\, x = \cos\text{hip}\, x \,.\, \sec\text{hip}\, x = \text{tang}\,\text{hip}\, x \,.\, \text{cotang}\,\text{hip}\, x = 1, \tag{2}$$

$$\text{tang}\,\text{hip}\, x = \frac{\sin\text{hip}\, x}{\cos\text{hip}\, x} = \frac{\sec\text{hip}\, x}{\text{cosec}\,\text{hip}\, x}; \quad \text{cotang}\,\text{hip}\, x = \frac{\cos\text{hip}\, x}{\sin\text{hip}\, x} = \frac{\text{cosec}\,\text{hip}\, x}{\sec\text{hip}\, x},$$

przy pomocy których, znając jedną z sześciu elementarnych funkcyj hiperbolicznych, możemy wszystkie inne wyznaczyć.

4. W szczególności, otrzymujemy:

1) $\sin\text{hip}\, x = u$, $\cos\text{hip}\, x = \sqrt{1+u^2}$, $\text{tang}\,\text{hip}\, x = \dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}$, $\text{cotg}\,\text{hip}\, x = \dfrac{\sqrt{1+u^2}}{u}$,

$\sec\text{hip}\, x = \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}$, $\text{cosec}\,\text{hip}\, x = \dfrac{1}{u}$,

2) $\cos\text{hip}\, x = u$, $\sin\text{hip}\, x = \sqrt{u^2-1}$, $\text{tang}\,\text{hip}\, x = \dfrac{\sqrt{u^2-1}}{u}$, $\text{cotg}\,\text{hip}\, x = \dfrac{u}{\sqrt{u^2-1}}$,

$\sec\text{hip}\, x = \dfrac{1}{u}$, $\text{cosec}\,\text{hip}\, x = \dfrac{1}{\sqrt{u^2-1}}$;

3) **tang hip** $x = u$, $\sin\text{hip}\, x = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$, $\cos\text{hip}\, x = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$, $\text{cotg hip}\, x = \frac{1}{u}$,

$\sec\text{hip}\, x = \sqrt{1-u^2}$, $\text{cosec hip}\, x = \frac{\sqrt{1-u^2}}{u}$,

4) **cotg hip** $x = u$, $\sin\text{hip}\, x = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}$, $\cos\text{hip}\, x = \frac{u}{\sqrt{u^2-1}}$, $\text{tang hip}\, x = \frac{1}{u}$,

$\sec\text{hip}\, x = \frac{\sqrt{u^2-1}}{u}$, $\text{cosec hip}\, x = \sqrt{u^2-1}$;

5) **sec hip** $x = u$, $\sin\text{hip}\, x = \frac{\sqrt{1-u^2}}{u}$, $\cos\text{hip}\, x = \frac{1}{u}$, $\text{tang hip}\, x = \sqrt{1-u^2}$,

$\text{cotg hip}\, x = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$, $\text{cosec hip}\, x = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$;

6) **cosec hip** $x = u$, $\sin\text{hip}\, x = \frac{1}{u}$, $\cos\text{hip}\, x = \frac{\sqrt{1+u^2}}{u}$, $\text{tang hip}\, x = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$,

$\text{cotg hip}\, x = \sqrt{1+u^2}$, $\sec\text{hip}\, x = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$.

5. Wzory hiperboliczne. Analogicznie do wzorów goniometrycznych, możemy wyprowadzić wzory hiperboliczne, bądź, wprost z określenia tych funkcyj, bądź, wskutek przekształcenia odnośnych wzorów goniometrycznych.

Tak otrzymamy n. p. z wzorów goniometrycznych:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,$$

odpowiednie wzory hiperboliczne:

$$\begin{aligned} &\sin\text{hip}\,(x \pm y) = \sin\text{hip}\, x \cos\text{hip}\, y \pm \cos\text{hip}\, x \sin\text{hip}\, y,\\ &\cos\text{hip}\,(x \pm y) = \cos\text{hip}\, x \cos\text{hip}\, y \pm \sin\text{hip}\, x \sin\text{hip}\, y, \end{aligned} \qquad (3)$$

a stąd:

$$\begin{aligned} &\sin\text{hip}\, 2x = 2 \sin\text{hip}\, x \cos\text{hip}\, x,\\ &\cos\text{hip}\, 2x = \cos\text{hip}^2 x + \sin\text{hip}^2 x,\\ &\text{tang hip}\, x = \frac{2\,\text{tang hip}\, x}{1 + \text{tang hip}^2 x}. \end{aligned} \qquad (4)$$

W połączeniu relacyi: $\cos\text{hip}\, 2x = \cos\text{hip}^2 x + \sin\text{hip}^2 x$, z relacyą: $\cos\text{hip}^2 x - \sin\text{hip}^2 x = 1$, otrzymujemy wzory:

$$\begin{aligned} 2\cos\text{hip}^2 x &= \cos\text{hip}\, 2x + 1\\ 2\sin\text{hip}^2 x &= \cos\text{hip}\, 2x - 1 \end{aligned}, \quad \text{tang hip}^2 x = \frac{\cos\text{hip}\, 2x - 1}{\cos\text{hip}\, 2x + 1}, \qquad (5)$$

które dozwalają wyznaczyć funkcyę hiperboliczną argumentu x, gdy znaną jest wartość funkcyi: $\cos\text{hip}\, 2x$.

5. Elementarne funkcye hiperbolometryczne, jako odwrotności elementarnych funkcyj hiperbolicznych, analogiczne do sześciu funkcyj cyklometrycznych, (wykład XLIV. Tomu I. str. 609. i nast.) określają się wzorami:

$$\begin{aligned} &\arg\sin\text{hip}\, x = \frac{1}{i}\,\text{arc}\sin xi = \log(x + \sqrt{x^2+1}),\\ &\arg\cos\text{hip}\, x = \frac{1}{i}\,\text{arc}\cos x = \log(x + \sqrt{x^2-1}),\\ &\arg\text{tang hip}\, x = \frac{1}{i}\,\text{arc tang}\, xi = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x},\\ &\arg\text{cotg hip}\, x = i\,.\,\text{arc cotg}\, xi = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1},\\ &\arg\sec\text{hip}\, x = \frac{1}{i}\,\text{arc sec}\, x = \log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x},\\ &\arg\text{cosec hip}\, x = \frac{1}{i}\,\text{arc cosec}\, xi = \log\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}. \end{aligned} \qquad (6)$$

Są one podobnie, jak funkcye logarytmiczne, funkcyami nieskończenie wielowartościowemi w ten sposób mianowicie, że możemy do głównych wartości czterech funkcyj: $\arg\sin\text{hip}\, x$, $\arg\cos\text{hip}\, x$, $\arg\text{cosec}\,\text{hip}\, x$ i $\arg\sec\text{hip}\, x$, dodać $2k\pi i$, a do funkcyj: $\arg\text{tg}\,\text{hip}\, x$ i $\arg\text{cotg}\,\text{hip}\, x$ dodać $k\pi i$, przyczem k może być jakąkolwiek liczbą całkowitą.

6. **Znakowanie funkcyj hiperbolemetrycznych** nie jest u wszystkich autorów jednakowe. Niemieccy autorowie używają znakowania przyjętego dla funkcyj cyklometrycznych, a piszą tylko literami gotyckiemi, jak: Arc Sin x, Arc Cos x, Arc Tg x, Arc Cotg x, Arc Sec x, Arc Cosec x, francuscy autorowie piszą natomiast najczęściej: Arg Sh x, Arg Ch x, Arg th x, Arg Cth x, Arg Sc x, Arg Csc x, angielscy zaś używają znakowania: $hs^{-1}x$, $hc^{-1}x$, $ht^{-1}x$, $hct^{-1}x$, $hsc^{-1}x$, $hcsc^{-1}x$, oznaczając analogicznie funkcye cyklometryczne symbolami: $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\text{tang}^{-1}x$, $\text{cotg}^{-1}x$, $\sec^{-1}x$, $\text{cosec}^{-1}x$.

7. **Związki między funkcyami hiperbolometrycznemi.** Ze związków między funkcyami hiperbolicznemi wynikają wprost odpowiednie związki między funkcyami hiperbolometrycznemi, dozwalające jedną funkcyę wyrazić przez wszystkie pozostałe.

W szczególności, otrzymujemy, na mocy art 4. związki następujące:

$$\arg\sin\text{hip}\, x = \arg\cos\text{hip}\sqrt{1+x^2} = \arg\text{tang}\,\text{hip}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arg\text{cot}\,\text{hip}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} =$$

$$= \arg\sec\text{hip}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \text{arc}\,\text{cosec}\,\text{hip}\frac{1}{x},$$

$$\arg\cos\text{hip}\, x = \arg\sin\text{hip}\sqrt{x^2-1} = \arg\text{tang}\,\text{hip}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \arg\text{cotg}\,\text{hip}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \arg\sec\text{hip}\frac{1}{x} = \arg\text{cosec}\,\text{hip}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$

$$\arg\text{tang}\,\text{hip}\, x = \arg\sin\text{hip}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arg\cos\text{hip}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arg\text{cot}\,\text{hip}\frac{1}{x} =$$

$$= \arg\sec\text{hip}\sqrt{1-x^2} = \arg\text{cosec}\,\text{hip}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

$$\arg\text{cotg}\,\text{hip}\, x = \arg\sin\text{hip}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \arg\cos\text{hip}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \arg\text{tang}\,\text{hip}\frac{1}{x} =$$

$$= \arg\sec\text{hip}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \arg\text{cosec}\,\text{hip}\sqrt{x^2-1},$$

$$\arg\sec\text{hip}\, x = \arg\sin\text{hip}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \arg\cos\text{hip}\frac{1}{x} = \arg\text{tang}\,\text{hip}\sqrt{1-x^2} =$$

$$= \arg\text{cotg}\,\text{hip}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arg\text{cosec}\,\text{hip}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\arg\text{cosec}\,\text{hip}\, x = \arg\sin\text{hip}\frac{1}{x} = \arg\cos\text{hip}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \text{arc}\,\text{tang}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \arg\text{cotg}\,\text{hip}\sqrt{1+x^2} = \arg\sec\text{hip}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

8. **Różniczki i pochodne funkcyj hiperbolicznych.** Z określenia funkcyj hiperbolicznych, otrzymujemy, na podstawie prawideł rachunku różniczkowego, bezpośrednie wzory, podające różniczki i pochodne tych funkcyj.

W szczególności, otrzymamy, z określenia funkcyi:

$$y = \sin\text{hip}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

różniczkę:
$$dy = d\sin\text{hip}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\, dx = \cos\text{hip}\, x \,.\, dx,$$

więc wzór:

$$d\sin\text{hip}\, x = \cos\text{hip}\, x \,.\, dx, \quad \text{czyli: } (\sin\text{hip}\, x)' = \cos\text{hip}\, x. \tag{7}$$

Podobnie, otrzymamy wzór:

$$d \cos \operatorname{hip} x = \sin \operatorname{hip} x . dx, \text{ czyli: } (\cos \operatorname{hip} x)' = \sin \operatorname{hip} x,$$

a stąd, jak przy funkcyach goniometrycznych (Tom I. str. 471.) wzory:

$$d \operatorname{tang} \operatorname{hip} x = \frac{dx}{\cos \operatorname{hip}^2 x}, \text{ czyli: } (\operatorname{tang} \operatorname{hip} x) = \frac{1}{\cos \operatorname{hip}^2 x},$$

$$d \operatorname{cotg} \operatorname{hip} x = -\frac{dx}{\sin \operatorname{hip}^2 x} \quad \text{„} \quad (\operatorname{cotg} \operatorname{hip} x)' = -\frac{1}{\sin \operatorname{hip}^2 x},$$

$$d \sec \operatorname{hip} x = -\frac{\sin \operatorname{hip} x . dx}{\cos \operatorname{hip}^2 x} \quad \text{„} \quad (\sec \operatorname{hip} x)' = -\frac{\sin \operatorname{hip} x}{\cos \operatorname{hip}^2 x},$$

$$d \operatorname{cosec} \operatorname{hip} x = -\frac{\cos \operatorname{hip} x . dx}{\sin \operatorname{hip}^2 x} \quad \text{„} \quad (\operatorname{cosec} \operatorname{hip} x)' = -\frac{\cos \operatorname{hip} x}{\sin \operatorname{hip}^2 x}.$$

9. Różniczki i pochodne funkcyi hiperbolometrycznych, wynikają, jako bezpośrednie następstwo wzorów dotyczących różniczek i pochodnych funkcyj hiperbolicznych.

Mając bowiem wyznaczyć różniczki, lub pochodną funkcyi: $y = \arg \sin \operatorname{hip} x$, piszemy ten związek w postaci: $\sin \operatorname{hip} y = x$, a stąd, dostajemy:

$$\cos \operatorname{hip} y . dy = dx, \text{ zatem: } dy = \frac{dx}{\cos \operatorname{hip} y},$$

a że:
$$\cos \operatorname{hip}^2 y - \sin \operatorname{hip}^2 y = 1,$$

a więc:
$$\cos \operatorname{hip} y = \sqrt{1 + \sin \operatorname{hip}^2 y} = \sqrt{1 + x^2},$$

przeto, otrzymujemy:

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}, \qquad \text{a zatem:}$$

$$d(\arg \sin \operatorname{hip} x) = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, \text{ czyli } (\arg \sin \operatorname{hip} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \tag{8}$$

Podobnie, dostajemy:

$$d(\arg \cos \operatorname{hip} x) = \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}, \text{ czyli } (\arg \cos \operatorname{hip} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

$$d(\arg \operatorname{tang} \operatorname{hip} x) = \frac{dx}{1 - x^2} \quad \text{„} \quad (\arg \operatorname{tang} \operatorname{hip} x)' = \frac{1}{1 - x^2},$$

$$d(\arg \operatorname{cotg} \operatorname{hip} x) = \frac{dx}{1 - x^2} \quad \text{„} \quad (\arg \cot \operatorname{hip} x')' = \frac{1}{1 - x^2},$$

$$d(\arg \sec \operatorname{hip} x) = -\frac{dx}{x\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{„} \quad (\arg \sec \operatorname{hip} x)' = -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}},$$

$$d(\arg \operatorname{cosec} \operatorname{hip} x = -\frac{dx}{x\sqrt{1 + x^2}} \quad \text{„} \quad (\arg \operatorname{cosec} \operatorname{hip} x)' = -\frac{1}{x\sqrt{1 + x^2}},$$

wzory, które wynikają także wprost z wzorów (8), określających funkcye hyperbolometryczne, na podstawie prawideł o różniczkowaniu funkcyj cyklometrycznych, względnie logarytmicznych.

10. Całki zasadnicze, dotyczące funkcyj hiperbolicznych i hiperbolometrycznych. Z wzorów, dotyczących różniczek funkcyj hiperbolicznych i funkcyj hiperbolometrycznych, wypływają, jako odwrócenia następujące całki zasadnicze:

$$\int \cos \operatorname{hip} x \,.\, dx = \sin \operatorname{hip} x + C, \quad \int \sin \operatorname{hip} x \,.\, dx = \cos \operatorname{hip} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos \operatorname{hip}^2 x} = \operatorname{tang} \operatorname{hip} x + C, \quad \int \frac{dx}{\sin \operatorname{hip}^2 x} = -\operatorname{cotg} \operatorname{hip} x + C,$$

$$\int \frac{\sin \operatorname{hip} x}{\cos \operatorname{hip}^2 x} dx = -\sec \operatorname{hip} x + C, \quad \int \frac{\cos \operatorname{hip} x}{\sin \operatorname{hip}^2 x} dx = -\operatorname{cosec} \operatorname{hip} x + C, \tag{9}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \arg \sin \operatorname{hip} x + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \arg \cos \operatorname{hip} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \arg \operatorname{tang} \operatorname{hip} x + C = \arg \operatorname{cotg} \operatorname{hip} x + C', \tag{10}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\arg \sec \operatorname{hip} x + C; \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \arg \operatorname{cosec} \operatorname{hip} x + C.$$

11. **Całki elementarnych funkcyj hiperbolicznych** otrzymujemy w sposób podobny, jak całki elementarnych funkcyj goniometrycznych.

Metodą bezpośredniego całkowania, otrzymujemy, najpierw:

1) $\int \sin \operatorname{hip} x\, dx = \cos \operatorname{hip} x + C,$

2) $\int \cos \operatorname{hip} x\, dx = \sin \operatorname{hip} x + C.$

Celem wyznaczania całki kształtu: $\int \operatorname{tang} \operatorname{hip} x\, dx$, użyjemy metody przekształcenia. W tym celu, otrzymamy:

$$\int \operatorname{tang} \operatorname{hip} x\, dx = \int \frac{\sin \operatorname{hip} x \,.\, dx}{\cos \operatorname{hip} x} = \int \frac{d(\cos \operatorname{hip} x)}{\cos \operatorname{hip} x} = \log \cos \operatorname{hip} x,$$

zatem:

3) $\int \operatorname{tang} \operatorname{hip} x \,.\, dx = \log \cos \operatorname{hip} x + C.$

Podobnie znajdziemy:

4) $\int \operatorname{cotg} \operatorname{hip} x \,.\, dx = \log \sin \operatorname{hip} x + C.$

Na wyznaczenie całki, kształtu: $\int \sec \operatorname{hip} x dx$, otrzymujemy, metodą przekształcenia:

$$\int \sec \operatorname{hip} x\, dx = \int \frac{dx}{\cos \operatorname{hip} x} = \int \frac{dx}{\cos \operatorname{hip}^2 \frac{x}{2} + \sin \operatorname{hip}^2 \frac{x}{2}} =$$

$$= \int \frac{\dfrac{dx}{\cos \operatorname{hip}^2 \frac{x}{2}}}{1 + \operatorname{tang} \operatorname{hip}^2 \frac{x}{2}} = 2 \int \frac{d \operatorname{tang} \operatorname{hip} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tang} \operatorname{hip}^2 \frac{x}{2}} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \left(\operatorname{tang} \operatorname{hip} \frac{x}{2} \right),$$

zatem:

5) $\int \sec \operatorname{hip} x \,.\, dx = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \left(\operatorname{tang} \operatorname{hip} \frac{x}{2} \right) + C.$

Podobnie otrzymujemy:

$$\int \operatorname{cosec} \operatorname{hip} x\, dx = \int \frac{dx}{\sin \operatorname{hip} x} = \int \frac{dx}{2 \sin \operatorname{hip} \frac{x}{2} \,.\, \cos \operatorname{hip} \frac{x}{2}} =$$

$$= \int \frac{\dfrac{1}{2} \dfrac{dx}{\cos \operatorname{hip}^2 \frac{x}{2}}}{\operatorname{tang} \operatorname{hip} \frac{x}{2}} = \int \frac{d \operatorname{tang} \operatorname{hip} \frac{x}{2}}{\operatorname{tang} \operatorname{hip} \frac{x}{2}} = \log \operatorname{tang} \operatorname{hip} \frac{x}{2},$$

a zatem: 6) $\int \operatorname{cosec} \text{hip}\, x \,.\, dx = \log \operatorname{tang} \text{hip} \frac{x}{2} + C.$

12. Całki elementarnych funkcyj hiperbolometrycznych znajdziemy podobnie, jak wyznaczaliśmy całki elementarnych funkcyj cyklometrycznych, za pomocą metody całkowania przez części.

Celem wyznaczenia całki, kształtu: $\int \arg \sin \text{hip}\, x \,.\, dx$, połóżmy:

$$\begin{aligned} \arg \sin \text{hip}\, x &= u \\ dx &= dv \end{aligned} \quad \text{a zatem:} \quad \begin{aligned} du &= \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, \\ v &= x \end{aligned}$$

a otrzymamy:

$$\int \arg \sin \text{hip}\, x \,.\, dx = x \arg \sin \text{hip}\, x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = x \arg \sin \text{hip}\, x - \sqrt{1+x^2},$$

a zatem:

1) $\int \arg \sin \text{hip}\, x\, dx = x \arg \sin \text{hip}\, x - \sqrt{1+x^2} + C.$

Podobnie znajdziemy:

2) $\int \arg \cos \text{hip}\, x \,.\, dx = x \arg \cos \text{hip}\, x - \sqrt{x^2-1} + C.$

Celem wyznaczenia całki, kształtu: $\int \arg \operatorname{tang} \text{hip}\, x \,.\, dx$ połóżmy:

$$\begin{aligned} \arg \operatorname{tang} \text{hip}\, x &= u \\ dx &= dv \end{aligned} \quad \text{a zatem} \quad \begin{aligned} du &= \frac{dx}{1-x^2} \\ v &= x, \end{aligned}$$

a otrzymamy:

$$\int \arg \operatorname{tang} \text{hip}\, x \,.\, dx = x \arg \operatorname{tang} \text{hip}\, x - \int \frac{x dx}{1-x^2} = x \arg \operatorname{tang} \text{hip}\, x + \frac{1}{2} \log (1-x^2),$$

a zatem:

3) $\int \arg \operatorname{tang} \text{hip}\, x \,.\, dx = x \arg \operatorname{tang} \text{hip}\, x + \log \sqrt{1-x^2} + C.$

Podobnie znajdziemy:

4) $\int \arg \operatorname{cotg} \text{hip}\, x \,.\, dx = x \arg \operatorname{cotg} \text{hip}\, x + \log \sqrt{1-x^2} + C.$

Celem wyznaczenia całki, kształtu: $\int \arg \sec \text{hip}\, x \,.\, dx$, połóżmy:

$$\begin{aligned} \arg \sec \text{hip}\, x &= u \\ dx &= dv \end{aligned} \quad \text{a zatem} \quad \begin{aligned} du &= \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} \\ v &= x, \end{aligned}$$

a otrzymamy:

$$\int \arg \sec \text{hip}\, x\, dx = x \arg \sec \text{hip}\, x - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \arg \sec \text{hip}\, x - \operatorname{arc} \sin x,$$

a zatem:

5) $\int \arg \sec \text{hip}\, x \,.\, dx = x \,.\, \arg \sec \text{hip}\, x - \operatorname{arc} \sin x + C.$

Podobnie, znajdziemy:

$$\int \arg \operatorname{cosec} \text{hip}\, x \,.\, dx = x \arg \operatorname{cosec} \text{hip}\, x - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = x \arg \operatorname{cosec} \text{hip}\, x - \arg \sin \text{hip}\, x,$$

zatem:

6) $\int \arg \operatorname{cosec} \text{hip}\, x dx = x \,.\, \arg \operatorname{cosec} \text{hip}\, x - \arg \sin \text{hip}\, x + C.$

Otrzymane wzory całkowe wynikają także, jako bezpośrednie następstwo odnośnych wzorów dla całek funkcyj cyklometrycznych.

13. Całkowanie funkcyj złożonych wymiernie z funkcyj hiperbolicznych. ...ełką funkcyę wymiernie złożoną z funkcyj hiperbolicznych tej samej ...nnej x, kształtu: $R(\sin\text{hip}\, x,\ \cos\text{hip}\, x,\ \text{tang}\,\text{hip}\, x, \ldots)$ możemy ostatecznie ...wadzić do funkcyi wymiernej dwu tylko funkcyj hiperbolicznych: $\sin\text{hip}\, x$ ...ship x, a więc jej całkę do postaci: $\int R(\sin\text{hip}\, x,\ \cos\text{hip}\, x)\,.\,dx$.

Stosując do tej całki jedno z następujących podstawień, analogicznych podstawień przy wyznaczaniu całki, kształtu: $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, a więc:

albo 1) $\sin\text{hip}\, x = u$, a zatem: $\cos\text{hip}\, x = \sqrt{1+u^2}$, $dx = \dfrac{du}{\sqrt{1+u^2}}$,

albo 2) $\cos\text{hip}\, x = u$, a zatem: $\sin\text{hip}\, x = \sqrt{u^2-1}$, $dx = \dfrac{du}{\sqrt{u^2-1}}$,

albo 3) $\text{tang}\,\text{hip}\, x = u$, a zatem: $\sin\text{hip}\, x = \dfrac{u}{\sqrt{1-u^2}}$, $\cos\text{hip}\, x = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$,

$$dx = \frac{du}{1-u^2},$$

albo 4) $\text{tang}\,\text{hip}\,\dfrac{x}{2} = u$, a zatem: $\sin\text{hip}\, x = \dfrac{2u}{1-u^2}$, $\cos\text{hip}\, x = \dfrac{1+u^2}{1-u^2}$, $dx = \dfrac{2du}{1-u^2}$,

...zymujemy następujące przekształcenia:

$$\begin{aligned}
&\text{albo 1)}\ \int R(\sin\text{hip}\, x,\ \cos\text{hip}\, x)\,dx = \int R(u,\ \sqrt{1+u^2})\frac{du}{\sqrt{1+u^2}},\\
&\text{albo 2)}\ \int R(\sin\text{hip}\, x,\ \cos\text{hip}\, x)\,dx = \int R(\sqrt{u^2-1},\ u)\frac{du}{\sqrt{u^2-1}},\\
&\text{albo 3)}\ \int R(\sin\text{hip}\, x,\ \cos\text{hip}\, x)\,dx = \int R\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\right)\frac{du}{1-u^2},\\
&\text{albo 4)}\ \int (R(\sin\text{hip}\, x,\ \cos\text{hip}\, x)\,dx = \int R\left(\frac{2u}{1-u^2},\ \frac{1+u^2}{1-u^2}\right)\frac{2du}{1-u^2},
\end{aligned} \tag{11}$$

...tórych dochodzimy do wniosków: 1) podstawienie: $\sin\text{hip}\, x = u$ jest szcze...niej wówczas przydatne, gdy funkcya R jest ze względu na $\cos\text{hip}\, x$ ...pnia nieparzystego, 2) że podstawienie: $\cos\text{hip}\, x = u$ jest przydatne, gdy ...kcya R jest stopnia nieparzystego ze względu na $\sin\text{hip}\, x$, 3) że pod...wienie: $\text{tang}\,\text{hip}\, x = u$ jest przydatne, gdy funkcya R jest stopnia parzy...go, tak ze względu na $\sin\text{hip}\, x$, jak ze względu na $\cos\text{hip}\, x$, 4) że pod...wienie: $\text{tang}\,\text{hip}\,\dfrac{x}{2} = u$ jest zawsze przydatne, skoro tylko funkcya R jest ...mierną ze względu na $\sin\text{hip}\, x$ i $\cos\text{hip}\, x$.

14. Całki kształtu: $\int R(\sin\text{hip}\, mx,\ \cos\text{hip}\, nx)\,dx$ sprowadzają się do całek, kształtu: ...(sin hip x, cos hip x) dx za pomocą rozwinięć funkcyj $\sin\text{hip}\, mx$ i $\cos\text{hip}\, nx$, które, analo...nie do wzorów goniometrycznych:

$$\cos nx = \cos^n x - \binom{n}{2}\cos^{n-2}x\sin^2 x + \binom{n}{4}\cos^{n-4}x\sin^4 x + \ldots$$

$$\sin mx = \binom{m}{1}\cos^{m-1}x\sin x - \binom{m}{3}\cos^{m-3}x\sin^3 x + \ldots$$

...dstawiają się w postaci:

$$\cos\text{hip}\, nx = \cos\text{hip}^n x + \binom{n}{2}\cos\text{hip}^{n-2} x\,\sin\text{hip}^2 x + \ldots \tag{12}$$

$$\sin\text{hip}\, mx = \binom{m}{1}\cos\text{hip}^{m-1} x\,\sin\text{hip}\, x + \binom{m}{3}\cos\text{hip}^{m-3} x\,\sin\text{hip}^3 x + \ldots \tag{13}$$

15. Całki kształtu: $\int \sin \text{hip}^s mx \cos \text{hip}^k nx\, dx$ możemy, w przypadku, gdy wykładniki s i k są liczbami całkowitemi, dodatniemi, wyznaczyć za pomocą rozkładania iloczynu: $\sin \text{hip}^s mx . \cos \text{hip}^k nx$ na dodajniki.

Otrzymujemy, bowiem:

$$\sin \text{hip}^s mx . \cos \text{hip}^k nx = \frac{(e^{mx} - e^{-mx})^s (e^{nx} + e^{-nx})^k}{2^{s+k}} = \frac{P}{2^{s+k}}.$$

Biorąc pod uwagę iloczyn P, połóżmy:

$$P = A_1 e^{\alpha_1 x} + A_2 e^{\alpha_2 x} + \ldots + B_1 e^{-\beta_1 x} + B_2 e^{-\beta_2 x} + \ldots$$

natenczas, podstawiając $-x$ zamiast x, przekonamy się, że będzie:

$$(-1)^s P = A_1 e^{-\alpha_1 x} + A_2 e^{-\alpha_2 x} + \ldots + B_1 e^{\beta_1 x} + B_2 e^{\beta_2 x} + \ldots$$

skąd wnosimy, że musi być ogólnie:

$$A_r = (-1)^s B_r, \quad \alpha = \beta_r,$$

że więc otrzymamy:

$$P = \Sigma A_r [e^{\alpha_r x} + (-1)^s e^{-\alpha_r x}].$$

Mając na uwadze, że:

$$e^{\alpha x} + e^{-\alpha x} = 2 \cos \text{hip}\, \alpha x, \text{ zaś } e^{\alpha x} - e^{-\alpha x} = 2 \sin \text{hip}\, \alpha x,$$

otrzymujemy: *a)* w przypadku, gdy wykładnik s jest liczbą parzystą, wzór:

$$\sin \text{hip}^s m x \cos \text{hip}^k nx = \frac{\Sigma 2 A_r \cos \text{hip}\, \alpha_r x}{2^{s+k}}, \tag{14}$$

b) w przypadku, gdy wykładnik s jest liczbą nieparzystą, wzór:

$$\sin \text{hip}^s m x \cos \text{hip}^k nx = \frac{\Sigma 2 A_r \sin \text{hip}\, \alpha_r x}{2^{s+k}}, \tag{15}$$

Całka, kształtu: $\int \sin \text{hip}^s mx \cos \text{hip}^k nx\, dx$, rozpada się więc, w przypadku, gdy wykładniki s i k są liczbami całkowitemi, dodatniemi, na całki, kształtu:

$$\int \cos \text{hip}\, \alpha x\, dx = \frac{\sin \text{hip}\, \alpha x}{\alpha} + C, \quad \int \sin \text{hip}\, \alpha x\, dx = \frac{\cos \text{hip}\, \alpha x}{\alpha} + C. \tag{16}$$

16. Całkowanie funkcyj hiperbolicznych za pomocą podstawień wykładniczych, lub goniometrycznych. Całkowanie funkcyj hiperbolicznych kształtu: $R(\sin \text{hip}\, x, \cos \text{hip}\, x) dx$, gdzie R jest funkcyą algebraiczną, wymierną, ze względu na elementarne funkcye hiperboliczne, możemy przeprowadzić, także za pośrednictwem podstawień wykładniczych, lub goniometrycznych.

Podstawiając, mianowicie:

$$\sin \text{hip}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cos \text{hip}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

otrzymujemy:

$$\int R(\sin \text{hip}\, x, \cos \text{hip}\, x) dx = \int R\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}, \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) dx,$$

a więc całkę funkcyi algebraicznej, wymiernej ze względu na funkcyę wykładniczą: e^x, która, wskutek podstawienia: $e^x = z$, a więc $dx = \frac{dz}{z}$, sprowadza się do całki funkcyi wymiernej, ze względu na zmienną z.

Podstawiając zaś: $\sin \text{hip}\, x = \frac{1}{i} \sin xi$, $\cos \text{hip}\, x = \cos xi$, otrzymamy:

$$\int R(\sin \text{hip}\, x, \cos \text{hip}\, x) dx = \int R\left(\frac{1}{i} \sin xi, \cos xi\right) dx,$$

a więc całkę funkcyi algebraicznej, wymiernej ze względu na funkcye $\sin xi$, $\cos xi$, która wskutek podstawienia: $xi = z$, a więc: $dx = \frac{1}{i} dz$, sprowadza się

całki, kształtu: $\int R(\sin z, \cos z)\,dz$, czyli, do całki wymiernej ze względu funkcye goniometryczne: $\sin z$ i $\cos z$.

17. **Całki kształtu:** $\int R(x).\sinh x\,dx$, **lub** $\int R(x).\cosh x.dx$, których $R(x)$ jest funkcyą ułamkową, niewłaściwą, rozpadają się, każda dwie całki, w postaci:

$$\int R(x).\sinh x.dx = \int G(x)\sinh x.dx + \int \frac{G_{n-1}(x)}{G_n(x)}\sinh x\,dx,$$

$$\int R(x)\cosh x.dx = \int G(x)\cosh x.dx + \int \frac{G_{n-1}(x)}{G_n(x)}\cosh x\,dx.$$

Stosując do całek, kształtu: $\int G(x)\sinh x.dx$, lub $\int G(x)\cosh x.dx$ metodę całkowania przez części, otrzymujemy następujące wzory:

$$\begin{aligned}\int G(x)\sinh x.dx &= G(x)\cosh x - \int G'(x)\cosh x.dx,\\ \int G(x)\cosh x.dx &= G(x)\sinh x - \int G'(x)\sinh x.dx,\end{aligned}\qquad(17)$$

które, ponownie stosowane, dają wzory redukcyjne:

$$\begin{aligned}\int G(x)\sinh x.dx &= G(x)\cosh x - G'(x)\sinh x + \int G''(x)\sinh x.dx,\\ \int G(x)\cosh x.dx &= G(x)\sinh x - G'(x)\cosh x + \int G''(x)\cosh x.dx,\end{aligned}\qquad(18)$$

prowadzące z poprzedniemi ostatecznie do całek:

$$\int \sinh x.dx = \cosh x + C,\quad \int \cosh x.dx = \sinh x + C.$$

Rozkładając, następnie, funkcyę ułamkową, właściwą: $\frac{G_{n-1}(x)}{G_n(x)}$ na ułamki proste, kształtu: $\frac{A_1}{x-a}$, względnie: $\frac{A_r}{(x-a)^r}$, dochodzimy do całek kształtu:

$$\int\frac{\sinh x}{x-a}dx,\ \text{lub:}\ \int\frac{\cosh x}{x-a}dx,\ \text{względnie}\ \int\frac{\sinh x}{(x-a)^r}dx,\ \text{lub:}\ \int\frac{\cosh x}{(x-a)^r}dx.$$

Stosując do całek drugiego kształtu metodę całkowania przez części, otrzymujemy wzory:

$$\int\frac{\sinh x}{(x-a)^r}dx = -\frac{\sinh x}{(r-1)(x-a)^{r-1}} + \frac{1}{r-1}\int\frac{\cosh x}{(x-a)^{r-1}}dx,$$

$$\int\frac{\cosh x}{(x-a)^r}dx = -\frac{\cosh x}{(r-1)(x-a)^{r-1}} + \frac{1}{r-1}\int\frac{\sinh x}{(x-a)^{r-1}}dx,$$

które, ponownie stosowane, dają wzory redukcyjne:

$$\int\frac{\sinh x}{(x-a)^r}dx = -\frac{\sinh x}{(r-1)(x-a)^{r-1}} - \frac{\cosh x}{(r-1)(r-2)(x-a)^{r-2}} + \\ + \frac{1}{(r-1)(r-2)}\int\frac{\sinh x}{(x-a)^{r-2}}dx,$$

$$\int\frac{\cosh x}{(x-a)^r}dx = -\frac{\cosh x}{(r-1)(x-a)^{r-1}} - \frac{\sinh x}{(r-1)(r-2)(x-a)^{r-2}} + \\ + \frac{1}{(r-1)(r-2)}\int\frac{\cosh x}{(x-a)^{r-2}}dx,$$

prowadzające dane całki, ostatecznie, do całek, kształtu:

$$\int\frac{\sinh x}{x-a}dx,\ \text{lub:}\ \int\frac{\cosh x}{x-a}dx.$$

Podstawiając w tych całkach $x-a=z$, zatem: $x=z+a$, $dx=dz$, otrzymujemy:

$$\int\frac{\sin\mathrm{hip}\,x}{x-a}dx=\int\frac{\sin\mathrm{hip}\,(z+a)}{z}dz=\cos\mathrm{hip}\,a\int\frac{\sin\mathrm{hip}\,z}{z}dz+\sin\mathrm{hip}\,a\int\frac{\cos\mathrm{hip}\,z}{z}dz,$$

$$\int\frac{\cos\mathrm{hip}\,x}{x-a}dx=\int\frac{\cos\mathrm{hip}\,(z+a)}{z}dz=\cos\mathrm{hip}\,a\int\frac{\cos\mathrm{hip}\,z}{z}dz+\sin\mathrm{hip}\,a\int\frac{\sin\mathrm{hip}\,z}{z}dz,$$

a więc, dochodzimy do całek, kształtu:

$$\int\frac{\sin\mathrm{hip}\,x}{x}dx,\ \text{lub:}\ \int\frac{\cos\mathrm{hip}\,x}{x}dx,$$

które nie dadzą się wyrazić w formie, złożonej ze skończonej ilości znanych funkcyj elementarnych i tworzą nowe funkcye przestępne, z których pierwszą nazywamy **hiperbolicznym sinusem całkowym zmiennej** x, i oznaczamy przez $HSi(x)$, drugą zaś nazywamy **hiperbolicznym cosinusem całkowym zmiennej** x i oznaczamy przez $HCi(x)$. Piszemy tedy:

$$\int\frac{\sin\mathrm{hip}\,x}{x}dx=HSi(x)+C;\ \int\frac{\cos\mathrm{hip}\,x}{x}dx=HCi(x)+C. \tag{19}$$

18. Uwaga. Wprowadzając pojęcia funkcyj przestępnych: $Si(x)$ i $Ci(x)$, nazwanych sinusem i cosinusem całkowym zmiennej x, (art. 8., str. 190.), a określonych wzorami:

$$Si(x)=\int\frac{\sin x}{x}dx+C,\quad Ci(x)=\int\frac{\cos x}{x}dx+C,$$

i uwzględniając relacye: $\sin\mathrm{hip}\,x=\frac{1}{i}\sin xi$, $\cos xi=\cos\mathrm{hip}\,xi$, otrzymujemy:

$$\int\frac{\sin\mathrm{hip}\,x}{x}dx=\frac{1}{i}\int\frac{\sin xi}{x}dx=\frac{1}{i}Si(xi)+C,$$

$$\int\frac{\cos\mathrm{hip}\,x}{x}dx=\int\frac{\cos xi}{x}dx=Ci(xi)+C.$$

Wprowadzając zaś pojęcie funkcyi przestępnej: $Li(x)$, nazwanej logarytmem całkowym zmiennej x, (art. 9. str. 176.), a określonej wzorem:

$$Li(x)=\int\frac{dx}{\log x}+C,\quad Li(e^x)=\int\frac{e^x}{x}dx+C,$$

i uwzględniając relacye:

$$\sin\mathrm{hip}\,x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}),\ \cos\mathrm{hip}\,x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}),$$

otrzymujemy:

$$\int\frac{\sin\mathrm{hip}\,x}{x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{e^x-e^{-x}}{x}dx=\frac{1}{2}[Li(e^x)-Li(e^{-x})]+C,$$

$$\int\frac{\cos\mathrm{hip}\,x}{x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{e^x+e^{-x}}{x}dx=\frac{1}{2}[Li(e^x)+Li(e^{-x})]+C. \tag{20}$$

19. Całki, kształtu: $\int\frac{x\,dx}{\sin\mathrm{hip}^m x}$ i $\int\frac{x\,dx}{\cos\mathrm{hip}^m x}$ prowadzą do nowych funkcyj przestępnych. Przedewszystkiem, mamy:

$$\int\frac{xdx}{\sin\mathrm{hip}^m x}=\int\frac{x\{\cos\mathrm{hip}^2 x-\sin\mathrm{hip}^2 x\}\,dx}{\sin\mathrm{hip}^m x}=\int\frac{x\cos\mathrm{hip}^2 x\,.\,dx}{\sin\mathrm{hip}^m x}-\int\frac{xdx}{\sin\mathrm{hip}^{m-2}x}.$$

Stosując do pierwszej całki metodę całkowania przez części, połóżmy:

$$x\cos\mathrm{hip}\,x=u\qquad du=(\cos\mathrm{hip}\,x+x\sin\mathrm{hip}\,x)\,dx,$$

$$\frac{\cos\mathrm{hip}\,x}{\sin\mathrm{hip}^m x}dx=dv,\quad \text{a zatem:}\quad v=-\frac{1}{(m-1)\sin\mathrm{hip}^{m-1}x},$$

a otrzymamy:

$$\int\frac{x\cos\mathrm{hip}^2 x\,.\,dx}{\sin\mathrm{hip}^m x}=-\frac{x\cos\mathrm{hip}\,x}{(m-1)\sin\mathrm{hip}^{m-1}x}+\frac{1}{m-1}\int\frac{\cos\mathrm{hip}\,x+x\sin\mathrm{hip}\,x}{\sin\mathrm{hip}^{m-1}x}dx,$$

a że: $$\int \frac{\cos \text{hip}\, x + x \sin \text{hip}\, x}{\sin \text{hip}^{m-1} x} dx = \int \frac{\cos \text{hip}\, x\, dx}{\sin \text{hip}^{m-1} x} + \int \frac{x dx}{\sin \text{hip}^{m-2} x} =$$
$$= -\frac{1}{(m-2) \sin \text{hip}^{m-2} x} + \int \frac{x dx}{\sin \text{hip}^{m-2} x},$$

przeto:
$$\int \frac{x \cos \text{hip}^2 x \,.\, dx}{\sin \text{hip}^m x} = -\frac{x \cos \text{hip}\, x}{(m-1) \sin \text{hip}^{m-1} x} - \frac{1}{(m-1)(m-2) \sin \text{hip}^{m-2} x} + \frac{1}{m-1} \int \frac{x\, dx}{\sin \text{hip}^{m-2} x}.$$

Wobec tego, otrzymujemy:
$$\int \frac{x dx}{\sin \text{hip}^m x} = -\frac{(m-2) x \cos \text{hip}\, x + \sin \text{hip}\, x}{(m-1)(m-2) \sin \text{hip}^{m-1} x} - \frac{m-2}{m-1} \int \frac{x dx}{\sin \text{hip}^{m-2} x}, \tag{21}$$
a podobnie:
$$\int \frac{x\, dx}{\cos \text{hip}^m x} = -\frac{(m-2) x \sin \text{hip}\, x + \cos \text{hip}\, x}{(m-1)(m-2) \cos \text{hip}^{m-1} x} - \frac{m-2}{m-1} \int \frac{x dx}{\cos \text{hip}^{m-2} x}, \tag{22}$$
a więc wzory redukcyjne, które pozwalają zniżyć wykładnik m o dwie jednostki.

Przy parzystym wykładniku: $m = 2n$, dochodzimy tą drogą do całek:
$$\int \frac{x\, dx}{\sin \text{hip}^2 x} \quad \text{i} \quad \int \frac{x\, dx}{\cos \text{hip}^2 x},$$
do których powyższe wzory redukcyjne nie dadzą się już zastosować.

Kładąc, raz: $x = u$, $\frac{dx}{\sin \text{hip}^2 x} = dv$, a zatem: $du = dx$, $v = -\operatorname{cotg} \text{hip}\, x$; drugi raz: $x = u$, $\frac{dx}{\cos \text{hip}^2 x} = dv$, a zatem: $du = dx$, $v = \operatorname{tang} \text{hip}\, x$, otrzymujemy:
$$\int \frac{x\, dx}{\sin \text{hip}^2 x} = -x \operatorname{cotg} \text{hip}\, x + \int \operatorname{cotg} \text{hip}\, x\, dx = -x \operatorname{cotg} \text{hip}\, x + \log \sin \text{hip}\, x + C,$$
$$\int \frac{x dx}{\cos \text{hip}^2 x} = x \operatorname{tang} \text{hip}\, x - \int \operatorname{tang} \text{hip}\, x\, dx = x \operatorname{tang} \text{hip}\, x - \log \cos \text{hip}\, x + C.$$

Przy nieparzystym wykładniku: $m = 2n + 1$, dochodzimy, na podstawie powyższych wzorów redukcyjnych, do całek: $\int \frac{x dx}{\sin \text{hip}\, x}$ i $\int \frac{x dx}{\cos \text{hip}\, x}$, które stanowią nowy rodzaj funkcyj przestępnych.

20. Całki, kształtu: $\int x \operatorname{tang} \text{hip}\, x\, dx$ **i** $\int x \operatorname{cotg} \text{hip}\, x dx$, prowadzą również do nowych funkcyj przestępnych. Kładąc, bowiem, raz: $x = u$, $\operatorname{tang} \text{hip}\, x\, dx = dv$, a zatem $du = dx$, $v = \log \cos \text{hip}\, x$, drugi raz: $x = u$, $\operatorname{cotg} \text{hip}\, x dx = dv$, a zatem: $du = dx$, $v = \log \sin \text{hip}\, x$, otrzymujemy:
$$\begin{aligned} &\int x \operatorname{tang} \text{hip}\, x \,.\, dx = x \log \cos \text{hip}\, x - \int \log \cos \text{hip}\, x \,.\, dx, \\ &\int x \operatorname{cotg} \text{hip}\, x \,.\, dx = x \log \sin \text{hip}\, x - \int \log \sin \text{hip}\, x \,.\, dx, \end{aligned} \tag{23}$$
dochodzimy więc do całek: $\int \log \sin \text{hip}\, x . dx$ i $\int \log \cos \text{hip}\, x . dx$, które nie dadzą się również wyrazić przez funkcye znane, tworząc nowy rodzaj funkcyj przestępnych.

21. Całki funkcyj hiperbolometrycznych, kształtu: $\int R(\arg \sin \text{hip}\, x) dx$, lub podobne, w których R przedstawia funkcyę algebraiczną, wymierną którejkolwiek funkcyi hiperbolometrycznej: $\arg \sin \text{hip}\, x$, $\arg \operatorname{tang} \text{hip}\, x$, ..., dadzą się zawsze sprowadzić do całek funkcyj hiperbolicznych, rozważanych w poprzednich artykułach.

Używając, bowiem, w całce: $\int R(\arg \sin \text{hip}\, x) dx$, podstawienia:
$$\arg \sin \text{hip}\, x = z, \quad x = \sin \text{hip}\, z, \quad dx = \cos \text{hip}\, z \,.\, dz,$$
otrzymujemy:
$$\int R(\arg \sin \text{hip}\, x) dx = \int R(z) \,.\, \cos \text{hip}\, z\, dz, \tag{24}$$
podobnie, otrzymamy, za pomocą podstawienia: $\arg \cos \text{hip}\, x = z$, $x = \cos \text{hip}\, z$, $dx = \sin \text{hip}\, z \,.\, dz$, wzór:
$$\int R(\arg \cos \text{hip}\, x) dx = \int R(z) \,.\, \sin \text{hip}\, z \,.\, dz.$$

Za pomocą podstawienia: $\arg \operatorname{tang} \operatorname{hip} x = z$, $x = \operatorname{tang} \operatorname{hip} z$, $dx = \frac{}{\cos}$
dostajemy wzór:

$$\int R(\arg \operatorname{tang} \operatorname{hip} x) . dx = \int \frac{R(z) . dz}{\cos \operatorname{hip}^2 z},$$

za pomocą podstawienia: $\arg \operatorname{cotg} \operatorname{hip} x = z$, $x = \operatorname{cotg} \operatorname{hip} z$, $dx = -\frac{d}{\sin \operatorname{hi}}$

zaś: $$\int R(\arg \operatorname{cotg} \operatorname{hip} x)\, dx = -\int \frac{R(z) . dz}{\sin \operatorname{hip}^2 z}.$$

Podobnie, otrzymamy:

$$\int R(\arg \sec \operatorname{hip} x) dx = -\int \frac{R(z) . \sin \operatorname{hip} z}{\cos \operatorname{hip}^2 z} dz,$$

$$\int R(\arg \operatorname{cosec} \operatorname{hip} x)\, dx = -\int \frac{R(z) \cos \operatorname{hip} z}{\sin \operatorname{hip}^2 z} dz.$$

Szczególny przypadek całek tego rodzaju stanowią całki, kszt $\int (\arg \sin \operatorname{hip} x)^n dx$ i tym podobne, dla których możemy także wyprow stosowne wzory redukcyjne.

22. Wzory redukcyjne całek: $\int (\arg \sin \operatorname{hip} x)^n . dx$ i $\int (\arg \cos \operatorname{hip} x)^n dx$.

Kładąc, raz: a zatem:

$$(\arg \sin \operatorname{hip} x)^n = u, \qquad du = n (\arg \sin \operatorname{hip} x)^{n-1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$dx = dv, \qquad v = x,$$

to znowu: a zatem:

$$(\arg \cos \operatorname{hip} x)^n = u, \qquad du = n (\arg \cos \operatorname{hip} x)^{n-1} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}},$$

$$dx = dv, \qquad v = x,$$

otrzymujemy wzory:

$$\int (\arg \sin \operatorname{hip} x)^n dx = x (\arg \sin \operatorname{hip} x)^n - n \int (\arg \sin \operatorname{hip} x)^{n-1} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\int (\arg \cos \operatorname{hip} x)^n dx = x (\arg \cos \operatorname{hip} x)^n - n \int (\arg \cos \operatorname{hip} x)^{n-1} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Przyjąwszy teraz, w pierwszej całce:

$$(\arg \sin \operatorname{hip} x)^{n-1} = u, \quad \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = dv \quad \text{a zatem:} \quad du = (n-1) (\arg \sin \operatorname{hip} x)^{n-2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad v = \sqrt{1+x^2}$$

w drugiej zaś:

$$(\arg \cos \operatorname{hip} x)^{n-1} = u, \quad \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} = dv, \quad \text{a zatem:} \quad du = (n-1) (\arg \sin \operatorname{hip} x)^{n-2} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}, \quad v = \sqrt{x^2-1},$$

otrzymujemy:

$$\int (\arg \sin \operatorname{hip} x)^{n-1} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} (\arg \sin \operatorname{hip} x)^{n-1} - (n-1) \int (\arg \sin \operatorname{hip} x)^{n-}$$

$$\int (\arg \cos \operatorname{hip} x)^{n-1} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x^2-1} (\arg \cos \operatorname{hip} x)^{n-1} - (n-1) \int (\arg \cos \operatorname{hip} x)^{n-2}$$

zatem, wzory redukcyjne, w postaci:

$$\int (\arg \sin \operatorname{hip} x)^n dx = x (\arg \sin \operatorname{hip} x)^n - n \sqrt{1+x^2} (\arg \sin \operatorname{hip} x)^{n-1} + n(n-1) \int (\arg \sin \operatorname{hip} x$$

$$\int (\arg \cos \operatorname{hip} x)^n dx = x (\arg \cos \operatorname{hip} x)^n - n \sqrt{x^2-1} (\arg \cos \operatorname{hip} x)^{n-1} + n(n-1) \int (\arg \cos \operatorname{hip} x$$

re, przy całkowitym, dodatnim wykładniku n, sprowadzają dane całki do jednej z na-
pujących postaci:

$$\int \arg\sin\text{hip}\, x dx = x \arg\sin\text{hip}\, x - \sqrt{1+x^2} + C,$$

$$\int \arg\cos\text{hip}\, x dx = x \arg\cos\text{hip}\, x - \sqrt{x^2-1} + C.$$

Jeżeli wykładnik n jest liczbą całkowitą, ujemną: $n = -m$, natenczas, otrzymamy wyższe wzory redukcyjne w postaci:

$$\int\frac{dx}{(\arg\sin\text{hip}\, x)^m} = \frac{x}{(\arg\sin\text{hip}\, x)^m} + \frac{m\sqrt{1+x^2}}{(\arg\sin\text{hip}\, x)^{m+1}} + m(m+1)\int\frac{dx}{(\arg\sin\text{hip}\, x)^{m+2}},$$

$$\int\frac{dx}{(\arg\cos\text{hip}\, x)^m} = \frac{x}{(\arg\cos\text{hip}\, x)^m} + \frac{m\sqrt{x^2-1}}{(\arg\cos\text{hip}\, x)^{m+1}} + m(m+1)\int\frac{dx}{(\arg\cos\text{hip}\, x)^{m+2}},$$

ąd dostajemy:

$$\int\frac{dx}{(\arg\sin\text{hip}\, x)^{m+2}} = -\frac{x}{m(m+1)(\arg\sin\text{hip}\, x)^m} - \frac{\sqrt{1+x^2}}{(m+1)(\arg\sin\text{hip}\, x)^{m+1}} + \frac{1}{m(m+1)}\int\frac{dx}{(\arg\sin\text{hip}\, x)^m},$$

$$\int\frac{dx}{(\arg\cos\text{hip}\, x)^{m+2}} = -\frac{x}{m(m+1)(\arg\cos\text{hip}\, x)^m} - \frac{\sqrt{x^2-1}}{(m+1)(\arg\cos\text{hip}\, x)^{m+1}} + \frac{1}{m(m+1)}\int\frac{dx}{(\arg\cos\text{hip}\, x)^m},$$

zastępując $m+2$ przez m, następujące wzory redukcyjne:

$$\int\frac{dx}{(\arg\sin\text{hip}\, x)^m} = -\frac{x}{(m-1)(m-2)(\arg\sin\text{hip}\, x)^{m-2}} - \frac{\sqrt{1+x^2}}{(m-1)(\arg\sin\text{hip}\, x)^{m-1}} + \frac{1}{(m-1)(m-2)}\int\frac{dx}{(\arg\sin\text{hip}\, x)^{m-2}}, \qquad (26)$$

$$\int\frac{dx}{(\arg\cos\text{hip}\, x)^m} = -\frac{x}{(m-1)(m-2)(\arg\cos\text{hip}\, x)^{m-2}} - \frac{\sqrt{x^2-1}}{(m-1)(\arg\cos\text{hip}\, x)^{m-1}} + \frac{1}{(m-1)(m-2)}\int\frac{dx}{(\arg\cos\text{hip}\, x)^{m-2}}, \qquad (27)$$

żydatne, gdy wykładnik m jest różny od 1 i 2. Na podstawie tych wzorów, dochodzimy, tatecznie, do całek kształtu:

$$\int\frac{dx}{(\arg\sin\text{hip}\, x)^2}, \quad \int\frac{dx}{(\arg\cos\text{hip}\, x)^2}, \quad \text{lub} \quad \int\frac{dx}{\arg\sin\text{hip}\, x}, \quad \int\frac{dx}{\arg\cos\text{hip}\, x}.$$

Stosując do pierwszych dwu typów metodę całkowania przez części, kładąc raz:

$$\sqrt{1+x^2} = u, \quad \frac{1}{(\arg\sin\text{hip}\, x)^2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = dv,$$

zatem:

$$du = \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad v = -\frac{1}{\arg\sin\text{hip}\, x},$$

ugi zaś raz:

$$\sqrt{x^2-1} = u, \quad \frac{1}{(\arg\cos\text{hip}\, x)^2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = dv,$$

zatem:

$$du = \frac{x dx}{\sqrt{x^2-1}}, \quad v = -\frac{1}{\arg\cos\text{hip}\, x},$$

rzymujemy:

$$\int\frac{dx}{(\arg\sin\text{hip}\, x)^2} = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{\arg\sin\text{hip}\, x} + \int\frac{1}{\arg\sin\text{hip}\, x}\,\frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\int\frac{dx}{(\arg\cos\text{hip}\, x)^2} = -\frac{\sqrt{x^2-1}}{\arg\cos\text{hip}\, x} + \int\frac{1}{\arg\cos\text{hip}\, x}\,\frac{x dx}{\sqrt{x^2-1}},$$

dochodzimy do całek, które, również, jak całki dwu drugich postaci, prowadzą do no-
ych funkcyj przestępnych, (patrz art. 17 i 18).

Podstawiając w tych całkach:

$$\arg\sin\text{hip}\, x = z,\quad x = \sin\text{hip}\, z,\quad dx = \cos\text{hip}\, z\,.\, dz,$$

względnie:

$$\arg\cos\text{hip}\, x = z,\quad x = \cos\text{hip}\, z,\quad dx = \sin\text{hip}\, z\,.\, dz,$$

otrzymujemy:

$$\int \frac{dx}{\arg\sin\text{hip}\, x} = \int \frac{\cos\text{hip}\, z}{z}\, dz = HCi(z) + C = HCi(\arg\sin\text{hip}\, x) + C.$$

$$\int \frac{1}{\arg\sin\text{hip}\, x}\cdot\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\sin\text{hip}\, z}{z}\, dz = HSi(z) + C = HSi(\arg\sin\text{hip}\, x) + C,$$

względnie:

$$\int \frac{dx}{\arg\cos\text{hip}\, x} = \int \frac{\sin\text{hip}\, z}{z}\, dz = HSi(z) + C = HSi(\arg\cos\text{hip}\, x) + C.$$

$$\int \frac{1}{\arg\cos\text{hip}\, x}\cdot\frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\cos\text{hip}\, z}{z}\, dz = HCi(z) + C = HCi(\arg\cos\text{hip}\, x) + C.$$

23. Całki kształtu: $\int R(x).\arg\sin\text{hip}\, x.dx$, lub podobne, w których funkcya, stojąca pod znakiem całkowania, występuje, jako iloczyn funkcyi algebraicznej, wymiernej $R(x)$ i jednej z funkcyj hiperbolometrycznych: $\arg\sin\text{hip}\, x$, lub t. p., przedstawiają się, po rozwinięciu funkcyi $R(x)$, jako zbiór całek, kształtu:

$$\int x^m \arg\sin\text{hip}\, x\,.\,dx,\quad \int \frac{\arg\sin\text{hip}\, x}{x^m}\, dx,\quad \int \frac{\arg\sin\text{hip}\, x}{(x-a)^m}\, dx,$$

lub podobnych, w których występuje odpowiednio którakolwiek inna funkcya hiperbolometryczna.

Otrzymane całki sprowadzają się, wskutek podstawienia:

$$\arg\sin\text{hip}\, x = z,\ \text{a więc}\ x = \sin\text{hip}\, z,\quad dx = \cos\text{hip}\, z\,.\,dz,$$

do całek, kształtu:

$$\int z\,.\,\sin\text{hip}^m z\cos\text{hip}\, z\,.\,dz,\quad \int \frac{z\,.\cos\text{hip}\, z}{\sin\text{hip}^m z}\, dz,\quad \int \frac{z\cos\text{hip}\, z\, dz}{(\sin\text{hip}\, z - a)^m},$$

które należą do całek, poprzednio już rozważanych.

Stosując do całek, kształtu: $\int R(x)\arg\sin\text{hip}\, x\, dx$, metodę całkowania przez części, a to, kładąc:

$$\arg\sin\text{hip}\, x = u,\ \text{a zatem}\ du = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$R(x)\,.\,dx = dv \qquad v = \int R(x)\, dx = \overline{R}(x),$$

otrzymujemy:

$$\int R(x)\,.\arg\sin\text{hip}\, x\,.\,dx = \overline{R}(x)\,.\arg\sin\text{hip}\, x - \int \overline{R}(x)\,.\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, \tag{28}$$

podobnie:

$$\int R(x)\,.\arg\cos\text{hip}\, x\,.\,dx = \overline{R}(x)\,.\arg\cos\text{hip}\, x - \int \overline{R}(x)\,.\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}, \tag{29}$$

$$\int R(x)\,.\arg\text{tang}\,\text{hip}\, x\,.\,dx = \overline{R}(x)\,.\arg\text{tang}\,\text{hip}\, x\, dx - \int \overline{R}(x)\,.\frac{dx}{1-x^2}, \tag{30}$$

a więc wzory, które wyznaczanie danych całek sprowadzają do wyznaczania całek algebraicznych, skoro całka, kształtu: $\int R(x)\, dx$ daje w wyniku funkcyę algebraiczną $\overline{R}(x)$.

24. **Całki kształtu:** $\int x^n . \arg \sin \mathrm{hip}\, x . dx$ i $\int x^n . \arg \cos \mathrm{hip}\, x . dx$ przedstawiają szczególne przykłady całek, w poprzednim art. rozważanych. Mamy tu mianowicie:

$$R(x) = x^n, \text{ jest zatem: } \bar{R}(x) = \int R(x) . dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Wobec tego, otrzymujemy, na mocy wzorów (28) i (29), wzory szczególne:

$$\int x^n . \arg \sin \mathrm{hip}\, x . dx = \frac{x^{n+1} . \arg \sin \mathrm{hip}\, x}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx, \tag{31}$$

$$\int x^n . \arg \cos \mathrm{hip}\, x . dx = \frac{x^{n+1} . \arg \cos \mathrm{hip}\, x}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{x^2-1}} dx, \tag{32}$$

...re dowodzą, że całki tego rodzaju, przy całkowitym, dodatnim wykładniku n, dają się ...wsze wyznaczyć.

W szczególności, dla $n = 0$, otrzymujemy:

$$\int \arg \sin \mathrm{hip}\, x dx = x \arg \sin \mathrm{hip}\, x - \sqrt{1+x^2} + C,$$

$$\int \arg \cos \mathrm{hip}\, x . dx = x \arg \cos \mathrm{hip}\, x - \sqrt{x^2-1} + C.$$

Dla całkowitego, ujemnego wykładnika: $n = -m$, otrzymujemy powyższe wzory ...postaci:

$$\int \frac{\arg \sin \mathrm{hip}\, x}{x^m} dx = -\frac{\arg \sin \mathrm{hip}\, x}{(m-1) x^{m-1}} + \frac{1}{m-1} \int \frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{1+x^2}},$$

$$\int \frac{\arg \cos \mathrm{hip}\, x}{x^m} dx = -\frac{\arg \cos \mathrm{hip}\, x}{(m-1) x^{m-1}} + \frac{1}{m-1} \int \frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{x^2-1}},$$

...ra przestaje być przydatną, gdy $m = -1$.

W tym przypadku, otrzymujemy całki, które, na mocy podstawień: $\arg \sin \mathrm{hip}\, x = z$, ... $\sin \mathrm{hip}\, z$, $dx = \cos \mathrm{hip}\, z . dz$, względnie:

$$\arg \cos \mathrm{hip}\, x = z, \quad x = \cos \mathrm{hip}\, z, \quad dx = \sin \mathrm{hip}\, z . dz,$$

...edstawiają się w postaciach:

$$\int \frac{\arg \sin \mathrm{hip}\, x}{x} dx = \int \frac{z \cos \mathrm{hip}\, z}{\sin \mathrm{hip}\, z} dz = \int z \operatorname{cotg} \mathrm{hip}\, z . dz,$$

$$\int \frac{\arg \cos \mathrm{hip}\, x}{x} dx = \int \frac{z \sin \mathrm{hip}\, z}{\cos \mathrm{hip}\, z} dz = \int z \operatorname{tang} \mathrm{hip}\, z . dz,$$

...wadzących do nowych funkcyj przestępnych.

Jest bowiem:

$$\int z \operatorname{cotg} \mathrm{hip}\, z . dz = z . \log \sin \mathrm{hip}\, z - \int \log \sin \mathrm{hip}\, z . dz,$$

$$\int z \operatorname{tang} \mathrm{hip}\, z . dz = z . \log \cos \mathrm{hip}\, z - \int \log \cos \mathrm{hip}\, z . dz,$$

...ie:

$$\int \log \sin \mathrm{hip}\, z . dz \quad \text{i} \quad \int \log \cos \mathrm{hip}\, z . dz,$$

...rzą nowy rodzaj funkcyj przestępnych.

25. **Całki, kształtu:** $\int x^n . \arg \operatorname{tang} \mathrm{hip}\, x . dx$, przedstawiają się, na mocy wzoru (30), ... którym $R(x) = x^n$, w postaci:

$$\int x^n \arg \operatorname{tang} \mathrm{hip}\, x . dx = \frac{x^{n+1} . \arg \operatorname{tang} \mathrm{hip}\, x}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{1-x^2} dx, \tag{33}$$

...podstawie której, możemy wyznaczyć daną całkę, przy jakimkolwiek całkowitym, do...tnim wykładniku n.

Jeżeli wykładnik n jest liczbą parzystą: $n = 2m$, otrzymujemy, pod znakiem całkowym ...kcyę ułamkową:

$$\frac{x^{2m+1}}{x^2-1} = x^{2m-1} + x^{2m-3} + \dots + x + \frac{x}{x^2-1},$$

...przypadku zaś, gdy wykładnik n jest liczbą nieparzystą: $n = 2m+1$, otrzymujemy:

$$\frac{x^{2m+2}}{x^2-1} = x^{2m} + x^{2m-2} + \dots + 1 + \frac{1}{x^2-1},$$

...m dana całka przedstawia się, w pierwszym przypadku, w postaci:

$$\int x^{2m} \arg\operatorname{tang}\operatorname{hip} x \,.\, dx = \frac{x^{2m+1} . \arg\operatorname{tang}\operatorname{hip} x}{2m+1} + \frac{1}{2m+1} \left\{ \frac{x^{2m}}{2m} + \frac{x^{2m-2}}{2m-2} + \dots + \frac{x}{\cdot} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\log(x^2-1) \right\} + C,$$

w drugim, zaś, w postaci:

$$\int x^{2m+1} \arg\operatorname{tang}\operatorname{hip} x \, dx = \frac{x^{2m+2} . \arg\operatorname{tang}\operatorname{hip} x}{2m+2} + \frac{1}{2m+2} \left\{ \frac{x^{2m+1}}{2m+1} + \frac{x^{2m-1}}{2m-1} + \right.$$
$$\left. + \dots + x - \arg\operatorname{tg}\operatorname{hip} x \right\} + C.$$

Jeżeli wykładnik n jest liczbą ujemną: $n = -m$, natenczas, otrzymujemy w

$$\int \frac{\arg\operatorname{tang}\operatorname{hip} x}{x^m} dx = -\frac{\arg\operatorname{tang}\operatorname{hip} x}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{1}{m-1}\int \frac{dx}{x^{m-1}(1-x^2)},$$

przydatny, skoro: $m > 1$.

Dla $m = 1$, otrzymujemy całkę, kształtu: $\int \frac{\arg\operatorname{tang}\operatorname{hip} x}{x} dx$, która, wsku

stawienia: $\arg\operatorname{tang}\operatorname{hip} x = z$, $x = \operatorname{tang}\operatorname{hip} z$, $dx = \frac{dz}{\cos\operatorname{hip}^2 z}$, sprowadza się do p

$$\int \frac{\arg\operatorname{tang}\operatorname{hip} x}{x} dx = \int \frac{z\,dz}{\sin\operatorname{hip} z \cos\operatorname{hip} z} = \int \frac{2z\,dz}{\sin\operatorname{hip} 2z},$$

a więc, do funkcyi przestępnej, kształtu: $\int \frac{t}{\sin\operatorname{hip} t} . dt.$

Cwiczenia XIII.

Na podstawie określenia funkcyj hiperbolicznych, wyprowadzić następują analogiczne do wzorów goniometrycznych:

1) $\cos\operatorname{hip}^2 x - \sin\operatorname{hip}^2 x = 1$. 2) $\sec\operatorname{hip}^2 x + \operatorname{tang}\operatorname{hip}^2 x = 1$.

3) $\operatorname{cotg}\operatorname{hip}^2 x - \operatorname{cosec}\operatorname{hip}^2 x = 1$.

4) $\sin\operatorname{hip}(x \pm y) = \sin\operatorname{hip} x . \cos\operatorname{hip} y \pm \cos\operatorname{hip} x . \sin\operatorname{hip} y$.

5) $\cos\operatorname{hip}(x \pm y) = \cos\operatorname{hip} x . \cos\operatorname{hip} y \pm \sin\operatorname{hip} x . \sin\operatorname{hip} y$.

6) $\operatorname{tang}\operatorname{hip}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tang}\operatorname{hip} x \pm \operatorname{tang}\operatorname{hip} y}{1 \pm \operatorname{tang}\operatorname{hip} x . \operatorname{tang}\operatorname{hip} y}$.

7) $\sin\operatorname{hip} 2x = 2\sin\operatorname{hip} x . \cos\operatorname{hip} x$. 8) $\cos\operatorname{hip} 2x = \cos\operatorname{hip}^2 x + \sin\operatorname{hip}^2 x$.

9) $\operatorname{tang}\operatorname{hip} 2x = \frac{2\operatorname{tang}\operatorname{hip} x}{1 + \operatorname{tang}\operatorname{hip}^2 x}$.

10) *a)* $\sin\operatorname{hip}^2 x = \frac{\cos\operatorname{hip} 2x - 1}{2}$, *b)* $\cos\operatorname{hip}^2 x = \frac{\cos\operatorname{hip} 2x + 1}{2}$.

11) $\sin\operatorname{hip} x . \cos\operatorname{hip} y = \frac{1}{2}[\sin\operatorname{hip}(x+y) + \sin\operatorname{hip}(x-y)]$.

12) $\cos\operatorname{hip} x . \sin\operatorname{hip} y = \frac{1}{2}[\sin\operatorname{hip}(x+y) - \sin\operatorname{hip}(x-y)]$.

13) $\cos\operatorname{hip} x . \cos\operatorname{hip} y = \frac{1}{2}[\cos\operatorname{hip}(x+y) + \cos\operatorname{hip}(x-y)]$.

14) $\sin\operatorname{hip} x \sin\operatorname{hip} y = \frac{1}{2}[\cos\operatorname{hip}(x+y) - \cos\operatorname{hip}(x-y)]$.

15) $\sin\operatorname{hip}^{2n} x = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{r=0}^{r=n-1} (-1)^r \binom{2n}{r} \cos\operatorname{hip}(2n-2r)x + \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$.

16) $\sin\operatorname{hip}^{2n+1} x = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r \binom{2n+1}{r} \sin\operatorname{hip}(2n+1-2r)x$.

17) $\cos\text{hip}^{2n} x = \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{r=0}^{r=n-1} \binom{2n}{r} \cos\text{hip}\,(2n-2r)x + \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.$

18) $\cos\text{hip}^{2n+1} x = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{r=0}^{r=n} \binom{2n+1}{r} \cos\text{hip}\,(2n+1-2r)\,x.$

19) $\sin\text{hip}\,2n\,x = \sum_{r=0}^{r=n-1} \binom{2n}{2r+1} \cos\text{hip}^{2n-2r-1} x \sin\text{hip}^{2r+1} x.$

20) $\sin\text{hip}\,(2n+1)\,x = \sum_{r=0}^{r=n} \binom{2n+1}{2r+1} \cos\text{hip}^{2n-2r} x \sin\text{hip}^{2r+1} x.$

21) $\cos\text{hip}\,2n\,x = \sum_{r=0}^{r=n} \binom{2n}{2r} \cos\text{hip}^{2n-2r} x \sin\text{hip}^{2r} x.$

22) $\cos\text{hip}\,(2n+1)x = \sum_{r=0}^{r=n} \binom{2n+1}{2r} \cos\text{hip}^{2n+1-2r} x \sin\text{hip}^{2r} x.$

Wykazać, że:

23) $\sin\text{hip}\,x = \sqrt{\cos\text{hip}^2 x - 1} = \frac{\text{tang hip}\,x}{\sqrt{1-\text{tang hip}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\text{cotg hip}^2 x - 1}} =$
$= \frac{\sqrt{1-\sec\text{hip}^2 x}}{\sec\text{hip}\,x} = \frac{1}{\text{cosec hip}\,x}.$

24) $\cos\text{hip}\,x = \sqrt{1+\sin\text{hip}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1-\text{tang hip}^2 x}} = \frac{\text{cotg hip}\,x}{\sqrt{\text{cotg hip}^2 x - 1}} =$
$= \frac{1}{\sec\text{hip}\,x} = \frac{\sqrt{1+\text{cosec hip}^2 x}}{\text{cosec hip}\,x}.$

25) $\text{tang hip}\,x = \frac{\sin\text{hip}\,x}{\sqrt{1+\sin\text{hip}^2 x}} = \frac{\sqrt{\cos\text{hip}^2 x - 1}}{\cos\text{hip}\,x} = \frac{1}{\text{cotg hip}\,x} =$
$= \sqrt{1-\sec\text{hip}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1+\text{cosec hip}^2 x}}.$

26) $\text{cotg hip}\,x = \frac{\sqrt{1+\sin\text{hip}^2 x}}{\sin\text{hip}\,x} = \frac{\cos\text{hip}\,x}{\sqrt{\cos\text{hip}^2 x - 1}} = \frac{1}{\text{tang hip}\,x} =$
$= \frac{1}{\sqrt{1-\sec\text{hip}^2 x}} = \sqrt{1+\text{cosec hip}^2 x}.$

27) $\sec\text{hip}\,x = \frac{1}{\sqrt{1+\sin\text{hip}^2 x}} = \frac{1}{\cos\text{hip}\,x} = \sqrt{1-\text{tang hip}^2 x} =$
$= \frac{\sqrt{\text{cotg hip}^2 x - 1}}{\text{cotg hip}\,x} = \frac{\text{cosec hip}\,x}{\sqrt{1+\text{cosec hip}^2 x}}.$

28) $\text{cosec hip}\,x = \frac{1}{\sin\text{hip}\,x} = \frac{1}{\sqrt{\cos\text{hip}^2 x - 1}} = \frac{\sqrt{1-\text{tang hip}^2 x}}{\text{tang hip}\,x} =$
$= \sqrt{\text{cotg hip}^2 x - 1} = \frac{\sec\text{hip}\,x}{\sqrt{1-\sec\text{hip}^2 x}}.$

29) **Wyprowadzić analogiczne związki między sześcioma elementarnemi funkcyami erbolomotrycznemi, jak:**

$\arg\sin\text{hip}\,x = \arg\cos\text{hip}\sqrt{1+x^2} = \arg\text{tang hip}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ i t. d.

Wyprowadzić i sprawdzić następujące wzory całkowe:

30) $\int \sin\text{hip}\,x\,dx = \cos\text{hip}\,x + C,$ 31) $\int \cos\text{hip}\,x\,dx = \sin\text{hip}\,x + C.$

32) $\int \frac{dx}{\cos \text{hip}^2 x} = \text{tang hip } x + C.$ 33) $\int \frac{dx}{\sin \text{hip}^2 x} = -\text{cotg hip } x + C.$

34) $\int \frac{\sin \text{hip } x . dx}{\cos \text{hip}^2 x} = -\frac{1}{\cos \text{hip } x} + C = -\sec \text{hip } x + C.$

35) $\int \frac{\cos \text{hip } x . dx}{\sin \text{hip}^2 x} = -\frac{1}{\sin \text{hip } x} + C = -\text{cosec hip } x + C.$

36) $\int \text{tang hip } x . dx = \log \cos \text{hip } x + C.$ 37) $\int \text{cotg hip } x . dx = \log \sin \text{hip } x +$

38) $\int \sec \text{hip } x \, dx = 2 \text{ arc tang } \left(\text{tang hip } \frac{x}{2}\right) + C.$

39) $\int \text{cosec hip } x . dx = \log \text{tang hip } \frac{x}{2} + C.$

40) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \arg \sin \text{hip } x + C = \log(x + \sqrt{x^2+1}) + C.$

41) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \arg \cos \text{hip } x + C = \log(x + \sqrt{x^2-1}) + C.$

42) $\int \frac{dx}{1-x^2} = \arg \text{tang hip } x + C = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} + C$, gdy $x < 1$.

43) $\int \frac{dx}{x^2-1} = -\arg \text{cotg hip } x + C = \frac{1}{2} \log \frac{x-1}{x+1} + C$, gdy $x > 1$.

44) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\arg \sec \text{hip } x + C = \log \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} + C.$

45) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = -\arg \text{cosec hip } x + C = \log \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} + C.$

46) $\int \arg \sin \text{hip } x . dx = x \arg \sin \text{hip } x - \sqrt{1+x^2} + C.$

47) $\int \arg \cos \text{hip } x . dx = x \arg \cos \text{hip } x - \sqrt{x^2-1} + C.$

48) $\int \arg \text{tang hip } x . dx = x \arg \text{tang hip } x + \log \sqrt{1-x^2} + C.$

49) $\int \arg \text{cotg hip } x . dx = x \arg \text{cotg hip } x + \log \sqrt{1-x^2} + C$

50) $\int \arg \sec \text{hip } x . dx = x \arg \sec \text{hip } x - \text{arc} \sin x + C.$

51) $\int \arg \text{cosec hip } x . dx = x \arg \text{cosec } x - \arg \sin \text{hip } x + C.$

52) $\int \frac{\cos \text{hip } x . dx}{\sin \text{hip}^2 x - 1} = \frac{1}{2} \log \frac{\sin \text{hip } x - 1}{\sin \text{hip } x + 1} + C.$

53) $\int \frac{\sin \text{hip}^3 x - \sin \text{hip}^2 x + \sin \text{hip } x + 1}{\text{tg hip } x} . dx = \frac{1}{3} \sin \text{hip}^3 x - \frac{1}{2} \sin \text{hip}^2 x +$
$+ \sin \text{hip } x + \log \sin \text{hip } x +$

54) $\int \frac{1 - \sin \text{hip } x}{\sec \text{hip } x + \text{tang hip } x} . dx = 2 \log(1 + \sin \text{hip } x) - \sin \text{hip } x + C.$

55) $\int \frac{\sin \text{hip } x}{\sin \text{hip } x + \sin \text{hip}^2 x} dx = \log \text{tang hip } x + C.$

56) $\int \frac{(\sin \text{hip } 2x - \cos \text{hip } x) \, dx}{\sin \text{hip}^2 x - 5 \sin \text{hip } x + 6} = \log \frac{(\sin \text{hip } x - 3)^5}{(\sin \text{hip } x - 2)^3} + C.$

57) $\int (2 + 5 \cos \text{hip } x)^2 \sin \text{hip } x . dx = {}^1/_{15} (2 + \cos \text{hip } x)^3 + C.$

58) $\int \frac{[{}^1/_2 \sin \text{hip } 2x + \sin \text{hip } x]}{(\cos \text{hip } x - 1)^3} dx = -\frac{\cos \text{hip } x}{(\cos \text{hip } x - 1)^2} + C.$

59) $\int \frac{\sin \text{hip}^2 x . dx}{\sin \text{hip}^3 x + 5 \sin \text{hip}^2 x \cos \text{hip } x + 8 \sin \text{hip } x \cos \text{hip}^2 x + 4 \cos \text{hip}^3 x} =$
$= \frac{4 \cos \text{hip } x}{\sin \text{hip } x + 2 \cos \text{hip } x} + \log \frac{\sin \text{hip } x + \cos \text{hip } x}{\cos \text{hip } x} +$

60) $\int \frac{dx}{\sin \text{hip } x \cos \text{hip } x (5 \text{ tang hip}^6 x + 3)} = \frac{1}{18} \log \frac{\text{tang hip}^6 x}{5 \text{ tang hip}^6 x + 3} + C.$

61) $\int \frac{dx}{2\sin\text{hip}^2 x + 3\sin\text{hip}\, x\cos\text{hip}\, x + \cos\text{hip}^2 x} = \log\frac{2\,\text{tang hip}\, x + 1}{2(\text{tang hip}\, x + 1)} + C.$

62) $\int \frac{\cos\text{hip}^4 x\,.\,dx}{\sin\text{hip}\, x} = \log\text{tang hip}\,\frac{x}{2} + \cos\text{hip}\, x + \frac{\cos\text{hip}^3 x}{3} + C.$

63) $\int \sin\text{hip}^2 x\,.\,dx = \frac{1}{2}\sin\text{hip}\, x\,.\,\cos\text{hip}\, x - \frac{x}{2} + C.$

64) $\int \sin\text{hip}^3 x\,.\,dx = \frac{1}{3}\sin\text{hip}^2 x\cos\text{hip}\, x + \frac{2}{3}\cos\text{hip}\, x + C.$

65) $\int \cos\text{hip}^2 x\,.\,dx = \frac{1}{2}\sin\text{hip}\, x\cos\text{hip}\, x + \frac{x}{2} + C.$

66) $\int \cos\text{hip}^3 x\,.\,dx = \frac{1}{3}\sin\text{hip}\, x\cos\text{hip}^2 x + \frac{2}{3}\sin\text{hip}\, x + C.$

67) $\int \frac{dx}{\sin\text{hip}^3 x} = -\frac{1}{2}\,\frac{\cos\text{hip}\, x}{\sin\text{hip}^2 x} - \log\text{tang hip}\,\frac{x}{2} + C.$

68) $\int \frac{dx}{\cos\text{hip}^4 x} = \text{tang hip}\, x - \frac{1}{3}\,\text{tang hip}^3 x + C.$

69) $\int \frac{\cos\text{hip}\, 2x}{\sin\text{hip}^3 x}\,.\,dx = -\frac{\cos\text{hip}\, x}{2\sin\text{hip}^2 x} + \frac{3}{2}\log\text{tang hip}\,\frac{x}{2} + C.$

70) $\int x\cos\text{hip}\, x\,.\,dx = x\sin\text{hip}\, x - \cos\text{hip}\, x + C.$

71) $\int x\sin\text{hip}\, x\,.\,dx = x\cos\text{hip}\, x - \sin\text{hip}\, x + C.$

72) $\int \frac{x\,dx}{\sin\text{hip}^2 x} = -x\,\text{cotg hip}\, x + \log\sin\text{hip}\, x + C.$

73) $\int \frac{x\,dx}{\cos\text{hip}^2 x} = x\,\text{tang hip}\, x - \log\cos\text{hip}\, x + C.$

74) $\int x\,\text{tang hip}^2 x\,.\,dx = -x\,\text{tang hip}\, x + \log\cos\text{hip}\, x + \frac{x^2}{2} + C.$

75) $\int \frac{\text{arg sin hip}\, x\, dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}(\text{arg sin hip}\, x)^2 + C.$

76) $\int \text{arg sin hip}\, x\,.\,\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = -x + \sqrt{1+x^2}\,.\,\text{arg sin hip}\, x + C.$

Rozwiązania XIII. 1)—29) wzory wynikają z określenia: $\cos\text{hip}\, x + \sin\text{hip}\, x = e^x$, $\cos\text{hip}\, x - \sin\text{hip}\, x = e^{-x}$. 30)—39) całkowanie bezpośrednie, lub za pomocą stosownego przekształcenia funkcyi, stojącej pod znakiem całkowym. 40)—45). Zastosować podstawienia hiperboliczne, tudzież podstawienia algebraiczne. 49)—51). Całkowanie przez części. 52)—56) Podstawienie: $\sin\text{hip}\, x = u$. 57)—58) $\cos\text{hip}\, x = u$. 59)—61) $\text{tang hip}\, x = u$. 62) $\text{tang hip}\,\frac{x}{2} = u$. 63)—69). Podstawienie analogiczne do podstawień Żmurkowskich, wskazanych przy wyznaczaniu całek kształtu: $\int \cos^k x \sin^l x\, dx$. 70)—76) Całkowanie przez części, lub przez sprowadzenie danych funkcyi hiperbolometrycznych do funkcyj cyklometrycznych.

Literatura. J. Hoüel. Cours de Calcul infinitesimal. Paris 1878. Kiepert-Stegemann. Differential und Integralrechnung. 9. Auflage. Hannover 1901. W. Ligowski. Taschenbuch der Mathematik. Berlin 1893. William Benjamin Smith. Infinitesimal Analysis. London, 1898.

Tematy do rozprawek naukowych.

1. Rozkładanie iloczynów: $\sin\text{hip}^s mx\cos\text{hip}^k nx$ na dodajniki.
2. Rozkładanie funkcyj: $\sin\text{hip}\, mx$ i $\cos\text{hip}\, nx$ na czynniki.
3. Całkowanie funkcyj algebraicznych za pomocą podstawień hiperbolicznych.

Wykład XIV.

Całki funkcyj, złożonych z funkcyj wykładniczych goniometrycznych lub hiperbolicznych, i ich odwróceń.

1. Całkowanie funkcyj złożonych z funkcyj wykładniczych i goniometrycznych. Całki funkcyj, złożonych z funkcyj wykładniczych i goniometrycznych, względnie hiperbolicznych, kształtu: $\int f(e^x, \sin x)\,dx$, dadzą się, na podstawie związków, zachodzących między temi funkcyami, opartych na wzorze: $e^{xi} = \cos x + i \sin x$, względnie: $e^x = \cos\text{hip}\, x + \sin\text{hip}\, x$, sprowadzić ostatecznie do całek funkcyj, złożonych z funkcyj jednego z tych rodzajów, a więc złożonych, albo z samych funkcyj wykładniczych, kształtu: $\int F(e^x)\,dx$, albo z samych funkcyj, goniometrycznych, kształtu: $\int F(\sin x)\,dx$, albo z samych funkcyj hiperbolicznych kształtu: $\int F(\sin\text{hip}\, x)\,.dx$.

Do tak otrzymanych całek możemy tedy, stosownie do kształtu funkcyi F, stojącej pod znakiem całkowania, zastosować, albo metodę przekształcenia tej funkcyj, przez jej rozkładanie na funkcye prostsze, albo metodę podstawienia, polegającą na wprowadzeniu nowej zmiennej z, tak, aby dana całka dała się, jeżeli można w całości, lub choćby w części tylko sprowadzić do całki funkcyi wymiernej ze względu na nową zmienną.

Przy tem postępowaniu używamy, obok rzeczywistych spółczynników i urojonych, a odnośne przekształcenia funkcyj urojonych na rzeczywiste wykonywamy dopiero w otrzymanych wynikach.

Obok tego sposobu postępowania, w niektórych przypadkach, metoda całkowania przez części, bezpośrednio stosowana, prowadzi wprost do wyniku, a jest szczególnie wtedy przydatną, jeżeli chodzi o sprowadzenie danej całki do możliwie najprostszych całek, cechujących nowe funkcye przestępne. Wskazane tu postępowanie wyjaśnimy na kilku przykładach typowych.

2. Całki, kształtu: $\int e^{ax} \cos bx\,.dx$ i $\int e^{ax} \sin bx\,.dx$. Przekształcając tu funkcye, stojące pod znakiem całkowania, na podstawie wzorów:

$$\cos bx = \frac{1}{2}(e^{bxi} + e^{-bxi}),\quad \sin bx = \frac{1}{2i}(e^{bxi} - e^{-bxi}),$$

otrzymujemy:

$$\int e^{ax} \cos bx\,dx = {}^1\!/\!_2 \int e^{ax}(e^{bxi} + e^{-bxi})\,dx = {}^1\!/\!_2 \int [e^{(a+bi)x} + e^{(a-bi)x}]\,dx,$$

$$\int e^{ax} \sin bx\,dx = \frac{1}{2i} \int e^{ax}(e^{bxi} - e^{-bxi})\,dx = \frac{1}{2i} \int [e^{(a+bi)x} - e^{(a-bi)x}]\,dx,$$

a że:
$$\int e^{(a+bi)x}\,dx = \frac{e^{(a+bi)x}}{a+bi},\quad \int e^{(a-bi)x}\,dx = \frac{e^{(a-bi)x}}{a-bi},$$

przeto, dostajemy:

$$\int e^{ax}\cos bx\,.\,dx = \frac{1}{2}\left\{\frac{e^{(a+bi)x}}{a+bi} + \frac{e^{(a-bi)x}}{a-bi}\right\} + C. \qquad (1)$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,.\,dx = \frac{1}{2i}\left\{\frac{e^{(a+bi)x}}{a+bi} - \frac{e^{(a-bi)x}}{a-bi}\right\} + C. \qquad (2)$$

Przeprowadzając wskazane w wynikach działania, otrzymujemy:

$$\frac{e^{(a+bi)x}}{a+bi} + \frac{e^{(a-bi)x}}{a-bi} = \frac{(a-bi)e^{(a+bi)x} + (a+bi)e^{(a-bi)x}}{a^2+b^2} = \frac{e^{ax}[(a+bi)e^{bxi} + (a-bi)e^{-bxi}]}{a^2+b^2},$$

$$\frac{e^{(a+bi)x}}{a+bi} - \frac{e^{(a-bi)x}}{a-bi} = \frac{(a-bi)e^{(a+bi)x} - (a+bi)e^{(a-bi)x}}{a^2+b^2} = \frac{e^{ax}[(a-bi)e^{bxi} - (a+bi)e^{-bxi}]}{a^2+b^2},$$

...ie:

$$e^{bxi} = \cos bx + i\sin bx, \quad e^{-bxi} = \cos bx - i\sin bx,$$

...tem, dostajemy:

$$\frac{e^{(a+bi)x}}{a+bi} + \frac{e^{(a-bi)x}}{a-bi} = \frac{e^{ax}[2a\cos bx + 2b\sin bx]}{a^2+b^2},$$

$$\frac{e^{(a+bi)x}}{a+bi} - \frac{e^{(a-bi)x}}{a-bi} = \frac{e^{ax}(2ai\sin bx - 2bi\cos bx)}{a^2+b^2},$$

...atem szukane całki otrzymujemy także w postaci:

$$\int e^{ax}\cos bx\,.\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2} + C, \qquad (1')$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C, \qquad (2')$$

...iącej spółczynniki rzeczywiste.

3. Obie całki powyższe wynikają, jak łatwo się przekonać, wprost z całki:

$$\int e^{(a+bi)x}\,dx = \frac{e^{(a+bi)x}}{a+bi} + C.$$

Przedstawmy ją bowiem w postaci:

$$\int e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)\,dx = \frac{e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)}{a+bi} + C = \frac{e^{ax}(a-bi)(\cos bx + i\sin bx)}{a^2+b^2} + C,$$

otrzymamy:

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx + i\int e^{ax}\sin bx\,.\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2} + i\,\frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2},$$

...ąd, porównywając z osobna części rzeczywiste i urojone, dostajemy:

$$\int e^{ax}\cos x\,.\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2}; \quad \int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}.$$

4. Całki powyższe możemy zresztą wyznaczyć także wprost za pomocą metody cał...wania przez części. Kładąc, mianowicie, w pierwszej całce:

$$\cos bx = u,\ e^{ax}\,dx = dv, \text{ a zatem: } du = -b\sin bx\,.\,dx,\ v = \frac{1}{a}e^{ax},$$

...drugiej zaś:

$$\sin x = u,\ e^{ax}\,dx = dv, \text{ a zatem: } du = b\cos bx\,.\,dx,\ v = \frac{1}{a}e^{ax},$$

...rzymujemy:

$$\int e^{ax}\cos bx\,.\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,.\,dx,$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,.\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,.\,dx,$$

...ąd wzory powyżej otrzymane.

W podobny sposób, lub wprost z otrzymanych wzorów znajdziemy analogiczne ...ry dla całek złożonych z funkcyj wykładniczych i hiperbolicznych, w postaci:

$$\int e^{ax} \cos \text{hip}\, bx \,.\, dx = \frac{e^{ax}(a \cos \text{hip}\, bx - b \sin \text{hip}\, bx)}{a^2 - b^2}, \tag{3}$$

$$\int e^{ax} \sin \text{hip}\, bx \,.\, dx = \frac{e^{ax}(a \sin \text{hip}\, bx - b \cos \text{hip}\, bx)}{a^2 - b^2}. \tag{4}$$

5. Całki kształtu: $\int e^{ax} \sin^m x \,.\, dx$ **i** $\int e^{ax} \cos^m x \,.\, dx$, w których wykładnik m jest liczbą całkowitą, dodatnią, dają się sprowadzić do całek poprzedzających, skoro, na mocy podstawień: $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{xi} - e^{-xi})$, $\cos x = \frac{1}{2}(e^{xi} + e^{-xi})$, rozłożymy na dodajniki funkcye: $\sin^m x$ i $\cos^m x$, według wzorów:

$$\sin^{2n} x = \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} \sum_{r=0}^{r=n-1} (-1)^r \binom{2n}{r} \cos(2n-2r)x + \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n},$$

$$\sin^{2n+1} x = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r \binom{2n+1}{r} \sin(2n+1-2r)x,$$

$$\cos^{2n} x = \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{r=0}^{r=n-1} \binom{2n}{r} \cos(2n-2r)x + \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n},$$

$$\cos^{2n+1} x = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{r=0}^{r=n} \binom{2n+1}{r} \cos(2n+1-2r)x.$$

Całki tego rodzaju dadzą się więc, przy całkowitym, dodatnim wykładniku m, zawsze wyznaczyć i wyrazić przez znane funkcye.

6. Stosując do powyższych całek metodę całkowania przez części, otrzymujemy dla pierwszej całki wzór:

$$\int e^{ax} \sin^m x \,.\, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin^m x - \frac{m}{a} \int e^{ax} \sin^{m-1} x \cos x \,.\, dx,$$

a że, na podstawie tejże samej metody całkowania:

$$\int e^{ax} \sin^{m-1} x \cos x \,.\, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin^{m-1} x \cos x - \frac{1}{a} \int e^{ax} [(m-1)\sin^{m-2} x \cos^2 x - \sin^m x]\, dx,$$

przeto, podstawiając tę wartość w poprzednim wzorze i zastępując $\cos^2 x$ przez $1 - \sin^2 x$, otrzymujemy:

$$\int e^{ax} \sin^m x \,.\, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin^m x - \frac{m}{a^2} e^{ax} \sin^{m-1} x \cos x +$$
$$+ \frac{m(m-1)}{a^2} \int e^{ax} \sin^{m-2} x \,.\, dx - \frac{m^2}{a^2} \int e^{ax} \sin^m x \,.\, dx,$$

a stąd wzór redukcyjny:

$$\int e^{ax} \sin^m x \,.\, dx = \frac{e^{ax}(a \sin x - m \cos x \sin^{m-1} x)}{a^2 + m^2} + \frac{m(m-1)}{a^2 + m^2} \int e^{ax} \sin^{m-2} x \,.\, dx. \tag{5}$$

Podobnie, otrzymamy wzór redukcyjny dla drugiej całki w postaci:

$$\int e^{ax} \cos^m x \,.\, dx = \frac{e^{ax}(a \cos x + m \sin x \cos^{m-1} x)}{a^2 + m^2} + \frac{m(m-1)}{a^2 + m^2} \int e^{ax} \cos^{m-2} x \,.\, dx. \tag{6}$$

Otrzymane wzory prowadzą, przy parzystym wykładniku m, ostatecznie do całki: $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$, a przy nieparzystym wykładniku m, do całek 1) i 2) w postaci:

$$\int e^{ax} \cos x \,.\, dx = \frac{a \cos x + \sin x}{a^2 + 1} + C, \quad \int e^{ax} \cos x \,.\, dx = \frac{a \sin x - \cos x}{a^2 + 1} + C.$$

7. **Całki, kształtu:** $\int \frac{e^{ax}}{\sin^m x}\,dx$ i $\int \frac{e^{ax}}{\cos^m x}\,dx$. Na podstawie wzorów: 5) i 6) otrzy-my także wzory redukcyjne dla całek tego kształtu. Przedewszystkiem, otrzymujemy odwrócenia powyższych wzorów:

$$\int e^{ax}\sin^{m-2}x\,.\,dx = -\frac{e^{ax}(a\sin x - m\cos x)\sin^{m-1}x}{m(m-1)} + \frac{a^2+m^2}{m(m-1)}\int e^{ax}\sin^m x\,.\,dx,$$

$$\int e^{ax}\cos^{m-2}x\,.\,dx = -\frac{e^{ax}(a\cos x + m\sin x)\cos^{m-1}x}{m(m-1)} + \frac{a^2+m^2}{m(m-1)}\int e^{ax}\cos^m x\,.\,dx,$$

ąd, zastępując $m-2$ przez $-m$, otrzymujemy dotyczące wzory redukcyjne w postaci:

$$\int \frac{e^{ax}}{\sin^m x}\,dx = -\frac{e^{ax}(a\sin x + (m-2)\cos x)}{(m-1)(m-2)\sin^{m-1}x} + \frac{a^2+(m-2)^2}{(m-1)(m-2)}\int \frac{e^{ax}}{\sin^{m-2}x}\,dx, \tag{7}$$

$$\int \frac{e^{ax}}{\cos^m x}\,dx = -\frac{e^{ax}(a\cos x - (m-2)\sin x)}{(m-1)(m-2)\cos^{m-1}x} + \frac{a^2+(m-2)^2}{(m-1)(m-2)}\int \frac{e^{ax}}{\cos^{m-2}x}\,dx, \tag{8}$$

ydatnej, gdy wykładnik m jest różny od 1 i 2.

W przypadku $m=1$, mamy całki, kształtu: $\int \frac{e^{ax}}{\sin x}\,dx$ i $\int \frac{e^{ax}}{\cos x}\,dx$, przedstawiające e funkcye przestępne.

Dla $m=2$, otrzymujemy całki, kształtu: $\int \frac{e^{ax}}{\sin^2 x}\,dx$ i $\int \frac{e^{ax}}{\cos^2 x}\,dx$, które, na podstawie tody całkowania przez części, sprowadzają się do postaci:

$$\int \frac{e^{ax}}{\sin^2 x}\,dx = -e^{ax}\,\mathrm{cotg}\,x + a\int e^{ax}\,\mathrm{cotg}\,x\,.\,dx, \tag{9}$$

$$\int \frac{e^{ax}}{\cos^2 x}\,dx = e^{ax}\,\mathrm{tang}\,x - a\int e^{ax}\,\mathrm{tang}\,x\,.\,dx, \tag{10}$$

których całki, kształtu: $\int e^{ax}\,\mathrm{tang}\,x\,.\,dx$ i $\int e^{ax}\,\mathrm{cotang}\,x\,.\,dx$, tworzą znowu nowy rodzaj nkcyj przestępnych.

8. **Całki, kształtu:** $\int e^{ax}\,\mathrm{tang}^m x\,.\,dx$ i $\int e^{ax}\,\mathrm{cotg}^m x\,.\,dx$, w których wykładnik m jest bą całkowitą, dodatnią, dadzą się sprowadzić do całek, kształtu:

$$\int e^{ax}\,\mathrm{tang}\,x\,.\,dx \quad \text{i} \quad \int e^{ax}\,\mathrm{cotg}\,x\,.\,dx,$$

sposób następujący:

Połóżmy: $\mathrm{tang}^m x = \mathrm{tang}^{m-2}x(1+\mathrm{tang}^2 x) - \mathrm{tang}^{m-2}x$, natenczas, otrzymujemy:

$$\mathrm{tang}^m x = \mathrm{tang}^{m-2}x\,.\,\frac{1}{\cos^2 x} - \mathrm{tang}^{m-2}x,$$

li:

$$\mathrm{tang}^m x = \frac{1}{m-1}\,\frac{d\,\mathrm{tang}^{m-1}x}{dx} - \mathrm{tang}^{m-2}x,$$

tem:

$$\int e^{ax}\,\mathrm{tang}^m x\,.\,dx = \frac{1}{m-1}\int e^{ax}\,.\,d(\mathrm{tang}^{m-1}x) - \int e^{ax}\,\mathrm{tang}^{m-2}x\,.\,dx,$$

e, na podstawie metody całkowania przez części:

$$\int e^{ax}\,.\,d(\mathrm{tang}^{m-1}x) = e^{ax}\,\mathrm{tang}^{m-1}x - a\int e^{ax}\,\mathrm{tang}^{m-1}x\,.\,dx,$$

nto, otrzymujemy ostatecznie wzór:

$$\mathrm{tang}^m x\,.\,dx = \frac{1}{m-1}e^{ax}.\,\mathrm{tang}^{m-1}x - \frac{a}{m-1}\int e^{ax}\,\mathrm{tang}^{m-1}x\,.\,dx - \int e^{ax}\,\mathrm{tang}^{m-2}x\,.\,dx, \tag{11}$$

podobnie, drugi wzór w postaci:

$$\mathrm{cotg}^m x\,.\,dx = -\frac{1}{m-1}e^{ax}.\mathrm{cotg}^{m-1}x + \frac{a}{m-1}\int e^{ax}\,\mathrm{cotg}^{m-1}x\,.\,dx - \int e^{ax}\,\mathrm{cotg}^{m-2}x\,.\,dx, \tag{12}$$

wzory przydatne, gdy $m > 1$.

9. Uwagi o całkowaniu funkcyj złożonych, sprowadzającem się do całkowania funkcyj wymiernych. Jeżeli całka funkcyi, złożonej z funkcyi przestępnej $f(x)$, da się za pomocą podstawienia $f(x)=z$, sprowadzić do całki funkcyi, wymiernej ze względu na nową zmienną z, w postaci: $\int R(z).dz$, natenczas, rozkładając funkcyę wymierną $R(z)$ na funkcyę całkowitą: $G(z)$ i ułamki częściowe, kształtu: $\frac{A}{z-a}$, względnie $\frac{A}{(z-a)^r}$, otrzymujemy całki częściowe kształtu: $\int z^n dz, \int\frac{dz}{z-a}, \int\frac{dz}{(z-a)^r}$, którym odpowiadają całki funkcyj przestępnych kształtu:

$$\int f(x)^n f'(x)\,dx=\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+C,\ \int\frac{f'(x)\,dx}{f(x)-a}=\log[f(x)-a]+C,$$

$$\int\frac{f'(x)\,dx}{[f(x)-a]^r}=-\frac{1}{(r-1)[f(x)-a]^{r-1}}+C. \tag{13}$$

10. Jeżeli podstawienie: $f(x)=z$, zastosujemy w całce kształtu: $\int R[f(x)].dx$, wprost do funkcyi $R[f(x)]$, stojącej pod znakiem całkowania, a wymiernej ze względu na funkcyę przestępną $f(x)$, a tak otrzymaną funkcyę $R(z)$, wymierną ze względu na nową zmienną z, rozłożymy na funkcyę całkowitą i ułamki częściowe, a więc na funkcye kształtu:

$$z^n,\ \frac{A_1}{z-a},\ \frac{A_r}{(z-a)^r},$$

natenczas otrzymamy analogiczne funkcye częściowe, odpowiadające funkcyi przestępnej $f(x)$, w postaci:

$$[f(x)]^n,\ \frac{A}{f(x)-a},\ \frac{A_r}{[f(x)-a]^r}.$$

Dana całka, kształtu: $\int R[f(x)].dx$ przedstawia się tedy, jako suma całek częściowych kształtu:

$$\int[f(x)]^n dx,\ \int\frac{dx}{f(x)-a},\ \int\frac{dx}{[f(x)-a]^r}.$$

Te całki częściowe mają w przypadkach: $f(x)=e^x$, $\sin x$, $\sin\text{hip}\,x$, kształt:

$$\int e^{nx}dx,\ \int\frac{dx}{e^x-a},\ \int\frac{dx}{(e^x-a)^r},$$

$$\int\sin^n x.dx,\ \int\frac{dx}{\sin x-a},\ \int\frac{dx}{(\sin x-a)^r}, \tag{14}$$

$$\int\sin\text{hip}^n x.dx,\ \int\frac{dx}{\sin\text{hip}\,x-a},\ \int\frac{dx}{(\sin\text{hip}\,x-a)^r},$$

i dadzą się wyznaczyć bezpośrednio na podstawie sposobów poznanych w poprzednich wykładach.

11. Uwaga o uogólnionej metodzie całkowania przez części. Metodę całkowania przez części, polegającą na wzorze: $\int u\,dv=uv-\int v\,du$, możemy odpowiednio uogólnić.

Utwórzmy, w tym celu, dla dwu funkcyj u i v jednej zmiennej x, wyrażenie Ω_n w postaci:

$$\Omega_n = u\frac{d^n v}{dx^n} - \frac{du}{dv}\cdot\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}} + \ldots + (-1)^r\frac{d^r u}{dx^r}\cdot\frac{d^{n-r}v}{dx^{n-r}} + \ldots + (-1)^n\frac{d^n u}{dx^n}\cdot v,$$

czyli, w formie symbolicznej:

$$\Omega_n = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + \ldots + (-1)^r u^{(r)} v^{(n-r)} + \ldots + (-1)^n u^{(n)} v, \tag{15}$$

natenczas, po różniczkowaniu tego wzoru, przekonamy się, że:

$$\frac{d\Omega_n}{dx} = u\frac{d^{n+1}v}{dx^{n+1}} + (-1)^n\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}v.$$

Wobec tego, otrzymujemy:

$$\Omega_n = \int u\frac{d^{n+1}v}{dx^{n+1}}dx + (-1)^n\int v\frac{d_{n+1}u}{dx^{n+1}}dx,$$

a stąd, wzór:

$$\int u\frac{d^{n+1}v}{dx^{n+1}}dx = \Omega_n - (-1)^n\int v\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}dx, \tag{16}$$

jako uogólniony wzór całkowania przez części.

Wzór ten sprowadza wyznaczanie całek, kształtu: $\int u \, . \, v^{(n+1)} . \, dx$ do wyznaczania całek, kształtu: $\int v \, . \, u^{(n+1)} . \, dx$, jest więc szczególnie wówczas przydatny, gdy w iloczynie $f(x) \, . \, \varphi(x)$ dwu funkcyj, występującym pod znakiem całkowym, jedna z tych funkcyj jest pochodną wyższego rzędu pewnej znanej funkcyj.

Jako taką funkcyę możemy zawsze uważać funkcyę wykładniczą, a więc czynnik, kształtu: e^{ax}, jest on bowiem n-tą pochodną funkcyi $v = \frac{e^{ax}}{a^n}$. Mając tedy wyznaczyć całkę, kształtu: $\int e^{ax} f(x) \, . \, dx$, połóżmy: $f(x) = u$, $\frac{e^{ax}}{a^{n+1}} = v$, a zatem:

$$\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} = f^{(n+1)}(x), \quad \frac{dv}{dx} = \frac{e^{ax}}{a^n}, \quad \frac{d^n v}{dx^n} = \frac{e^{ax}}{a}, \quad \frac{d^{n+1}v}{dx^{n+1}} = e^{ax},$$

natenczas, na podstawie uogólnionego wzoru całkowania przez części, otrzymujemy:

$$\int e^{ax} f(x)dx = f(x)\cdot\frac{e^{ax}}{a} - f'(x)\frac{e^{ax}}{a^2} + \ldots + (-1)^n f^{(n)}(x)\frac{e^{ax}}{a^{n+1}} - \frac{(-1)^n}{a^{n+1}}\int e^{ax} f^{(n+1)}(x) \, . \, dx,$$

czyli, wzór ogólny:

$$\int e^{ax} f(x)\, dx = \frac{e^{ax}}{a}\left\{f(x) - \frac{f'(x)}{a} + \ldots + \frac{(-1)^n f^{(n)}(x)}{a^n}\right\} - \frac{(-1)^n}{a^{n+1}}\int e^{ax} f^{(n+1)}(x) \, . \, dx, \tag{17}$$

który wyznaczanie całki kształtu: $\int e^{ax} f(x) \, . \, dx$ sprowadza do wyznaczania całki, kształtu: $\int e^{ax} f^{(n+1)} x \, . \, dx$. Jeżeli funkcya $f(x)$ jest funkcyą całkowitą: $G(x)$ stopnia n-go, natenczas $f^{(n+1)}(x) = 0$, wzór (17) otrzymuje tedy kształt:

$$\int e^{ax} G(x) \, . \, dx = \frac{e^{ax}}{a}\left\{G(x) - \frac{G'(x)}{a} + \ldots + \frac{(-1)^n G^{(n)}(x)}{a^n}\right\} + C.$$

Jeżeli $f(x) = \sin bx$, natenczas: $f'(x) = b\cos bx$, $f''(x) = -b^2 \sin bx$. Kładąc tedy we wzorze (17) $n = 1$, otrzymujemy:

$$\int e^{ax}\sin bx \, . \, dx = \frac{e^{ax}}{a}\left\{\sin bx - \frac{b}{a}\cos bx\right\} - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bx \, . \, dx,$$

a stąd:

$$(a^2+b^2)\int e^{ax}\sin bx\,.\,dx = e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)+C,$$

a podobnie:

$$(a^2+b^2)\int e^{ax}\cos bx\,.\,dx = e^{ax}[a\cos bx + b\sin bx]+C.$$

12. Całki funkcyj, złożonych z funkcyj wykładniczych, goniometrycznych i potęg zmiennej, kształtu: $\int F(x, e^x, \sin x, \ldots).dx$ dadzą się, na podstawie przekształceń funkcyi, stojącej pod znakiem całkowania, sprowadzi ostatecznie do całek, kształtu: $\int F(x, e^x)dx$, względnie: $\int F(x, \sin x)dx$, lu tym podobnych.

Wyznaczanie tych całek zależy od rodzaju funkcyj F i da się tylk w nielicznych przypadkach przeprowadzić w formie skończonej, przy pomoc znanych funkcyj, nawet w tym razie, gdy funkcya F jest funkcyą wymiern ze względu na zmienną x i elementarną funkcyę przestępną e^x, względni $\sin x$, lub t. p. Jako przykłady rozważymy takie całki, do których wyzna czania da się z korzyścią stosować metoda całkowania przez części.

13. Całki kształtu: $\int x^m e^{ax}\cos bx\,.\,dx$ i $\int x^m e^{ax}\sin bx\,.\,dx$, stanowią szczególn przypadek całek funkcyj, złożonych z funkcyj wykładniczych, goniometrycznych i potę zmiennej. Dla całek powyższego kształtu możemy wyprowadzić odpowiednie wzor redukcyjne.

W tym celu, połóżmy w pierwszej całce: $u = x^m$, $dv = e^{ax}\cos bx\,.\,dx$, zatem:

$$du = m x^{m-1}\,dx,\; v = \int e^{ax}\cos bx\,.\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2},$$

w drugiej zaś:

$$u = x^m,\; dv = e^{ax}\sin bx\,.\,dx,\text{ zatem: } du = mx^{m-1}\,dx,$$

$$v = \int e^{ax}\sin bx\,.\,dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2},$$

a otrzymamy odnośne wzory redukcyjne w postaciach:

$$\int x^m e^{ax}\cos bx\,.\,dx = \frac{x^m e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2} - \frac{m}{a^2+b^2}\int x^{m-1}e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)dx, \quad (1!$$

$$\int x^m e^{ax}\sin x\,.\,dx = \frac{x^m e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} - \frac{m}{a^2+b^2}\int x^{m-1}e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)\,dx. \quad (1!$$

Na podstawie tych wzorów możemy te całki, przy dodatnim całkowitym wykładniku m ostatecznie sprowadzić do całek kształtu: $\int e^{ax}\cos bx\,.\,dx$ i $\int e^{ax}\sin bx\,.\,dx$, a tem samem zawsze wyznaczyć.

Przy ujemnym wykładniku m prowadzą te całki do nowych funkcyj przestępnych

W tym celu pomnóżmy pierwszy z wzorów redukcyjnych przez a, drugi przez b i odejmijmy je od siebie, a następnie pierwszy pomnóżmy przez b, drugi przez a i dodajmy, a otrzymamy wzory:

$$\int x^m e^{ax}(a\cos bx - b\sin bx)\,dx = x^m e^{ax} - m\int x^{m-1}e^{ax}\cos bx\,dx,$$

$$\int x^m e^{ax}(b\cos bx + a\sin bx)\,dx = x^m e^{ax} - m\int x^{m-1}e^{ax}\sin bx\,dx,$$

z których wynika, że:

$$\int x^{m-1}e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{x^m e^{ax}}{m} - \frac{1}{m}\int x^m e^{ax}(a\cos bx - b\sin bx)\,dx,$$

$$\int x^{m-1}e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{x^m e^{ax}}{m} - \frac{1}{m}\int x^m e^{ax}(b\cos bx + a\sin bx)\,dx,$$

Podstawmy teraz $-m$, zamiast m, a otrzymamy:

$$\int\frac{e^{ax}\cos bx\,dx}{x^{m+1}} = -\frac{e^{ax}}{m x^m} + \frac{1}{m}\int\frac{e^{ax}(a\cos bx - b\sin bx)\,dx}{x^m},$$

$$\int\frac{e^{ax}\sin bx\,dx}{x^{m+1}} = -\frac{e^{ax}}{m x^m} + \frac{1}{m}\int\frac{e^{ax}(b\cos bx + a\sin bx)\,dx}{x^m},$$

a stąd:
$$\int\frac{e^{ax}\cos bx\,dx}{x^m}=-\frac{e^{ax}}{(m-1)x^{m-1}}+\frac{1}{m-1}\int\frac{e^{ax}(a\cos bx-b\sin bx)dx}{x^{m-1}},\qquad(20)$$
$$\int\frac{e^{ax}\sin bx\,dx}{x^m}=-\frac{e^{ax}}{(m-1)x^{m-1}}+\frac{1}{m-1}\int\frac{e^{ax}(b\cos bx+a\sin bx)dx}{x^{m-1}}.\qquad(21)$$

Wzory (20) i (21) prowadzą nas w końcu do nowych przestępnych funkcyj, określonych całkami, typu:
$$\int\frac{e^{ax}\sin bx\,dx}{x},\quad\int\frac{e^{ax}\cos bx\,dx}{x}.$$

Otrzymane całki możemy sprowadzić zresztą do logarytmu całkowego.

Mamy bowiem:
$$\int\frac{e^{ax}(\cos bx\pm i\sin bx)\,dx}{x}=\int\frac{e^{(a\pm bi)x}dx}{x}=\frac{Li(e^{(a\pm bi)x})}{a\pm bi},$$
skąd ostatecznie otrzymujemy:
$$\int\frac{e^{ax}\cos bx\,dx}{x}=\frac{1}{2}\left\{\frac{Li(e^{(a+bi)x})}{a+bi}+\frac{Li(e^{(a-bi)x})}{a-bi}\right\},$$
$$\int\frac{e^{ax}\sin bx\,dx}{x}=\frac{1}{2i}\left\{\frac{Li(e^{(a+bi)x})}{a+bi}-\frac{Li(e^{(a-bi)x})}{a-bi}\right\}.$$

14. Całki, kształtu: $\int(x-\alpha)^m e^{ax}\cos bx\,dx$, $\int(x-\alpha)^m e^{ax}\sin bx\,dx$ dadzą się do poprzedniego rodzaju sprowadzić za pomocą podstawienia: $x-\alpha=z$, $x=z+\alpha$.

Otrzymujemy bowiem:
$$\int(x-\alpha)^m e^{ax}\cos bx\,dx=e^{a\alpha}\cos b\alpha\int z^m e^{az}\cos bz\,dz-e^{a\alpha}\sin b\alpha\int z^m e^{az}\sin bz\,dz,\qquad(22)$$
$$\int(x-\alpha)^m e^{ax}\sin bx\,dx=e^{a\alpha}\sin b\alpha\int z^m e^{az}\cos bz\,dz+e^{a\alpha}\cos b\alpha\int z^m e^{az}\sin bz\,dz.\qquad(23)$$

15. Całki, kształtu: $\int G(x)e^{ax}\cos bx\,.\,dx$ i $\int G(x)e^{ax}\sin bx\,.\,dx$, gdzie $G(x)$ jest funkcyą całkowitą, wymierną, są ogólniejszą postacią całek powyższych z dodatnim wykładnikiem m. Odnośne wzory redukcyjne otrzymamy, na podstawie metody całkowania przez części, kładąc w pierwszej całce: $u=G(x)e^{ax}$, $dv=\cos x\,.\,dx$, zatem:
$$du=a\,G(x)e^{ax}dx+e^{ax}G'(x)\,.\,dx,\quad v=\frac{1}{b}\sin bx,$$
w drugiej:
$$u=G(x)e^{ax},\quad dv=\sin bx\,dx,$$
a więc:
$$du=a\,G(x)e^{ax}dx+G'(x)e^{ax}dx,\quad v=-\frac{1}{b}\cos bx.$$

Otrzymamy tedy równania:
$$\int G(x)e^{ax}\cos bx\,.\,dx=\frac{1}{b}G(x)e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\int G(x)e^{ax}\sin bx\,.\,dx-\frac{1}{b}\int G'(x)e^{ax}\sin bx.dx,$$
$$\int G(x)e^{ax}\sin bx\,.\,dx=-\frac{1}{b}G(x)e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\int G(x)e^{ax}\cos bx\,.\,dx+\frac{1}{b}\int G'(x)e^{ax}\cos bx.dx,$$
z których wynikają wzory redukcyjne dla dwu szukanych całek w postaci:
$$\int G(x)e^{ax}\cos bx\,.dx=\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}G(x)e^{ax}-\frac{a}{a^2+b^2}\int G'(x)e^{ax}\cos bx\,.\,dx-$$
$$-\frac{b}{a^2+b^2}\int G'(x)e^{ax}\sin bx\,.\,dx,\qquad(24)$$
$$\int G(x)e^{ax}\sin bx.\,dx=\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}G(x)e^{ax}+\frac{a}{a^2+b^2}\int G'(x)e^{ax}\cos bx.dx-$$
$$-\frac{a}{a^2+b^2}\int G'(x)e^{ax}\sin bx\,.\,dx,\qquad(25)$$

sprowadzające dane całki ostatecznie do całek kształtu:

$$\int e^{ax}\cos bx\,.\,dx \quad \text{i} \quad \int e^{ax}\,.\sin bx\,.\,dx.$$

16. Całki, kształtu: $\int R(x)e^{ax}\cos bx\,.\,dx$ **i** $\int R(x)e^{ax}\sin bx\,.\,dx$, gdzie $R(x)$ jest funkcyą ułamkową, wymierną, rozkładają się na sumę całek, typów

$$\int x^m e^{ax}\cos bx\;dx\,,\;\int x^m e^{ax}\sin bx\;dx\,,\;\int\frac{e^{ax}\cos bx\,dx}{(x-a)^m}\,,\;\int\frac{e^{ax}\sin bx\,dx}{(x-a)^m}\,,$$

i przedstawiają się w ten sposób w postaci sumy pewnej funkcyi algebraicznej, wymiernej, ze względu na zmienne: x, e^{ax}, $\cos bx$, $\sin bx$, oraz skończonej ilości całek, kształtu: $\int\frac{e^{ax}\cos bx\,dx}{x-a}$, $\frac{e^{ax}\sin bx\,dx}{x-a}$, określających nowe funkcye przestępne. Do tego wyniku dojdziemy, rozkładając funkcyę $R(x)$ na część całkowitą: $G(x)$ i na sumę ułamków prostych, typu: $\frac{A_1}{x-a}$, $\frac{A_r}{(x-a)^r}$ stosując do pierwszej części całek wzory redukcyjne, podane w art. 15. str. 229., a w drugiej wzory redukcyjne, podane w art. 13. str. 228.

17. Całki, kształtu: $\int R(x,\, e^{a_1 x}, \ldots e^{a_n x},\, \sin b_1 x \ldots, \sin b_n x,\, \cos b_1 x, \ldots \cos b_n x)\,dx$, względnie całki, kształtu: $\int R(x,\, \sin\text{hip}\,a_1 x, \ldots, \sin\text{hip}\,a_n x\; \cos\text{hip}\,a_1 x, \ldots, \cos\text{hip}\,a_n x,\, \sin b_1 x, \ldots, \sin b_n x,\, \cos b_1 x, \ldots, \cos b_n x)\,dx$, w przypadku, gdy R jest funkcyą całkowitą, wymierną, ze względu na funkcye przestępne, w nawiasie podane, a ułamkową, co najwyżej, ze względu na zmienną x, dadzą się rozłożyć na sumę całek, typu:

$$\int R_1(x)\,e^{ax}\cos x\,dx\,,\;\int R_2(x)\,e^{ax}\sin bx\,dx\,,$$

co możemy uskutecznić drogą odpowiedniego przekształcenia funkcyi złożonej, występującej pod znakiem całkowym.

18. Całki funkcyj złożonych z funkcyj logarytmicznych i cyklometrycznych, względnie hiperbolometrycznych, dadzą się niekiedy sprowadzić do całek złożonych w sposób poprzednio rozważany, jeżeli użyjemy podstawień wprowadzających funkcye wykładnicze w miejsce funkcyj logarytmicznych funkcye goniometryczne w miejsce funkcyj cyklometrycznych, a funkcye hiperboliczne w miejsce funkcyj hiperbolometrycznych.

Mając n. p. wyznaczyć całkę kształtu: $\int e^{\operatorname{arc\,sin} x}dx$, podstawmy:

$$\operatorname{arc\,sin} x = z\,,\ \text{zatem}\ x=\sin z\,,\ dx=\cos z\,dz\,,$$

a otrzymamy:

$$\int e^{\operatorname{arc\,sin} x}\,dx = \int e^z\cos z\,dz\,,$$

a że na podstawie wzoru (2') mamy:

$$\int e^z\cos z\,dz = \frac{e^z(\sin z+\cos z)}{2}\,,$$

przeto otrzymujemy szukaną całkę w postaci:

$$\int e^{\operatorname{arc\,sin} x}\,dx = \frac{e^{\operatorname{arc\,sin} x}(x+\sqrt{1-x^2})}{2}+C. \qquad (26)$$

19. Uwagi o całkowaniu funkcyj mieszanych. Przypadki, w których całki funkcyj złożonych z funkcyj wykładniczych, względnie goniometrycznych i hiperbolicznych i funkcyj logarytmicznych, względnie cyklometrycznych i hiperbolometrycznych w połączeniu, lub bez połączenia z funkcyami

gebraicznemi dadzą się wyznaczyć za pomocą znanych funkcyj, są bardzo liczne.

Chcąc zbadać pod tym względem całkę, daną do wyznaczenia, należy dewszystkiem rozważyć, czy funkcya złożona, stojąca pod znakiem kowym, nie da się przekształcić na funkcye prostsze, a w szczególności łożyć na części, do którychby należało zastosować, bądź to metodę podwienia, któraby całkowanie sprowadziła do całek zasadniczych, względnie całkowania funkcyj wymiernych, bądź to metodę całkowania przez ści, któraby daną całkę sprowadziła do całek możliwie najprostszego u, przedstawiających ewentualnie nowy rodzaj funkcyj przestępnych.

20. Przykłady. 1) Wyznaczyć całkę, kształtu:

$$\int \frac{\cos(\log x) + x\cos x \,.\, \log x}{x} dx = J.$$

Rozkładając funkcyę, stojącą pod znakiem całkowania na dodajniki, otrzymujemy:

$$J = \int \frac{\cos(\log x)}{x} dx + \int \cos x \,.\, \log x \,.\, dx.$$

Pierwsza z tych całek sprowadza się, wskutek podstawienia: $\log x = z$, $\frac{dx}{x} = dz$, do ci:

$$\int \frac{\cos(\log x)}{x} dx = \int \cos z \,.\, dz = \sin z = \sin(\log x),$$

drugiej możemy tylko zastosować metodę całkowania przez części.

Kładąc, mianowicie:

$$\log x = u, \quad \cos x . dx = dv, \quad \text{a zatem: } du = \frac{dx}{x}, \quad v = \sin x,$$

ymujemy:

$$\int \cos x \,.\, \log x \,.\, dx = \sin x \,.\, \log x - \int \frac{\sin x}{x} dx,$$

: $\int \frac{\sin x}{x} dx = Si(x)$ jest nową funkcyą przestępną (sinusem całkowym).

Otrzymujemy zatem:

$$\int \frac{\cos(\log x) + x\cos x \log x}{x} dx = \sin(\log x) + \sin x \,.\, \log x - Si(x) + C.$$

2) Wyznaczyć całkę, kształtu:

$$\int \cos(a_1 x + b_1)\cos(a_2 x + b_2)\,dx.$$

Przekształcając funkcyę, stojącą pod znakiem całkowym w sposób następujący:

$$\cos(a_1 x + b_1)\cos(a_2 x + b_2) = \frac{1}{2}\cos[(a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)] + \frac{1}{2}\cos[(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)],$$

zymujemy daną całkę, w postaci:

$$\int \cos(a_1 x + b_1)\cos(a_2 x + b_2)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos[(a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)]\,dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int \cos[(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)]\,dx,$$

tem dostajemy wzór:

$$\int \cos(a_1 x + b_1)\cos(a_2 x + b_2)\,dx = \frac{\sin[(a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)]}{2(a_1 + a_2)} + \frac{\sin[(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)]}{2(a_1 - a_2)}.$$

W podobny sposób możemy wyprowadzić analogiczne wzory przy ilukolwiek czynach tego kształtu, występujących pod znakiem całkowym.

3) Wyznaczyć całkę: $J = \int \frac{x^2\,dx}{(x\sin x + \cos x)^2}$.

Celem wyznaczenia tej całki, użyjmy podstawienia:

$x \sin x + \cos x = t$, skąd dostajemy: $x \cos x . dx = dt$,

a otrzymamy daną całkę w postaci:

$$J = \int \frac{x}{\cos x} \cdot \frac{dt}{t^2}.$$

Stosując do tak otrzymanej całki metodę całkowania przez części, połóżmy:

$$\frac{x}{\cos x} = u, \quad \text{a zatem:} \quad du = \frac{\cos x + x \sin x}{\cos^2 x} dx = \frac{t\,dx}{\cos^2 x},$$

$$\frac{dt}{t^2} = dv, \qquad v = -\frac{1}{t},$$

a otrzymamy:

$$J = -\frac{x}{\cos x} \cdot \frac{1}{t} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\frac{x}{\cos x (x \sin x + \cos x)} + \operatorname{tang} x,$$

czyli:
$$\int \frac{x^2 dx}{(x \sin x + \cos x)^2} = \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x + \cos x} + C.$$

Do tego wyniku możemy dojść wprost, używając podstawienia: $x - \operatorname{arc tang} x = z$, z którego otrzymujemy: $dx - \frac{dx}{1+x^2} = dz$, czyli: $\frac{x^2 dx}{1+x^2} = dz$, następnie:

$$\operatorname{tang} z = \frac{\operatorname{tang} x - x}{1 + x \operatorname{tang} x} = \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x + \cos x}, \text{ a stąd: } \frac{x \sin x + \cos x}{\cos z} = \frac{\sin x - x \cos x}{\sin z} = \sqrt{1+x^2},$$

zatem:
$$(x \sin x + \cos x)^2 = (1 + x^2) \cos^2 z.$$

Dana całka przedstawia się, wskutek tego podstawienia, w postaci:

$$\int \frac{x^2 dx}{(x \sin x + \cos x)^2} = \int \frac{(1+x^2) dz}{(1+x^2) \cos^2 z} = \int \frac{dz}{\cos^2 z} = \operatorname{tang} z,$$

zatem, jak powyżej, otrzymujemy:

$$\int \frac{x^2 dx}{(x \sin x + \cos x)^2} = \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x + \cos x} + C.$$

21. Metoda różniczkowania pod znakiem całkowym. Niech będzie daną całka w postaci: $\int \varphi(x, a) dx$, gdzie a jest dowolną stałą, od zmiennej x niezależną. Funkcya, tej całce odpowiadająca, będzie zarówno funkcyą zmiennej x, jakoteż funkcyą stałej dowolnej a. Połóżmy więc:

$$\int \varphi(x, a) dx = F(x, a),$$

tedy będzie widocznie:

$$\frac{dF(x, a)}{dx} = \varphi(x, a).$$

Uważając stałą dowolną a, jako zmienną, od x niezależną, zróżniczkujmy ostatnie równanie, ze względu na a, a otrzymamy równanie:

$$\frac{d^2 F(x, a)}{da\,dx} = \frac{d\varphi(x, a)}{da},$$

które możemy napisać także w postaci:

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{dF(x, a)}{da}\right\} = \frac{d\varphi(x, a)}{da},$$

z której wypływa, że:

$$\frac{dF(x, a)}{da} = \int \frac{d\varphi(x, a)}{da} . dx,$$

a że:
$$F(x, a) = \int \varphi(x, a) dx,$$

przeto, otrzymujemy równanie:

$$\frac{d}{d\alpha}\left\{\int \varphi(x, \alpha)\, dx\right\} = \int \frac{d\varphi(x, \alpha)}{d\alpha}\, dx, \tag{27}$$

t. z. Mając zróżniczkować daną całkę, ze względu na pewną zmienną, znajdującą się pod znakiem całkowania, a od zmiennej całkowania niezależną, możemy wprost różniczkować funkcyę, stojącą pod znakiem całkowania.

Na tej podstawie, otrzymamy z wzoru:

$$F(x, \alpha) = \int \varphi(x, \alpha)\, dx,$$

wskutek n-krotnego różniczkowania tej funkcyi, ze względu na zmienną α, wzór ogólny:

$$\frac{d^n F(x, \alpha)}{d\alpha^n} = \int \frac{d^n \varphi(x, \alpha)}{d\alpha^n}\, dx. \tag{28}$$

na mocy którego, możemy z danej całki, zawierającej pod znakiem całkowania dowolną, stałą, wyprowadzić dowolną ilość nowych całek.

22. Zastosowania:

1) Z całki zasadniczej: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, w której uważamy wykładnik n jako stałą dowolną, na podstawie prawidła różniczkowania tej całki, ze względu na parametr n, otrzymamy całkę, kształtu:

$$\int x^n \log x \,.\, dx = \frac{d}{dn}\left\{\frac{x^{n+1}}{n+1}\right\} = \frac{(n+1)\,x^{n+1}\log x - x^{n+1}}{(n+1)^2} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\left\{(n+1)\log x - 1\right\} + C,$$

ogólnie, dla całkowitego, dodatniego wykładnika m, całkę:

$$\int x^n (\log x)^m dx = \frac{d^m}{dn^m}\left\{\frac{x^{n+1}}{n+1}\right\} + C. \tag{29}$$

2) Z całki zasadniczej: $\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}$, otrzymujemy tą drogą całkę:

$$\int x e^{ax} dx = \frac{d}{da}\left\{\frac{e^{ax}}{a}\right\} = \frac{axe^{ax} - e^{ax}}{a^2} = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1) + C,$$

ogólnie, dla całkowitego, dodatniego wykładnika n, całkę

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{d^n}{da^n}\left\{\frac{e^{ax}}{a}\right\} + C. \tag{30}$$

3) Z całek, kształtu:

$$\int e^{ax}\cos bx \,.\, dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2}, \quad \int e^{ax}\sin bx \,.\, dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2},$$

różniczkowanych n-krotnie podług parametru a dostajemy całki, kształtu:

$$\int x^n e^{ax}\cos bx \,.\, dx = \frac{d^n}{da^n}\left\{\frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2}\right\} + C,$$

$$\int x^n e^{ax}\sin bx \,.\, dx = \frac{d^n}{da^n}\left\{\frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}\right\} + C. \tag{31}$$

4) Z całki, kształtu:

$$\int [f(x)]^n \psi(x)\, dx = F(x, n),$$

otrzymujemy, na podstawie m-krotnego różniczkowania, wzór:

$$\int [f(x)]^n [\log f(x)]^m \psi(x)\, dx = \frac{d^m}{dn^m}\{F(x, n)\}, \tag{32}$$

a stąd, dla $n=0$, względnie, dla $n=r$, całki:

$$\int \log [f(x)]^m . \psi(x)\, dx = \left[\frac{d^m}{dn^m}\left\{F(x,\, n)\right\}\right]_{n=0},$$

$$\int [f(x)]^r . \log [f(x)]^m . \psi(x) . dx = \left[\frac{d^m}{dn^m}\left\{F(x,\, n)\right\}\right]_{n=r}.$$

Oznaczmy ogólnie przez $G(x)$ funkcyę całkowitą, wymierną, m-go stopnia

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m,$$

a przez: $G\left(\frac{d}{dn}(y)\right)$ wyrażenie, kształtu:

$$G\left(\frac{d}{dn}(y)\right) = a_0\, y + a_1 \frac{dy}{dn} + a_2 \frac{d^2 y}{dn^2} + \ldots + a_m \frac{d^m y}{dn^m},$$

natenczas, na podstawie wzoru (32), otrzymujemy wzór ogólny:

$$\int [f(x)]^n\, G\,[\log f(x)]\, \psi(x)\, dx = G\left(\frac{d}{dn}\{F(x,\, n)\}\right),$$

z którego wypływają wzory szczególne:

$$\int G[\log f(x)] . \psi(x)\, dx = \left[G\left(\frac{d}{dn}\{F(x,\, n)\}\right)\right]_{n=0},$$

$$\int [f(x)]^r\, G\,[\log f(x)] . \psi(x)\, dx = \left[G\left(\frac{d}{dn}\{F(x, n)\}\right)\right]_{n=r}.$$

Ćwiczenia XIV.

1) $$\int e^{ax} \sin mx \cos nx . dx = \frac{e^{ax}}{2}\, \frac{a \sin (m+n)\, x - (m+n) \cos (m+n)\, x}{a^2 + (m+n)^2} + \frac{e^{ax}}{2}\, \frac{a \sin (m-n)\, x - (m-n) \cos (m-n)\, x}{a^2 + (m-n)^2}.$$

2) $$\int e^{-x} \cos^3 x . dx = \frac{1}{40} e^{-x} (3 \sin 3x - \cos 3x) + \frac{3}{8} e^{-x} (\sin x - \cos x) + C.$$

3) $$\int e^{3x} \sin^2 x . dx = \frac{1}{13} e^{3x} (3 \sin x - 2 \cos x) \sin x + \frac{2}{39} e^{3x} + C.$$

4) $$\int e^{4x} \cos^2 x . dx = \frac{1}{10} e^{4x} (\sin x + 2 \cos x) \cos x + \frac{1}{40} e^{4x} + C.$$

5) $$\int e^{2x} \sin^3 x . dx = \frac{1}{13} e^{2x} (2 \sin x - 3 \cos x) \sin^2 x + \frac{6}{65} e^{2x} (2 \sin x - \cos x) + C.$$

6) $$\int e^{6x} \cos^3 x . dx = \frac{1}{15} e^{6x} (\sin x + 2 \cos x) \cos^2 x + \frac{2}{555} e^{6x} (\sin x + 6 \cos x) + C.$$

7) $$\int f(x) . e^{ax} . dx = \frac{e^{ax}}{a}\left[f(x) - \frac{f'(x)}{a} + \ldots + (-1)^n \frac{f^{(n)}(x)}{a^n} + \ldots\right].$$

8) *a)* $$\int f(x) . \cos ax . dx = \frac{\sin ax}{a}\left[f(x) - \frac{f''(x)}{a^2} + \frac{f^{(IV)}(x)}{a^4} - \ldots\right] + \frac{\cos ax}{a}\left[\frac{f'(x)}{a} - \frac{f'''(x)}{a^3} + \frac{f^{(V)}(x)}{a^5} - \ldots\right].$$

b) $$\int f(x) . \sin ax . dx = \frac{\sin ax}{a}\left[\frac{f'(x)}{a} - \frac{f'''(x)}{a^3} + \frac{f^{(V)}(x)}{a^5} - \ldots\right] - \frac{\cos ax}{a}\left[f(x) - \frac{f''(x)}{a^2} + \frac{f^{(IV)}(x)}{a^4} - \ldots\right].$$

9) a) $\int f(x)\cos\text{hip}\, ax\, dx = \frac{\sin\text{hip}\, ax}{a}\left[f(x) + \frac{f''(x)}{a^2} + \frac{f^{(IV)}(x)}{a^4} + \dots\right] -$

$- \frac{\cos\text{hip}\, ax}{a}\left[\frac{f'(x)}{a} + \frac{f'''(x)}{a^3} + \frac{f^{(V)}(x)}{a^5} + \dots\right].$

b) $\int f(x)\sin\text{hip}\, ax\, dx = -\frac{\sin\text{hip}\, ax}{a}\left[\frac{f'(x)}{a} + \frac{f'''(x)}{a^3} + \frac{f^{(V)}(x)}{a^5} + \dots\right] +$

$+ \frac{\cos\text{hip}\, ax}{a}\left[f(x) + \frac{f''(x)}{a^2} + \frac{f^{(IV)}(x)}{a^4} + \dots\right].$

10) $\int x \arcsin x \,.\, dx = \frac{1}{2}x^2 \arcsin x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\arcsin x + C.$

11) $\int x^2 \arcsin x \,.\, dx = \frac{1}{3}x^3 \arcsin x + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}\right)\sqrt{1-x^2} + C.$

12) $\int x^3 \arcsin x \,.\, dx = \frac{1}{4}x^4 \arcsin x + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{1.3}{2.4}x\right)\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1.3}{2.4}\arcsin x + C.$

13) $\int (\arcsin x)^2 dx = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2.1.x + C.$

14) $\int (\arcsin x)^3 dx = x(\arcsin x)^3 + 3\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^2 - 3.2.x \arcsin x -$

$- 3.2.1\sqrt{1-x^2} + C.$

15) $\int \frac{x e^{\text{arc tang}\, x} dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{x-1}{2}\cdot\frac{e^{\text{arc tang}\, x}}{(1+x^2)^{1/2}} + C.$

16) $\int \frac{\text{arc cotg}\, x \,.\, dx}{x^2(1+x^2)} = \frac{(\text{arc cotg}\, x)^2}{2} - \frac{\text{arc cotg}\, x}{x} - \log\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$

17) $\int \frac{\log x \,.\, dx}{x^2} = -\frac{\log x + 1}{x} + C.$ 18) $\int \frac{\log x \,.\, dx}{2\sqrt[4]{x^3}} = 2(\log x - 4)\sqrt[4]{x} + C.$

19) $\int \frac{\log x \,.\, dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3(\log x - 3)\sqrt[3]{x} + C.$

20) $\int \frac{dx}{x\log x \,.\, \log(\log x)} = \log[\log(\log x)] + C.$

21) $\int \frac{\log x}{(1-3x)^2}dx = \frac{\log x}{3(1-3x)} - \frac{1}{3}\log\frac{x}{1-3x} + C.$

22) $\int \frac{\log(\log x)}{x}dx = \log x \,.\, \log(\log x) - \log x + C.$

23) $\int \sin^2 mx \,.\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2mx}{4m} + C.$

24) $\int \sin mx \sin nx \,.\, dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + C.$

25) $\int \sin(a_1 x + b_1) \,.\, \sin(a_2 x + b_2)\, dx = \frac{\sin[(a_1 - a_2)x + b_1 - b_2]}{2(a_1 - a_2)} -$

$- \frac{\sin[(a_1 + a_2)x + b_1 + b_2]}{2(a_1 + a_2)}.$

26) $\int \cos(a_1 x + b)\cos(a_2 x + b_2)\cos(a_3 x + b_3)\, dx = \frac{\sin[(a_1 + a_2 + a_3)x + (b_1 + b_2 + b_3)]}{4(a_1 + a_2 + a_3)} +$

$+ \frac{\sin[(a_1 + a_2 - a_3)x + (b_1 + b_2 - b_3)]}{4(a_1 + a_2 - a_3)} + \frac{\sin[(a_1 - a_2 + a_3)x + (b_1 - b_2 + b_3)]}{4(a_1 - a_2 + a_3)} +$

$+ \frac{\sin[(a_1 - a_2 - a_3)x + (b_1 - b_2 - b_3)]}{4(a_1 - a_2 - a_3)} + C.$

27) $\int \frac{a + b \operatorname{tang} x}{\alpha + \beta \operatorname{tang} x} dx = \frac{(a\alpha + b\beta) x}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{a\beta - b\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \log(\alpha \cos x + \beta \sin x) + C.$

28) $\int \frac{x^2 dx}{(x \sin x + \cos x)^2} = \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x + \cos x} + C.$

29) $\int \frac{x^2 dx}{(\sin x - x \cos x)^2} = C - \frac{x \sin x + \cos x}{\sin x - x \cos x} + C.$

30) $\int \frac{b x^2 dx}{[a(x \sin x + \cos x) + b(\sin x - x \cos x)]^2} =$

$= C - \frac{x \sin x + \cos x}{a(x \sin x + \cos x) + b(\sin x - x}$

31) $\int \frac{a dx}{[a + (ax + b) \operatorname{tang} x]^2} = \frac{\operatorname{tang} x}{a + (ax + b) \operatorname{tang} x} + C.$

Dowieść, że:

32) $\int x^{\alpha - 1} (\log x)^n dx = \frac{d^n}{d\alpha^n} \left\{ \frac{x^\alpha}{\alpha} \right\} + C.$

33) $\int x^n e^{-\alpha x} dx = (-1)^{n+1} \frac{d^n}{d\alpha^n} \left\{ \frac{e^{-\alpha x}}{a} \right\} + C.$

34) $\int \frac{dx}{(x^2 + \alpha)^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{d\alpha^n} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{\sqrt{\alpha}} \right\} + C.$

35) $\int x^n e^{\alpha x} \sin mx \, . \, dx = \frac{d^n}{d\alpha^n} \left\{ \frac{e^{\alpha x}(\alpha \sin mx - m \cos mx)}{\alpha^2 + m^2} \right\} + C.$

36) $\int x^n e^{\alpha x} \cos mx \, . \, dx = \frac{d^n}{d\alpha^n} \left\{ \frac{e^{\alpha x}(\alpha \cos mx + m \sin mx)}{\alpha^2 + m^2} \right\} + C.$

37) $\int x \sin \alpha x \, . \, dx = \frac{1}{\alpha^2} \sin \alpha x - \frac{x}{\alpha} \cos \alpha x + C.$

38) $\int x \cos \alpha x \, . dx = \frac{1}{\alpha^2} \cos \alpha x + \frac{x}{\alpha} \sin \alpha x + C.$

39) $\int x \sin\operatorname{hip} ax \, . \, dx = \frac{d}{da} \left\{ \frac{\sin\operatorname{hip} ax}{a} \right\} + C.$

40) $\int x \cos\operatorname{hip} ax \, . \, dx = \frac{d}{da} \left\{ \frac{\cos\operatorname{hip} a}{a} \right\} + C.$

41) $\int \frac{dx}{(x - \alpha)^n} = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\alpha^{n-1}} \left\{ \log(x - \alpha) \right\} + C.$

42) $\int x e^{ax} \sin(\alpha + \beta x) dx = \frac{d}{da} \left\{ \frac{e^{ax}[a \sin(\alpha + \beta x) - \beta \cos(\alpha + \beta x)]}{a^2 + \beta^2} \right\} + C.$

43) $\int x e^{ax} \cos(\alpha + \beta x) dx = \frac{d}{da} \left\{ \frac{e^{ax}[\beta \sin(\alpha + \beta x) + a \cos(\alpha + \beta x)]}{a^2 + \beta^2} \right\} + C.$

44) $\int \sin x \, . \sin(x + a) \cos(x + a) dx = \frac{d}{da} \left\{ \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right) \cos a - \frac{1}{4} \cos 2x \text{ si} \right.$

45) $\int \sin ax \sin(ax + b) \cos(ax + b) dx = \frac{d}{db} \left\{ \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} \right) \cos b - \frac{1}{4a} \cos 2ax \right.$

46) $\int x^{2m-1} \sin(a + bx^m) \, . \cos(a + bx^m) dx = -\frac{d}{db} \left\{ \frac{\cos(a + bx^m)}{mb} \right\} + C.$

47) $\int x^{m-1} \sin(a + bx^m) . \cos(a + bx^m) dx = -\frac{d}{da} \left\{ \frac{\cos(a + bx^m)}{mb} \right\} + C.$

48) $\int \frac{x dx}{(a^2 + x^2)^2} = -\frac{1}{2a} \frac{d \log \sqrt{a^2 + x^2}}{da} + C.$

49) $\int \frac{x \, dx}{(\sqrt{a^2 + x^2})^3} = -\frac{1}{a} \frac{d\sqrt{a^2 + x^2}}{da} + C.$

50) $\int \frac{\sin^2 x\, dx}{(a + b\cos x)^{3/2}} = -\frac{4}{b}\frac{d}{db}\left\{\frac{\sqrt{a + b\cos x}}{b}\right\} + C.$

51) $\int \frac{dx}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^2} = -\frac{1}{2\beta}\cdot\frac{d}{d\beta}\left[\frac{1}{\beta}\operatorname{arc\,tang}\frac{x-\alpha}{\beta}\right] + C.$

52) $\int \frac{(x-\alpha)\, dx}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^2} = \frac{1}{2\beta}\,\frac{d\operatorname{arc\,tang}\frac{x-\alpha}{\beta}}{d\alpha}.$

53) $\int \frac{x dx}{(a + bx)^{3/2}} = -4\cdot\frac{d}{db}\left\{\frac{\sqrt{a + bx}}{b}\right\} + C$ 54) $\int \frac{dx}{(a + bx)^{7/3}} = \frac{9}{4b}\,\frac{d\sqrt[3]{(a + bx)^4}}{da}.$

55) $\int \frac{x dx}{(a + bx)^{2/3}} = \frac{9}{4}\,\frac{d}{db}\left\{\frac{\sqrt[3]{(a + bx)^4}}{b}\right\} + C.$

56) $\int x^n \sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) dx = -\frac{d^n}{da^n}\left\{\frac{\cos ax}{a}\right\} + C.$

57) $\int x^n \cos\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) dx = \frac{d^n}{da^n}\left\{\frac{\sin ax}{a}\right\} + C.$

58) $\int \frac{\cos^r x\, dx}{(a + b\cos x)^m} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\,\frac{d^{m-1} F}{da^{m-r-1}\, db^r} + C,$ gdzie: $F = \int \frac{dx}{a + b\cos x}.$

59) $\int \frac{dx}{(a + bx + cx^2)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{d^{n-1}\Phi}{da^{n-1}} + C.$

60) $\int \frac{x^r dx}{(a + bx + cx^2)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{d^{n-1}\Phi}{da^{n-r-1}\, b^r} + C.$

Podać zarówno szczególne, jak i ogólne całki, jakie, za pomocą metody różniczkowania pod znakiem, całkowym dadzą się wyprowadzić z następujących całek:

61) $\int b e^{ax} dx = \frac{b}{a} e^{ax} + C.$ 62) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C.$

63) $\int a\sin(bx + c)\,.\,dx = -\frac{a}{b}\cos(bx + c) + C.$

64) $\int a\cos(bx + c)\,.\,dx = \frac{a}{b}\sin(bx + c) + C.$

65) $\int \sin^2 ax\,.\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} + C.$ 66) $\int \cos^2 ax\,.\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} + C.$

67) $\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tang} ax + C.$ 68) $\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{cotg}\frac{x}{a} + C.$

69) $\int \frac{dx}{\cos\operatorname{hip}^2 ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tang\,hip} ax + C.$ 70) $\int \frac{dx}{\sin\operatorname{hip}^2 ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{cotang\,hip} ax + C.$

71) $\int \sin ax\,.\cos bx\,.\,dx = -\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} + C.$

72) $\int \sin ax\,.\sin bx\,.\,dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + C.$

73) $\int \cos ax\,.\cos bx\,.\,dx = \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + C.$

74) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \log(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C = \operatorname{arg\,sin\,hip}\frac{x}{a} + C.$

75) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \log(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C = \operatorname{arg\,cos\,hip}\frac{x}{a} + C.$

76) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\log\frac{a + x}{a - x} + C = \frac{1}{a}\operatorname{arg\,tang\,hip}\frac{x}{a} + C.$

77) $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = \operatorname{arc\,sin}\frac{x - a}{a} + C.$ 78) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax - a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,sin}\frac{x - a}{x} + C.$

79) $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$

80) $\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{a^2+x^2})+C.$

81) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=-\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{x}+C.$

82) $\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{1}{a}\log\frac{x}{a+\sqrt{a^2+x^2}}+C.$

83) $\int\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}dx=\sqrt{a^2+x^2}-a\log\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}+C.$

84) $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx=\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}+C.$

85) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^n-a^2}}=\frac{2}{an}\operatorname{arc\,sec}\frac{\sqrt{x^n}}{a}+C.$ 86) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^n+a^2}}=\frac{1}{an}\log\frac{\sqrt{x^n+a^2}-a}{\sqrt{x^n+a^2}-a}+C.$

Rozwiązania XIV. Wskazówki: 1)—9). Przekształcenie i całkowanie przez części. 10)—14). Podstawienie: $\arcsin x=z$. 15) $\operatorname{arc\,tg} x=z$. 16) $\operatorname{arc\,cotg} x=z$. 17)—22) $\log x=z$. 23)—26) przekształcenie funkcyi. 27) Podstawienie: $\alpha\cos x+\beta\sin x=z$ 28)—31) $x-\operatorname{arc\,tang} x=z$. Patrz: Nouvelles Annales de Mathèmatiques. T. 7. 1888 str. 191. 32)—40) Metodą różniczkowania pod znakiem całkowym całek: $\int x^{\alpha-1}dx$, $\int e^{-\alpha x}dx$, $\int\frac{dx}{x^2+\alpha}$, $\int e^{\alpha x}\sin mx\,.\,dx$, $\int e^{\alpha x}\cos mx\,.\,dx$, $\int\cos\alpha\,dx$, $\int\sin\alpha x\,dx$, $\int\cos\operatorname{hip}\alpha x\,dx$, $\int\sin\operatorname{hip}\alpha x\,dx$, $\int e^{\alpha x}\sin(\alpha+\beta x)$. 41) $\int\frac{dx}{x-\alpha}$. 42) $\int e^{\alpha x}\sin(\alpha+\beta x)dx$. 43) $\int e^{\alpha x}\cos(\alpha+\beta x)dx$. 44) $\int\sin x\sin(x+\alpha)dx$. 45) $\int\sin\alpha x.\sin(\alpha x+b)\,dx$. 46)—47) $\int x^{m-1}\sin(a+bx^m)\,dx$. 48) $\int\frac{x\,dx}{a^2+x^2}$. 49) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$. 50) $\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{a+b\cos x}}$. 51)—52) $\int\frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$. 53) $\frac{dx}{\sqrt{a+bx}}$. 54)—55) $\int\sqrt[3]{a+bx}\,dx$. 56)—57) $\int\sin\alpha x\,dx$, $\int\cos\alpha x\,dx$. 59)—60) $\Phi=\int\frac{dx}{a+bx+cx^2}$. 61) Różn. podług a i b. 62) Podług a. 63)—64) Podług a, b i c. 65)—70) Podług a. 71)—73) Podług a i b. 74)—84) Podług a. 85)—86) Podług a, podług n, tudzież podług a i n.

Literatura. H. Laurent. Traité d'analyse. Tome III. Calcul integral. Paris 1888. Serret-Harnack. Lehrbuch der Integralrechnung mit Unterstützung von H. Liebmann und E. Zermelo, herausgegeben von Dr. G. Bohlmann. Leipzig 1899. Benjamin Williamson. An elementary treatise on the integral calculus. London. 1875.

Tematy do rozprawek naukowych.

1. Rozwinięcie całek, typu:

$$\int R(x)e^{ax}\cos bx\,dx,\quad \int R(x)e^{ax}\sin bx\,dx.$$

2. Rozwinięcie całek, typu:

$$\int R(x)\,e^{ax}\cos^k bx\sin^s bx\,.\,dx.$$

3. Rozwinięcie całek, typu:

$$\int R(x)\sin\operatorname{hip}^{\alpha} ax\cos\operatorname{hip}^{\beta} ax\sin^s bx\cos^k bx\,dx.$$

Wykład XV.

Całkowanie za pomocą szeregów.

1. Przedstawianie całki nieokreślonej danej funkcyi w postaci szeregu potęgowego. Główne zadanie rachunku całkowego polega na wyznaczaniu niewiadomej funkcyi $F(x)$, której pochodną $F'(x)$ jest dana funkcya $f(x)$.

Znając pochodną: $F'(x)=f'(x)$, niewiadomej funkcyi $F(x)$, możemy, za pomocą prawideł różniczkowania, wyznaczyć wszystkie pochodne wyższych rzędów: $F''(x)$, $F'''(x),\ldots$, $F^{(n)}(x)$, tejże niewiadomej funkcyi $F(x)$. Mianowicie, otrzymamy z danej pierwszej pochodnej: $F'(x)=y'=f(x)$, kolejno następne pochodne w postaci:

$$F''(x)=y''=f'(x),\quad F'''(x)=y'''=f''(x),\ldots,\quad F^{(n)}(x)=y^{(n)}=f^{(n-1)}(x).$$

Przyjąwszy tedy pewne miejsce: $x=a$, możemy wyznaczyć nie tylko wartość danej pierwszej pochodnej $F'(x)$, lecz także wartość wszystkich następnych pochodnych tejże niewiadomej funkcyi $F(x)$, w przyjętem miejscu $x=a$, w postaci:

$$F'(x)=y'_a=f(a),\quad F''(x)=y_a''=f'(a),\ldots,\quad F^{(n)}(a)=y^{(n)}=f^{(n-1)}(a).$$

Znając wartości wszystkich pochodnych niewiadomej funkcyi $F(x)$ w miejscu x, potrafilibyśmy już przedstawić wartość niewiadomej funkcyi $F(x)$ w postaci szeregu, uporządkowanego podług potęg dwumianu $(x-a)$, gdybyśmy znali jeszcze wartość $F(a)$ tej funkcyi $F(x)$ w miejscu $x=a$.

Niemając na wyznaczenie $F(a)$ żadnych danych, połóżmy $F(a)=C$, gdzie C wyobraża stałą dowolną, natenczas otrzymamy, według szeregu Taylora (Tom I, str. 514):

$$F(x)=F(a)+\frac{F'(a)}{1!}(x-a)+\frac{F''(x)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{F^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

niewiadomą funkcyę $F(x)$ w postaci:

$$F(x)=C+\frac{f(a)}{1!}(x-a)+\frac{f'(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

a że: $F(x)=\int f(x)\,dx$, zatem, otrzymujemy:

$$\int f(x).dx=C+\frac{f(a)}{1!}(x-a)+\frac{f'(a)}{2!}(x-u)^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots \quad (1)$$

wzór, podający całkę nieokreśloną danej funkcyi $f(x)$ w postaci szeregu potęgowego $\mathfrak{P}(x-a)$, z jedną stałą dowolną C.

Szeregowi temu odpowiada koło zbieżności o promieniu: $r=\lim\limits_{n=\infty}\frac{|nf^{(n-2)}(a)|}{|f^{(n-1)}(a)|}$.

Jeżeli miejscem tem, w którem z danej pierwszej pochodnej wyznaczymy wartości wszystkich następnych pochodnych, jest $x=0$, natenczas, otrzymamy, według szeregu Maclaurina (Tom I. str. 515.) szukaną całkę w postaci:

$$\int f(x).dx = C + \frac{f(o)}{1!}x + \frac{f'(o)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(o)}{n!}x^n + \ldots \qquad (2)$$

t. j. w postaci szeregu potęgowego, uporządkowanego według potęg zmiennej niezależnej x, bezwarunkowo zbieżnego w kole o promieniu: $r = \lim_{n=\infty} \left|\frac{nf^{(n-2)}(o)}{f^{(n-1)}(o)}\right|$.

Każdy z tych szeregów jest elementem szukanej funkcyi analitycznej, (Tom I., str. 556), przedstawiającej całkę nieokreśloną $\int f(x).dx$ danej funkcyi $f(x)$.

Danej funkcyi $f(x)$ odpowiada zatem zawsze pewna funkcya $F(x)$, jako jej całka nieokreślona, którą możemy przedstawić w postaci szeregu potęgowego, skoro tylko istnieje pewne miejsce $x=a$, w którem dana funkcya $f(x)$ i wszystkie jej pochodne otrzymują wartości skończone, t. z., skoro dana funkcya sama jest funkcyą analityczną.

Każdej funkcyi analitycznej odpowiada zatem nowa funkcya analityczna z pewną stałą dowolną C, jako jej całka nieokreślona, a dla tej nowej funkcyi możemy zawsze znaleźć szereg potęgowy, jako jej element.

2. Mając w ten sposób przedstawić całkę funkcyi: $f(x) = (1+x)^n$, otrzymujemy: $f(o)=1$, $f'(0)=n$, $f''(o) = n(n-1)$, $f^{(r)}(o) = n(n-1)\ldots(n-r+1)$, zatem szukaną całkę w postaci:

$$\int (1+x)^n dx = C + x + \binom{n}{1}\frac{x^2}{2} + \binom{n}{2}\frac{x^3}{3} + \ldots + \binom{n}{r-1}\frac{x^r}{r} + \ldots, \text{ gdzie } |x|<1,$$

a więc, w szczególności:

$$\int \frac{dx}{1+x} = C + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{r-1}\frac{x^r}{r} + \ldots, \text{ gdzie: } |x|<1,$$

$$\int \sqrt{1+x}.dx = C + x + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{x^4}{4} - \ldots +$$

$$+ (-1)^r \frac{1.1.3\ldots(2r-5)}{2.4.6\ldots(2r-2)}\frac{x^r}{r} + \ldots, \text{ gdzie: } |x|<1.$$

Dla funkcyi $f(x) = x^n$, mamy:

$$f(1)=1,\ f'(1)=n,\ f''(1)=n(n-1), \ldots, f^{(r)}(1) = n(n-1)\ldots(n-r+1),$$

zatem:

$$\int x^n dx = C + (x-1) + \binom{n}{1}\frac{(x-1)^2}{2} + \binom{n}{2}\frac{(x-1)^3}{3} + \ldots + \binom{n}{r-1}\frac{(x-1)^r}{r} + \ldots, \text{ gdzie } |x-1|<1.$$

Podobnie, znajdziemy:

$$\int e^x.dx = C + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

$$\int \sin x.dx = C - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^r\frac{x^{2r}}{(2r)!} + \ldots$$

$$\int \cos x.dx = C + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots - (-1)^r\frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!} + \ldots$$

3. Wyprowadzanie szeregów potęgowych danej całki za pomocą szeregów potęgowych funkcyi, stojącej pod znakiem całkowania. Szeregi potęgowe, odpowiadające całce danej funkcyi: $\int f(x)dx$, otrzymać możemy wprost, całkując wyrazy szeregów potęgowych, odpowiadających danej funkcyi $f(x)$.

Skoro bowiem:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\ldots$$

lędnie:

$$f(x)=f(o)+\frac{f'(o)}{1!}x+\frac{f''(o)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(o)}{(n-1)!}x^{n-1}+\ldots$$

czas, całkując wyraz za wyrazem, otrzymujemy:

$$)dx= C+f(a).x+\frac{f'(a)}{1!}\frac{(x-a)^2}{2}+\frac{f''(a)}{2!}\frac{(x-a)^3}{3}+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\frac{(x-a)^n}{n}+\ldots$$

lędnie:

$$\int f(x).dx=C+f(o).x+\frac{f'(o)}{1!}\frac{x^2}{2}+\frac{f''(o)}{2!}\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(o)}{(n-1)!}\frac{x^n}{n}+\ldots$$

, wzory:

$$.dx=C+\frac{f(a)}{1!}(x-a)+\frac{f'(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

$$\int f(x)\,dx=C+\frac{f(o)}{1!}x+\frac{f'(o)}{2!}x^2+\frac{f''(o)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(o)}{n!}x^n+\ldots$$

e z wzorami 1) i 2), powyżej otrzymanemi.

4. **Całki szeregów potęgowych i ich zakresy zbieżności.** Szereg potęgowy:

$$\mathfrak{P}(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \qquad (3)$$

, jak wiemy, (patrz T. I. str. 553), wewnątrz swego koła zbieżności, cyą ciągłą zmiennej x. Promień r tego koła, otrzymujemy z warunku warunkowej zbieżności tego szeregu:

$$\lim_{n=\infty}\frac{|a_n x^n|}{|a_{n-1}x^{n-1}|}<1,\ \text{czyli: } |x|<\lim_{n=\infty}\frac{|a_{n-1}|}{|a_n|},\ \text{w postaci: } r=\lim_{n=\infty}\frac{|a_{n-1}|}{|a_n|}.$$

Stosując do danego szeregu prawidło całkowania sumy, otrzymujemy y szereg potęgowy:

$$\mathfrak{P}_1(x)=\int\mathfrak{P}(x).dx=C+a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\ldots+\frac{a_{n-1}}{n}x^n+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\ldots \quad (4)$$

ry jest szeregiem bezwarunkowo i jednostajnie zbieżnym dla wartości nnej x, czyniących zadość nierówności:

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{n}{n+1}\frac{a_n}{a_{n-1}}.x\right|<1,\ \text{czyli: } |x|<\lim_{n=\infty}\left|\frac{n}{n+1}\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|,$$

więc:

$$|x|<\lim_{n=\infty}\frac{|a_{n-1}|}{|a_n|}.$$

Otrzymany szereg: $\int\mathfrak{P}(x).dx=\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{a_{r-1}}{r!}x^r$ ma więc koło zbieżności o promieniu:

$$\varrho=\lim_{n=\infty}\frac{|a_{n-1}|}{|a_n|},\ \text{czyli: } \varrho=r.$$

A zatem: Szereg $\int\mathfrak{P}(x)dx$, otrzymany przez całkowanie danego szeregu **potęgowego,** jest także szeregiem bezwarunkowo i jednostajnie zbieżnym **ten sam zakres** zbieżności, co dany szereg $\mathfrak{P}(x)$.

5. Funkcye, określone szeregami funkcyj elementarnych. Szereg funkcyj elementarnych $f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_n(x)+\dots$, nazywamy szeregiem bezwarunkowo zbieżnym dla pewne wartości zmiennej x, jeżeli, dla tej wartości zmiennej x, da się wyznaczyć taka wskazówka n, że, od niej począwszy, reszta: $R_n=f_n(x)+f_{n+1}(x)+\dots$, bezwzględnie wzięta, jest mniejsza od dowolnie przyjętej, dostatecznie małej liczby ε. Jeżeli ten warunek zachodzi w pewnym zakresie zbieżności od a do b, a reszta R_n (i wszystkie następne $R_{n+1},\dots$) jest, dla każdej wartości x w tym zakresie, przy tem samem n, mniejsza od ε, natenczas, powiadamy, że dany szereg funkcyj jest w tym zakresie szeregiem jednostajnie zbieżnym. Warunkiem jednostajnej zbieżności szeregu:

$$f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_n(x)+\dots$$

jest, w danym zakresie, zbieżność szeregu, utworzonego z liczebnie największych wartości jakie poszczególne wyrazy tego szeregu w tym zakresie otrzymują. Tak n. p. szereg $\frac{\cos x}{1!}-\frac{\cos 2x}{2!}+\frac{\cos 3x}{3!}-\frac{\cos 4x}{4!}+\dots$ jest, dla wszelkiej rzeczywistej wartości x, szeregiem jednostajnie zbieżnym, gdyż szereg, utworzony z bezwzględnie wziętych, liczebnie największych wartości poszczególnych wyrazów tego szeregu, przedstawiający się w postaci $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots$ jest szeregiem bezwarunkowo zbieżnym.

Szereg jednostajnie zbieżny, w pewnym zakresie od a do b, przedstawia w tym zakresie funkcyą ciągłą: $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_n(x)+\dots$

Kładąc, bowiem $f(x)=S_{n-1}(x)+R_n(x)$, gdzie $S_{n-1}(x)$ przedstawia sumę pierwszych $(n-1)$ wyrazów tego szeregu, a $R_n(x)$ jego resztę, otrzymujemy:

$$|f(x+\alpha)-f(x)|=|S_{n-1}(x+\alpha)-S_{n-1}(x)|+|R_n(x+\alpha)-R_n(x)|.$$

Z powodu jednostajnej zbieżności danego szeregu w zakresie od a do b, możemy n zawsze tak obrać, że będzie:

$$|R_n(x+\alpha)-R_n(x)|<\frac{2\varepsilon}{3},$$

gdzie ε jest dowolnie małą liczbą; z powodu ciągłości poszczególnych funkcyj: $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_n(x)$, ..., tego szeregu możemy, dalej, α tak dobrać, że będzie:

$$|S_{n-1}(x+\alpha)-S_{n-1}(x)|<\frac{1}{3}\varepsilon,$$

da się więc, dla każdego ε, takie α wyznaczyć, że będzie: $|f(x+\alpha)-f(x)|<\varepsilon$, co właśnie jest cechą ciągłości funkcyi $f(x)$, określonej sumą nieskończenie wielu funkcyj elementarnych, w postaci:

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_n(x)+\dots \qquad (5)$$

6. Pochodna szeregu funkcyj elementarnych. Utwórzmy teraz z danego szeregu: $f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_n(x)+\dots$ szereg funkcyj pochodnych poszczególnych funkcyj tego szeregu, t. j. szereg pochodnych:

$$f'_1(x)+f'_2(x)+\dots+f'_n(x)+\dots$$

to szereg ten może być w ogóle szeregiem zbieżnym tylko wówczas, gdy będzie:

$$\lim_{n=\infty} f'_n(x)=0.$$

Jeżeli ten szereg jest zarazem, w pewnym zakresie zbieżności od a do b, szeregiem jednostajnie zbieżnym, natenczas przedstawia on w tym zakresie nową funkcyę $\varphi(x)$, która jest pochodną funkcyi $f(x)$.

Funkcya pochodna $f'(x)$ funkcyi: $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_n(x)+\dots$, wyraża się bowiem, jako granica stosunku różnicowego:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{f_1(x+\Delta x)-f_1(x)}{\Delta x}+\dots+\frac{f_{n-1}(x+\Delta x)-f_{n-1}(x)}{\Delta x}+\frac{R_n(x+\Delta x)-R_n(x)}{\Delta x},$$

jeżeli zatem szereg pochodny: $f'_1(x)+f'_2(x)+\dots+f'_n(x)+\dots$ jest jednostajnie zbieżny, natenczas można takie n wyznaczyć, że reszta: $\frac{R_n(x+\Delta x)-R_n(x)}{\Delta x}$, będzie mniejszą od dowolnie małej liczby ε, otrzymujemy zatem, wówczas dla: $\Delta x=0$, równość:

$$f'(x)=f_1'(x)+f'_2(x)+\dots+f'_n(x)+\dots \qquad (6)$$

A zatem: Jeżeli szereg, utworzony z pochodnych poszczególnych funkcyj danego szeregu jednostajnie zbieżnego, jest w swym zakresie zbieżności również szeregiem jedno-

...ie zbieżnym, natenczas przedstawia on w tym zakresie pochodną funkcyi, danym ...iem określonej.

7. **Całka szeregu funkcyj elementarnych.** Utwórzmy z szeregu:

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)+...$$

...ajnie zbieżnego w pewnym zakresie zbieżności, szereg funkcyj całkowych:

$$\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx+...+\int f_n(x)\,dx+...$$

...ważymy najpierw, że pochodną tego szeregu jest funkcya:

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)+...$$

...na szeregiem jednostajnie zbieżnym w swym zakresie zbieżności, z czego wynika ..., że, powyżej utworzony szereg funkcyj całkowych jest całką danej funkcyi. Możemy ...atem w danych warunkach napisać:

$$\int f(x)dx=C+\int f_1(x)dx+\int f_2(x)\,dx+...+\int f_n(x)\,dx+... \qquad (7)$$

A zatem: Szereg całek funkcyj elementarnych, utworzony z danego szeregu funkcyj ...tarnych, jednostajnie zbieżnego w pewnym zakresie zbieżności, przedstawia w tym ...ie całkę funkcyi, danym szeregiem określonej.

8. **Szereg utworzony z potęg funkcyi elementarnej** $f(x)$ w postaci:

$$a_0+a_1f(x)+a_2[f(x)]^2+...+a_n[f(x)]^n+...$$

...szczególnym przypadkiem szeregu, utworzonego z nieskończenie wielu różnych funkcyj ...tarnych i sprowadza się, wskutek podstawienia: $f(x)=z$, do zwykłego szeregu ...owego:

$$\mathfrak{P}(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+...+a_nz^n+...$$

Do niego stosują się zatem następujące twierdzenia:

1) Szereg: $a_0+a_1f(x)+a_2[f(x)]^2+...+a_n[f(x)]^n+...$ przedstawia w swym zakresie ...ości pewną funkcyą ciągłą.

2) Szereg pochodny: $a_1f'(x)+2a_2f(x).f'(x)+3a_3[f(x)]^2f'(x)+...+na_n[f(x)]^{n-1}f'(x)+...$ ...możemy także napisać w postaci:

$$f'(x)\{a_1+2a_2f(x)+3a_3[f(x)]^2+...+na_n[f(x)]^{n-1}+...\},$$

...stawia, w swym zakresie zbieżności, również funkcyę ciągłą, która jest pochodną ...yi, pierwotnym szeregiem określonej.

3) Szereg całkowy: $C+a_0x+a_1\int f(x)dx+a_2\int[f(x)]^2dx+...+a_n\int[f(x)]^ndx+...$, ...stawia, w swym zakresie zbieżności, całkę funkcyi, danym szeregiem określonej.

9. **Całkowanie funkcyj, określonych szeregami potęgowymi.** Na pod... powyższych wywodów, możemy do danych szeregów potęgowych, ...ątrz ich zakresu zbieżności, stosować zawsze prawidło całkowania, ...zymamy nowy szereg, który jest całką danego szeregu.

Tym sposobem możemy wyznaczać także całki takich funkcyj anali...ych, które są określone wyłącznie zapomocą swych szeregów potęgowych.

Jeżeli, mianowicie, dana funkcya jest określona szeregiem:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+..., \qquad (8)$$

...arunkowo zbieżnym dla $|x|<\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|$, względnie, szeregiem:

$$f(x)=b_0+b_1(x-a)+b_2(x-a)^2+...+b_n(x-a)^n+... \qquad (9)$$

...arunkowo zbieżnym dla $|x-a|<\left|\frac{b_{n-1}}{b_n}\right|$, natenczas jej całka przedstawia ...w postaci szeregu:

$$\int f(x)\,dx=C+a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+...+\frac{a_{n-1}}{n}x^n+... \qquad (8')$$

...lnie, w postaci szeregu:

$$\int f(x)\,dx=C+b_0(x-a)+\frac{b_1}{2}(x-a)^2+\frac{b_2}{3}(x-a)^3+...+\frac{b_{n-1}}{n}(x-a)^n+... \qquad (9')$$

które są szeregami bezwarunkowo i jednostajnie zbieżnymi w tym samym zakresie, co ich szeregi pochodne.

10. Zastosowanie prawidła całkowania szeregów potęgowych do rozwijania funkcyj na szeregi. Prawidło całkowania szeregów potęgowych, możemy przedewszystkiem zastosować do tego, aby wyprowadzić rozwinięcia funkcyj, występujących, jako całki danych funkcyj.

Poznamy to na przykładach.

1) Wiemy, że: $\int \frac{dx}{1+x} = \log(1+x) + C.$

Z szeregu potęgowego:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots,$$

bezwarunkowo zbieżnego, dla $|x| < 1$, otrzymujemy, po scałkowaniu szereg

$$\int \frac{dx}{1+x} = C + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Przeniósłszy stałe dowolne na jedną stronę, otrzymujemy zatem:

$$\log(1+x) = C + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Ponieważ $\log 1 = 0$, a z powyższej równości, dla $x = 0$, otrzymujemy $\log 1 = C$, zatem jest $C = 0$, a więc, otrzymujemy znany szereg logarytmiczny

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

Na podstawie dwumianu Newtona:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots, \text{ gdzie } |x| \leqq 1,$$

otrzymujemy szereg całkowy:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = C + x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots$$

zatem:

$$\arcsin x = C + x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{x^7}{7} + \ldots$$

stąd, gdy $\arcsin x = 0$, wypada, dla $x = 0$, zarazem $C = 0$, a więc, znany szereg

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{x^7}{7} + \ldots$$

ważny, dla $|x| \leqq 1$.

3) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tang} x + C.$

Z szeregu potęgowego:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots, \text{ ważnego, gdy } |x| < 1,$$

wypływa szereg całkowy:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

a stąd: $$\operatorname{arc\,tang} x = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$
gdzie $C=0$, skoro $\operatorname{arc\,tang} x = 0$, zatem szereg:
$$\operatorname{arc\,tang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots, \text{ ważny, dla } |x| < 1,$$

4) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log(x + \sqrt{1+x^2}) + C,$$
$$= \operatorname{arg\,sin\,hip} x + C.$$

Z szeregu:
$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots, \text{ gdzie } |x| < 1,$$
otrzymujemy nowy szereg:
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = C + x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots$$
a stąd, rozwinięcie:
$$\log(x + \sqrt{1+x^2}) = \operatorname{arg\,sin\,hip} x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots$$
ważne dla $x < 1$.

5) $$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} + C = \operatorname{arc\,tang\,hip} x + C.$$

Z szeregu: $$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots$$
otrzymujemy nowy szereg:
$$\int \frac{dx}{1-x^2} = C + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots$$
a stąd rozwinięcie:
$$\operatorname{arg\,tang\,hip} x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots, \text{ ważne, gdy } |x| < 1.$$

11. Całki funkcyj, nie dające się wyrazić przez funkcye elementarne, Całkowanie zapomocą szeregów potęgowych, ma dla szeregów ważne zastosowanie przy całkowaniu tych funkcyj, których całki nie dadzą się wyrazić przez znane funkcye elementarne. W tym celu, należy funkcyę, stojącą pod znakiem całkowania, lub przynajmniej jeden z jej czynników rozwinąć na szereg bezwarunkowo i jednostajnie zbieżny, w szczególności, na szereg potęgowy, a następne wyrazy otrzymanego szeregu poddać całkowaniu.

Przejdźmy po kolei główniejsze całki, poznane w poprzednich wykładach, nie dające się wyrazić przez znane funkcye elementarne.

12. Całki dwumienne Eulera. Między całkami funkcyj algebraicznych wymiernych, nie natrafiliśmy na takie całki, gdyż całki wszelkich funkcyj wymiernych dadzą się zawsze wyrazić przez inne funkcye wymierne i przez funkcye logarytmiczne, względnie cyklometryczne.

Między całkami funkcyj niewymiernych, napotkaliśmy, przedewszystkiem, całki dwumienne: $\int x^m (ax^n + b)^p dx$, które, ostatecznie, sprowadzają się do postaci: $J_{p,q} = \int x^p (1+x)^q dx$, gdzie p i q są liczbami, między $-\frac{1}{2}$ i $+\frac{1}{2}$ zawartemi, dającej się wyrazić przez znane funkcye tylko w przypadku, gdy suma wykładników: $p+q$, jest liczbą całkowitą, a prowadzącej w innych przypadkach do nowego rodzaju funkcyj przestępnych, zwanych całkami Eulera.

Całki dwumienne Eulera dadzą się przedstawić w postaci szeregów. W tym celu, piszemy:

$$(1+x)^q=1+\binom{q}{1}x+\binom{q}{2}x^2+\ldots+\binom{q}{n}x^n+\ldots,$$

a więc:

$$x^p(1+x)^q=x^p\left\{1+\binom{q}{1}x+\binom{q}{2}x^2+\ldots+\binom{q}{n}x^n+\ldots\right\},$$

skąd, dostajemy szukaną całkę Eulera, w postaci:

$$\int x^p(1+x)^q\,dx=x^{p+1}\left\{\frac{1}{p+1}+\binom{q}{1}\frac{x}{p+2}+\binom{q}{2}\frac{x^2}{p+3}+\ldots+\binom{q}{n}\frac{x^n}{p+n+1}+\ldots\right\},\quad (10)$$

która, wobec tego, że szereg, zawarty w nawiasie jest dla $|x|<1$ bezwarunkowo i jednostajnie zbieżny, nadaje się do wyznaczenia wartości niewiadomej funkcyi dla wszelkich wartości zmiennej niezależnej x w granicach: $0<|x|<1$, t. z. dla wszelkiej wartości zmiennej x, których wartości bezwzględne znajdują się między 0 a 1.

18. Celem rozwinięcia całki dwumiennej Eulera, w postaci szeregu, który byłby zbieżny w zakresie: $1<|x|<\infty$, rozwińmy funkcyę $(1+x)^q$, występującą pod znakiem całkowym, na szereg potęgowy, postępujący według ujemnych potęg zmiennej x. W tym celu, napiszemy:

$$(1+x)^q=x^q\left\{1+\binom{q}{1}x^{-1}+\binom{q}{2}x^{-2}+\binom{q}{3}x^{-3}+\ldots\right\},$$

skąd, otrzymujemy:

$$x^p(1+x)^q=x^{p+q}+\binom{q}{1}x^{p+q-1}+\binom{q}{2}x^{p+q-2}+\binom{q}{3}x^{p+q-3}+\ldots$$

a zatem, rozwinięcie całki dwumiennej Eulera w postaci szeregu:

$$\int x^p(1+x)^q\,dx=x^{p+q+1}\left\{\frac{1}{p+q+1}+\binom{q}{1}\frac{x^{-1}}{p+q}+\binom{q}{2}\frac{x^{-2}}{p+q-1}+\ldots+\binom{q}{n}\frac{x^{-n}}{p+q+1-n}+\ldots\right\}\quad (10')$$

zbieżnego w granicach: $1<|x|<\infty$.

Aby rozstrzygnąć sprawę obliczania wartości danej całki dwumiennej Eulera w przypadku $|x|=1$, zauważymy, przedewszystkiem, że oba wzory powyższe (10) i (10') będą także w przypadku $|x|=1$ przydatne, gdy szeregi:

$$\frac{1}{p+1}+\binom{q}{1}\frac{1}{p+2}+\binom{q}{2}\frac{1}{p+3}+\ldots+\binom{q}{n}\frac{1}{p+n+1}+\ldots$$

$$\frac{1}{p+q+1}+\binom{q}{1}\frac{1}{p+q}+\binom{q}{2}\frac{1}{p+q-1}+\ldots+\binom{q}{n}\frac{1}{p+q-n+1}+\ldots$$

będą zbieżne.

Dla pierwszego z tych szeregów mamy stosunek:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\binom{q}{n+1}(p+n+1)}{\binom{q}{n}(p+n+2)}=\frac{(q-n)(p+n+1)}{(n+1)(p+n+2)},$$

a dla drugiego:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\binom{q}{n+1}(p+q-n+1)}{\binom{q}{n}(p+q-n)}=\frac{(q-n)(p+q-n+1)}{(n+1)(p+q-n)},$$

zatem, w obydwu razach, $\lim\limits_{n=\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=1$, a więc są to przypadki wątpliwe.

Aby go rostrzygnąć, zastosujmy kryteryum Raabe'go (T. I. str. 587.), według którego szereg: $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ jest zbieżny, skoro, od pewnego n począwszy, jest stale:

$$n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)>r,\text{ a } r>1,\text{ czyli, gdy } \lim_{n=\infty} n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)>1.$$

Ponieważ chodzi tu o bezwzględną wartość stosunku $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, przeto, biorąc w ilorazach $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ czynnik $n-q$, zamiast $q-n$, otrzymujemy, w pierwszym szeregu:

$$n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=n\left\{1-\frac{(n-q)(p+n+1)}{(n+1)(p+n+2)}\right\}=n\left\{1-\frac{\left(1-\frac{q}{n}\right)\left(1+\frac{p+1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{p+2}{n}\right)}\right\},$$

$$\text{a więc: } \lim_{n=\infty} n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=\lim_{n=\infty} n\left\{1-\frac{1+\frac{p-q+1}{n}-\frac{(p+1)q}{n^2}}{1+\frac{p+3}{n}+\frac{p+2}{n^2}}\right\}=q+2,$$

a tak samo w drugim:

$$n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=n\left\{1-\frac{(n-q)(n-p-q-1)}{(n+1)(n-p-q)}\right\}=n\left\{1-\frac{\left(1-\frac{q}{n}\right)\left(1-\frac{p+q+1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{p+q}{n}\right)}\right\},$$

$$\text{a więc, także: } \lim_{n=\infty} n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=\lim_{n=\infty} n\left\{1-\frac{1-\frac{p+n}{n}-\frac{q(p+q+1)}{n^2}}{1+\frac{1-p-q}{n}-\frac{p+q}{n^2}}\right\}=q+2.$$

Oba rozwinięcia: (10) i (10′) nadają się więc do obliczenia całki dwumiennej Eulera, także dla $|x|=1$, skoro spełnia się warunek $q+2>1$, t. j. skoro $q+1>0$, co zawsze nastąpi, gdy całka dwumienna Eulera sprowadzoną została do takiej postaci, że w niej wykładniki p i q zawarte są w granicach: $-\frac{1}{2}$ i $+\frac{1}{2}$. Oba rozwinięcia: (10) i (10′) są zatem także dla $|x|=1$ przydatne.

14. Główniejsze całki funkcyj przestępnych, nie dające się wyrazić przez funkcye elementarne. Między całkami funkcyj przestępnych, nie dających się wyrazić przez funkcye elementarne, napotkaliśmy przedewszystkiem całki, kształtu: $J_{s,k}=\int \sin^s x \cos^k x\,dx$, w których wykładniki s i k leżą między granicami -1 i $+1$. Całki te sprowadzają się, ostatecznie, zapomocą metody podstawienia, do całek Eulera: $\int x^p(1-x)^q\,dx$, o których mówiliśmy już powyżej. Z pośród całek innych funkcyj przestępnych, nie dających się wyrazić przez funkcye elementarne, napotkaliśmy między innemi następujące:

1) $\int \frac{e^x}{x}\,dx = Li(e^x)+C$. [Logarytm całkowy funkcyi e^x. Patrz str. 176. art. 9.]. Z szeregu potęgowego:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

bezwarunkowo i bezustannie zbieżnego, otrzymujemy, dla wszelkich skończonych wartości zmiennej x, rozwinięcie:

$$\frac{e^x}{x}=\frac{1}{x}+1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\ldots$$

przedstawiające funkcyę, znajdującą się pod znakiem całkowym, która, dla wszelkich wartości x skończonych, a różnych od zera, otrzymuje wartość skończoną. Z wyłączeniem miejsca $x=0$, otrzymujemy tedy, dla wszelkiego skończonego x, na podstawie prawidła całkowania szeregów, rozwinięcie:

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx=C+\log x+x+\frac{1}{2!}\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3!}\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{1}{n!}\frac{x^n}{n}+\ldots \tag{11}$$

Podstawiając w niem: $e^x=z$, a więc: $x=\log z$, $dx=\frac{dz}{z}$, i zastępując następnie z przez x, otrzymujemy rozwinięcie logarytmu całkowego zmiennej x, w postaci:

$$\int\frac{dx}{\log x}=C+\log(\log x)+\log x+\frac{1}{2!}\frac{(\log x)^2}{2}+\frac{1}{3!}\frac{(\log x)^3}{3}+\ldots+\frac{1}{n!}\frac{(\log x)^n}{n}+$$

2) $\int\frac{\log(1+x)}{x}\,dx$. [Patrz str. 180. art. 16.]

Mamy tu, dla $|x|<1$, szereg:

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

wskutek tego, szereg potęgowy:

$$\frac{\log(1+x)}{x}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}+\ldots,$$

który prowadzi do rozwinięcia:

$$\int\frac{\log(1+x)}{x}\,dx=C+x-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}-\frac{x^4}{4^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^2}+\ldots$$

zbieżnego, jeżeli $|x|\leqq 1$.

Jeżeli $|x|>1$, połóżmy:

$$\log(1+x)=\log\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\log x+\log\left(1+\frac{1}{x}\right),$$

zatem:

$$\log(1+x)=\log x+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^4}+\ldots,$$

a otrzymamy:

$$\frac{\log(1+x)}{x}=\frac{\log x}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^5}+\ldots$$

skąd, ze względu na to, że: $\int\frac{\log x}{x}\,dx=\frac{1}{2}(\log x)^2+C$, dostajemy:

$$\int\frac{\log(1+x)}{x}dx=C+\frac{1}{2}(\log x)^2-\frac{1}{x}+\frac{1}{2^2x^2}-\frac{1}{3^2x^3}+\frac{1}{4^2x^4}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n^2x^n}+\ldots$$

szereg zbieżny, skoro $|x|\geqq 1$.

3) $\int\frac{\sin x}{x}\,dx=Si(x)+C$. [Sinus całkowy zmiennej x, patrz str. 190.]

Mamy tu szereg bezwarunkowo i bezustannie zbieżny:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$$

zatem, dla wszelkiego skończonego x, otrzymujemy:

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}+\ldots$$

a stąd:

$$\int\frac{\sin x}{x}\,dx=C+x-\frac{1}{3!}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{5!}\frac{x^5}{5}-\frac{1}{7!}\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$$

4) $\int\frac{\cos x}{x}\,dx=Ci(x)+C$, [cosinus całkowy zmiennej x].

Mamy tu, dla wszelkiego skończonego x, szereg:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

z którego dostajemy:

$$\frac{\cos x}{x}=\frac{1}{x}-\frac{x}{2!}+\frac{x^3}{4!}-\frac{x^5}{6!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n)!}+\dots$$

stem rozwinięcie:

$$\int\frac{\cos x}{x}dx=C+\log x-\frac{1}{2!}\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4!}\frac{x^4}{4}-\frac{1}{6!}\frac{x^6}{6}+\dots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\frac{x^{2n}}{2n}+\dots$$

5) $\int\frac{\sin\mathrm{hip}\,x}{x}dx=HSi(x)+C$. Hiperboliczny sinus całkowy zmiennej x.
atrz str. 212. art. 17.).

Mamy szereg bezwarunkowo i bezustannie zbieżny (patrz Tom I. str. 6.), w postaci:

$$\sin\mathrm{hip}\,x=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots$$

ztórego dostajemy szereg:

$$\frac{\sin\mathrm{hip}\,x}{x}=1+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\dots+\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}+\dots$$

tem rozwinięcie:

$$\int\frac{\sin\mathrm{hip}\,x}{x}dx=C+x+\frac{1}{3!}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{5!}\frac{x^5}{5}+\dots+\frac{1}{(2n+1)!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\dots$$

ażne dla wszelkiego skończonego x.

6) $\int\frac{\cos\mathrm{hip}\,x}{x}dx=HCi(x)+C$. Hiperboliczny cosinus całkowy zmiennej x.
atrz str. 212. art. 17.].

Mamy tu również szereg bezwarunkowo i bezustannie zbieżny:

$$\cos\mathrm{hip}\,x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\dots$$

ztórego dostajemy szereg:

$$\frac{\cos\mathrm{hip}\,x}{x}=\frac{1}{x}+\frac{x}{2!}+\frac{x^3}{4!}+\dots+\frac{x^{2n-1}}{(2n)!}+\dots$$

tem rozwinięcie:

$$\int\frac{\cos\mathrm{hip}\,x}{x}dx=C+\log x+\frac{1}{2!}\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4!}\frac{x^4}{4}+\dots+\frac{1}{(2n)!}\frac{x^{2n}}{2n}+\dots$$

ażne dla wszelkich skończonych wartości zmiennej x.

15. Całki niektórych funkcyj złożonych, nie dające się wyrazić przez nkcye elementarne. Z pośród całek funkcyj, złożonych z funkcyj algebraicznych i przestępnych, które nie dadzą się wyznaczyć za pomocą znanych nkcyj elementarnych, zasługują na uwagę jeszcze następujące, dla których wyprowadzimy różne rozwinięcia na szeregi potęgowe:

1) Całka $\int x^a\sin bx\,dx$, przy dowolnym wykładniku a.

Z szeregu bezwarunkowo i bezustannie zbieżnego:

$$\sin bx=\frac{bx}{1!}-\frac{b^3x^3}{3!}+\frac{b^5x^5}{5!}-\dots$$

nika:

$$x^a\sin bx=\frac{bx^{a+1}}{1!}-\frac{b^3x^{a+3}}{3!}+\frac{b^5x^{a+5}}{5!}-\dots$$

tąd, rozwinięcie:

$$\int\frac{dx}{\log x}=C+\log(\log x)+\log x+\frac{1}{2!}\frac{(\log x)^2}{2}+\frac{1}{3!}\frac{(\log x)^3}{3}+\ldots+\frac{1}{n!}\frac{(\log x)^n}{n}+\ldots \quad (12)$$

2) $\int\frac{\log(1+x)}{x}dx$. [Patrz str. 180. art. 16.]

Mamy tu, dla $|x|<1$, szereg:

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

wskutek tego, szereg potęgowy:

$$\frac{\log(1+x)}{x}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}+\ldots,$$

który prowadzi do rozwinięcia:

$$\int\frac{\log(1+x)}{x}dx=C+x-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}-\frac{x^4}{4^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^2}+\ldots$$

zbieżnego, jeżeli $|x|\leqq 1$.

Jeżeli $|x|>1$, połóżmy:

$$\log(1+x)=\log\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\log x+\log\left(1+\frac{1}{x}\right),$$

zatem:

$$\log(1+x)=\log x+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^4}+\ldots,$$

a otrzymamy:

$$\frac{\log(1+x)}{x}=\frac{\log x}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^5}+\ldots$$

skąd, ze względu na to, że: $\int\frac{\log x}{x}dx=\frac{1}{2}(\log x)^2+C$, dostajemy:

$$\int\frac{\log(1+x)}{x}dx=C+\frac{1}{2}(\log x)^2-\frac{1}{x}+\frac{1}{2^2x^2}-\frac{1}{3^2x^3}+\frac{1}{4^2x^4}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n^2x^n}+\ldots \quad (13)$$

szereg zbieżny, skoro $|x|\geqq 1$.

3) $\int\frac{\sin x}{x}dx=Si(x)+C$. [Sinus całkowy zmiennej x, patrz str. 190. art. 8.].

Mamy tu szereg bezwarunkowo i bezustannie zbieżny:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$$

zatem, dla wszelkiego skończonego x, otrzymujemy:

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}+\ldots$$

a stąd:

$$\int\frac{\sin x}{x}dx=C+x-\frac{1}{3!}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{5!}\frac{x^5}{5}-\frac{1}{7!}\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots \quad (14)$$

4) $\int\frac{\cos x}{x}dx=Ci(x)+C$, [cosinus całkowy zmiennej x].

Mamy tu, dla wszelkiego skończonego x, szereg:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

z którego dostajemy:

$$\frac{\cos x}{x}=\frac{1}{x}-\frac{x}{2!}+\frac{x^3}{4!}-\frac{x^5}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n)!}+\ldots$$

zatem rozwinięcie:

$$\int\frac{\cos x}{x}dx=C+\log x-\frac{1}{2!}\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4!}\frac{x^4}{4}-\frac{1}{6!}\frac{x^6}{6}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\frac{x^{2n}}{2n}+\ldots$$

5) $\int\frac{\sin \operatorname{hip} x}{x}dx=HSi(x)+C$. Hiperboliczny sinus całkowy zmiennej x. (Patrz str. 212. art. 17.).

Mamy szereg bezwarunkowo i bezustannie zbieżny (patrz Tom I. str. 596.), w postaci:

$$\sin \operatorname{hip} x=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$$

z którego dostajemy szereg:

$$\frac{\sin \operatorname{hip} x}{x}=1+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}+\ldots$$

zatem rozwinięcie:

$$\int\frac{\sin \operatorname{hip} x}{x}dx=C+x+\frac{1}{3!}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{5!}\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$$

ważne dla wszelkiego skończonego x.

6) $\int\frac{\cos \operatorname{hip} x}{x}dx=HCi(x)+C$. Hiperboliczny cosinus całkowy zmiennej x. (Patrz str. 212. art. 17.].

Mamy tu również szereg bezwarunkowo i bezustannie zbieżny:

$$\cos \operatorname{hip} x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

z którego dostajemy szereg:

$$\frac{\cos \operatorname{hip} x}{x}=\frac{1}{x}+\frac{x}{2!}+\frac{x^3}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{(2n)!}+\ldots$$

zatem rozwinięcie:

$$\int\frac{\cos \operatorname{hip} x}{x}dx=C+\log x+\frac{1}{2!}\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4!}\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{1}{(2n)!}\frac{x^{2n}}{2n}+\ldots$$

ważne dla wszelkich skończonych wartości zmiennej x.

15. Całki niektórych funkcyj złożonych, nie dające się wyrazić przez funkcye elementarne. Z pośród całek funkcyj, złożonych z funkcyj algebraicznych i przestępnych, które nie dadzą się wyznaczyć za pomocą znanych funkcyj elementarnych, zasługują na uwagę jeszcze następujące, dla których wyprowadzimy różne rozwinięcia na szeregi potęgowe:

1) Całka $\int x^a \sin bx\,dx$, przy dowolnym wykładniku a.

Z szeregu bezwarunkowo i bezustannie zbieżnego:

$$\sin bx=\frac{bx}{1!}-\frac{b^3x^3}{3!}+\frac{b^5x^5}{5!}-\ldots$$

wynika:

$$x^a\sin bx=\frac{bx^{a+1}}{1!}-\frac{b^3x^{a+3}}{3!}+\frac{b^5x^{a+5}}{5!}-\ldots$$

a stąd, rozwinięcie:

Wobec tego, otrzymujemy z wzoru (23) następujące dwa rozw

$$J_1 = \int R(x)\, e^{ax} \cos bx\, dx = \sum_{\substack{r=-m\ldots+n \\ \varrho=0\ldots\infty}} \frac{a_r R^\varrho \cos \varrho \Theta}{r!(r+\varrho+1)} \cdot x^{r+\varrho+1} +$$

$$+ \sum_{\substack{r=-1\ldots-m_1 \\ \varrho=0\ldots\infty}} \frac{A_{1r} e^{a\alpha_1} R^\varrho \cos(b\alpha_1 + \varrho\Theta)}{r!(r+\varrho+1)} (x-\alpha_1)^{r+\varrho+1} + \ldots +$$

$$+ \sum_{\substack{r=-1\ldots-m_\sigma \\ \varrho=0\ldots\infty}} \frac{A_{\sigma r} e^{a\alpha_\sigma} R^\varrho \cos(b\alpha_\varrho + \varrho\Theta)}{r!(r+\varrho+1)} (x-\alpha_\sigma)^{r+\varrho+1},$$

$$\int R(x)\, e^{ax} \sin bx\, dx = \sum_{\substack{r=-m\ldots+n \\ \varrho=0\ldots\infty}} \frac{a_r R^\varrho \sin \varrho\Theta}{r!(r+\varrho+1)} x^{r+\varrho+1} +$$

$$+ \sum_{\substack{r=-1\ldots-m_1 \\ \varrho=0\ldots\infty}} \frac{A_{1r} e^{a\alpha_1} R^\varrho \sin(b\alpha_1 + \varrho\Theta)}{r!(r+\varrho+1)} (x-\alpha_1)^{r+\varrho+1} + \ldots +$$

$$+ \sum_{\substack{r=-1\ldots-m_\sigma \\ \varrho=0\ldots\infty}} \frac{A_{\sigma 1} e^{a\alpha_\sigma} R^\varrho \sin(b\alpha_\sigma + \varrho\Theta)}{r!(r+\varrho+1)} (x-\alpha_\sigma)^{r+\varrho+1}.$$

Cwiczenia XV.

Wyprowadzić następujące szeregi i wskazać funkcye, jakie one przedstaw

1) $\int \frac{dx}{a+x} = C + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \ldots$

2) $\int \frac{a\,dx}{x^2+a^2} = C + \frac{x}{a} - \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} - \frac{x^7}{7a^7} + \ldots$

3) $\int \frac{dx}{1+x^3} = C + x - \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{7} x^7 - \frac{1}{10} x^{10} + \ldots$

4) $\int \frac{x\,dx}{1+x^3} = C + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{8} x^8 - \frac{1}{11} x^{11} + \ldots$

5) $\int \frac{x^2\,dx}{1+x^3} = C + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{6} x^6 + \frac{1}{9} x^9 - \frac{1}{12} x^{12} + \ldots$

6) $\int \frac{x^2\,dx}{1+x^6} = C + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{9} x^9 + \frac{1}{15} x^{15} - \frac{1}{21} x^{21} + \ldots$

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = C + x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots$

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = C + 2\left\{1 + \frac{1}{2}\frac{x}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^2}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^3}{7} + \ldots\right\}\sqrt{x}.$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = C + x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots$

10) $\int \frac{dx}{(1-x)^n} = C + x + n\frac{x^2}{2} + \frac{n(n+1)}{1.2}\frac{x^3}{3} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\frac{x^4}{4} + \ldots$

11) $\int \frac{(1+x^2)\,dx}{1+x^4} = C + x + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{7} x^7 + \frac{1}{9} x^9 + \frac{1}{11} x^{11} - \frac{1}{13} x^{13} - \frac{1}{15} x$

12) $\int \frac{(1+x^4)\,dx}{1+x^6} = C + x + \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{7} x^7 - \frac{1}{11} x^{11} + \frac{1}{13} x^{13} + \frac{1}{17} x^{17} - \ldots$

13) $\int \frac{(1+2x)\,dx}{1+x+x^2} = C + x + \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{2x^6}{6} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^8}{8} - \frac{2x^9}{9} + \ldots$

14) $\int \frac{dx}{1-2x\cos\alpha+x^2} = C + x + 2\cos\alpha \cdot \frac{x^2}{2} + (2\cos 2\alpha + 1)\frac{x^3}{3} + (2\cos 3\alpha + 2\cos\alpha)\frac{x^4}{4} +$

$+ (2\cos 4\alpha + 2\cos 2\alpha + 1)\frac{x^5}{5} + (2\cos 5\alpha + 2\cos 3\alpha + 2\cos\alpha)\frac{x^6}{6} + \ldots$

15) $\int \frac{(1-x\cos\alpha)\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2} = C + x + \cos\alpha \cdot \frac{x^2}{2} + \cos 2\alpha \cdot \frac{x^3}{3} + \cos 3\alpha \cdot \frac{x^4}{4} + \cos 4\alpha \cdot \frac{x^5}{5} + \ldots$

16) $\int \frac{(1-x^2)\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2} = C + 2\cos\alpha\,\frac{x^2}{2} + 2\cos 2\alpha \cdot \frac{x^3}{3} + 2\cos 3\alpha \cdot \frac{x^4}{4} + \ldots$

17) $\int \frac{x\sin\alpha\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2} = C + \sin\alpha\,\frac{x^2}{2} + \sin 2\alpha \cdot \frac{x^3}{3} + \sin 3\alpha \cdot \frac{x^4}{4} + \ldots$

Wyprowadzić następujące rozwinięcia:

18) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^5}} = C + \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{x^6}{6} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^{11}}{11} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{x^{16}}{16} + \ldots$

19) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = C + \frac{x}{1} - \frac{1}{2}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^9}{9} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{x^{13}}{13} + \ldots$, gdy $x < 1 =$

$= C - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{5x^5} - \frac{1.3}{2.4}\,\frac{1}{9x^9} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{1}{13x^{13}} - \ldots$, gdy $x > 1$.

20) $\int (1+x^n)^{\frac{p}{q}}\,dx = C + x + \frac{p}{q}\,\frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{p(p-q)}{1.2.q^2}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$, gdy $|x| < 1$.

$= C + qx^{\frac{pn}{q}}\left\{\frac{x}{pn+q} + \frac{p}{q}\cdot\frac{x^{-(n-1)}}{pn-q(n-1)} + \frac{p(p-q)}{2!\,q^2}\,\frac{x^{-(2n-1)}}{pn-q(2n-1)} + \ldots\right\}$, gdy $|x| > 1$.

21) $\int x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\,dx = C + a^{\frac{p}{q}}\left(\frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{pb}{qa}\,\frac{x^{m+n+1}}{m+n+1} + \frac{p(p-q)\,b^2}{q.2q.a^2}\,\frac{x^{m+2n+1}}{m+2n+1} + \right.$

$\left. + \frac{p(p-q)(p-2q)\,b^3}{q.2q.3q.a^3}\,\frac{x^{m+3n+1}}{m+3n+1} + \ldots\right).$

22) $\int x^m(bx^n-a)^{\frac{p}{q}}\,dx = b^{\frac{p}{q}}\left[q\cdot\frac{x^{\frac{(m+1)q+pn}{q}}}{(m+1)q+pn} - \frac{p.a}{q.b}\cdot\frac{q.x^{\frac{(m+1)q+(p-q)n}{q}}}{(m+1)q+(p-q)n} + \right.$

$\left. + \frac{p(p-q)\,a^2}{q.2q.b^2}\cdot\frac{q.x^{\frac{(m+1)q+(p-2q)n}{q}}}{(m+1)q+(p-2q)n} - \ldots\right] + C.$

23) $\int x^p(1+x)^q\,dx = C + \frac{x^{p+1}}{p+1} + q\,\frac{x^{p+2}}{p+2} + \frac{q(q-1)}{1.2}\,\frac{x^{p+3}}{p+3} + \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}\,\frac{x^{p+4}}{p+4} + \ldots$

24) $\int x^p(x-1)^q\,dx = C + \frac{x^{p+q+1}}{p+q+1} - \frac{q}{1}\,\frac{x^{p+q}}{p+q} + \frac{q(q-1)}{1.2}\,\frac{x^{p+q-1}}{p+q-1} -$

$- \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}\,\frac{x^{p+q-2}}{p+q-2} + \ldots$

25) $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = C + 2\sqrt{\sin x}\left\{1 + \frac{1}{2}\,\frac{\sin^2 x}{5} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{\sin^4 x}{9} + \ldots\right\}.$

26) $\int \frac{e^x}{x}\,dx = C + \log x + \frac{x}{1} + \frac{1}{2!}\,\frac{x^2}{2} + \frac{1}{3!}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1}{4!}\,\frac{x^4}{4} + \ldots$

27) $\int \frac{e^{ax}\,dx}{b+x} = C + e^{-ab}\left\{\log(b+x) + \frac{a}{1!}\,\frac{b+x}{1} + \frac{a^2}{2!}\,\frac{(b+x)^2}{2} + \frac{a^3}{3!}\,\frac{(b+x)^3}{3} + \ldots\right\}.$

28) $\int \frac{e^{ax}}{x}\,dx = C + \frac{1}{2}\log(x^2) + \frac{a}{1}\cdot\frac{x}{1} + \frac{a^2}{2!}\,\frac{x^2}{2} + \frac{a^3}{3!}\cdot\frac{x^3}{3} + \ldots \}$

29) $\int \frac{dx}{\log x} = C + \log(\log x) + \frac{\log x}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{(\log x)^2}{2!} + \frac{1}{3}\,\frac{(\log x)^3}{3!} + \frac{1}{4}\,\frac{(\log x)^4}{4!} + \ldots$

30) $\int \frac{\log(1+x)}{x}\,dx = C + \frac{x}{1^2} - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n^2} + \ldots$, gdy $|x| < 1$.

Wobec tego, otrzymujemy z wzoru (23) następujące dwa rozwinięcia:

$$J_1 = \int R(x)\, e^{ax} \cos bx\, dx = \sum_{\substack{r=-m\ldots+n \\ \varrho=0\ldots\infty}} \frac{a_r R^\varrho \cos \varrho\,\Theta}{r!\,(r+\varrho+1)} \,.\, x^{r+\varrho+1} +$$

$$+ \sum_{\substack{r=-1\ldots-m_1 \\ \varrho=0\ldots\infty}} \frac{A_{1r}\, e^{a\alpha_1} R^\varrho \cos(b\alpha_1+\varrho\Theta)}{r!\,(r+\varrho+1)} (x-\alpha_1)^{r+\varrho+1} + \ldots +$$

$$+ \sum_{\substack{r=-1\ldots-m_\sigma \\ \varrho=0\ldots\infty}} \frac{A_{\sigma r}\, e^{a\alpha_\sigma} R^\varrho \cos(b\alpha_\varrho+\varrho\Theta)}{r!\,(r+\varrho+1)} (x-\alpha_\sigma)^{r+\varrho+1}, \tag{24}$$

$$\int R(x)\, e^{ax} \sin bx\, dx = \sum_{\substack{r=-m\ldots+n \\ \varrho=0\ldots\infty}} \frac{a_r R^\varrho \sin \varrho\Theta}{r!(r+\varrho+1)} x^{r+\varrho+1} +$$

$$+ \sum_{\substack{r=-1\ldots-m_1 \\ \varrho=0\ldots\infty}} \frac{A_{1r}\, e^{a\alpha_1} R^\varrho \sin(b\alpha_1+\varrho\,\Theta)}{r!\,(r+\varrho+1)} (x-\alpha_1)^{r+\varrho+1} + \ldots +$$

$$+ \sum_{\substack{r=-1\ldots-m_\sigma \\ \varrho=0\ldots\infty}} \frac{A_{\sigma 1}\, e^{a\alpha_\sigma} R^\varrho \sin(b\alpha_\sigma+\varrho\,\Theta)}{r!\,(r+\varrho+1)} (x-\alpha_\sigma)^{r+\varrho+1}. \tag{25}$$

Cwiczenia XV.

Wyprowadzić następujące szeregi i wskazać funkcye, jakie one przedstawiają:

1) $\int \frac{dx}{a+x} = C + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \ldots$

2) $\int \frac{a\,dx}{x^2+a^2} = C + \frac{x}{a} - \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} - \frac{x^7}{7a^7} + \ldots$

3) $\int \frac{dx}{1+x^3} = C + x - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{10}x^{10} + \ldots$

4) $\int \frac{x\,dx}{1+x^3} = C + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{8}x^8 - \frac{1}{11}x^{11} + \ldots$

5) $\int \frac{x^2\,dx}{1+x^3} = C + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{12}x^{12} + \ldots$

6) $\int \frac{x^2\,dx}{1+x^6} = C + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{15}x^{15} - \frac{1}{21}x^{21} + \ldots$

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = C + x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots$

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = C + 2\left\{1 + \frac{1}{2}\frac{x}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^2}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^3}{7} + \ldots\right\}\sqrt{x}.$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = C + x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots$

10) $\int \frac{dx}{(1-x)^n} = C + x + n\frac{x^2}{2} + \frac{n(n+1)}{1.2}\frac{x^3}{3} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\frac{x^4}{4} + \ldots$

11) $\int \frac{(1+x^2)\,dx}{1+x^4} = C + x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{11}x^{11} - \frac{1}{13}x^{13} - \frac{1}{15}x^{15} + \ldots$

12) $\int \frac{(1+x^4)\,dx}{1+x^6} = C + x + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{11}x^{11} + \frac{1}{13}x^{13} + \frac{1}{17}x^{17} - \ldots$

13) $\int \frac{(1+2x)\,dx}{1+x+x^2} = C + x + \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{2x^6}{6} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^8}{8} - \frac{2x^9}{9} + \ldots$

14) $\int \frac{dx}{1-2x\cos\alpha+x^2} = C + x + 2\cos\alpha \,.\, \frac{x^2}{2} + (2\cos 2\alpha + 1)\frac{x^3}{3} + (2\cos 3\alpha + 2\cos\alpha)\frac{x^4}{4} +$

$+ (2\cos 4\alpha + 2\cos 2\alpha + 1)\frac{x^5}{5} + (2\cos 5\alpha + 2\cos 3\alpha + 2\cos\alpha)\frac{x^6}{6} + \dots$

15) $\int \frac{(1-x\cos\alpha)\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2} = C + x + \cos\alpha \,.\, \frac{x^2}{2} + \cos 2\alpha \,.\, \frac{x^3}{3} + \cos 3\alpha \,.\, \frac{x^4}{4} + \cos 4\alpha \,.\, \frac{x^5}{5} + \dots$

16) $\int \frac{(1-x^2)\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2} = C + 2\cos\alpha\,\frac{x^2}{2} + 2\cos 2\alpha \,.\, \frac{x^3}{3} + 2\cos 3\alpha \,.\, \frac{x^4}{4} + \dots$

17) $\int \frac{x\sin\alpha\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2} = C + \sin\alpha\,\frac{x^2}{2} + \sin 2\alpha \,.\, \frac{x^3}{3} + \sin 3\alpha \,.\, \frac{x^4}{4} + \dots$

Wyprowadzić następujące rozwinięcia:

18) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^5}} = C + \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{x^6}{6} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^{11}}{11} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{x^{16}}{16} + \dots$

19) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = C + \frac{x}{1} - \frac{1}{2}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^9}{9} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{x^{13}}{13} + \dots$, gdy $x < 1 =$

$= C - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{5x^5} - \frac{1.3}{2.4}\,\frac{1}{9x^9} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{1}{13x^{13}} - \dots$, gdy $x > 1$.

20) $\int (1+x^n)^{\frac{p}{q}}\,dx = C + x + \frac{p}{q}\,\frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{p(p-q)}{1.2.q^2}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$, gdy $|x| < 1$.

$= C + qx^{\frac{pn}{q}}\left\{\frac{x}{pn+q} + \frac{p}{q} \,.\, \frac{x^{-(n-1)}}{pn-q(n-1)} + \frac{p(p-q)}{2!\,q^2}\,\frac{x^{-(2n-1)}}{pn-q(2n-1)} + \dots\right\}$, gdy $|x| > 1$.

21) $\int x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\,dx = C + a^{\frac{p}{q}}\left(\frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{pb}{qa}\,\frac{x^{m+n+1}}{m+n+1} + \frac{p(p-q)\,b^2}{q\,.\,2q\,.\,a^2}\,\frac{x^{m+2n+1}}{m+2n+1} +\right.$

$\left. + \frac{p(p-q)(p-2q)\,b^3}{q\,.\,2q\,.\,3q\,.\,a^3}\,\frac{x^{m+3n+1}}{m+3n+1} + \dots\right).$

22) $\int x^m(bx^n-a)^{\frac{p}{q}}\,dx = b^{\frac{p}{q}}\left[q \,.\, \frac{x^{\frac{(m+1)q+pn}{q}}}{(m+1)q+pn} - \frac{p\,.\,a}{q\,.\,b} \,.\, \frac{q\,.\,x^{\frac{(m+1)q+(p-q)n}{q}}}{(m+1)q+(p-q)n} +\right.$

$\left. + \frac{p(p-q)\,a^2}{q\,.\,2q\,.\,b^2} \,.\, \frac{q\,.\,x^{\frac{(m+1)q+(p-2q)n}{q}}}{(m+1)q+(p-2q)n} - \dots\right] + C.$

23) $\int x^p(1+x)^q\,dx = C + \frac{x^{p+1}}{p+1} + q\,\frac{x^{p+2}}{p+2} + \frac{q(q-1)}{1.2}\,\frac{x^{p+3}}{p+3} + \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}\,\frac{x^{p+4}}{p+4} + \dots$

24) $\int x^p(x-1)^q\,dx = C + \frac{x^{p+q+1}}{p+q+1} - \frac{q}{1}\,\frac{x^{p+q}}{p+q} + \frac{q(q-1)}{1.2}\,\frac{x^{p+q-1}}{p+q-1} -$

$- \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}\,\frac{x^{p+q-2}}{p+q-2} + \dots$

25) $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = C + 2\sqrt{\sin x}\left\{1 + \frac{1}{2}\,\frac{\sin^2 x}{5} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{\sin^4 x}{9} + \dots\right\}.$

26) $\int \frac{e^x}{x}\,dx = C + \log x + \frac{x}{1} + \frac{1}{2!}\,\frac{x^2}{2} + \frac{1}{3!}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1}{4!}\,\frac{x^4}{4} + \dots$

27) $\int \frac{e^{ax}\,dx}{b+x} = C + e^{-ab}\left\{\log(b+x) + \frac{a}{1!}\,\frac{b+x}{1} + \frac{a^2}{2!}\,\frac{(b+x)^2}{2} + \frac{a^3}{3!}\,\frac{(b+x)^3}{3} + \dots\right\}.$

28) $\int \frac{e^{ax}}{x}\,dx = C + \frac{1}{2}\log(x^2) + \frac{a}{1} \,.\, \frac{x}{1} + \frac{a^2}{2!}\,\frac{x^2}{2} + \frac{a^3}{3!} \,.\, \frac{x^3}{3} + \dots\}$

29) $\int \frac{dx}{\log x} = C + \log(\log x) + \frac{\log x}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{(\log x)^2}{2!} + \frac{1}{3}\,\frac{(\log x)^3}{3!} + \frac{1}{4}\,\frac{(\log x)^4}{4!} + \dots$

30) $\int \frac{\log(1+x)}{x}\,dx = C + \frac{x}{1^2} - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \dots + (-1)^{n-1} \,.\, \frac{x^n}{n^2} + \dots$, gdy $|x| < 1$.

31) $\int \log\left(\frac{1}{1-x}\right).\frac{dx}{x} = C + \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^4}{4^2} + \dots + \frac{x^n}{n^2} + \dots$, gdy $|x| < 1$.

32) $\int \frac{\text{arc}\sin x}{x}\, dx = C + x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3^2} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^5}{5^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{x^7}{7^2} + \dots$

33) $\int \frac{\log(x+\sqrt{1+x^2})}{x}\, dx = C + x - \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3^2} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^5}{5^2} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{x^7}{7^2} + \dots$

34) $\int \frac{\text{arc tang}\, x}{x}\, dx = C + x - \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^5}{5^2} - \frac{x^7}{7^2} + \dots$

35) $\int \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\frac{dx}{x} = C + x + \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^5}{5^2} + \frac{x^7}{7^2} + \dots$

36) $\int \frac{x^{m-1}}{a+\log x}\, dx = e^{-am}\Big\{\log[a+\log x] + \frac{m}{1}\,\frac{a+\log x}{1} + \frac{m^2}{2!}\,\frac{(a+\log x)^2}{2} + \frac{m^3}{3!}\,\frac{(a+\log x)^3}{3} + \dots\Big\}$.

37) $\int \frac{x dx}{\sin x} = C + 2\Big\{\frac{1}{1^2}\,\text{tang}\,\frac{x}{2} - \frac{1}{3^2}\,\text{tang}^3\,\frac{x}{2} + \frac{1}{5^2}\,\text{tang}^5\,\frac{x}{2} - \frac{1}{7^2}\,\text{tang}^7\,\frac{x}{2} + \dots\Big\}$, $|x| < \frac{1}{2}\pi$.

38) $\int \frac{x dx}{\text{tang}\, x} = C + \frac{\sin x}{1^2} + \frac{1}{2}\,\frac{\sin^3 x}{3^2} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{\sin^5 x}{5^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{\sin^7 x}{7^2} + \dots$

39) $\int \sin x.\cos\text{hip}\, x.dx = C + \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{1^2+1^2}{1.2}\,\frac{\sin^4 x}{4} + \frac{(1^2+1^2)(1^2+3^2)}{1.2.3.4}\,\frac{\sin^6 x}{6} + \dots$

40) $\int \sin x.\, \sin\text{hip}\, x.dx = C + \frac{\sin^3 x}{3} + \frac{1^2+2^2}{3!}\,\frac{\sin^5 x}{5} + \frac{(1^2+2^2)(1^2+4^2)}{5!}\,\frac{\sin^7 x}{7} + \dots$

41) $\int \sin\text{hip}^r x.\cos x\, dx = C + \frac{(\sin\text{hip}\, x)^{r+1}}{r+1} - \frac{1^2+1^2}{2!}\,\frac{(\sin\text{hip}\, x)^{r+3}}{r+3} + \frac{(1^2+1^2)(1^2+3^2)}{4!}\,\frac{(\sin\text{hip}\, x)^{r+5}}{r+5} + \dots$

42) $\int \sin\text{hip}^r x.\sin x\, dx = C + \frac{(\sin\text{hip}\, x)^{r+2}}{r+2} - \frac{1^2+2^2}{3!}\,\frac{(\sin\text{hip}\, x)^{r+4}}{r+4} + \frac{(1^2+2^2)(1^2+4^2)}{5!}\,\frac{(\sin\text{hip}\, x)^{r+6}}{r+6} - \dots$

43) $\int \log(1+2\alpha\cos x+\alpha^2).dx = C + 2\Big\{\alpha\sin x - \frac{\alpha^2}{2^2}\sin 2x + \frac{\alpha^3}{3^2}\sin 3x - \dots\Big\}$, gdy $\alpha < 1$.

44) $\int \log(1+\sin\alpha.\cos x)dx = C + 2x\log\cos\frac{\alpha}{2} + 2\Big\{\text{tang}\,\frac{\alpha}{2}\sin x - \text{tang}^2\frac{\alpha}{2}\,.\,\frac{\sin 2x}{2^2} + \text{tang}^3\frac{\alpha}{2}\,.\,\frac{\sin 3x}{3^2} - \dots\Big\}$.

45) $\int (x+\sqrt{1+x^2})^\mu\, dx = C + \frac{x}{1} + \frac{\mu}{1}\,\frac{x^2}{2} + \frac{\mu^2}{1.2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{\mu(\mu^2-1^2)}{1.2.3}\,\frac{x^4}{4} + \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)}{1.2.3.4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{\mu(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{1.2.3.4.5}\,\frac{x^6}{6} + \dots$

46) $\int x^\lambda(x+\sqrt{1+x^2})^\mu\, dx = C + \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \frac{\mu}{1}\,\frac{x^{\lambda+2}}{\lambda+2} + \frac{\mu^2}{2!}\,\frac{x^{\lambda+3}}{\lambda+3} + \frac{\mu(\mu^2-1^2)}{3!}\,\frac{x^{\lambda+4}}{\lambda+4} + \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)}{4}\,\frac{x^{\lambda+5}}{\lambda+5} + \frac{\mu(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{5!}\,\frac{x^{\lambda+6}}{\lambda+6} + \dots$

47) $\int e^{\lambda\,\text{arc}\sin x} dx = C + \frac{x}{1} + \frac{\lambda}{1}\,\frac{x^2}{2} + \frac{\lambda^2}{2!}\,\frac{x^3}{3} + \frac{\lambda(\lambda^2+1^2)}{3!}\,\frac{x^4}{4} + \frac{\lambda^2(\lambda^2+2^2)}{4!}\,\frac{x^5}{5} + \frac{\lambda(\lambda^2+1^2)(\lambda^2+2^2)}{5!}\,\frac{x^6}{6} + \dots$

48) $\int x^\alpha e^{\lambda \arcsin x} dx = C + \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{\lambda}{1}\frac{x^{\alpha+2}}{\alpha+2} + \frac{\lambda^2}{2!}\frac{x^{\alpha+3}}{\alpha+3} + \frac{\lambda(\lambda^2+1^2)}{3!}\frac{x^{\alpha+4}}{\alpha+4} +$

$+ \frac{\lambda^2(\lambda^2+2^2)}{4!}\frac{x^{\alpha+5}}{\alpha+5} + \frac{\lambda(\lambda^2+1^2)(\lambda^2+3^2)}{5!}\frac{x^{\alpha+6}}{\alpha+6} + \dots$

49) $\int x^\alpha \cos[\mu \log(x+\sqrt{1+x^2})]dx = C + \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{\mu^2}{2!}\frac{x^{\alpha+3}}{\alpha+3} + \frac{\mu^2(\mu^2+2^2)}{4!}\frac{x^{\alpha+5}}{\alpha+5} -$

$- \frac{\mu^2(\mu^2+2^2)(\mu^2+4^2)}{6!}\frac{x^{\alpha+7}}{\alpha+7} + \dots$

50) $\int x^\alpha \sin[\mu \log(x+\sqrt{1+x^2})]dx = C + \frac{\mu}{1}\frac{x^{\alpha+2}}{\alpha+2} - \frac{\mu(\mu^2+1^2)}{3!}\frac{x^{\alpha+4}}{\alpha+4} +$

$+ \frac{\mu(\mu^2+1^2)(\mu^2+3^2)}{5!}\frac{x^{\alpha+6}}{\alpha+6} - \frac{\mu(\mu^2+1^2)(\mu^2+3^2)(\mu^2+5^2)}{7!}\cdot\frac{x^{\alpha+8}}{\alpha+8} + \dots$

Przy pomocy rachunku całkowego wykazać, że:

51) $\log \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} = \sqrt{1-x^2}\left\{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{3x^4} + \frac{2.4}{3.5x^6} + \frac{2.4.6}{3.5.7x^8} + \dots\right\}$.

52) $\arcsin \frac{1}{x} = \sqrt{x^2-1}\left\{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{3x^4} + \frac{2.4}{3.5x^6} + \frac{2.4.6}{3.5.7x^8} + \dots\right\}$.

53) $\sin n\varphi = n \sin\varphi - \frac{n(n^2-1)}{3!}\sin^3\varphi + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{5!}\sin^5\varphi -$

$- \frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{7!}\sin^7\varphi + \dots$

54) $\cos n\varphi = 1 - \frac{n^2}{2!}\sin^2\varphi + \frac{n^2(n^2-4)}{4!}\sin^4\varphi - \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{6!}\sin^6\varphi + \dots$

Rozwiązania XV. 1) $\log(a+x)+C$. 2) $\operatorname{arctang}\frac{x}{a}+C$. 3) $\frac{1}{3}\log\frac{1+x}{\sqrt{1-x+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctang}\frac{x\sqrt{3}}{2-x}+C$. 4) $\frac{1}{3}\log\frac{\sqrt{1-x+x^2}}{1+x} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctang}\frac{x\sqrt{3}}{2-x}+C$. 5) $\frac{1}{3}\log(1+x^3)+C$. 6) Podst. $x^3=z$, $\frac{1}{3}\operatorname{arctang} x^3 + C$. 7) $\arcsin x + C$. 8) $2\arcsin\sqrt{x}+C$. 9) $\log(x+\sqrt{1+x^2})+C$. 10) $C-\frac{1}{(n-1)(1-x)^{n-1}}$. 11) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctang}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C$. 12) $\frac{1}{3}\operatorname{arctang}\frac{3x(1-x^2)}{1-4x^2+x^4}+C$. 13) $\log(1+x+x^2)+C$. 14) $\frac{1}{\sin\alpha}\operatorname{arctang}\frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}+C$. 15) $C-\cos\alpha\log\sqrt{1-2x\cos\alpha+x^2}+\sin\alpha.\operatorname{arctang}\frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}$. 18)—50) Funkcye, nie dające się, w ogólności, wyrazić przez znane funkcye elementarne w formie skończonej.

Literatura. Leonard Euler. Anleitung zur Integralrechnung aus dem Lateinischen ins Deutsche übersetzt von Joseph Salamon. I. Band. Wien 1828. Axel Harnack. Die Elemente der Differential- und Integralrechnung. Leipzig 1881. Oskar Schlömilch. Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis. Zweiter Theil: Aufgaben aus der Integralrechnung. Vierte Auflage, bearbeitet von Henke. Leipzig 1900.

Tematy do rozprawek naukowych.

1. Zasady jednostajnej zbieżności szeregów nieskończonych.
2. Zasady różniczkowania i całkowania funkcyj, określonych szeregami nieskończonymi.
3. Rozwijanie funkcyj na szeregi przy pomocy rachunku całkowego.

Wykład XVI.

Szczególne uwagi, dotyczące rozwijania całek.

1. Całki pierwszego i wyższych rzędów. Danej funkcyi $f(x)$ odpowiada jak wiemy, jako funkcya pierwotna, pewna nowa funkcya $F(x)$ ze stałą do wolną C, zwana całką nieokreśloną funkcyi $f(x)$, przedstawiona symbolicznie w postaci:
$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$
przyczem funkcya $F(x)$ da się, za pomocą rozmaitych metod całkowania albo wyznaczyć przez znane funkcye elementarne w liczbie skończonej, lub też przedstawia nową funkcyę przestępną, dla której możemy zawsze wyznaczyć pewien szereg nieskończony, jako jej element.

Ponieważ otrzymana całka, kształtu: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, jest znowu pewną funkcyą zmiennej x, więc możemy do niej zastosować ponownie prawidła całkowania, a otrzymamy nową funkcyę, którą oznaczamy w postaci
$$\int[\int f(x)\,dx]\,dx\text{, lub: }\int\int f(x).dx^2\text{, lub: }\int_2 f(x)\,dx^2,$$
i nazywamy całką drugiego rzędu danej funkcyi $f(x)$.

Powtarzając to postępowanie, otrzymujemy ogólnie całkę n-go rzędu danej funkcyi $f(x)$, którą przedstawiamy symbolicznie w postaci:
$$\int\int\ldots\int f(x)\,dx^n\text{, lub krótko w postaci: }\int_n f(x)\,dx^n.$$

Całka n-go rzędu danej funkcyi, jest, wobec tego określenia, pewną, nową funkcyą, która ma tę własność, że jej n-ta pochodna jest równa danej funkcyi $f(x)$.

Oznaczając tą niewiadomą funkcyę przez y, otrzymujemy, na jej określenie, równanie różniczkowe n-go rzędu (Por. Tom. I. str. 673.), w postaci
$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x),$$
z którego otrzymujemy kolejno:
$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \int f(x)\,dx + C_1,$$
$$\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} = \int\int f(x)\,dx^2 + C_1 x + C_2,$$
$$\frac{d^{n-3} y}{dx^{n-3}} = \int\int\int f(x)\,dx^3 + C_1 x^2 + C_2 x + C_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dy}{dx} = \int\int\ldots\int f(x)\,dx^{n-1} + C_1 x^{n-2} + C_2 x^{n-3} + \ldots + C_{n-2} x + C_{n-1},$$
a ostatecznie:
$$y = \int\int\ldots\int f(x)\,dx^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n. \quad (1)$$

2. Całki ogólne i całki szczególne dowolnego rzędu. Całka n-go rzędu ...ej funkcyi $f(x)$ składa się, według wzoru (1), w ogólnej postaci, z pewnej, ...aczyć się dającej, funkcyi $F(x)$ i z funkcyi całkowitej $(n-1)$-go rzędu ze ...lędu na zmienną x, o n stałych, dowolnych, spółczynnikach: $C_1, C_2, \ldots, C_n$. ... tej postaci, nazywamy tę całkę n-go rzędu danej funkcyi $f(x)$, całką ...ólną n-go rzędu, a wszystkie funkcye, jakie z niej otrzymujemy, na...jąc stałym dowolnym: $C_1, C_2, \ldots, C_n$, pewne szczególne wartości, nie wy...łczając zera, nazywamy całkami szczególnemi n-go rzędu danej ...ikcyi $f(x)$. Najprostszą z nich jest ta całka szczególna $F(x)$, jaką otrzy...uje się z całki ogólnej, nadając wszystkim stałym dowolnym: $C_1, C_2, \ldots, C_n$, ...rtości równe zeru.

3. Przykłady. *a)* Całki ogólne, wyższych rzędów funkcyi: x^m, dla $m \gtrless -1$, przedsta...wią się kolejno w postaci:

$$\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C_1,$$

$$\int\int x^m\,dx^2 = \frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + C_1x + C_2,$$

$$\int\int\int x^m\,dx^3 = \frac{x^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)} + C_1x^2 + C_2x + C_3,$$

$$\int\int\ldots\int x^m\,dx^n = \frac{x^{m+n}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)} + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n,$$

b) Całki ogólne, wyższych rzędów funkcyi: e^x, mają kształt:

$$\int\int\ldots\int e^x\,dx^n = e^x + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n;$$

c) Całki ogólne wyższych rzędów, przynależne funkcyi: $\sin x$, otrzymujemy kolejno ...postaciach:

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C_1 = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + C_1,$$

$$\int\int \sin x\,dx^2 = \sin\left(x - \frac{2\pi}{2}\right) + C_1x + C_2,$$

$$\int\int\int \sin x\,dx^3 = \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) + C_1x^2 + C_2x + C_3,$$

...ólnie:

$$\int\int\ldots\int \sin x\,.\,dx^n = \sin\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n.$$

Podobnie, otrzymamy całkę ogólną n-go rzędu, dla funkcyi: $\cos x$, w postaci:

$$\int\int\ldots\int \cos x\,.\,dx^n = \cos\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n.$$

d) Całki wyższych rzędów funkcyi $f(x)$, określonej szeregiem potęgowym:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m + \ldots$$

...pewnym zakresie zbieżności, przedstawiają się w postaci szeregów potęgowych, o tym ...nym zakresie zbieżności, w postaci:

$$\int f(x)\,dx = C_1 + a_0x + \frac{a_1x^2}{2} + \frac{a_2x^3}{3} + \ldots + \frac{a_mx^{m+1}}{m+1} + \ldots$$

$$\int\int f(x)\,dx^2 = C_2 + C_1x + \frac{a_0x^2}{1.2} + \frac{a_1x^3}{2.3} + \frac{a_2x^4}{3.4} + \ldots + \frac{a_mx^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + \ldots$$

$$\ldots\int f(x)\,dx^3 = C_3 + C_2x + C_1x^2 + \frac{a_0x^3}{1.2.3} + \frac{a_1x^4}{2.3.4} + \frac{a_2x^5}{3.4.5} + \ldots + \frac{a_mx^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \ldots$$

...ólnie:

$$\ldots\int f(x)\,dx^n = C_n + C_{n-1}x + \ldots + C_2x^{n-2} + C_1x^{n-1} + \frac{a_0x^n}{1.2.3\ldots n} + \frac{a_1x^{n+1}}{2.3.4\ldots(n+1)} +$$

$$+ \frac{a_2x^{n+2}}{3.4.5\ldots(n+2)} + \ldots + \frac{a_mx^{n+m}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)} + \ldots$$

4. Ogólny wzór, dotyczący wyznaczania całki n go rzędu danej fu $f(x)$ za pomocą n całek pojedyńczych. Niech będzie daną funkcya której najprostszą całką szczególną pierwszego rzędu jest funkcya:

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

Mając wyznaczyć całkę drugiego rzędu: $\iint f(x)\,dx^2 = \int [\int f(x)\,dx]\,d$ stosujmy metodę całkowania przez części,

kładąc: $u = \int f(x)\,dx$, $dv = dx$, a zatem: $du = f(x)\,dx$, $v = x$,

natenczas, otrzymamy najprostszą całkę szczególną drugiego rzędu, wy w postaci:

$$\iint f(x)\,dx^2 = x\int f(x)\,dx - \int x\,f(x)\,dx,$$

zawierającej dwie całki rzędu pierwszego.

Stosując metodę całkowania przez części do całki trzeciego kształtu:

$$\iiint f(x)\,dx^3 = \int [\iint f(x)\,dx^2]\,dx,$$

połóżmy: $u = \iint f(x)\,dx^2$, $dv = dx$, zatem: $du = dx . \int f(x)\,dx$, $v = x$,

a otrzymamy wzór:

$$\iiint f(x)\,dx^3 = x\iint f(x)\,dx^2 - \int [x\int f(x)\,dx]\,dx.$$

Pierwsza całka w tym wzorze wyznacza się wzorem (2). Celem w czenia drugiej całki, kształtu: $\int [x\int f(x)\,dx]\,dx$, połóżmy:

$u = \int f(x)\,dx$, $dv = x\,dx$, a zatem: $du = f(x)\,dx$, $v = \frac{x^2}{2}$,

a otrzymamy:

$$\int [x\int f(x)\,dx]\,dx = \frac{x^2}{2}\int f(x)\,dx - \frac{1}{2}\int x^2 f(x)\,dx.$$

Wobec tego, wzór (a) przedstawi się w postaci:

$$\iiint f(x)\,dx^3 = x^2\int f(x)\,dx - x\int x\,f(x)\,dx - \frac{x^2}{2}\int f(x)\,dx + \frac{1}{2}\int x^2 f(x)\,dx,$$

czyli:

$$\iiint f(x)\,dx^3 = \frac{1}{2}x^2\int f(x)\,dx - x\int x\,f(x)\,dx + \frac{1}{2}\int x^2 f(x)\,dx,$$

wyrażającej całkę trzeciego rzędu, przez trzy całki rzędu pierwszego

Przedstawiwszy wzór (3) w postaci:

$$2!\iiint f(x)\,dx^3 = x^2\int f(x)\,dx - \binom{2}{1}x\int x\,f(x)\,dx + \int x^2 f(x)\,dx,$$

domyślamy się wzoru ogólnego w postaci:

$$(n-1)!\iint\ldots\int f(x)\,dx^n = x^{n-1}\int f(x)\,dx - \binom{n-1}{1}x^{n-2}\int x\,f(x)\,dx +$$
$$+\binom{n-1}{2}x^{n-3}\int x^2 f(x)\,dx - \binom{n-1}{3}x^{n-4}\int x^3 f(x)\,dx + \ldots +$$
$$+(-1)^r\binom{n-1}{r}x^{n-r-1}\int x^r f(x)\,dx + \ldots + (-1)^{n-2}\binom{n-1}{n-2}x\int x^{n-2} f(x)\,dx +$$
$$+(-1)^{n-1}\int x^{n-1} f(x)\,dx.$$

Przypuśćmy, że wzór ten jest dla pewnego n prawdziwy, (a prawdziwość jego dowiedliśmy bezpośrednio dla $n=2$ i dla $n=3$), natenczas, wskutek powtórzonego całkowania i uwzględniając, że: $\int[x^{n-r}\int x^{r-1}f(x)\,dx]\,dx$, na podstawie całkowania przez części, pod założeniem:

$$u=\int x^{r-1}f(x)\,dx \qquad du=x^{r-1}f(x)\,dx,$$

$$dv=x^{n-r}dx, \qquad \text{a zatem:} \quad v=\frac{x^{n-r+1}}{n-r+1},$$

przedstawia się w postaci:

$$\int[x^{n-r}\int x^{r-1}f(x)\,dx]\,dx=\frac{x^{n-r+1}}{n-r+1}\int x^{r-1}f(x)\,dx-\frac{1}{n-r+1}\int x^n f(x)\,dx,$$

otrzymamy z wzoru (4) wzór następujący:

$$\begin{aligned}(n-1)!\int\!\!\int\ldots\int f(x)\,dx^{n+1}&=\frac{x^n}{n}\int f(x)\,dx-\frac{1}{n}\int x^n f(x)\,dx-\\
&-\binom{n-1}{1}\frac{x^{n-1}}{n-1}\int xf(x)\,dx+\binom{n-1}{1}\frac{1}{n-1}\int x^n f(x)\,dx+\\
&+\binom{n-1}{2}\frac{x^{n-2}}{n-2}\int x^2f(x)\,dx-\binom{n-1}{2}\frac{1}{n-2}\int x^n f(x)\,dx-\\
&-\binom{n-1}{3}\frac{x^{n-3}}{n-3}\int x^3f(x)\,dx+\binom{n-1}{3}\frac{1}{n-3}\int x^n f(x)\,dx+\\
&+\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad+\\
&+(-1)^r\binom{n-1}{r}\frac{x^{n-r}}{n-r}\int x^r f(x)\,dx-(-1)^r.\binom{n-1}{r}.\frac{1}{n-r}\int x^n f(x)\,dx,\\
&+\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad+\\
&+(-1)^{n-2}\binom{n-1}{n-2}\frac{x^2}{2}\int x^{n-2}f(x)\,dx-(-1)^{n-2}\binom{n-1}{n-2}\cdot\frac{1}{2}\int x^n f(x)\,dx,\\
&+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}\frac{x}{1}\int x^{n-1}f(x)\,dx-(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}\cdot\frac{1}{1}\int x^n f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Zważywszy jednak, że:

$$\binom{n-1}{r}.\frac{1}{n-r}=\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-r)}{1.2\ldots r.(n-r)}=\frac{1}{n}.\binom{n}{r},$$

a przytem:

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\ldots+(-1)^r\binom{n}{r}+\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}+(-1)^n=0,$$

otrzymamy z powyższego wzoru, jeżeli go obustronnie przez n pomnożymy, wzór następujący:

$$\begin{aligned}n!\int\!\!\int\ldots\int f(x).\,dx^{n+1}&=x^n\int f(x)\,dx-\binom{n}{1}x^{n-1}\int xf(x)\,dx+\\
+\binom{n}{2}x^{n-2}\int x^2f(x)\,dx-\binom{n}{3}x^{n-3}&\int x^3f(x)\,dx+\ldots+(-1)^r\binom{n}{r}x^{n-r}\int x^r f(x)\,dx+\ldots+\\
&+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}x\int x^{n-1}f(x)+(-1)^n\int x^n f(x)\,dx, \qquad (5)\end{aligned}$$

który powstaje widocznie z przyjętego wzoru (4), jeżeli w nim zastąpimy n przez $n+1$. Jeżeli więc wzór przyjęty jest, dla pewnego n, prawdziwy, to i dla $n+1$ musi być prawdziwy, a że jego prawdziwość została dla $n=2, 3$, bezpośrednio dowiedzioną, przeto wzór ten jest ogólnie prawdziwy.

Mamy zatem dowiedziony wzór ogólny:

$$\iint \dots \int f(x)\, dx^n = \frac{1}{(n-1)!}\left\{x^{n-1}\int f(x)\,dx - \binom{n-1}{1} x^{n-2}\int x f(x)\, dx + \dots + \right.$$
$$\left. + (-1)^{n-1}\int x^{n-1} f(x)\, dx\right\},$$

czyli:
$$\iint \dots \int f(x)\, dx^n = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{r=0}^{r=n-1} (-1)^r \binom{n-1}{r} x^{n-r-1}\int x^r f(x)\, dx, \qquad (6)$$

który wyznaczanie n-krotnej całki danej funkcyi $f(x)$ sprowadza do wyznaczania n całek pojedyńczych, kształtu: $\int x^r f(x)\, dx$, dla $r=0, 1, \dots, (n-1)$.

Do tak wyznaczonej całki należy oczywiście dodać funkcyę całkowitą $(n-1)$ stopnia o dowolnych spółczynnikach w postaci:

$$C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_n = \sum_{r=1}^{r=n} C_r x^{n-r},$$

chcąc otrzymać ogólną całkę n-krotną danej funkcyi $f(x)$.

5. Uwaga. Wzór powyższy, jest szczególniej wówczas przydatny, gdy jesteśmy w stanie całkę, kształtu: $\int x^r f(x)\, dx$ bezpośrednio wyznaczyć.

Tak n. p. otrzymamy, na podstawie powyższego wzoru, dla $f(x) = \frac{1}{x}$ najprostszą całkę n-krotną w postaci:

$$\iint \dots \int \frac{1}{x}\, dx^n = \frac{1}{(n-1)!}\left\{x^{n-1}\int \frac{dx}{x} - \binom{n-1}{1} x^{n-2}\int dx + \binom{n-1}{2} x^{n-3}\int x\, dx - \right.$$
$$\left. - \binom{n-1}{3} x^{n-4}\int x^2\, dx + \dots + (-1)^{n-2}\binom{n-1}{n-2} x\int x^{n-3}\, dx + (-1)^{n-1}\int x^{n-2}\, dx\right\},$$

z której otrzymujemy:

$$\iint \dots \int \frac{1}{x}\, dx^n = \frac{1}{(n-1)!}\left\{x^{n-1}\log x - \binom{n-1}{1} x^{n-1} + \binom{n-1}{2}\frac{x^{n-1}}{2} - \binom{n-1}{3}\frac{x^{n-3}}{3} + \dots + \right.$$
$$\left. + (-1)^{n-2}\binom{n-1}{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-2} + (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n-1}\right\},$$

a więc, ogólną całkę n-krotną, w postaci:

$$\iint \dots \int \frac{1}{x}\, dx^n = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left\{\log x - \binom{n-1}{1} + \frac{1}{2}\binom{n-1}{2} - \frac{1}{3}\binom{n-1}{3} + \dots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n-1}\right\} +$$
$$+ C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_{n-1} x + C_n.$$

W przypadkach, w których poszczególne całki pojedyńcze nie dadzą się przedstawić za pomocą znanych funkcyj w formie skończonej, wypadnie wyznaczyć je przy pomocy odnośnych szeregów potęgowych.

6. Metoda wyznaczania całek pojedyńczych przy pomocy szeregów z nieoznaczonymi spółczynnikami. Mając wyznaczyć całkę, kształtu: $\int f(x)\, dx = F(x)$, gdzie $f(x)$ jest pewną znaną funkcyą, złożoną w pewien sposób ze znanych funkcyj elementarnych, możemy uczynić pewne założenia co do niewiadomej funkcyi $F(x)$, a to, możemy ją, albo określić wprost za pomocą szeregów potęgowych, w postaci:

$$F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_n x^n + \dots$$

z których wynika:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \dots + nA_n x^{n-1} + \dots$$

gdzie spółczynniki: $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ są na razie nieoznaczone, lub możemy ją przedstawić, jako iloczyn z pewnej, stosownie dobranej znanej funkcyi $f(x)$ i dowolnego szeregu potęgowego: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$, z nieoznaczonymi spółczynnikami: $a_0, a_1, a_2, \dots a_n, \dots$, kładziemy tedy:

$$F(x)=\varphi(x)\{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots\},$$

skąd, otrzymujemy:

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=\varphi(x)\{a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots\}+$$

$$+(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots)\frac{d\varphi(x)}{dx}.$$

Na podstawie znanej funkcyi $f(x)$, względnie znanych funkcyj: $f(x)$ i $\varphi(x)$, możemy tedy otrzymać dwa tożsamościowe rozwinięcia, ważne w pewnym zakresie zbieżności, a porównując spółczynniki obu tych rozwinięć, możemy wyznaczyć niewiadome spółczynniki przyjętego szeregu.

Szczególne ułatwienia zależą oczywiście od kształtu i rodzaju danej funkcyi $f(x)$.

7. Przykłady. 1) Wyznaczyć całkę: $\int\frac{dx}{1+x}$ za pomocą metody nieoznaczonych spółczynników.

Rozwiązanie. Kładąc: $\int\frac{dx}{1+x}=F(x)$, połóżmy:

$$F(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots+A_nx^n+\ldots$$

natenczas, otrzymamy:

$$\frac{1}{1+x}=A_1+2A_2x+3A_3x^2+\ldots+nA_nx^{n-1}+\ldots$$

a stąd, równanie tożsamościowe:

$$1=(1+x)(A_1+2A_2x+3A_3x^2+\ldots+nA_nx^{n-1}+\ldots),$$

czyli:

$$1=A_1+2A_2x+3A_3x^2+\ldots+nA_nx^{n-1}+\ldots+A_1x+2A_2x^2+\ldots+(n-1)A_{n-1}x^{n-1}+\ldots$$

skąd, porównując spółczynniki przy równych potęgach, dostajemy na wyznaczenie niewiadomych spółczynników: A_1, A_2,..., A_n,... równania warunkowe:

$$A_1=1,\ 2A_2+A_1=0,\ 3A_3+2A_2=0,\ldots nA_n+(n-1)A_{n-1}=0,$$

a stąd:

$$A_1=1,\ A_2=-\frac{1}{2},\ A_3=\frac{1}{3},\ldots,\ A_n=(-1)^{n-1}.\frac{1}{n},\ldots$$

zatem:

$$\int\frac{dx}{1+x}=C+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}.\frac{x^n}{n}+\ldots$$

2) Wyznaczyć tą drogą całkę: $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

Rozwiązanie. Kładąc: $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}=F(x)$, połóżmy:

$$F(x)=\sqrt{1+x^4}(a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots),$$

natenczas, otrzymamy:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}=\sqrt{1+x^4}(a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots)+(a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots).\frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}$$

a stąd, równanie tożsamościowe:

$$1=(1+x^4)(a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots)+2x^3(a_1x+a_2x^2+\ldots),$$

czyli:

$$\begin{aligned}1=a_1+2a_2x+3.a_3x^2+4.a_4x^3+5a_5x^4+6.a_6x^5+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots\\+a_1x^4+2.a_2x^5+\ldots+(n-4)a_{n-4}x^{n-1}+\ldots\\+2a_1x^4+2.a_2x^5+\ldots+2a_{n-4}x^{n-1}+\ldots\end{aligned}$$

które prowadzi do równań warunkowych:

$\alpha_1 = 1$, $2\alpha_2 = 0$, $3\alpha_3 = 0$, $4\alpha_4 = 0$, $5\alpha_5 + 3\alpha_1 = 0$, $6\alpha_6 + 4\alpha_2 = 0$, .., ogólnie: $n\alpha_n + (n-2)\alpha_{n-4} = 0$,

z których wynika:
$$\alpha_n = -\frac{n-2}{n}\alpha_{n-4},$$
przyczem:
$$\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 0,\ \alpha_4 = 0,$$
jest zatem:
$$\alpha_5 = -\frac{3}{5}\alpha_1,\ \alpha_9 = -\frac{7}{9}\alpha_5,\ \alpha_{13} = -\frac{11}{13}\alpha_9, \dots$$
$$\alpha_1 = 1,\ \alpha_5 = -\frac{3}{5},\ \alpha_9 = \frac{3.7}{5.9},\ \alpha_{13} = -\frac{3.7.11}{5.9.13}, \dots$$

Wobec tego, otrzymujemy szukaną całkę, w postaci:
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = C + \left\{x - \frac{3}{5}x^5 + \frac{3.7}{5.9}x^9 - \frac{3.7.11}{5.9.13}x^{13} + \dots\right\}\sqrt{1+x^4},$$
ważnej dla $|x| < 1$.

8. Rozwijanie funkcyj na szeregi przy pomocy całkowania, lub różniczkowania szeregów o nieoznaczonych spółczynnikach. Metodę, powyżej wskazaną, możemy zastosować do rozwijania znanych funkcyj na szeregi potęgowe. Niech będzie daną funkcya $F(x)$, połóżmy:
$$F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n + \dots,$$
natenczas, otrzymamy:
$$\frac{dF(x)}{dx} = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \dots + nA_n x^{n-1} + \dots$$
$$\frac{d^2F(x)}{dx^2} = 2A_2 + 2.3.A_3 x + 3.4.A_4 x^2 + \dots + (n-1)n A_n x^{n-2} + \dots$$

. . . .

a zarazem:
$$\int F(x)\,dx = C_1 + A_0 x + A_1\frac{x^2}{2} + \frac{A_2 x^3}{3} + \dots + \frac{A_n x^{n+1}}{n+1} + \dots,$$
$$\int\!\!\int F(x)\,dx^2 = C_2 + C_1 x + \frac{A_0 x^2}{2} + \frac{A_1 x^3}{2.3} + \frac{A_2 x^4}{3.4} + \dots + \frac{A_n x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \dots$$

. . . .

Znając, tedy, bądźto którąkolwiek pochodną, bądź funkcyę pierwotną danej funkcyi $F(x)$, względnie ich związki z tą daną funkcyą, możemy zawsze otrzymać przynajmniej dwa rozwinięcia tożsamościowe, na podstawie których możemy wyznaczyć niewiadome spółczynniki.

Mając n. p. tą drogą rozwinąć na szereg funkcyę: a^x, przy dowolnem skończonem a, różnem od zera, to wiedząc, że, dla $x = 0$, mamy: $a^x = a^0 = 1$, możemy położyć:
$$a^x = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_n x^n + \dots$$

Wobec tego, otrzymujemy:
$$\int a^x\,dx = C + x + \frac{A_1 x^2}{2} + \frac{A_2 x^3}{3} + \dots + A_{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots$$

Opierając się tedy na całce: $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a}$, otrzymujemy drugie rozwinięcie:
$$a^x = C\log a + x\log a + A_1\log a.\frac{x^2}{2} + A_2\log a.\frac{x^3}{3} + \dots + A_{n-1}\log a.\frac{x^n}{n} + \dots$$
które, porównane z pierwszem, podaje związki między niewiadomymi spółczynnikami:
$$A_1 = \log a,\ A_2 = \frac{A_1\log a}{2},\ A_3 = \frac{A_2\log a}{3}, \dots,\ A_n = A_{n-1}.\frac{(\log a)}{n}, \dots,$$
a stąd, ich wartości:
$$A_1 = \frac{\log a}{1!},\ A_2 = \frac{(\log a)^2}{2!},\ A_3 = \frac{(\log a)^3}{3!}, \dots,\ A_n = \frac{(\log a)^n}{n!},$$
zatem, szukane rozwinięcie:
$$a^x = 1 + \frac{x\log a}{1!} + \frac{x^2(\log a)^2}{2!} + \frac{x^3(\log a)^3}{3!} + \dots + \frac{x^n(\log a)^n}{n!} + \dots$$

9. Uwaga. W szczególnych przypadkach wskazanem jest, rozwijanie danej funkcyi, względnie jej całki, za pomocą metody nieoznaczonych spółczynników, oprzeć na równaniu rożniczkowem tej funkcyi.

Mając n. p. rozwinąć na szereg funkcyę: $y = e^{a.\text{arc}\sin x}$, względnie jej całkę: $\int y\,dx = \int e^{a.\text{arc}\sin x}\,dx$, wyprowadzimy najpierw jej równanie różniczkowe.

W tym celu, otrzymujemy:

$$y' = \frac{a.e^{a.\text{arc}\sin x}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{ay}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y'' = \frac{ay'(1-x^2)+ayx}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{ay'}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{ax}{1-x^2}\cdot\frac{y}{\sqrt{1-x^2}},$$

a stąd, równanie różniczkowe drugiego rzędu, odpowiadające tej funkcyi, w postaci:

$$(1-x^2)y'' - xy' = a^2 y.$$

Połóżmy teraz:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \text{ a więc:}$$
$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1} + \ldots$$
$$y'' = 2a_2 + 2.3.a_3 x + \ldots + (n-1)n a_n x^{n-2} + \ldots$$

natenczas, otrzymamy z równania różniczkowego, dwa rozwinięcia tożsamościowe:

$$(1-x^2)[2a_2 + 2.3a_3 x + \ldots + (n-1)na x^{n-2} + \ldots] - x[a_1 + 2a_2 x + \ldots + na_n x^{n-1} + \ldots] =$$
$$= a^2[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots]$$

z których, porównawszy obustronnie spółczynniki przy $(n-2)$-giej potędze zmiennej x, dostajemy związek między szukanymi spółczynnikami, w postaci:

$$(n-1)na_n - (n-3)(n-2)a_{n-2} - (n-2)a_{n-2} = a^2 a_{n-2},$$

czyli:

$$(n-1)n\,a_n = [a^2 + (n-2)^2]a_{n-2},$$

a zatem, wzór ogólny:

$$a_n = \frac{a^2 + (n-2)^2}{(n-1)n}a_{n-2},$$

który dozwala wyznaczyć bezpośrednio, wszystkie spółczynniki: $a_2, a_3, \ldots, a_n$, gdy znane są dwa pierwsze a_0 i a_1.

Skoro, atoli: $a_0 = y_0 = e^0 = 1$, $a_1 = y'_0 = a$, zatem, otrzymujemy:

$$a_2 = \frac{a^2}{2!}, \quad a_4 = \frac{a^2(a^2+2^2)}{4!},$$

ogólnie:

$$a_{2n} = \frac{a^2(a^2+2^2)\ldots[a^2+(2n-2)^2]}{(2n)!},$$

a zarazem:

$$a_3 = \frac{a(a^2+1^2)}{3!}, \quad a_5 = \frac{a(a^2+1^2)(a^2+3^2)}{5!}, \ldots$$

ogólnie:

$$a_{2n+1} = \frac{a(a^2+1^2)(a^2+3^2)\ldots[a^2+(2n-1)^2]}{(2n+1)!},$$

a więc, rozwinięcie:

$$e^{a.\text{arc}\sin x} = 1 + ax + \frac{a^2}{2!}x^2 + \frac{a(a^2+1^2)}{3!}x^3 + \frac{a^2(a^2+2^2)}{4!}x^4 + \frac{a(a^2+1^2)(a^2+3^2)}{5!}x^5 + \ldots$$

a zarazem:

$$\int e^{a.\text{arc}\sin x}\,dx = C + x + \frac{a.x^2}{2!} + \frac{a^2.x^3}{3!} + \frac{a(a^2+1^2)x^4}{4!} + \frac{a^2(a^2+2^2)x^5}{5!} + \ldots$$

10. Rozwijanie danej funkcyi według potęg innej znanej funkcyi. Metody, umożebniające rozwinięcie danej funkcyi zmiennej x, według potęg tejże zmiennej, umożebniają takie rozwinięcie tej funkcyi według potęg innej funkcyi, dowolnie obranej.

Mając n. p. rozwinąć daną funkcyę: $F(x)$ według potęg innej, znanej funkcyi: $f(x)$, uważamy funkcyą $f(x)$, jako nową zmienną z, kładąc $z = f(x)$; zmienna x będzie tedy funkcyą odwrotną zmiennej z, w postaci: $x = \varphi(z)$. Dana funkcya: $F(x)$ przedstawi się w postaci:

$$F(x) = F[\varphi(z)].$$

Rozwinąwszy więc funkcyę $F[\varphi(z)]$ według potęg zmiennej z, otrzymamy tem samem rozwinięcie funkcyi: $F(x)$ według potęg funkcyi: $f(x)$.

Mając n. p. rozwinąć funkcyę $y = \sin mx$, według potęg funkcyi: $\sin x$, połóżmy: $\sin x = z$, zatem: $x = \arc\sin z$, a więc: $\sin mx = \sin(m \arc\sin z)$, a otrzymamy daną funkcyę w postaci:

$$y = \sin(m \arc\sin z). \qquad (a)$$

Oznaczając pochodne tej funkcyi względem zmiennej z kolejno przez: y', y'',..., $y^{(n)}$, otrzymamy, najpierw:

$$y' = \frac{m \, . \cos(m \arc\sin z)}{\sqrt{1-z^2}},$$

czyli:

$$\frac{\sqrt{1-z^2}}{m} \, . \, y' = \cos(m \arc\sin z), \qquad (b)$$

Dodając do siebie kwadraty obu stron równań (a) i (b), otrzymujemy: $\frac{1-z^2}{m^2} y'^2 + y^2 = 1$, czyli równanie różniczkowe pierwszego rzędu, w postaci: $(1-z^2)y'^2 + m^2y^2 = m^2$.

Ponowne różniczkowanie sprowadza to równanie do postaci:

$$(1 - z^2) y' y'' - zy'^2 + m^2 y y' = 0,$$

z której dostajemy równanie różniczkowe drugiego rzędu, odpowiadające danej funkcyi, w postaci:

$$(1 - z^2)y'' - zy' + m^2 y = 0.$$

Na podstawie tego równania, dostajemy równanie różniczkowe n-go rzędu, odpowiadające danej funkcyi, kształtu:

$$(1-z^2) y^{(n)} - (2n-3) z \, y^{(n-1)} - \{(n-2)^2 - m^2\} \, y^{(n-2)} = 0,$$

a stąd, dla $z = 0$, związek:

$$y_0^{(n)} = [(n-2)^2 - m^2] \, y_0^{(n-2)}. \qquad (c)$$

Ponieważ, dla $z = 0$, mamy: $y_0 = 0$, $y'_0 = m$, przeto otrzymujemy, na podstawie wzoru c): $y''_0 = 0$, $y'''_0 = -m(m^2-1^2)$, ogólnie: $y_0^{(2n)} = 0$, $y_0^{(2n+1)} = (-1)^n m (m^2-1^2) \dots [m^2-(2n-1)^2]$, a zatem, na podstawie wzoru Maclaurina, szereg:

$$\sin(m \arc\sin z) = mz - \frac{m(m^2-1^2)}{3!} z^3 + \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{5!} z^5 - \dots$$

z którego wypływa wprost rozwinięcie:

$$\sin mx = m \sin x - \frac{m(m^2-1^2)}{3!} \sin^3 x + \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{5!} \sin^5 x - \dots$$

Podobnie, znajdziemy:

$$\cos mx = 1 - \frac{m^2}{2!} \sin^2 x + \frac{m^2(m^2-2^2)}{4!} \sin^4 x - \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{6!} \sin^6 x + \dots$$

Oba rozwinięcia są ważne dla wszelkiej, skończonej wartości spółczynnika m.

11. Całki funkcyj uwikłanych. Wartości funkcyi uwikłanej, określonej równaniem, bądź to algebraicznem, bądź przestępnem, kształtu ogólnego: $F(x, y) = 0$, dadzą się także, podobnie, jak wartości funkcyj wyraźnych, rozwinąć na szeregi potęgowe, na mocy wzorów Taylora, lub Maclaurina, w postaci:

$$y = y_a + y'_a(x-a) + \frac{y''_a}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}_a}{n!}(x-a)^n + \dots,$$

względnie:

$$y = y_0 + y'_0 x + \frac{y''_0}{2!} x^2 + \dots + \frac{y_0^{(n)}}{n!} x^n + \dots$$

o ile miejsce: $x = a$, względnie $x = 0$, nie należy do miejsc nieskończonościowych, krytycznych, lub istotnie osobliwszych funkcyi y. (Por. T. I. str. 556.)

W tym celu, należy, na podstawie danego równania: $F(x, y) = 0$, wyznaczyć wartość funkcyi y w miejscu: $x = a$, względnie $x = 0$, tudzież wartości wszystkich pochodnych w przyjętem miejscu, (patrz Tom I. str. 675.). Jeżeli funkcya uwikłana, określona danem równaniem, jest wielowartościowa, na-

tenczas odpowiada danemu miejscu $x=a$, tyle różnych szeregów potęgowych, ile wartości y_a, dana funkcya y w tem miejscu posiada, z wyłączeniem wspomnianych miejsc osobliwych funkcyi y.

Całka funkcyi uwikłanej, kształtu: $\int y\,dx$, gdzie $F(x,y)=0$, da się zatem także przedstawić szeregami potęgowemi, kształtu:

$$\int y dx = C + y_a(x-a) + y'_a\frac{(x-a)^2}{2!} + y''_a\frac{(x-a)^3}{3!} + \dots + y_a^{(n-1)}\frac{(x-a)^n}{n!} + \dots$$

względnie:

$$\int y\,dx = C + y_0x + y'_0\frac{x^2}{2!} + y''_0\frac{x^3}{3!} + \dots + y_0^{(n-1)}\frac{x^n}{n!} + \dots$$

których ilość odpowiada ilości szeregów potęgowych, przynależnych, jako elementa funkcyi uwikłanej w przyjętem miejscu.

12. Przykłady. 1) Wyznaczyć całkę, kształtu: $\int y\,dx$, jeżeli funkcya y jest określona równaniem: $y^3 - y + xy - x^3 = 0$.

Mamy tu, dla $x=0$, równanie: $y^3 - y = 0$, skąd, otrzymujemy trzy wartości danej funkcyi, w miejscu $x=0$, a to: $y_1=0$ $y_2=+1$, $y_3=-1$; dla każdej z nich musimy tedy wyznaczyć odpowiednie wartości funkcyj pochodnych w miejscu $x=0$.

W tym celu, otrzymamy z równania różniczkowego pierwszego rzędu, przynależnego funkcyi y, w postaci:

$$3y^2y' - y' + y = 0,$$

trzy wartości na y', a mianowicie:

$$y'_1 = 0,\ y'_2 = -\frac{1}{2},\ y'_3 = \frac{1}{2},$$

z równania różniczkowego drugiego rzędu:

$$3y^2y'' + 6yy'^2 - y'' + 2y' = 0,$$

trzy wartości drugiej pochodnej y'', a mianowicie:

$$y_1'' = 0,\ y''_2 = -\frac{1}{2},\ y'' = \frac{1}{4}.$$

Z równania różniczkowego trzeciego rzędu:

$$3y^2y''' + 18yy'y'' + 6y'^3 - y''' + 3y'' - 6 = 0,$$

otrzymujemy trzy wartości na y''', a mianowicie:

$$y_1''' = -6,\ y_2''' = \frac{9}{8},\ y_3''' = \frac{15}{4},\ \text{i t. d.}$$

Otrzymujemy zatem trzy rozwinięcia danej funkcyi trójwartościowej y, w postaci trzech szeregów potęgowych:

$$y_1 = -x^3 - x^4 - x^5 - \dots$$

$$y_2 = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{16}x^3 + \dots$$

$$y_3 = -1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{8}x^3 + \dots,$$

a stąd, trzy szeregi:

$$\int y_1\,dx = C - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} - \dots$$

$$\int y_2\,dx = C + x - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2} - \frac{1}{8}\,\frac{x^3}{3} + \frac{3}{16}\,\frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\int y_3\,dx = C - x + \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2} + \frac{1}{8}\,\frac{x^3}{3} + \frac{5}{8}\,\frac{x^4}{4} + \dots,$$

jako elementy całki, kształtu: $\int y\,dx$, jeżeli funkcya y określona jest równaniem:

$$y^3 - y + xy - x^3 = 0.$$

2) Wyznaczyć całkę, kształtu: $\int y\,dx$, jeżeli funkcya y określona jest równaniem przestępnem: $xy - \log y = 0$.

Dla $x=0$, otrzymujemy tu $\log y=0$, a więc: $y=1+2k\pi i$, zatem jeden pierwiastek rzeczywisty $y_0=1$, na podstawie którego, stosując rachunek, wyłożony w T. I. str. 677., otrzymamy wartości poszczególnych pochodnych w miejscu $x=0$, a mianowicie:

$$y'_0=1,\quad y''_0=3,\quad y_0'''=4^2,\quad y_0^{(4)}=5^3,\ldots,$$

zatem, rozwinięcie:

$$y=1+\frac{2^0}{1!}x+\frac{3^1}{2!}x^2+\frac{4^2}{3!}x^3+\frac{5^3}{4!}x^4+\frac{6^4}{5!}x^5+\ldots$$

Całka tej funkcyi, oparta na jej rzeczywistym pierwiastku, w miejscu $x=0$, przedstawi się zatem w postaci szeregu:

$$\int y\,dx=C+x+\frac{2^0}{2!}x^2+\frac{3^1}{3!}x^3+\frac{4^2}{4!}x^4+\frac{5^3}{5!}x^5+\frac{6^4}{6!}x^6+\ldots$$

Uwzględniając także urojone pierwiastki równania: $\log y=0$, a więc, kładąc: $y_0=1+2k\pi i$, $(k=\pm1,\ \pm2\ldots)$, otrzymujemy:

$$y'_0=(1+2k\pi i)^2,\ y''_0=3^1(1+2k\pi i)^3,\ y'''_0=4^2(1+2k\pi i)^4,\ y_0^{(4)}=5^3(1+2k\pi i)^5,\ldots$$

zatem, rozwinięcie:

$$y=(1+2k\pi i)+\frac{2^0(1+2k\pi i)^2}{1!}x+\frac{3^1(1+2k\pi i)^3}{2!}x^2+\frac{4^2(1+2k\pi i)^4}{3!}x^3+\ldots$$

a więc, dla całki, kształtu: $\int y\,dx$, szereg:

$$\int y\,dx=C+\frac{1+2k\pi i}{1!}x+\frac{2^0(1+2k\pi i)}{2!}x^2+\frac{3^1(1+2k\pi i)^3}{3!}x^3+\frac{4^2(1+2k\pi i)^4}{4!}x^4+\ldots$$

którego promień zbieżności ρ, znajdziemy z warunku:

$$\frac{(n+1)^{n-2}\,|1+2k\pi i|^{n+1}\,.\,n!\,|x^{n+1}|}{(n+1)!\,n^{n-3}\,|1+2k\pi i|^n\,|x^n|}<1,\quad\text{czyli:}\quad\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-3}|1+2k\pi i|\,.\,|x|<1,$$

$$\text{a więc: } |x|<\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\sqrt{1+4k^2\pi^2}},\quad\text{czyli: } |x|<\frac{1}{e\sqrt{1+4k^2\pi^2}}$$

$$\text{w postaci: } \rho=\lim_{n=\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\sqrt{1+4k^2\pi^2}},\quad\text{a więc ostatecznie: } \rho=\frac{1}{e\sqrt{1+4k^2\pi^2}}.$$

Ćwiczenia XVI.

Wyprowadzić i sprawdzić następujące ogólne całki wyższych rzędów:

1) $\int\int\ldots\int dx^n=\frac{x^n}{n!}+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\ldots+C_{n-1}x+C_n.$

2) $\int\int\ldots\int x^m\,dx^n=\frac{x^{m+n}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}+C_1x^{n-1}+\ldots+C_{n-1}x+C_n.$

3) $\int\int\ldots\int\frac{1}{x}\,dx^n=\frac{x^{n-1}\log x}{(n-1)!}+C_1x^{n-1}+\ldots+C_{n-1}x+C_n.$

4) $\int\int\ldots\int\frac{1}{x^n}\,dx^n=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\log x+C_1x^{n-1}+\ldots+C_{n-1}x+C_n.$

5) $\int\int\ldots\int e^{ax}\,dx^n=\frac{1}{a^n}e^{ax}+C_1x^{n-1}+\ldots+C_{n-1}x+C_n.$

6) $\int\int\ldots\int a^x\,dx^n=\frac{a^x}{(\log a)^n}+C_1x^{n-1}+\ldots+C_{n-1}x+C_n.$

7) $\int\int\ldots\int a^{mx}\,dx^n=\frac{a^{mx}}{(m\log a)^n}+C_1x^{n-1}+\ldots+C_{n-1}x+C_n.$

8) $\int\int\ldots\int\sin ax\,dx^n=\frac{1}{a^n}\sin\left(ax-\frac{n\pi}{2}\right)+C_1x^{n-1}+\ldots+C_{n-1}x+C_n.$

9) $\iint\ldots\int \cos ax\, dx^n = \frac{1}{a^n}\cos\left(ax - \frac{n\pi}{2}\right) + C_1 x^{n-1} + \ldots + C_{n-1}x + C_n.$

Wykazać, że:

10) $\iiint \frac{dx^3}{x} = \frac{1}{2}x^2\log x + C_1x^2 + C_2x + C_3.$

11) $\iiiint \frac{dx^4}{(1-x)^5} = \frac{1}{24}\,\frac{x^3}{1-x} + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4.$

12) $\iint\ldots\int \frac{\sqrt{x}}{x^n}\, dx^n = \frac{(-1)^{n-1}\,2^n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\sqrt{x} + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n.$

13) $\iint \frac{dx^2}{x^{1/2}(x-a)^{3/2}} = \frac{4}{3a^2}\sqrt{\frac{x^3}{x-a}} + C_1x + C_2.$

14) $\iint\ldots\int \frac{dx^n}{(a-bx)^{n+1}} = \frac{1}{n!\,b^n}\cdot\frac{1}{a-bx} + C_1x^{n-1} + \ldots + C_{n-1}x + C_n.$

15) $\iint \frac{1+3x+x^2}{(1+x^2)^{5/2}}\, dx^2 = \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x^2}} + C_1x + C_2.$

16) $\iiint \frac{x(a^2-x^2)}{(a^2+x^2)^4}\, dx^3 = \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{a^2+x^2} + C_1x^2 + C_2x + C_3.$

17) $\iiint \frac{\cos x}{\sin^3 x}\, dx^3 = \frac{1}{2}\log\sin x + C_1x^2 + C_2x + C_3.$

18) $\iint[\operatorname{tang} x + \operatorname{tang}^3 x]\, dx^2 = \frac{1}{2}\operatorname{tang} x + C_1x + C_2.$

19) $\iiiint e^{-x}\cos x\, dx^4 = -\frac{1}{4}e^{-x}\cos x + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4.$

20) $\iiiint \frac{e^x + 11e^{2x} + 11e^{3x} + e^{4x}}{(e^x-1)^5}\, dx^4 = \frac{1}{e^x-1} + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4.$

Dowieść że:

21) $\iint f(x)\, dx^2 = x\int f(x)\,dx - \int x f(x)\, dx.$

22) $\iiint f(x)\, dx^3 = \frac{1}{2}x^2\int f(x)\,dx - x\int x f(x)\,dx + \frac{1}{2}\int x^2 f(x)\, dx.$

23) $\iiint\ldots\int f(x)\,.\,dx^n = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{r=0}^{r=n-1}(-1)^r\binom{n-1}{r}x^{n-r-1}\int x^r f(x)\, dx.$

Wyprowadzić następujące rozwinięcia całek:

24) $\int(1+x)^m dx = C + x + \binom{m}{1}\frac{x^2}{2} + \binom{m}{2}\frac{x^3}{3} + \cdots + \binom{m}{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$

25) $\int\frac{dx}{1+x} = C + x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$

26) $\int\frac{dx}{(1+x)^2} = C + x - x^2 + \ldots + (-1)^{n-1}x^n + \ldots$

27) $\int\frac{dx}{(1+x)^3} = C + x - 3\frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n+1}{2}\frac{x^n}{n} + \ldots$

28) $\int\sqrt{1+x}\, dx = C + x + \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2} - \frac{1}{8}\,\frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n\frac{1.3\ldots(2n-5)}{2.4\ldots(2n-2)}\,\frac{x^n}{n} + \ldots$

29) $\int\sqrt{1-x}\, dx = C + x - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2} - \frac{1}{8}\,\frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{1.3\ldots(2n-5)}{2.4\ldots(2n-2)}\,\frac{x^n}{n} - \ldots$

30) $\int(1+x)^{\frac{m}{2}}dx = C + x + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{m(m-2)\ldots(m-2n+2)}{2.4\ldots 2n}\,\frac{x^{n+1}}{n+1}.$

31) $\int\frac{dx}{(1+x)^{\frac{m}{2}}} = C + x + \sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{m(m+2)\ldots(m+2n-2)}{2.4\ldots 2n}\,\frac{x^{n+1}}{n+1}.$

32) $\int \frac{3-x}{(2-x)(1-x)^2} dx = C + \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(2n + 1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1}.$

33) $\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = C + \frac{1}{\sqrt{a}} \left\{x - \frac{b}{2a} \frac{x^2}{2!} + \frac{3b^2 - 4ac}{(2a)^2} \frac{x^3}{3!} - \dots\right\}.$

34) $\int \sqrt{\frac{1 + ax^2}{1 - bx^2}} dx = C + x + (a + b) \frac{x^3}{3!} + 3(3b^2 + 2ab - a^2) \frac{x^5}{5!} +$

$+ 5.3.3(5b^3 + 3b^2a - ba^2 + a^3) \frac{x^7}{7!} + \dots$

35) $\int (a^5 + a^4x - x^5)^{1/5} dx = C + ax + \frac{1}{5} \frac{x^2}{2!} - \frac{4}{5^2a^5} \frac{x^3}{3!} + \frac{4.9}{5^3a^{10}} \frac{x^4}{4!} - \frac{4.9.14}{5^4a^{15}} \frac{x^5}{5!} + \dots$

36) $\int \sqrt{1 + e^x} dx = C + \sqrt{2} \left\{x + \frac{1}{4} \frac{x^2}{2!} + \frac{3}{4^2} \frac{x^3}{3!} + \frac{7}{4^3} \frac{x^4}{4!} + \frac{9}{4^4} \frac{x^5}{5!} + \frac{1}{4^5} \frac{x^6}{6!} + \dots\right\}$

37) $\int e^{e^x} dx = C + e\left\{x + \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{5x^4}{4!} + \frac{15x^5}{5!} + \frac{52x^6}{6!} + \dots\right\}.$

38) $\int \log(1 + x) dx = C + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{3.4} - \frac{x^5}{4.5} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{(n-1)n} + \dots$

39) $\int \log \frac{1+x}{1-x} = C + 2\left\{\frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^6}{5.6} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n-1)2n} + \dots\right\}.$

40) $\int \log(1 - x + x^2) dx = C - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{2x^4}{3.4} + \frac{x^5}{4.5} - \frac{x^6}{5.6} + \dots$

41) $\int \log(x + \sqrt{1 + x^2}) dx = C + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \frac{x^4}{3.4} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^6}{5.6} - \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{x^8}{7.8} + \dots$

42) $\int [\log(x + \sqrt{1 + x^2})]^2 dx = C + \frac{x^3}{1.3} - \frac{2}{3} \frac{x^5}{3.5} + \frac{2.4}{3.5} \frac{x^7}{5.7} - \frac{2.4.6}{3.5.7} \frac{x^9}{7.9} + \dots$

43) $\int \log(x + \sqrt{a^2 + x^2}) dx = C + x \log a + \frac{1}{a} \frac{x^2}{1.2} - \frac{1}{2a^3} \frac{x^4}{3.4} +$

$+ \frac{1.3}{2.4a^5} \frac{x^6}{5.6} - \frac{1.3.5}{2.4.6a^7} \frac{x^8}{7.8} + \dots$

Wyprowadzić następujące rozwinięcia funkcyj:

44) $\frac{\sin mx}{\cos^m x} = \binom{m}{1} \operatorname{tang} x - \binom{m}{3} \operatorname{tang}^3 x + \binom{m}{5} \operatorname{tang}^5 x - \binom{m}{7} \operatorname{tang}^7 x + \dots$

45) $\frac{\cos mx}{\cos^m x} = 1 - \binom{m}{2} \operatorname{tang}^2 x + \binom{m}{4} \operatorname{tang}^4 x - \binom{m}{6} \operatorname{tang}^6 x + \dots$

46) $e^x = 1 + \frac{\sin x}{1!} + \frac{\sin^2 x}{2!} + \frac{2}{3!} \sin^3 x + \frac{5}{4!} \sin^4 x + \dots$

47) $e^x = 1 + \operatorname{tang} x + \frac{\operatorname{tang}^2 x}{2!} - \frac{\operatorname{tang}^3 x}{3!} - \frac{7 \operatorname{tang}^4 x}{4!} + \dots$

48) $e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{e} \left\{1 + \log x - \frac{1}{3!} (\log x)^3 + \frac{1}{4!} (\log x)^4 - \frac{1}{5!} (\log x)^5 + \dots\right\}.$

49) $e^x = e\left\{1 - \frac{(\operatorname{arc} \cos x)^2}{2!} + \frac{4(\operatorname{arc} \cos x)^4}{4!} - \frac{31(\operatorname{arc} \cos x)^6}{6!} + \dots\right\}.$

50) $x = \sin x + \frac{1}{2} \frac{\sin^3 x}{3!} + \frac{1.3}{2.4} \frac{\sin^5 x}{5!} + \dots$

51) $x = \log(1 + x) + \frac{1}{2!} [\log(1 + x)]^2 + \frac{1}{3!} [\log(1 + x)]^3 + \dots$

52) Wykazać, że całce, kształtu: $\int y\, dx$, gdzie y jest funkcyą zmiennej x, określoną równaniem: $y^2 - xy - 1 = 0$, odpowiadają dwie funkcye, w postaci:

$$\int y_1 dx = C + x + \frac{1}{2} \frac{x^2}{2!} + \frac{1}{2^2} \frac{x^3}{3!} - \frac{1^2.3}{2^4} \frac{x^5}{5!} + \frac{1^2.3^2.5}{2^6} \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\int y_2 dx = C - x + \frac{1}{2} \frac{x^2}{2!} - \frac{1}{2^2} \frac{x^3}{3!} + \frac{1^2.3}{2^4} \frac{x^5}{5!} - \frac{1^2.3^2.5}{2^6} \cdot \frac{x^7}{7!} + \dots$$

53) **Wykazać, że całka funkcyi uwikłanej, określonej równaniem:** $y^3 - 6xy - 8 = 0$, da się przedstawić w postaci szeregu:

$$\int y\,dx = C + 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

54) **Wykazać, że całka, kształtu:** $\int y\,dx$, gdzie y jest trójwartościową funkcyą uwikłaną, określoną równaniem: $y^3 - y + x = 0$, da się przedstawić trzema całkami, kształtu:

$$\int y_1\,dx = C + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{2} + \frac{3x^8}{2} + \cdots$$

$$\int y_2\,dx = C + x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} - \frac{x^4}{8} - \cdots$$

$$\int y_3\,dx = C - x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} - \frac{x^4}{8} + \cdots$$

55) **Wykazać, że całka, kształtu:** $\int y\,dx$, gdzie y jest funkcyą zmiennej x, określoną równaniem: $1 - y + xy^n = 0$, da się w otoczeniu miejsca $y = 0$, przedstawić szeregiem:

$$\int y\,dx = C + x + \frac{x^2}{2!} + 2n\frac{x^3}{3!} + 3n(3n-1)\frac{x^4}{4!} + \cdots$$

56) **Wykazać, że całka funkcyi** y, określonej równaniem: $y - xe^y - 1 = 0$, da się przedstawić w postaci:

$$\int y\,dx = C + x + e\frac{x^2}{2!} + 2e^2\frac{x^3}{3!} + 3^2e^3\frac{x^4}{4!} + 4^3e^4\frac{x^5}{5!} + \cdots$$

57) **Wykazać, że** $\int y\,dx$, gdzie $1 - y - xa^y = 0$, da się przedstawić w postaci:

$$\int y\,dx = C + x + a\frac{x^2}{2!} + 2a^2\log a \cdot \frac{x^3}{3!} + 3^2a^3(\log a)^2\frac{x^4}{4!} + 4^3a^4(\log a)^3\frac{x^5}{5!} + \cdots$$

58) **Wykazać, że całka funkcyi uwikłanej, określonej równaniem przestępnem:** $y^n\log y - x = 0$, da się przedstawić w postaci szeregu:

$$\int y\,dx = C + x + \frac{x^2}{2!} - (2n-1)\frac{x^3}{3!} + (3n-1)^2\frac{x^4}{4!} - (4n-1)^3\frac{x^5}{5!} + \cdots$$

59) **Jeżeli funkcya** y **określona jest równaniem:** $y^n\log y - ax = 0$, **natenczas dowieść, że:**

$$\int y\,dx = C + x + a\frac{x^2}{2!} - (2n-1)\frac{a^2x^3}{3!} + (3n-1)^2\frac{a^3x^4}{4!} - (4n-1)^3\frac{a^4x^5}{5!} + \cdots$$

60) **Wykazać, że dla funkcyi** x, określonej równaniem przestępnem: $y - a - x\sin y = 0$, otrzymujemy całkę w postaci:

$$\int y\,dx = C + ax + \sin a\frac{x^2}{2!} + \sin 2a\frac{x^3}{3!} + \frac{3}{4}(3\sin 3a - \sin a)\frac{x^4}{4!} + (8\sin 4a - 4\sin 2a)\frac{x^5}{5!} + \cdots$$

Rozwiązania XVI. Wskazówki i wyjaśnienia podane są w wykładzie obecnym i dwu poprzedzających.

Literatura. J. Dienger. Die Differential- und Integralrechnung umfassend und mit steter Berücksichtigung der Anwendung dargestellt von... Stuttgart, 1868. Dr. Oskar Schlömilch. Vorlesungen über einzelne Theile der höheren Analysis, gehalten am k. s. Polytechnikum zu Dresden. Vierte Auflage. Braunschweig 189 .

Tematy do rozprawek naukowych.

1. Rozwinięcia całki kształtu: $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + 2\varepsilon x + x^2}}$ i ich zależność od spółczynnika ε.
2. Teorya rozwijania całek za pomocą metody nieoznaczonych spółczynników i jej zastosowania.
3. Rozwijanie całek funkcyj uwikłanych według potęg zmiennej niezależnej.

Wykład XVII.

Dalszy ciąg uwag, dotyczących rozwijania całek.

1. Wzory redukcyjne danego typu całek. Metoda całkowania przez części, oparta na wzorze:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du, \qquad (1)$$

stanowi, jak wiadomo, jedną z głównych metod ogólnych całkowania.

Na jej podstawie możemy, dla danego typu całek, wyprowadzić stosowne wzory redukcyjne, które całkowanie danych funkcyj sprowadzają do całek możliwie najprostszych, a w szczególności rozstrzygają o tem, czy dana całka da się wyrazić przez znane funkcye w formie zamkniętej, skończonej. Wzory takie wyprowadzaliśmy niejednokrotnie także w tych przypadkach, w których z góry było rzeczą wiadomą, że dana całka da się wyrazić przez znane funkcye, jak n. p. przy całkowaniu funkcyj wymiernych, całkowitych, lub ułamkowych, w wykładzie II., art. 20. i 21. str. 47. i 48. W takich przypadkach chodziło przeważnie o ewentualne uproszczenie rachunku i uzyskanie możliwie najprostszego sposobu dojścia do żądanego wyniku.

Szczególnie korzystnem okazało się wyprowadzanie wzorów redukcyjnych dla całek dwumiennych w wykładzie VII. art. 5. i nast.) i całek kształtu: $J_{s,k} = \int \sin^s x \cos^k x\,dx$ (Wykład VIII. art. 1. i nast.), gdzie z otrzymanych wzorów można było wyprowadzić t. z. warunki całkowalności odnośnych funkcyj. Przy całkowaniu funkcyj przestępnych, okazała się metoda całkowania przez części, jako jedynie możliwa i wskazana, a wyprowadzanie odpowiednich wzorów redukcyjnych stawało się wprost koniecznem, bądź to dla wyznaczenia odnośnej całki, bądź dla wykazania niemożliwości jej wyznaczenia przy pomocy znanych funkcyi i konieczności wprowadzenia nowego rodzaju funkcyj przestępnych, które już tylko przy pomocy, szeregów utworzonych ze znanych funkcyj, przedstawić się dały.

W szczególności, poznaliśmy takie wzory przy wyznaczaniu całek kształtów: $\int x^n e^{ax}\,dx$, (str. 174.), $\int (\log x)^n\,dx$, (str. 179.), $\int x^m (\log x)^n\,dx$, (str. 181.) $\int x^m \sin x\,dx$ i $\int x^m \cos x\,dx$, (str. 189.), $\int (\arcsin x)^n\,dx$ i $\int (\arccos x)^n\,dx$, (str. 193.) $\int x^m \arcsin x\,dx$, (str. 196.) i $\int x^m \operatorname{arc\,tang} x\,dx$, (str. 197.), $\int x^m e^{ax} \sin bx$ i $\int x^m e^{ax} \cos bx\,dx$, (str. 228.) i t. p.

Mając w pamięci podane tamże sposoby postępowania i ich wyniki, zajmijmy się ogólnie metodą powtarzanego całkowania przez części i rozważmy wzory ogólne, na niej oparte.

2. Metoda powtarzanego całkowania przez części i ogólne wzory, na j oparte. Niech będą u i v dwie dane funkcye zmiennej x, których po-dne oznaczmy kolejno przez: u', v', u'', v'', ..., $u^{(n)}$, $v^{(n)}$. Poddając całkę tałtu: $\int uv^{(n)} dx$, całkowaniu przez części, powtórzonemu m-razy, otrzymamy ejno równania:

$$\int u v^{(n)} dx = uv^{(n-1)} - \int u'v^{(n-1)} dx,$$
$$\int u'v^{(n-1)} dx = u'v^{(n-2)} - \int u''v^{(n-2)} dx,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\int u^{(m-1)} v^{(n-m+1)} dx = u^{(m-1)} v^{(n-m)} - \int u^{(m)} v^{(n-m)} dx,$$

których wynika ostatecznie wzór ogólny:

$$\int uv^{(n)} dx = uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + \ldots + (-1)^{(m-1)} u^{(m-1)} v^{(n-m)} + (-1)^m \int u^{(m)} v^{(n-m)} dx. \quad (2)$$

Dla $m = n$, otrzymujemy stąd wzór:

$$\int uv^{(n)} dx = uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + \ldots + (-1)^{n-1} u^{(n-1)} v + (-1)^n \int u^{(n)} v\, dx, \quad (3)$$

y poznaliśmy już w art. 11. Wykładu XIV. na str. 227., jako uogólniony ór metody całkowania przez części.

Wzór (2) możemy wyprowadzić także w odmiennej postaci.

Stosując, mianowicie, metodę całkowania przez części m-razy do całki, łtu: $\int uv\, dx$, zamiast do całki, kształtu: $\int uv^{(m)} dx$, oznaczmy wyniki po-anego całkowania, wykonanego na funkcyi v i jej całkach przez: $v_2, \ldots, v_m$, gdzie:

$$v_1 = \int v\, dx, \quad v_2 = \int v_1 dx = \iint v\, dx^2, \quad v_3 = \int v_2 dx = \iiint v\, dx^3,$$

nie:

$$v_m = \int v_{m-1} dx = \iint \ldots \int v\, dx^m,$$

ymujemy kolejno następujące równania:

$$\int uv\, dx = uv_1 - \int u' v_1 dx,$$
$$\int uv_1 dx = u'v_2 - \int u'' v_2 dx,$$
$$\int u'' v_2 dx = u''v_3 - \int u''' v_3 dx,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\int u^{(m-1)} v_{m-1} dx = u^{(m-1)} v_m - \int u^{(m)} v_m dx,$$

órych wynika ostatecznie wzór:

$$\int uv\, dx = uv_1 - u'v_2 + \ldots + (-1)^{m-1} u^{(m-1)} v_m + (-1)^m \int u^{(m)} v_m dx, \quad (4)$$

y jest tylko odmienną postacią wzoru (3).

3. Zastosowania powyższych wzorów do wyznaczania całek w formie mniętej. Z otrzymanych powyżej wzorów możemy przedewszystkiem zystać przy wyznaczaniu całek szczególnych typów w formie zamkniętej.

Sprowadźmy, mianowicie, na jedną stronę znaku równości, występujące e całki, a otrzymamy z wzoru (2) całkę, kształtu:

$$\int [uv^{(n)} - (-1)^m u^{(m)} v^{(n-m)}] dx = uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + \ldots + (-1)^{m-1} u^{(m-1)} v^{(n-m)},$$

li:

$$\int [u v^{(n)} - (-1)^m u^{(m)} v^{(n-m)}] dx = \sum_{r=0}^{r=m-1} (-1)^r u^{(r)} v^{(n-r-1)}, \quad (5)$$

lobnie, z wzoru (3) całkę, kształtu:

$$\int [u v^{(n)} - (-1)^n u^{(n)} v] dx = uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + \ldots + (-1)^{n-1} u^{(n-1)} v,$$

li:

$$\int [uv^{(n)} - (-1)^n u^{(n)} v]\, dx = \sum_{r=0}^{r=n-1} (-1)^r u^{(r)} v^{(n-r-1)}, \tag{6}$$

a wreszcie z wzoru (4) całkę, kształtu:

$$\int [uv - (-1)^m u^{(m)} v_m]\, dx = uv_1 - u'v_2 + \ldots + (-1) u^{(m-1)} v_m,$$

czyli:

$$\int [uv - (-1)^m u^{(m)} v_m] dx = \sum_{r=0}^{r=m-1} (-1)^r u^{(r)} v_{r+1}, \tag{7}$$

W szczególności, otrzymujemy z wzoru (5), kładąc $m=1, 2, 3, \ldots$, kolejno całki, kształtu:

$$\begin{aligned} &\int [uv^{(n)} + u'v^{(n-1)}]\, dx = uv^{(n-1)}, \\ &\int [uv^{(n)} - u''v^{(n-2)}]\, dx = uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)}, \\ &\int [uv^{(n)} + u'''v^{(n-3)}]\, dx = uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + u''v^{(n-3)}, \end{aligned} \tag{8}$$

które, dla $n=1, 2, 3, \ldots$, przedstawiają się w postaciach:

$$\begin{aligned} &\int (uv' + u'v)\, dx = uv, \\ &\int (uv'' - u''v)\, dx = uv' - u'v, \\ &\int (uv''' + u'''v)\, dx = uv'' - u'v' + u''v, \text{ i t. d.,} \end{aligned} \tag{9}$$

wypływających także z wzoru (6), względnie w postaciach:

$$\begin{aligned} &\int (uv + u'v_1)\, dx = uv_1, \\ &\int (uv - u''v_2)\, dx = uv_1 - u'v_2, \\ &\int (uv + u'''v_3)\, dx = uv_1 - u'v_2 + u''v_3, \text{ i t. d.,} \end{aligned}$$

wypływających z wzoru (7).

4. Wzory powyższe wykazują, że całki, dające się sprowadzić do postaci ogólnej: $\int [uv^{(n)} - (-1)^m u^{(m)} v^{(n-m)}]\, dx$, lub do postaci: $\int [uv^{(n)} - (-1)^n u^{(n)} v]\, dx$ względnie do postaci: $\int [uv - (-1)^m u^{(m)} v_m]\, dx$, dadzą się zawsze wyznaczyć w formie zamkniętej.

Ażeby wyprowadzić poszczególne całki tego rodzaju, należy przyjąć dowolnie dwie funkcye elementarne u i v i wyznaczyć ich pochodne, względnie całki pierwszego i wyższych rzędów.

Przyjmując $u = e^x$, $v = f(x)$, otrzymujemy, na podstawie wzoru (9), następujące całki:

$$\begin{aligned} &\int e^x [f'(x) + f(x)]\, dx = e^x f(x) + C, \\ &\int e^x [f''(x) - f(x)]\, dx = e^x [f'(x) - f(x)] + C, \\ &\int e^x [f'''(x) + f(x)]\, dx = e^x [f''(x) - f'(x) + f(x)] + C, \end{aligned}$$

ogólnie:

$$\int e^x [f^{(n)}(x) - (-1)^n f(x)]\, dx = e^x [f^{(n-1)}(x) - f^{(n-2)}(x) + \ldots + (-1)^{n-1} f(x)] + C. \tag{10}$$

5. Przykłady. *c*) Wyznaczyć całkę kształtu: $\int \frac{e^x(1 + x\log x)}{x}\, dx$.

Przedstawiwszy daną całkę w postaci:

$$\int \frac{e^x(1 + x \log x)}{x}\, dx = \int e^x \left\{ \frac{1}{x} + \log x \right\} dx,$$

możemy podstawić:

$$u = e^x, \quad v = \log x, \quad \text{a więc: } u' = e^x, \quad v' = \frac{1}{x};$$

ı sposobem sprowadzimy daną całkę do wzoru: $\int (uv' + u'v)\,dx = uv$, otrzymujemy ▮m:

$$\int \frac{e^x(1 + x\log x)}{x}\,dx = e^x \log x + C.$$

2) Wyznaczyć całkę, kształtu: $\int \frac{\sin x\,(x^2 \log x - 1)}{x^2}\,dx.$

Mamy tu:

$$\int \frac{\sin x\,(x^2 \log x - 1)}{x^2}\,dx = \int \sin x \left\{\log x - \frac{1}{x^2}\right\} dx,$$

Kładąc: $u = \sin x$, $v = \log x$, a więc: $u' = \cos x$, $u'' = -\sin x$, $v' = \frac{1}{x}$, $v'' = -\frac{1}{x^2}$, ▮owadzamy daną całkę do całki, kształtu:

$$\int (uv'' - u''v)\,dx = uv' - u'v,$$

▮rzymujemy, zatem:

$$\int \sin x \left\{\log x - \frac{1}{x^2}\right\} dx = \frac{\sin x}{x} - \cos x \log x + C.$$

3) Wyznaczyć całkę, kształtu:

$$J = \int \frac{x \log x + \sqrt{1 - x^2} \arcsin x}{x\sqrt{1 - x^2}}\,dx.$$

Daną całkę możemy przedstawić w postaci:

$$J = \int \left\{\frac{\log x}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{\arcsin x}{x}\right\} dx.$$

Kładąc: $\log x = u$, $v = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, a zatem: $u' = \frac{1}{x}$, $v_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x$, spro-▮dzamy daną całkę do wzoru:

$$J = \int (uv + u'v_1)\,dx = uv_1,$$

▮ymujemy, zatem:

$$J = \log x \,.\, \arcsin x,$$

▮i:

$$\int \frac{x \log x + \sqrt{1 - x^2} \arcsin x}{x\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \arcsin x \,.\, \log x + C.$$

4) Wyznaczyć całkę, kształtu:

$$J = \int x^3 \cos x \,.\, (20 + x^2)\,dx.$$

Przedstawiwszy daną całkę w postaci:

$$J = \int (20x^3 \cos x + x^5 \cos x)\,dx,$$

▮ważymy, że, kładąc: $u = \cos x$, $v = 20x^3$, dostajemy:

$$u' = -\sin x,\quad u'' = -\cos x,\quad v_1 = 20\int x^3 dx = 5x^4,\quad v_2 = \int v_1 dx = x^5,$$

▮m samem, sprowadzimy daną całkę do postaci:

$$\int (uv - u''v_2)\,dx = uv_1 - u'v_2.$$

Otrzymujemy, zatem:

$$\int x^3 \cos x (20 + x^2)\,dx = 5x^4 \cos x + x^5 \sin x + C.$$

6. Zastosowanie metody całkowania przez części do rozwijania całek szeregi. Wzór ogólny:

$$\int uv^{(n)}\,dx = uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + \ldots + (-1)^{n-1} u^{(n-1)} v + (-1)^n \int u^{(n)} v\,dx, \qquad (11)$$

wadzi do kilku, uwagi godnych szeregów.

1) Połóżmy $u = f(x)$, $v = \frac{(x - a)^n}{n!}$, a więc:

$$u'=f'(x)\ ;\quad v'=\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$u''=f''(x)\ ;\quad v''=\frac{(x-a)^{n-2}}{(n-2)!},$$

. . . .

$$u^{(n-1)}=f^{(n-1)}(x),\quad v^{(n-1)}=x-a,$$

$$u^{(n)}=f^{(n)}(x),\quad v^{(n)}=1,$$

a otrzymamy, z powyższego wzoru, następujące rozwinięcie:

$$\int f(x)\,dx=C+f(x)\,.\,(x-a)-f'(x)\,.\,\frac{(x-a)^2}{2!}+f''(x)\frac{(x-a)^3}{3!}-\ldots+$$

$$+(-1)^{n-1}f^{(n-1)}(x)\frac{(x-a)^n}{n!}+\frac{(-1)^n}{n!}\int f^{(n)}(x)\,.\,(x-a)^n\,dx,$$

które, w przypadku, gdy, dla $n=\infty$, całka końcowa staje się zerem, wadzi do szeregu:

$$\int f(x)\,dx=C+f(x)(x-a)-f'(x)\frac{(x-a)^2}{2!}+\ldots+(-1)^{n-1}f^{(n-1)}(x)\frac{(x-a)^n}{n!}+\ldots$$

Kładąc: $\int f(x)\,dx=F(x)$, zatem:

$$f(x)=F'(x),\ f'(x)=F''(x),\ldots,\ f^{(n-1)}(x)=F^{(n)}(x),$$

otrzymujemy, stąd:

$$F(x)=C+F'(x)\,.\,(x-a)-F''(x)\frac{(x-a)^2}{2!}+\ldots+(-1)^{n-1}F^{(n)}(x)\frac{(x-a)^n}{n!}+\ldots$$

Połóżmy w tym szeregu, raz: $x=0$, a drugi raz: $x=a$, otrzyı równania:

$$F(o)=C-\left[F'(o)a+F''(o)\frac{a^2}{2!}+\ldots+F^{(n)}(o)\frac{a^n}{n!}+\ldots\right].$$

$$F(a)=C,$$

które, odjęte od siebie, dają:

$$F(a)-F(o)=F'(o)\,a+F''(o)\frac{a^2}{2!}+\ldots+F^{n}(o)\frac{a^n}{n!}+\ldots$$

czyli:

$$F(a)=F(o)+F'(o)\,a+F''(o)\frac{a^2}{2!}+\ldots+F^{(n)}(o)\frac{a^n}{n!}+\ldots$$

a zatem, szereg Maclaurina:

$$F(x)=F(o)+\frac{F'(o)}{1!}x+\frac{F''(o)}{2!}x^2+\ldots+\frac{F^{(n)}(o)}{n!}x^n+\ldots$$

2) Połóżmy:

$$u=f(x),\quad v=\frac{x^{m+n}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)},$$

a zatem:

$$v'=\frac{x^{m+n-1}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)},\quad v''=\frac{x^{m+n-2}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-2)},\ldots$$

$$v^{(n-1)}=\frac{x^{m+1}}{m+1},\quad v^{(n)}=x^m,$$

natenczas, otrzymamy, z wzoru ogólnego (11), następujące rozwinięcie

$$\int x^m f(x)\,dx = C + \frac{x^{m+1}}{m+1} f(x) - \frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)} f'(x) + \frac{x^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)} f''(x) - \ldots +$$

$$+ (-1)^n \frac{x^{m+n-1}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)} f^{(n-2)}(x) +$$

$$+ \frac{(-1)^{n+1}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)} \int x^{m+n-1} f^{(n-1)}(x)\,dx,$$

prowadzące do szeregu:

$$\int x^m f(x)\,dx = C + \frac{x^{m+1}}{m+1} f(x) - \frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)} f'(x) +$$

$$+ \frac{x^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)} f''(x) - \frac{x^{m+4}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)} f'''(x) + \ldots +$$

$$+ \ldots + (-1)^n \frac{x^{m+n+1}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n+1)} \cdot f^{(n)}(x) + \ldots \qquad (14)$$

Z tego szeregu, otrzymujemy: *a)* dla $m=0$, szereg:

$$\int f(x)\,dx = C + x f(x) - \frac{x^2}{2!} f'(x) + \frac{x^3}{3!} f''(x) - \frac{x^4}{4!} f'''(x) + \ldots, \qquad (15)$$

zwany szeregiem Bernouille'go: *b)* dla $m=1$, szereg:

$$\int x f(x)\,dx = C + \frac{x^2}{2!} f(x) - \frac{x^3}{3!} f'(x) + \frac{x^4}{4!} f''(x) - \frac{x^5}{5!} f'''(x) + \ldots, \qquad (16)$$

zwany zwykle szeregiem Holland'a.

3) **Kładąc**: $u = f(x),\ v = \frac{e^{ax}}{a^n},$

a więc: $v' = \frac{e^{ax}}{a^{n-1}},\ v'' = \frac{e^{ax}}{a^{n-2}}, \ldots, v^{(n)} = e^{ax},$

otrzymujemy rozwinięcie, w postaci wzoru:

$$\int e^{ax} f(x)\,dx = C + e^{ax}\left\{\frac{f(x)}{a} - \frac{f'(x)}{a^2} + \frac{f''(x)}{a^3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{f^{n-1}(x)}{a^n}\right\} +$$

$$+ \frac{(-1)^n}{a^n}\int e^{ax} f^{(n)}(x)\,dx,$$

który, w przypadku, gdy, dla $n=\infty$, całka końcowa staje się zerem, prowadzi do szeregu:

$$\int e^{ax} f(x)\,dx = C + e^{ax}\left\{\frac{f(x)}{a} - \frac{f'(x)}{a^2} + \frac{f''(x)}{a^3} + \ldots +\right.$$

$$\left. + (-1)^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(x)}{a^n} + (-1)^n \frac{f^{(n)}(x)}{a^{n+1}} + \ldots\right\}. \qquad (17)$$

Dla $a=1$, otrzymujemy stąd szereg:

$$\int e^x f(x)\,dx = C + e^x\{f(x) - f'(x) + f''(x) - f'''(x) + \ldots + (-1)^n f^n(x) + \ldots\}.$$

4) **Kładąc**: $u = f(x),\ v^{(n)} = \sin x,$

a zatem:

$$v^{(n-1)} = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right),\ v^{(n-2)} = \sin\left(x - \frac{2\pi}{2}\right), \ldots, v^{(n-m)} = \sin\left(x - \frac{m\pi}{2}\right), \ldots$$

otrzymujemy rozwinięcie:

$$\int f(x)\sin x\,dx = -f(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+f'(x)\sin\left(\frac{2\pi}{2}-x\right)-f''(x)\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\ldots+$$

$$+(-1)^n f^{(n-1)}(x)\sin\left(\frac{n\pi}{2}-x\right)+(-1)^{n+1}\int f^{(n)}(x)\sin\left(\frac{n\pi}{2}-x\right)dx\,, \qquad (18)$$

skąd, w tym wypadku, gdy, dla $n=\infty$, całka końcowa staje się zerem otrzymujemy szereg:

$$\int f(x)\sin x\,dx=[f'(x)-f'''(x)+f^{(5)}(x)-\ldots]\sin x-[f(x)-f''(x)+f^{(4)}(x)-\ldots]\cos x$$

a podobnie:

$$\int f(x)\cos x\,dx=[f(x)-f''(x)+f^{(4)}(x)-\ldots]\sin x+[f'(x)-f'''(x)+f^{(5)}(x)-\ldots]\cos x.$$

7. Rozwinięcie całki, kształtu: $\int f(x)\varphi(x)dx$ na szereg, upraszcza się niekiedy, jeżeli znane jest rozwinięcie jednego z czynników, występujących pod znakiem całkowym.

Jeżeli, mianowicie:

$$\varphi(x)=\varphi(a)+\frac{\varphi'(a)}{1!}(x-a)+\frac{\varphi''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{\varphi^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

względnie:

$$\varphi(x)=\varphi(o)+\frac{\varphi'(o)}{1!}x+\frac{\varphi''(o)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\varphi^{(n)}(o)}{n!}x^n+\ldots$$

wówczas, otrzymujemy:

$$f(x)\varphi(x)=\varphi(a)f(x)+\frac{\varphi'(a)}{1!}(x-a)f(x)+\frac{\varphi''(a)}{2!}(x-a)^2 f(x)+\ldots+$$

$$+\frac{\varphi^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n f(x)+\ldots$$

względnie:

$$f(x)\varphi(x)=\varphi(o)f(x)+\frac{\varphi'(o)}{1!}xf(x)+\frac{\varphi''(o)}{2!}x^2 f(x)+\ldots+\frac{\varphi^{(n)}(o)}{n!}x^n f(x)+\ldots$$

a stąd, rozwinięcie danej całki, w postaci:

$$\int f(x)\varphi(x)dx = C+\varphi(a)\int f(x)dx+\frac{\varphi'(a)}{1!}\int(x-a)f(x)dx+\frac{\varphi''(a)}{2!}\int(x-a)^2 f(x)dx+\ldots+$$

$$+\frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!}\int(x-a)^n f(x)\,dx+\ldots$$

względnie, w postaci:

$$\int f(x)\varphi(x)dx=C+\varphi(o)\int f(x)dx+\frac{\varphi'(o)}{1!}\int x f(x)dx+\frac{\varphi''(o)}{2!}\int x^2 f(x)dx+\ldots+$$

$$+\frac{\varphi^{(n)}(o)}{n!}\int x^n f(x)dx+\ldots \qquad (19)$$

8. Mając n. p. rozwinąć na szereg całkę, kształtu: $\int\frac{\log x}{a-x}dx$, uwzględnijmy, że:

$$\frac{1}{a-x}=\frac{1}{a}+\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}+\frac{x^3}{a^4}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{a^n}+\ldots \qquad (20)$$

a otrzymamy szereg:

$$\frac{\log x}{a-x}=\frac{\log x}{a}+\frac{x\log x}{a^2}+\frac{x^2\log x}{a^3}+\ldots+\frac{x^n\log x}{a^{n+1}}+\ldots$$

zatem rozwinięcie:

$$\frac{\log x}{a-x}dx = C + \frac{1}{a}\int \log x\, dx + \frac{1}{a^2}\int x \log x dx + \frac{1}{a^3}\int x^2 \log x\, dx + \ldots + \frac{1}{a^n}\int x^{n-1}\log x\, dx + \ldots$$

Ponieważ, atoli:

$$\int x^{n-1}\log x dx = \frac{x^n}{n}\log x - \frac{x^n}{n^2} = \frac{x^n}{n}\left(\log x - \frac{1}{n}\right),$$

to, powyższe rozwinięcie sprowadza się do postaci:

$$\int\frac{\log x}{a-x}dx = C + \frac{1}{a}x(\log x - 1) + \frac{1}{a^2}\frac{x^2}{2}\left(\log x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{a^3}\frac{x^3}{3}\left(\log x - \frac{1}{3}\right) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{a^n}\frac{x^n}{n}\left(\log x - \frac{1}{n}\right) + \ldots$$

:

$$\int\frac{\log x}{a-x}dx = C + \left[\frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} + \ldots + \frac{x^n}{na^n} + \ldots\right]\log x - \left[\frac{x}{a} + \frac{x^2}{2^2a^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{x^3}{3^2a^3} + \ldots + \frac{x^n}{n^2a^n} + \ldots\right].$$

9. Rozwinięcia, oparte na różniczkowaniu danej całki pod znakiem …wym. Z rozwinięcia danej całki, zawierającej pod znakiem całkowania …en parametr zmienny a, od zmiennej x niezależny, w postaci:

$$\int f(x, a)\, dx = C + \varphi_1(a)x + \varphi_2(a)\frac{x^2}{2!} + \varphi_3(a)\frac{x^3}{3!} + \ldots, \qquad (21)$$

…ymujemy, na podstawie prawidła różniczkowania całki, ze względu na parametr (patrz str. 282., art. 21.), następujące rozwinięcie:

$$\int\frac{d f(x, a)}{da}dx = C + \varphi'_1(a)x + \varphi'_2(a)\frac{x^2}{2!} + \varphi'_3(a).\frac{x^3}{3!} + \ldots \qquad (22)$$

…nie:

$$\int\frac{d^n f(x, a)}{da^n}dx = C + \varphi_1^{(n)}(a).x + \varphi_2^{(n)}(a)\frac{x^2}{2!} + \varphi_3^{(n)}(a)\frac{x^3}{3!} + \ldots \qquad (23)$$

Tak n. p. z rozwinięcia:

$$\int\frac{\log x}{a-x}dx = C + \left[\frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} + \ldots\right]\log x - \left[\frac{x}{a} + \frac{x^2}{2^2a^2} + \frac{x^3}{3^2a^3} + \ldots\right],$$

…rowadzonego w poprzednim artykule, otrzymamy, jeżeli je według a …niczkujemy, następujące rozwinięcia:

$$\int\frac{\log x}{(a-x)^2}dx = C + \left[\frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} + \frac{x^3}{a^4} + \ldots\right]\log x - \left[\frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{2a^3} + \frac{x^3}{3a^3} + \ldots\right],$$

$$\int\frac{\log x}{(a-x)^3}dx = C + \frac{1}{2}\left[\frac{2x}{a^3} + \frac{3x^2}{a^4} + \frac{4x^3}{a^5} + \ldots\right]\log x - \frac{1}{2}\left[\frac{2x}{a^3} + \frac{3x^2}{2a^4} + \frac{4x^3}{3a^5} + \ldots\right],$$

…gólności:

$$\int\frac{\log x}{(a-x)^n}dx = C + \frac{1}{(n-1)!}\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}\frac{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n-2)x^\mu}{a^{\mu+n-1}}\right)\lg x - \frac{1}{(n-1)!}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}\frac{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n-2)x^\mu}{\mu a^{\mu+n-1}}.$$

10. Całkowanie pod znakiem całkowym. Niech będzie daną całka w po…: $\int\varphi(x, \alpha)dx$, gdzie α jest dowolną stałą, od zmiennej x niezależną.

Funkcya, tej całce odpowiadająca, będzie zarówno funkcyą zmiennej x, …też funkcyą stałej dowolnej α.

Połóżmy, zatem: $\int f(x, \alpha)dx = F(x, \alpha)$,

…ypuśćmy, że: $f(x, \alpha)$ jest, ze względu na α, pochodną innej funkcyi: …α), t. j. że:

$$f(x, \alpha)=\frac{d\varphi(x, \alpha)}{d\alpha}, \text{ czyli, że: } \varphi(x, \alpha)=\int f(x, \alpha)\,d\alpha,$$

natenczas, na podstawie prawidła różniczkowania pod znakiem całkowym, podanego w art. 21. wykładu XIV. str. 232., zastosowanego do całki kształtu: $\int\varphi(x, \alpha)\,dx$, ze względu na stałą dowolną α, otrzymujemy, wzór:

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\int\varphi(x, \alpha)\,dx\right)=\int\frac{d\varphi(x, \alpha)}{d\alpha}\,dx=\int f(x, \alpha)\,dx=F(x, \alpha),$$

a stąd:

$$\int\varphi(x, \alpha)\,dx=\int F(x, \alpha)\,d\alpha,$$

a zatem:

$$\int[\int f(x, \alpha)\,d\alpha]\,dx=\int F(x, \alpha)\,d\alpha,$$

czyli:

$$\int F(x, \alpha)\,d\alpha=\int[\int f(x, \alpha)\,d\alpha]\,dx, \tag{24}$$

to znaczy:

Mając całkować daną całkę, ze względu na pewną zmienną, znajdującą się pod znakiem całkowania, a od zmiennej całkowania niezależną, możemy wprost całkować ze względu na tę zmienną samą funkcyę, stojącą pod znakiem całkowania.

Na tej podstawie, otrzymamy z wzoru:

$$F(x, \alpha)=\int f(x, \alpha)\,dx,$$

na podstawie pojedyńczego całkowania, ze względu na zmienną α, wzór:

$$\int F(x, \alpha)\,d\alpha=\int[\int f(x, \alpha)\,d\alpha]\,dx,$$

a stąd, na podstawie n-krotnego całkowania tej funkcyi, ze względu na zmienną α, wzór ogólny:

$$\int\int\ldots\int F(x, \alpha)\,d\alpha^n=\int[\int\int\ldots\int f(x, \alpha)\,d\alpha^n]\,dx, \tag{25}$$

na podstawie którego, możemy, z danej całki, zawierającej pod znakiem całkowania dowolną stałą, wyprowadzić dowolną ilość nowych całek.

11. Przykłady. 1) Z całki zasadniczej: $\int x^\alpha\,dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, w której wykładnik α jest stałą dowolną, na podstawie prawidła całkowania tej całki, ze względu na parametr α, otrzymamy całkę, kształtu:

$$\int\left[\int x^\alpha\,dx\right]dx=\int\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,d\alpha, \text{ czyli: } \int\frac{x^\alpha}{\log x}\,dx=\int\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,d\alpha,$$

ogólnie:

$$\int\frac{x^\alpha}{(\log x)^n}\,dx=\int\int\ldots\int\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,d\alpha^n.$$

2) Z całki zasadniczej: $\int e^{\alpha x}\,dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$, otrzymujemy tą drogą całkę:

$$\int\frac{e^{\alpha x}}{x}\,dx=\int\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\,d\alpha,$$

ogólnie:

$$\int\frac{e^{\alpha x}}{x^n}\,dx=\int\int\ldots\int\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\,d\alpha^n.$$

3) Z całki zasadniczej: $\int\cos\alpha x\,dx=\frac{\sin\alpha x}{\alpha}$, otrzymujemy:

$$\int\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx=\int\frac{\sin\alpha x}{\alpha}\,d\alpha,$$

czyli:

$$\int \frac{\cos\left(\alpha x - \frac{\pi}{2}\right)}{x} dx = \int \frac{\sin \alpha x}{\alpha} d\alpha,$$

ogólnie:

$$\int \frac{\cos\left(\alpha x - \frac{n\pi}{2}\right)}{x^n} dx = \int\int \ldots \int \frac{\sin \alpha x}{\alpha} d\alpha^n,$$

podobnie, dostajemy z całki: $\int \sin \alpha x dx = -\frac{\cos \alpha x}{\alpha}$, wzór ogólny:

$$\int \frac{\sin\left(\alpha x - \frac{n\pi}{2}\right)}{x^n} dx = -\int\int \ldots \int \frac{\cos \alpha x}{\alpha} d\alpha^n.$$

12. Rozwinięcia, oparte na całkowaniu pod znakiem całkowym. Z rozwinięcia danej całki, zawierającej, pod znakiem całkowym, pewien parametr zmienny a, niezależny od zmiennej całkowania x, w postaci:

$$\int f(x, a) dx = C + \varphi_1(a) x + \varphi_2(a) \frac{x^2}{2!} + \varphi_3(a) \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

otrzymujemy, na podstawie, powyżej wyłożonego prawidła całkowania, ze względu na ten parametr, następujące rozwinięcia:

$$\int [\int f(x, a) da] dx = C + x \int \varphi_1(a) da + \frac{x^2}{2!} \int \varphi_2(a) da + \frac{x^3}{3!} \int \varphi_3(a) da + \ldots, \quad (26)$$

ogólnie:

$$\int [\int\int \ldots \int f(x, a) da^n] dx = C + x \int\int \ldots \int \varphi_1(a) da^n +$$
$$+ \frac{x^2}{2!} \int\int \ldots \int \varphi_2(a) da^n + \frac{x^3}{3!} \int\int \ldots \int \varphi_3(a) da^n + \ldots \quad (27)$$

Tak n. p. z rozwinięcia:

$$\int \frac{\log x}{a - x} dx = C + \left[\frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} + \ldots\right] \log x - \left[\frac{x}{a} + \frac{x^2}{2^2 a^2} + \frac{x^3}{3^2 a^3} + \ldots\right],$$

jeżeli je według a scałkujemy, otrzymujemy następujące nowe rozwinięcie:

$$\int \log (a - x) . \log x \, dx = C + \left[x \log a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^3}{2.3a^2} - \ldots\right] \log x -$$
$$- \left[x \log a - \frac{x^2}{2^2 a} - \frac{x^3}{2.3^2 a^2} - \ldots\right].$$

Ćwiczenia XVII.

Wyprowadzić następujące wzory redukcyjne:

1) $\int \frac{x^m dx}{a + bx^2} = \frac{x^{m-1}}{(m-1)b} - \frac{a}{b} . \int \frac{x^{m-2} dx}{a + bx^2}$.

2) $\int \frac{dx}{(a + bx^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a(a + bx^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a} \int \frac{dx}{(a + bx^2)^{n-1}}$.

3) $\int \frac{x^m dx}{(a + bx^2)^n} = -\frac{x^{m-1}}{(2n - m - 1)b(a + bx^2)^{n-1}} + \frac{(m-1)a}{(2n - m - 1)b} \int \frac{x^{m-2} dx}{(a + bx^2)^n}$.

4) $\int \frac{dx}{x^m (a + bx + cx^2)^n} = -\frac{1}{(m-1)ax^{m-1}(a + bx + cx^2)^{n-1}} -$
$- \frac{(m + n - 2)b}{(m-1)a} \int \frac{dx}{x^{m-1}(a + bx + cx^2)^n} - \frac{(m + 2n - 3)c}{(m-1)a} \int \frac{dx}{x^{m-2}(a + bx + cx^2)^n}$.

5) $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a + bx}} = \frac{2x^m \sqrt{a + bx}}{(2m + 1)b} - \frac{2ma}{(2m + 1)b} \int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{a + bx}}$.

6) $\int \frac{dx}{x^n \sqrt{a+bx}} = - \frac{\sqrt{a+bx}}{(n-1)\,ax^{n-1}} - \frac{(2n-3)\,b}{(2n-2)\,a} \int \frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{a+bx}}.$

7) $\int \frac{\sqrt{a+bx^2}}{x^m}\,dx = - \frac{\sqrt{a+bx^2}}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{b}{m-1} \int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{a+bx^2}}.$

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx^2)^n}} = \frac{x}{(n-2)a\sqrt{(a+bx^2)^{n-2}}} + \frac{n-3}{(n-2)\,a} \int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx^2)^{n-2}}}.$

9) $\int x^m \sin ax\,dx = - \frac{x^m \cos ax}{a} + \frac{mx^{m-1} \sin ax}{a^2} - \frac{m(m-1)}{a^2} \int x^{m-2} \sin ax\,dx.$

10) $\int x^m \cos ax\,dx = \frac{x^m \sin ax}{a} + \frac{mx^{m-1} \cos ax}{a^2} - \frac{m(m-1)}{a^2} \int x^{m-2} \cos ax\,dx.$

11) $\int x^n \operatorname{arc\,sin} x\,dx = \frac{x^{n+1} \operatorname{arc\,sin} x}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

12) $\int x^n \operatorname{arc\,cos} x\,dx = \frac{x^{n+1} \operatorname{arc\,cos} x}{n+1} + \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

13) $\int x^n \operatorname{arc\,tang} x\,dx = \frac{x^{n+1} \operatorname{arc\,tang} x}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}\,dx}{1+x^2}.$

14) $\int x^n \operatorname{arc\,cotg} x\,dx = \frac{x^{n+1} \operatorname{arc\,cotg} x}{n+1} + \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}\,dx}{1+x^2}.$

15) $\int x^n e^{mx}\,dx = \frac{x^n e^{mx}}{m} - \frac{n}{m} \int x^{n-1} e^{mx}\,dx.$

16) $\int x^m (\log x)^n\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} (\log x)^n - \frac{n}{m+1} \int x^m (\log x)^{n-1}\,dx.$

17) $\int x^n \log(a+bx^m)\,dx = \frac{x^{n+1} \log(a+bx^m)}{n+1} - \frac{bm}{n+1} \int \frac{x^{m+n}}{a+bx^m}\,dx.$

18) $\int (\operatorname{arc\,sin} x)^m\,dx = x(\operatorname{arc\,sin} x)^m + m\sqrt{1-x^2}(\operatorname{arc\,sin} x)^{m-1} - m(m-1)\int (\operatorname{arc\,sin} x)^{m-2}\,dx.$

19) $\int (\operatorname{arc\,cos} x)^m\,dx = x(\operatorname{arc\,cos} x)^m - m\sqrt{1-x^2}(\operatorname{arc\,cos} x)^{m-1} - m(m-1)\int (\operatorname{arc\,cos} x)^{m-2}\,dx.$

20) $\int e^{ax} \cos^n x\,dx = e^{ax} \frac{\cos^{n-1} x(a \cos x + n \sin x)}{a^2+n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2+n^2} \int e^{ax} \cos^{n-2} x\,dx.$

21) $\int e^{ax} \sin^n x\,dx = e^{ax} \frac{\sin^{n-1} x(a \sin x - n \cos x)}{a^2+n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2+n^2} \int e^{ax} \sin^{n-2} x\,dx.$

22) $\int f(x)\,\varphi^{(n)}(x)\,dx = f(x)\,.\,\varphi^{(n-1)}(x) - \int f'(x)\,\varphi^{(n-1)}(x)\,dx.$

23) $\int f(x)\varphi^{(n)}(x)\,dx = \sum_{r=0}^{r=m-1} (-1)^r f^{(r)}(x)\,.\,\varphi^{(n-r-1)}(x) + (-1)^m \int f^{(m)}(x)\,\varphi^{(n-m)}(x)\,dx.$

24) $\int f(x)\varphi^{(n)}(x)\,dx = \sum_{r=0}^{r=n-1} (-1)^r f^{(r)}(x)\,\varphi^{(n-r-1)}(x) + (-1)^n \int f^{(n)}(x)\,\varphi(x)\,dx.$

25) $\int f(x)\varphi(x)\,dx = f(x)\int \varphi(x)\,dx - \int [f'(x)\int \varphi(x)\,dx]\,dx.$

26) $\int f(x)\varphi(x)\,dx = \sum_{r=0}^{r=n-1} f^{(r)}(x)\,.\int\int \ldots \int \varphi(x)\,.\,dx^{r+1} + (-1)^n \int [f^{(n)}(x) \int \ldots \int\int \varphi(x)\,dx^n]\,dx.$

Dowieść, że:

27) $\int [f(x)\,.\,\varphi'(x) + f'(x)\,.\,\varphi(x)]\,dx = f(x)\,.\,\varphi(x).$

28) $\int [f(x)\varphi''(x) - f''(x)\,.\,\varphi(x)]\,dx = f(x)\,.\,\varphi'(x) - f'(x)\,\varphi(x).$

29) $\int [f(x)\,.\,\varphi^{(n)}(x) - (-1)^n f^{(n)}(x)\,.\,\varphi(x)]\,dx = \sum_{r=0}^{r=n-1} (-1)^r f^{(r)}(x)\,\varphi^{(n-r-1)}(x).$

30) $\int [f(x)\,.\,\varphi^{(n)}(x) - (-1)^m f^{(m)}(x)\,.\,\varphi^{(n-m)}(x)]\,dx = \sum_{r=0}^{r=m-1} (-1)^r f^{(r)}(x)\,\varphi^{(n-r-1)}(x).$

31) $\int [f(x) . \varphi(x) - (-1) f^{(m)}(x) . \iint \ldots \int \varphi(x) dx^m] dx = \sum_{r=0}^{r=m-1} (-1)^r f^{(r)}(x) \iint \ldots \int \varphi(x) dx^{r+1}$.

Wyprowadzić następujące wzory całkowe:

32) $\int \frac{e^x(1+x\log x)}{x} dx = e^x \log x + C$. 33) $\int \frac{e^x(1+x^2\log x)}{x^2} dx = \frac{e^x(x\log x - 1)}{x^2} + C$.

34) $\int e^x(a\cos ax + \sin ax) dx = e^x \sin ax + C$. 35) $\int \frac{e^x(1+2x)}{\sqrt{x}} dx = 2e^x\sqrt{x} + C$.

36) $\int \frac{e^x(1+\sin x\cos x)}{\cos^2 x} dx = e^x \operatorname{tang} x + C$. 37) $\int \frac{x + \sin x \cos x}{\cos^2 x} dx = x \operatorname{tang} x + C$.

38) $\int \frac{x + \sqrt{1-x^2} . \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + C$.

39) $\int \left[\frac{\arcsin x}{1+x^2} + \frac{\operatorname{arc\,tang} x}{\sqrt{1-x^2}}\right] dx = \arcsin x . \operatorname{arc\,tang} x + C$.

40) $\int \frac{x\log x + (1+x^2)\operatorname{arc\,tang} x}{x + x^3} dx = \log x . \operatorname{arc\,tang} x + C$.

41) $\int \frac{\sin x(1 - x^2\log x)}{x^2} dx = - \frac{\sin x - x\log x . \cos x}{x} + C$.

42) $\int (x\cos x + 3\sin x) x^2 dx = x^3 \sin x + C$. 43) $\int (x^2 + 6) x \sin x dx = x^2(3\sin x - x\cos x) + C$.

44) $\int \frac{\sin x + x\log x\cos x}{x} dx = \log x^{\sin x} + C$.

45) $\int (x^3\sin x + 6\cos x) dx = - x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x + C$.

Wyznaczyć następujące całki w formie zamkniętej:

46) $\int (x\cos x + m\sin x) x^{m-1} dx$. 47) $\int \frac{(1+x^2)^2 \operatorname{arc\,tang} x - 2x}{(1+x^2)^2} \sin x dx$.

48) $\int (m\cos x - x\sin x) x^{m-1} dx$. 49) $\int \frac{\sin x + \cos x . \arcsin x \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

50) $\int \frac{x - \arcsin x \sqrt{(1-x^2)^3}}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \sin x dx$. 51) $\int \frac{\cos x - x\sin x\log x}{x} dx$.

52) $\int \frac{x^2\log x - 1}{x^2} \cos x dx$. 53) $\int \frac{(1+x^2)^2 \operatorname{arc\,tang} x - 2x^2\log x}{x^2(1+x^2)^2} dx$.

54) Na podstawie metody całkowania przez części, wyprowadzić szeregi Taylora i Maclaurina.

Wykazać, że:

55) $\int \frac{\log(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx = C + \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}\frac{x^4}{4} + \frac{2 . 4}{3 . 5}\frac{x^6}{6} - \frac{2 . 4 . 6}{3 . 5 . 7}\frac{x^8}{8} + \ldots$

56) $\int \log\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} dx = C + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{4 . 5}{2 . 3}\frac{x^4}{4} + \frac{5 . 6 . 7}{2 . 3 . 4}\frac{x^5}{5} + \ldots$

57) $\int \cos(x+\alpha) dx = C + \cos\alpha . x - \sin\alpha\frac{x^2}{2!} - \cos\alpha . \frac{x^3}{3!} + \sin\alpha\frac{x^4}{4} + \cos\alpha\frac{x^5}{5!} - \ldots$

58) $\int e^{\sin x} dx = C + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{3x^5}{5!} - \frac{8x^6}{6!} + \ldots$

59) $\int \frac{e^x}{\cos x} dx = C + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{4x^4}{4!} + \frac{12x^5}{5!} + \frac{35x^6}{6!} + \ldots$

60) $\int \operatorname{arc\,tang} x dx = C + \frac{x^2}{1 . 2} - \frac{x^4}{3 . 4} + \frac{x^6}{5 . 6} - \frac{x^8}{7 . 8} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n-1)2n} + \ldots$

61) $\int \arcsin x dx = C + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{x^4}{3 . 4} + \frac{1 . 3}{2 . 4}\frac{x^6}{5 . 6} + \ldots + \frac{1 . 3 \ldots (2n-3)}{2 . 4 \ldots (2n-2)}\frac{x^{2n}}{(2n-1)2n} + \ldots$

62) $\int (\arcsin x)^2 dx = C + \frac{x^3}{3} + \frac{2^2}{3 . 4}\frac{x^5}{5} + \frac{2^2 4^2}{3 . 4 . 5 . 6}\frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{2^2 . 4^2 \ldots (2n-2)^2}{3 . 4 . 5 \ldots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$

63) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = C + \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}\frac{x^4}{4} + \frac{2.4}{3.5}\frac{x^6}{6} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\frac{x^8}{8} + \dots$

64) $\int \log \sec x \, dx = C + \frac{x^3}{3!} + 2\frac{x^5}{5!} + 16\frac{x^7}{7!} + 16.17.\frac{x^9}{9!} + \dots$

65) Wyprowadzić t. z. szereg Bernouille'go:

$$\int f(x)\,dx = C + xf(x) - \frac{x^2}{2!}f'(x) + \frac{x^3}{3!}f''(x) - \frac{x^4}{4}f'''(x) + \dots$$

Na podstawie metody całkowania przez części, wyprowadzić następujące rozwinięcia:

66) $\int \sin x \, dx = C + x \sin x - \frac{x^2}{2!}\cos x - \frac{x^3}{3!}\sin x + \frac{x^4}{4!}\cos x + \dots$

67) $\int \cos x \, dx = C + x \cos x + \frac{x^2}{2!}\sin x - \frac{x^3}{3!}\cos x - \frac{x^4}{4!}\sin x + \dots$

68) $\int e^x dx = C + e^x \left\{ x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \dots \right\}$.

69) $\int \log x \, dx = C + x \log x - x \left\{ \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots \right\}$.

70) $\int x \sin x \, dx = C + \frac{x^2}{2!}\sin x - \frac{x^3}{3!}\cos x - \frac{x^4}{4!}\sin x + \frac{x^5}{5!}\cos x + \dots$

71) $\int x \cos x \, dx = C + \frac{x^2}{2!}\cos x + \frac{x^3}{3!}\sin x - \frac{x^4}{4!}\cos x - \frac{x^5}{5!}\sin x + \dots$

72) $\int x \log x \, dx = C + \frac{x^2}{2}\log x - x^2 \left\{ \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots \right\}$.

Wyprowadzić następujące rozwinięcia:

74) $\int \frac{dx}{(a+x)^2} = C + \frac{x}{a^2} - \frac{x^2}{a^3} + \frac{x^3}{a^4} - \frac{x^4}{a^5} + \dots$

75) $\int \log(a+x)\,dx = C + x \log a + \frac{x^2}{1.2a} - \frac{x^3}{2.3a^2} + \frac{x^4}{3.4a^3} - \frac{x^5}{4.5a^4} + \dots$

76) $\int \frac{x^2-a^2}{(x^2+a^2)^2} dx = C - \frac{x}{a^2} + \frac{x^3}{a^4} - \frac{x^5}{a^6} + \frac{x^7}{a^8} - \dots$

77) $\int \log(x^2+a^2)\,dx = C + 2x \log a + \frac{x^3}{1.3a^2} - \frac{x^5}{2.5a^4} + \frac{x^7}{3.7a^6} - \dots$

Rozwiązania XVII. 1)—31). Na podstawie metody całkowania przez części. 32)—45) Przy pomocy stosownych przekształceń, prowadzących do wzorów art. 10. 46) $x^m \sin x$. 47) $\frac{\sin x - (1+x^2)\cos x \operatorname{arc\,tang} x}{1+x^2}$. 48) $x^m \cos x$. 49) $\sin x . \arcsin x$. 50) $\frac{\sin x - \sqrt{1-x^2}.\cos x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. 51) $\cos x \log x$. 52) $\frac{\cos x + x \sin x \log x}{x}$. 53) $\frac{x \log x - (1+x^2)\operatorname{arctg} x}{x(1+x^2)}$ 55)—73) Wskazówki zawarte w art. 4. 74)—75) Różniczkowanie i całkowanie szeregu na $\int \frac{dx}{a+x}$ podług a. 76)—77) Różniczkowanie i całkowanie szeregu na $\int \frac{a\,dx}{x^2+a^2}$ podług a.

Literatura. M. Ed. Brahy. Exercices méthodiques de calcul différentiel. Paris 1898. Exercices méthodiques de calcul intégral. Paris 1903. W. B. Smith. Infinitesimal Analysis. Vol. I. London 1898.

Tematy do rozprawek naukowych.

1. Rozwijanie całek na szeregi za pomocą metody całkowania przez części.
2. Szeregi Bernouille'go i szeregi pokrewne.
3. Różniczkowanie i całkowanie pod znakiem całkowym i ich zastosowania przy rozwijaniu całek na szeregi.

Wykład XVIII.

Różniczkowanie i całkowanie funkcyj dwu zmiennych, niezależnych.

1. **Pochodne cząstkowe funkcyi dwu zmiennych niezależnych.** W danej nkcyi z dwu zmiennych niezależnych x i y, kształtu: $z=f(x, y)$ możemy:) zmienić zmienną niezależną x o Δx, niezmieniając zmiennej y, albo 2) możemy zmienić zmienną y o Δy, niezmieniając zmiennej x. W pierwszym przypadku, dochodzimy do stosunku różniczkowego $\frac{\partial z}{\partial x}$, jako granicy stosunku różnicowego, w postaci:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x=0}\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x}=f_x'(x, y), \tag{1}$$

drugim, do stosunku różniczkowego $\frac{\partial z}{\partial y}$, jako granicy drugiego stosunku różnicowego, w postaci:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y=0}\frac{f(x, y+\Delta y)-f(x, y)}{\Delta y}=f'_y(x, y). \tag{2}$$

Otrzymane stosunki różniczkowe $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ nazywamy cząstkowymi stosunami różniczkowymi, a funkcye: $f'_x(x, y)$ i $f'_y(x, y)$, pochodnemi cząstkowemi danej funkcyi $f(x, y)$, podług x i podług y.

Pochodne cząstkowe danej funkcyi dwu zmiennej, otrzymujemy, wiocznie, na podstawie prawideł różniczkowania danej funkcyi $f(x, y)$, podług dnej zmiennej, uważając drugą, jako stałą.

Tak n. p. otrzymujemy dla funkcyi $z=y^2\sin x$, dwie pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2\cos x,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=2y\sin x.$$

2. **Różniczki cząstkowe i różniczka zupełna funkcyi dwu zmiennych, zależnych.** Zmiana zmiennej niezależnej x o Δx, wywołuje w funkcyi: $f(x, y)$ cząstkowy przyrost $\Delta_x z$ funkcyi z, ze względu na x, w postaci:

$$\Delta_x z=f(x+\Delta x, y)-f(x, y), \tag{3}$$

ana y o Δy wywołuje podobnie cząstkowy przyrost $\Delta_y z$ funkcyi z, ze ględu na y, w postaci:

$$\Delta_y z=f(x, y+\Delta y)-f(x, y). \tag{4}$$

Zmniejszając nieograniczenie przyrosty: Δx i Δy i zastępując je w ko[...] przez różniczki dx i dy, zmiennych niezależnych x i y, dochodzimy do różnic[...] cząstkowych funkcyi z ze względu na x, względnie na y, które oznacz[...] przez $d_x z$, względnie $d_y z$ i otrzymujemy w postaci:

$$d_x z = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \Delta x = \frac{\partial z}{\partial x} dx = f'_x(x, y)\, dx, \qquad (5)$$

$$d_y z = \lim_{\Delta y = 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \Delta y = \frac{\partial z}{\partial y} dy = f'_y(x, y)\, dy. \qquad (6)$$

Każda różniczka cząstkowa przedstawia się więc, jako iloczyn z odno[...] pochodnej cząstkowej przez różniczkę tej zmiennej niezależnej, któr[...] wywołała.

3. Równoczesna zmiana obu zmiennych, niezależnych x i y o przyro[...] skończone Δx i Δy wywołuje odpowiedni przyrost funkcyi z, zwany prz[...] rostem zupełnym tej funkcyi, który oznaczamy przez Δz i otrzymuje[...] w postaci różnicy:

$$\Delta z = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x, y). \qquad (7)$$

Otrzymaną różnicę możemy także przedstawić w postaci:

$$\Delta z = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y+\Delta y) + f(x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y),$$

a więc, w postaci sumy dwu różnic cząstkowych.

Zastępując w pierwszej różnicy $y+\Delta y$ przez y_1, otrzymujemy:

$$\Delta z = f(x+\Delta x,\ y_1) - f(x,\ y_1) + f(x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y),$$

czyli:

$$\Delta z = \frac{f(x+\Delta x,\ y_1) - f(x,\ y_1)}{\Delta x} \Delta x + \frac{f(x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y)}{\Delta y} \Delta y.$$

Zmniejszając równocześnie oba przyrosty Δx i Δy i zastępując [...] w końcu przez odnośne różniczki dx i dy, dochodzimy do t. z. zupełn[...] różniczki funkcyi $z = f(x, y)$, którą oznaczamy przez dz, w postaci:

$$dz = \frac{f(x+dx,\ y_1) - f(x,\ y_1)}{dx} dx + \frac{f(x,\ y+dy) - f(x,\ y)}{dy} dy,$$

a że:

$$\frac{f(x+dx,\ y_1) - f(x, y_1)}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x+\Delta x,\ y_1) - f(x,\ y_1)}{\Delta x} = \frac{\partial f(x, y_1)}{\partial x},$$

$$\frac{f(x,\ y+dy) - f(x,\ y)}{dy} = \lim_{\Delta y = 0} \frac{f(x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y)}{\Delta y} = \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y},$$

a przytem $\lim\limits_{\Delta y = 0} y_1 = y$, przeto otrzymujemy, ostatecznie, zupełną różniczkę w postaci:

$$dz = \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y} dy, \qquad (8$$

czyli:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \qquad (8'$$

A zatem: *Zupełna różniczka funkcyi dwu zmiennych niezależnych jest rów[...] sumie różniczek cząstkowych tej funkcyi.*

Dla funkcyi: $z = y^2 \sin x$, otrzymujemy, zatem: $dz = y^2 \cos x \,.\, dx + 2y \sin x$

4. **Wyznaczywszy**, najpierw, obie pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x, y) \text{ i } \frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x, y),$$

ej funkcyi $z=f(x, y)$, mamy, tem samem, wyznaczone już różniczki cząst-
re: $d_x z=f'_x(x, y)\,dx$. i $d_y z=f'_y(x, y)\,dy$ i zarazem jej różniczkę zupełną:
$f'_x(x, y)\,dx+f'_y(x, y)\,dy$.

Na odwrót, wyznaczywszy wprost, na podstawie prawideł różniczkowania, niczkę zupełną dz funkcyi $z=f(x, y)$, w postaci: $dz=f_x'(x, y)\,dx+f_y'(x, y)\,dy$ poszczególnych dodajnikach: $f_x'(x, y)\,dx$ i $f_y'(x, y)\,dy$, otrzymujemy odpowdnie różniczki cząstkowe, a w spółczynnikach przy dx i dy, odnośne pochodne cząstkowe danej funkcyi $f(x, y)$, względem x i y, w postaci:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x'(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y}=f_y'(x, y).$$

Tak otrzymamy n. p. dla funkcyi: $z=\arcsin\frac{x}{y}$ jej różniczkę zupełną postaci: $dz=\frac{dx}{\sqrt{y^2-x^2}}-\frac{x\,dy}{y\sqrt{y^2-x^2}}$, z której wynikają wprost pochodne cząstkowe danej funkcyi, w postaci: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}$.

5. **Pochodne cząstkowe wyższych rzędów danej funkcyi dwu zmiennych niezależnych.** Pochodne cząstkowe: $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$, danej funkcyi: $z=f(x, y)$ dwu zmiennych niezależnych x i y, są, w ogólności, znowu funkcyami zmiennych x i y, mają więc swe własne pochodne cząstkowe, które, ze względu na daną funkcyę, nazywamy pochodnemi cząstkowemi drugiego rzędu.

Jeżeli, mianowicie, funkcya $z=f(x, y)$, ma dwie pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}=f_x'(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}=f_y'(x, y),$$

otrzymamy, dla każdej z tych pochodnych cząstkowych, po dwie nowe pochodne cząstkowe, które możemy przedstawić w postaci:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x}=\frac{\partial f_x'(x, y)}{\partial x}=f_{x,x}''(x, y), \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}=\frac{\partial f_x'(x, y)}{\partial y}=f_{x,y}''(x, y) \qquad (9)$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x}=\frac{\partial f_y'(x, y)}{\partial x}=f_{y,x}''(x, y), \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y}=\frac{\partial f_y'(x, y)}{\partial y}=f_{y,y}''(x, y). \qquad (10)$$

Otrzymujemy, zatem, w całości, dla funkcyi dwu zmiennych niezależnych $f(x, y)$, cztery pochodne cząstkowe drugiego rzędu, które oznaczamy symbolami:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}''(x, y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=f_{xy}''(x, y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=f_{yx}''(x, y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}''(x, y).$$

Z tych czterech pochodnych, są jednak dwie jednakowe. Mianowicie, okazuje się, że, $f(x, y)$ dla funkcyi ciągłej i różniczkowalnej, ze względu na obie zmienne niezależne x, y, jest zawsze:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}, \text{ czyli: } f_{xy}''(x, y)=f_{yx}''(x, y).$$

6. Skoro funkcya $z=f(x, y)$ jest funkcyą ciągłą i różniczkowalną, natenczas jej pochodne cząstkowe: $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$, przedstawiają się, jako granice stosunków różnicowych:

$$\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x} \text{ i } \frac{f(x, y+\Delta y)-f(x, y)}{\Delta y},$$

czyli, stosunków:

$$\frac{f(x+h, y)-f(x, y)}{h} \text{ i } \frac{f(x, y+k)-f(x, y)}{k},$$

w których przyrosty: $h=\Delta x$, $k=\Delta y$, maleją, nieograniczenie zdążając do zera. Uważajmy w pierwszym stosunku różnicowym zmienną x za stałą, a nadajmy zmiennej y przyrost $\Delta y=k$, natenczas, otrzymamy stosunek różniczkowy $\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, jako granicę stosunku różnicowego:

$$\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)-f(x+\Delta x, y)+f(x, y)}{\Delta x . \Delta y}, \qquad (a)$$

czyli, stosunku:

$$\frac{f(x+h, y+k)-f(x, y+k)-f(x+h, y)+f(x, y)}{hk}, \qquad (a')$$

w którym przyrosty $h=\Delta x$ i $k=\Delta y$ maleją nieograniczenie, dążąc do zera. Podobnie, otrzymamy z drugiego stosunku różnicowego, uważając y za stałą, a nadając zmiennej x przyrost $\Delta x=h$, stosunek różniczkowy:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \text{ jako granicę stosunku różnicowego:}$$

$$\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x+\Delta x, y)-f(x, y+\Delta y)+f(x, y)}{\Delta x \Delta y}, \qquad (b)$$

czyli, stosunku:

$$\frac{f(x+h, y+k)-f(x+h, y)-f(x, y+k)+f(x, y)}{hk}, \qquad (b')$$

w którym $h=\Delta x$, $k=\Delta y$, maleją nieograniczenie, dążąc do zera.

Porównywając stosunki różnicowe (a) i (b), względnie (a') i (b') widzimy. że, dla wszelkich skończonych przyrostów $h=\Delta x$ i $k=\Delta y$, są one jednakowe, pozostaną więc w przypadku, gdy funkcya $z=f(x, y)$ jest ciągłą i różniczkowalną, ze względu na obie zmienne x i y, także jednakowe, gdy oba przyrosty $h=\Delta x$ i $k=\Delta x$ maleją nieograniczenie, dążąc do zera.

Będzie więc:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}=\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x}, \text{ a zatem:}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \text{ czyli: } f''_{x,y}(x, y)=f''_{y,x}(x, y). \qquad (11)$$

Jeżeli więc funkcyę $z=f(x, y)$ dwu zmiennych niezależnych x, y, ciągłą i różniczkowalną, ze względu na obie zmienne, zróżniczkujemy cząstkowo, najpierw, podług x, a następnie, podług y, to otrzymamy ten sam wynik,

jaki byśmy otrzymali, gdybyśmy tą funkcyę zróżniczkowali cząstkowo, najpierw podług zmiennej y, a potem podług zmiennej x.

Innemi słowy: *Porządek różniczkowania cząstkowego danej funkcyi dwu zmiennych niezależnych, ze względu na te zmienne, jest zupełnie obojętny.*

7. Twierdzenie to możemy uogólnić także do pochodnych rzędu wyższego nad drugi. Skoro, bowiem: $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$, natenczas, będzie także: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\right)$, a więc:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right],$$

czyli:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}=\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^3 z}{\partial y\,\partial x^2}. \qquad (12)$$

Oznaczmy ogólnie przez: $\frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m\,\partial y^n}$, pochodną cząstkową $(m+n)$-go rzędu funkcyi: $z=f(x, y)$, jaką otrzymany, jeżeli funkcyę $f(x, y)$, zróżniczkujemy cząstkowo, najpierw m-razy podług x, a następnie otrzymany wynik n-razy podług y, tedy, stosując prawidło $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ do funkcyi $z=f(x, y)$, a następnie kolejno do pochodnych wyższych rzędów, otrzymamy, ostatecznie, wzór ogólny:

$$\frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m\,\partial y^n}=\frac{\partial^{m+n} z}{\partial y^n\,\partial x^m}, \qquad (13)$$

który wypowiada twierdzenie, że także przy wielokrotnem różniczkowaniu cząstkowem funkcyj dwu zmiennych niezależnych, jest porządek różniczkowania obojętny.

Możemy zatem z danej funkcyi dwu zmiennych niezależnych utworzyć dwie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu, trzy drugiego, cztery trzeciego, w ogólności $(r+1)$-pochodnych cząstkowych r-go rzędu.

8. **Różniczki cząstkowe wyższych rzędów.** Z otrzymanej pochodnej cząstkowej $(m+n)$-go rzędu: $\frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m\,\partial y^n}$ danej funkcyi: $z=f(x, y)$, dwu zmiennych niezależnych x i y, otrzymamy odnośną różniczkę cząstkową $(m+n)$-go rzędu tej funkcyi, jeżeli, otrzymaną pochodną cząstkową $(m+n)$-go rzędu, pomnożymy przez odpowiednią różniczkę $(m+n)$-go rzędu, kształtu: $dx^m . dy^n$. Otrzymamy tedy odpowiednią różniczkę cząstkową, w postaci: $\frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m\,\partial y^n} . dx^m\,dy^n$.

9. **Różniczki zupełne wyższej rzędów danej funkcyi dwu zmiennych, niezależnych.** Z różniczki zupełnej pierwszego rzędu danej funkcyi $z=f(x, y)$ dwu zmiennych niezależnych x i y, kształtu: $dz=\frac{\partial z}{\partial x}\,dx+\frac{\partial z}{\partial y}\,dy$, otrzymujemy, na podstawie prawideł różniczkowania, różniczkę zupełną drugiego rzędu, a następnie, kolejno, różniczki zupełne wyższych rzędów, jeżeli różniczki dx i dy zmiennych niezależnych x i y, jako nieskończenie małe, od siebie i od zmiennych x i y niezależne, uważać będziemy, jako wielkości stałe, a więc położymy: $d(dx)=0$, jakoteż: $d(dy)=0$.

Tym sposobem, otrzymamy, najpierw, różniczkę zupełną drugiego rzędu, czyli, t. z. drugą różniczkę zupełną, w postaci:

$$d^2 z=d(dz)=d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).dx+d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).dy,$$

a że:

$$d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dy,\quad d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy,$$

przeto, otrzymujemy:

$$d^2 z=\left\{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx+\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dy\right\}dx+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy\right)dy,$$

czyli, wzór:
$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2, \tag{14}$$
który przedstawiamy symbolicznie w postaci:
$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^{(2)} z. \tag{14'}$$

Różniczka zupełna drugiej różniczki zupełnej $d^2 z$ danej funkcyi z daje **trzecią różniczkę zupełną** $d^3 z$, w postaci:
$$d^3 z = d(d^2 z) = d\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) dx^2 + 2d\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) dx\, dy + d\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) dy^2,$$
a że:
$$d\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \partial x + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2 \partial y} dy, \quad d\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx + \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dy,$$
$$d\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy,$$
przeto, otrzymujemy wzór:
$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx\, dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3, \tag{15}$$
który przedstawiamy symbolicznie w postaci:
$$d^3 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^{(3)} z. \tag{15'}$$

Na podstawie otrzymanych wzorów na drugą i trzecią różniczkę zupełną, znajdziemy ogólny wzór na n-tą **różniczkę zupełną**, w postaci:
$$d^n z = \frac{\partial^n z}{\partial x^n} dx^n + \binom{n}{1} \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y} dx^{n-1} dy + \ldots + \binom{n}{r} \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-r} \partial y^r} dx^{n-r} dy^r + \ldots +$$
$$+ \ldots + \binom{n}{n-1} \frac{\partial^n z}{\partial x \partial y^{n-1}} dx\, dy^{n-1} + \frac{\partial^n z}{\partial y^n} dy^n, \tag{16}$$
czyli:
$$d^n z = \sum_{r=0}^{r=n} \binom{n}{r} \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-r} \partial y^r} dx^{n-r} dy^r,$$
albo, w postaci symbolicznej:
$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^{(n)} z. \tag{16'}$$

10. Rzetelność tego wzoru dla dowolnego całkowitego rzędu n możemy dowieść na podstawie wnioskowania z n na $n+1$. Przyjmując, mianowicie, ten wzór za prawdziwy dla pewnego n, n. p. dla $n = m$, mamy:
$$d^m z = \sum_{r=0}^{r=m} \binom{m}{r} \frac{\partial^m z}{\partial x^{m-r} \partial y^r} dx^{m-r} dy^r,$$
skąd, otrzymujemy następną różniczkę zupełną, w postaci:
$$d^{m+1} z = d(d^m z) = \sum_{r=0}^{r=m} \binom{m}{r} d\left(\frac{\partial^m z}{\partial x^{m-r} \partial y^r}\right) . dx^{m-r} dy^r,$$
a że:
$$d\left(\frac{\partial^m z}{\partial x^{m-r} \partial y^r}\right) = \frac{\partial^{m+1} z}{\partial x^{m+1-r} \partial y^r} dx + \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m-r} \partial y^{r+1}} dy,$$
przeto, dostajemy:

$$d^{m+1}z=\sum_{r=0}^{r=m}\binom{m}{r}\left\{\frac{\partial^{m+1}z}{\partial x^{m+1-r}\partial y^r}dx^{m+1-r}dy^r+\frac{\partial^{m+1}z}{\partial x^{m-r}\partial y^{r+1}}dx^{m-r}dy^{r+1}\right\},$$

czyli:
$$d^{m+1}z=\sum_{r=0}^{r=m+1}\binom{m+1}{r}\frac{\partial^{m+1}z}{\partial x^{m+1-r}\partial y^r}dx^{m+1-r}dy^r.$$

Prawidło tworzenia $(m+1)$-szej różniczki zupełnej jest więc zgodne z prawidłem tworzenia m-tej różniczki zupełnej, a że jego rzetelność została dla $m=1, 2, 3$, bezpośrednio wykazaną, przeto, jest ono ogólnie prawdziwe.

Na podstawie powyższego prawidła, możemy tedy, wyznaczywszy pochodne cząstkowe n-go rzędu danej funkcyi: $z=f(x, y)$, podać zarazem n-tą różniczkę zupełną tej funkcyi.

11. Przykład. Wyznaczyć pochodne cząstkowe i różniczki zupełne funkcyi:
$$z=x^3-3xy+y^3.$$
Otrzymujemy tu pochodne pierwszego rzędu:
$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y=3(x^2-y);\ \frac{\partial z}{\partial y}=-3x+3y^2=3(y^2-x),$$
zatem, pierwszą różniczkę zupełną, na podstawie wzoru: $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$, w postaci:
$$dz=3(x^2-y)dx+3(y^2-x)dy,$$
następnie, pochodne cząstkowe drugiego rzędu:
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-3,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y,$$
zatem, drugą różniczkę zupełną, na podstawie wzoru: $d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$,
w postaci: $d^2z=6x\,dx^2-6\,dx\,dy+6y\,dy^2$, czyli: $d^2z=6(x\,dx^2-dx\,dy+y dy^2)$,
wreszcie, pochodne cząstkowe trzeciego rzędu:
$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=6,\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=0,\ \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=0,\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=6,$$
zatem, trzecią różniczkę zupełną, na podstawie wzoru:
$$d^3z=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dx\,dy^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3,$$
w postaci: $d^3z=6\,dx^3+6dy^3$, czyli: $d^3z=6(dx^3+dy^3)$.

Do tych wyników dojdziemy także wprost, różniczkując daną funkcyą i jej kolejne różniczki zupełne, podług x i y, uważając dx i dy, jako dowolne wielkości stałe. Tak otrzymujemy, najpierw, z funkcyi: $z=x^3-3xy+y^3$, wprost jej pierwszą różniczkę zupełną: $dz=3(x^2-y)dx+3(y^2-x)dy$, a stąd, jej drugą różniczkę zupełną: $d^2z=6x\,dx^2-6\,dx dy+6dy^2$, a z niej trzecią różniczkę zupełną: $d^3z=6\,dx^3+6\,dy^3$.

12. Całki cząstkowe danej funkcyi dwu zmiennych. Danej funkcyi $z=f(x, y)$ dwu zmiennych niezależnych x i y, odpowiadają, jak widzimy, dwie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu:
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}=f_x'(x y)\ \text{ i }\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}=f'_y(x, y),$$
następnie, trzy pochodne cząstkowe drugiego rzędu:
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}=f_{xx}''(x, y),\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}''(x, y),\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}=f_{yy}''(x, y),$$
ogólnie, $(n+1)$ pochodnych cząstkowych n-go rzędu:
$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n},\ \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y},\ \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2},\dots,\frac{\partial^n z}{\partial x^2\partial y^{n-2}},\ \frac{\partial^n z}{\partial x\partial y^{n-1}},\ \frac{\partial^n z}{\partial y^n}.$$

Każda z tych funkcyj jest nową funkcyą obu zmiennych niezależnych x i y, wyznaczalną na podstawie prawideł różniczkowania.

Zadaniem rachunku całkowego w odniesieniu do danej funkcyi $f(x, y)$ dwu zmiennych niezależnych, byłoby tedy wyznaczenie takiej funkcyi pierwotnej, dla której dana funkcya byłaby pewnego rodzaju pochodną cząstkową.

Skoro, mianowicie, wyznaczyć mamy taką funkcyę z, aby jej pochodna cząstkowa pierwszego rzędu była równa danej funkcyi $f(x, y)$, tedy otrzymujemy:

w przypadku: $\frac{\partial z}{\partial x}=f(x, y)$, odpowiednią całkę, w postaci: $z=\int f(x, y)\,dx$.

zaś w przypadku: $\frac{\partial z}{\partial y}=f(x, y)$, odpowiednią całkę, w postaci: $z=\int f(x, y)\,dy$.

W pierwszym przypadku mamy tedy całkować daną funkcyę: $f(x, y)$, według zmiennej x, uważając zmienną y, jako stałą, w drugim zaś mamy całkować daną funkcyę według zmiennej y, uważając zmienną x za stałą. Stała całkowania ma być tedy, w pierwszym przypadku, niezależną od x, może być jednak dowolną funkcyą zmiennej y, w drugim przypadku, musi być stała całkowania niezależną od zmiennej y, może być jednak dowolną funkcyą x. Możemy zatem do wyniku całkowania $F(x, y)$ dołączyć, w pierwszym przypadku, dowolną funkcyą: $\varphi(y)$, w drugim, dowolną funkcyą $\psi(x)$ i otrzymamy:

$$\int f(x, y)\,dx=F(x, y)+\varphi(y), \tag{17}$$

skoro: $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}=f(x, y)$, gdyż tedy także: $\frac{\partial[F(x, y)+\varphi(y)]}{\partial x}=f(x, y)$,

a natomiast:

$$\int f(x, y)\,dy=F(x, y)+\psi(x), \tag{18}$$

skoro: $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}=f(x, y)$, gdyż tedy także: $\frac{\partial[F(x, y)+\psi(x)]}{\partial y}=f(x, y)$.

Ogólnie, jeżeli dana funkcya: $f(x, y)$, jest pochodną cząstkową n-go rzędu pewnej niewiadomej funkcyi względem jednej tylko zmiennej, tedy, wykonawszy n-krotne całkowanie tejże funkcyi: $f(x, y)$, według dotyczącej zmiennej, należy dodać do wyniku funkcyę całkowitą $(n-1)$-go rzędu tejże zmiennej ze spółczynnikami $C_1, C_2, \ldots, C_n$, które mogą być dowolnemi funkcyami drugiej zmiennej y.

Jeżeli tedy:

$$\frac{\partial^n F(x, y)}{\partial x^n}=f(x, y),$$

tedy otrzymujemy całkę ogólną, w postaci:

$$\int\int\ldots\int f(x, y)\,.\,dx^n=F(x, y)+\varphi_1(y).x^{n-1}+\varphi_2(y).x^{n-2}+\ldots+\varphi_{n-1}(y).x+\varphi_n(y), \tag{19}$$

a podobnie, skoro:

$$\frac{\partial^n F(x, y)}{\partial y^n}=f(x, y),$$

tedy odnośna całka ogólna przedstawia się w postaci:

$$\int\int\ldots\int f(x, y)\,dy^n=F(x, y)+\psi_1(x).y^{n-1}+\psi_2(x).y^{n-2}+\ldots+\psi_{n-1}(x).y+\psi_n(x). \tag{20}$$

Pozostaje nam zastanowić się teraz nad przypadkiem, gdy dana funkcya $f(x, y)$ jest pochodną drugiego rzędu pewnej funkcyi: $F(x, y)$, ze względu na obie zmienne x i y.

13. Całki podwójne. Niech będzie daną funkcya $f(x, y)$ dwóch zmiennych niezależnych x i y, oznaczmy przez $F(x, y)$ funkcyą pierwotną, która miałaby tę własność, że jej druga pochodna cząstkowa względem x i y byłaby równa danej funkcyi $f(x, y)$, natenczas, na wyznaczenie tej niewiadomej funkcyi $F(x, y)$, otrzymujemy równanie różniczkowe:

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}=f(x, y).$$

Powyższe równanie, możemy także przedstawić w jednej z następujących postaci:

albo 1) $\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}\right\}=f(x, y)$, albo 2) $\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\right\}=f(x, y)$.

Połóżmy w pierwszej postaci: $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}=u$, natenczas, otrzymujemy równanie: $\frac{\partial u}{\partial y}=f(x, y)$, a stąd:

$$u=\int f(x, y)\,dy+C_1,$$

gdzie stała C_1 ma być tylko od y niezależną, może być jednak dowolną funkcyą $\varphi(x)$ zmiennej x. Otrzymujemy, zatem ogólnie:

$$u=\int f(x, y)\,dy+\varphi(x),$$

czyli:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}=\int f(x, y)\,dy+\varphi(x),$$

a stąd:

$$F(x, y)=\int\left[\int f(x, y)\,dy\right]dx+\int\varphi(x)\,dx+C_2,$$

gdzie stała C_2 może być dowolną funkcyą zmiennej y; kładąc, tedy: $\int\varphi(x)\,dx=\varphi_1(x)$, a $C_2=\psi_1(y)$, otrzymujemy szukaną funkcyę $F(x, y)$, w postaci:

$$F(x, y)=\int\left[\int f(x, y)\,dy\right]dx+\varphi_1(x)+\psi_1(y).$$

Połóżmy zaś w drugiej postaci: $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}=v$, natenczas, otrzymujemy z niej równanie:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=f(x, y), \text{ a stąd: } v=\int f(x, y)\,dx+\psi(y),$$

czyli:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}=\int f(x, y)\,dx+\psi(y),$$

a stąd:

$$F(x, y)=\int\left[\int f(x, y)\,dx\right]dy+\int\psi(y)\,dy+C,$$

gdzie stała całkowania C może być dowolną funkcyą zmiennej x. Kładąc tedy: $\int\psi(y)\,dy=\psi_2(y)$, a $C=\varphi_2(x)$, otrzymujemy szukaną funkcyę $F(x, y)$, w postaci:

$$F(x, y)=\int\left[\int f(x, y)\,dx\right]dy+\psi_2(y)+\varphi_2(x).$$

Mamy więc dwa sposoby wyznaczania funkcyi: $F(x, y)$, z danej funkcyi $f(x, y)$, pierwszy, określony wzorem: $\int\left[\int f(x, y)\,dy\right]dx$, według którego mamy daną funkcyę $f(x, y)$ scałkować, najpierw według y, a otrzymany wynik według x, drugi, określony wzorem: $\int\left[\int f(x, y)\,dx\right]dy$, według którego mamy daną funkcyę $f(x, y)$ scałkować, najpierw podług x, a dopiero otrzymany wynik scałkować według y.

W obu przypadkach, możemy do otrzymanych wyników dodać dwie dowolne funkcye, z których jedna byłaby funkcyą wyłącznie jednej zmiennej, druga funkcyą wyłącznie drugiej zmiennej.

Całkowanie kolejne funkcyi $f(x, y)$, dwu zmiennych niezależnych według obu zmiennych x i y, nazywamy całkowaniem podwójnem, a całki, kształtu: $\int\left[\int f(x, y)\,dy\right]dx$, względnie: $\int\left[\int f(x, y)\,dx\right]dy$, nazywamy całkami podwójnemi.

Należy teraz zbadać, czy też oba sposoby, określone powyższymi dwoma wzorami, prowadzą do tego samego wyniku.

*

14. Przyjmijmy, że istnieją dwie funkcye: $F_1(x, y)$ i $F_2(x, y)$, któreby czyniły zadość danemu równaniu: $\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}=f(x, y)$, a więc takie, żebyśmy miel równania tożsamościowe:

$$\frac{\partial^2 F_1(x, y)}{\partial x \partial y}=f(x, y) \text{ i } \frac{\partial^2 F_2(x, y)}{\partial x \partial y}=f(x, y),$$

natenczas, otrzymamy, na podstawie odejmowania, równanie:

$$\frac{\partial^2 F_1(x, y)}{\partial x \partial y}-\frac{\partial^2 F_2(x, y)}{\partial x \partial y}=0,$$

czyli:

$$\frac{\partial^2 [F_1(x, y)-F_2(x, y)]}{\partial x \partial y}=0.$$

Połóżmy $F_1(x, y)-F_2(x, y)=z$, natenczas, przedstawimy powyższe równanie, w postaci:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=0.$$

Z równania tego otrzymujemy:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0, \text{ zatem: } \frac{\partial z}{\partial y}=C_1,$$

gdzie C_1 jest stałą, od x niezależną, może być jednakże dowolną funkcyą drugiej zmiennej, niezależnej y. Możemy zatem położyć $C_1=\psi_1(y)$, zatem $\frac{\partial z}{\partial y}=\psi_1(y)$, skąd otrzymujemy, znowu:

$$z=\int \psi_1(y)\, dy+C_2=\psi(y)+C_2,$$

gdzie stała dowolna C_2, nie może zawierać zmiennej y, ale może być dowolną funkcyą drugiej zmiennej x.

Połóżmy $C_2=\varphi(x)$, a otrzymamy ostatecznie:

$$z=\varphi(x)+\psi(y),$$

czyli:

$$F_1(x, y)-F_2(x, y)=\varphi(x)+\psi(y).$$

A zatem: Dwie funkcye: $F_1(x, y)$ i $F_2(x, y)$, które sprawdzają warunek: $\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}=f(x, y)$, mogą się różnić między sobą tylko sumą dwóch dowolnych funkcyj, z których jedna jest wyłącznie funkcyą zmiennej x, druga wyłącznie funkcyą zmiennej y. W jakimkolwiek tedy porządku wykonamy całkowanie kolejne funkcyj $f(x, y)$, ze względu na jedną i drugą zmienną, otrzymamy zawsze dla całki podwójnej nieokreślonej, ten sam wynik. Chcąc otrzymać najogólniejszą postać całki podwójnej, należy do otrzymanego wyniku dołączyć jeszcze sumę dwóch dowolnych funkcyj, z których jedna zawiera tylko zmienną x, druga tylko zmienną y.

Porządek całkowania, jakkolwiek dla wyniku obojętny, zatrzymujemy ten, który w łatwiejszy sposób prowadzi do wyniku, używając sposobów pisania:

$$\iint f(x, y)\, dy\, dx=\int\left[\int f(x, y)\, dy\right] dx=\int dx \int f(x, y)\, dy,$$
$$\iint f(x, y)\, dx\, dy=\int\left[\int f(x, y)\, dx\right] dy=\int dy \int f(x, y)\, dx,$$

z których pierwszy sposób oznacza, że zaczynamy od całkowania podług y, a następnie całkujemy wynik podług x, a drugi sposób wskazuje całkowanie podług x, jako pierwsze, a potem całkowanie podług y, jako drugie.

15. **Przykład.** Niech będzie daną funkcya pochodna drugiego rzędu niewiadomej yi: $z = F(x, y)$, w postaci równania:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = ax + by + \frac{c}{x+y}.$$

Celem wyznaczenia funkcyi pierwotnej:

$$z = \int\int\left(ax + by + \frac{c}{x+y}\right) dy\, dx,$$

ijmy całkowanie od zmiennej y, a otrzymamy:

$$+ by + \frac{c}{x+y}\Big) dy\, dx = \int dx \int\left(ax + by + \frac{c}{x+y}\right) dy = \int dx\left[axy + \frac{b}{2}y^2 + c\log(x+y)\right] =$$

$$= \frac{a}{2}x^2y + \frac{b}{2}y^2x + c\int\log(x+y)dx,$$

ze względu na to, że, według metody całkowania przez części:

$$\int\log(x+y)dx = x\log(x+y) - \int\left(1 - \frac{y}{x+y}\right)dx = x\log(x+y) - x + y\log(x+y),$$

nujemy:

$$\int\int\left(ax + by + \frac{c}{x+y}\right) dy\, dx = \frac{1}{2}(ax + by)xy + c(x+y)\log(x+y) - cx.$$

Gdybyśmy wykonali tu najpierw całkowanie podług x, a potem podług y, otrzymaliy:

$$+ by + \frac{c}{x+y}\Big) dx\, dy = \int dy \int\left(ax + by + \frac{c}{x+y}\right) dx = \int dy\left[\frac{ax^2}{2} + bxy + c\log(x+y)\right] =$$

$$= \frac{ax^2y}{2} + \frac{by^2x}{2} + c\int\log(x+y)dy,$$

:

$$\int\int\left(ax + by + \frac{c}{x+y}\right) dx\, dy = \frac{1}{2}(ax + by)xy + c(x+y)\log(x+y) - cy.$$

Oba wyniki różnią się tylko funkcyami cx i cy, które mogą jednak być uważane, jako ste w dowolnych funkcyach: $\varphi(x)$ i $\psi(y)$, jakie do całki podwójnej dołączyć należy, otrzymać całkę ogólną. Wyrazy, które są jednocześnie funkcyami obu zmiennych x i y, obu wynikach tesame. Szukana funkcya: $z = F(x, y)$, ma, tedy, ogólny kształt:

$$\int\int\left(ax + by + \frac{c}{x+y}\right) dx\, dy = \frac{1}{2}(ax + by)xy + c(x+y)\log(x+y) + \varphi(x) + \psi(y),$$

$\varphi(x)$ i $\psi(y)$ są zupełnie dowolnemi funkcyami.

16. **Całkowanie różniczek zupełnych pierwszego rzędu.** Niech będą dane funkcye: $M(x, y)$ i $N(x, y)$ dwu zmiennych niezależnych x i y. Utwórzmy wyrażenie różniczkowe pierwszego rzędu, kształtu: $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$, napiszemy, dla skrócenia, w postaci: $Mdx + Ndy$. Zachodzi pytanie, czy jakimi warunkami utworzone wyrażenie różniczkowe: $Mdx + Ndy$, może upełną różniczką pewnej niewiadomej funkcyi: $z = f(x, y)$, dwu zmienniezależnych x i y, tak, żeby było:

$$dz = Mdx + Ndy. \tag{21}$$

Zupełna różniczka funkcyi: $z = f(x, y)$ dwu zmiennych niezależnych x i y dstawia się, jak wiadomo, w postaci:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy, \tag{22}$$

a sprowadza się do wyrażenia różniczkowego: $Mdx + Ndy$, skoro się ią dwa warunki następujące:

$$M = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial z}{\partial y}. \tag{23}$$

Z warunków tych otrzymujemy, za pomocą różniczkowania cząstkowego

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

a stąd warunek:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}, \tag{24}$$

A zatem: *Wyrażenie różniczkowe: $Mdx+Ndy$, może być więc tylko wówczas zupełną różniczką pewnej niewiadomej funkcyi: $z=f(x, y)$, dwu zmiennych niezależnych x i y, skoro spełnia się warunek:* $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$.

17. Warunek ten jest nie tylko koniecznym, lecz także wystarczającym. Pod tym warunkiem będzie bowiem Mdx różniczką cząstkową $d_x z$ pewnej niewiadomej funkcyi: $z=f(x, y)$, względem x, a Ndy różniczką cząstkową $d_y z$ tej samej funkcyi względem y.

Możemy zatem położyć:

$$z=\int Mdx+\varphi(y), \text{ lub: } z=\int Ndy+\psi(x),$$

gdzie $\varphi(y)$, względnie $\psi(x)$, są niewiadomemi funkcyami, każda tylko jednej ze zmiennych, niezależnych. Muszą one być tego rodzaju, żeby było:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=N, \text{ a } \frac{\partial z}{\partial x}=M.$$

Na wyznaczenie funkcyj: $\varphi(y)$ i $\psi(x)$, otrzymujemy zatem równania:

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M dx+\frac{d\varphi(y)}{dy}=N, \text{ względnie: } \frac{\partial}{\partial x}\int N dy+\frac{d\psi(x)}{dx}=M,$$

z których dostajemy:

$$\frac{d\varphi(y)}{dy}=N-\frac{\partial}{\partial y}\int M dx; \quad \frac{d\psi(x)}{dx}=M-\frac{\partial}{\partial x}\int Ndy,$$

a więc:

$$\varphi(y)=\int\left[N-\frac{\partial}{\partial y}\int M dx\right]dy; \quad \psi(x)=\int\left[M-\frac{\partial}{\partial x}\int Ndy\right]dx,$$

Funkcya: $N-\frac{\partial}{\partial y}\int Mdx=N-\int\frac{\partial M}{\partial y}dx$, stojąca pod znakiem całkowym w pierwszej całce, musiałaby być zatem wyłącznie funkcyą zmiennej niezależnej y, a funkcya: $M-\frac{\partial}{\partial x}\int Ndy=M-\int\frac{\partial N}{\partial x}dy$, stojąca pod znakiem całkowym w drugiej całce, musiałaby być wyłącznie funkcyą zmiennej niezależnej x.

Musiałoby być zatem:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{N-\int\frac{\partial M}{\partial y}dx\right\}=0, \text{ względnie: } \frac{\partial}{\partial y}\left\{M-\int\frac{\partial N}{\partial x}dy\right\}=0,$$

czyli:

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}, \text{ względnie } \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x},$$

a więc, warunek: $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$, jest zarazem warunkiem, wystarczającym, aby wyrażenie różniczkowe: $Mdx+Ndy$ było zupełną różniczką pewnej niewiadomej funkcyi: $z=f(x, y)$ dwu zmiennych niezależnych x i y.

18. Warunek $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ nazywamy też **warunkiem całkowalności** rażenia różniczkowego: $Mdx+Ndy$, a funkcyę $z=f(x, y)$, dla której dane rażenie różniczkowe jest zupełną różniczką, nazywamy **całką danej** źniczki zupełnej i oznaczamy ją częstokroć w postaci: $\int(Mdx+Ndy)$.

Jeżeli tedy spełniony jest powyższy warunek całkowalności, a więc, eli możemy położyć: $dz=Mdx+Ndy$, natenczas całka danej różniczki zułnej, przedstawia się w postaci:

$$z=\int Mdx+\int\left[N-\frac{\partial}{\partial y}\int Mdx\right]dy, \qquad (25)$$

bo:

$$z=\int Ndy+\int\left[M-\frac{\partial}{\partial x}\int Ndy\right]dx, \qquad (25')$$

Mając więc wyznaczyć całkę danej różniczki: $Mdx+Ndy$, czyniącej zaść warunkowi: $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$, całkujemy jedną różniczkę cząstkową, ze względu odnośną zmienną, uważając drugą, jako stałą i dołączamy do otrzyanego wyniku dowolną funkcyę tej drugiej zmiennej; tak dołączoną funkcyę ynaczamy następnie, na podstawie warunku, że pochodna cząstkowa rzymanego wyniku, obliczona ze względu na tę drugą zmienną, ma być wną spółczynnikowi, występującemu w danej różniczce zupełnej przy źniczce tejże zmiennej.

19. **Przykład.** Wykazać, że różniczka: $(3xy^2-x^2)\,dx-(1+6y^2-3x^2y)\,dy$ jest różniczką pełną i wyznaczyć jej całkę.

Rozwiązanie: Mamy tu:

$$M=3xy^2-x^2, \quad N=-(1+6y^2-3x^2y),$$

że:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=6xy=\frac{\partial N}{\partial x},$$

więc dana różniczka jest różniczką zupełną.

Możemy zatem położyć: $dz=(3xy^2-x^2)\,dx-(1+6y^2-3x^2y)\,dy$.

Całkując różniczkę cząstkowo podług x, otrzymujemy:

$$z=\frac{3x^2y^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\varphi(y).$$

Różniczkując otrzymany wynik podług y, dostajemy:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=3x^2y+\frac{d\varphi(y)}{dy},$$

więc, na wyznaczenie funkcyi $\varphi(y)$, warunek:

$$3x^2y+\frac{d\varphi(y)}{dy}=-(1+6y^2-3x^2y),$$

którego wynika:

$$\frac{d\varphi(y)}{dy}=-1-6y^2,$$

więc:

$$\varphi(y)=-\int(1+6y^2)dy=-y-2y^3+C.$$

Wobec tego, otrzymujemy szukaną całkę w postaci:

$$z=\frac{3x^2y^2}{2}-\frac{x^3}{3}-y-2y^3+C.$$

20. Warunki całkowalności różniczek drugiego, lub wyższych rzędów. ech będzie daną różniczka drugiego rzędu w postaci: $Pdx^2+Q\,dx\,dy+Rdy^2$, zie P, Q, R są wiadomemi funkcyami dwu zmiennych, niezależnych x i y.

Warunki, pod którymi dana różniczka będzie zupełną drugą różniczką pewnej niewiadomej funkcyi: $z=f(x, y)$, wypływają z porównania danej różniczki z drugą różniczką zupełną:

$$d^2 z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Porównywając odnośne spółczynniki, otrzymujemy warunki:

$$P=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad Q=2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\quad R=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

a stąd:
$$\frac{\partial^2 P}{dy^2}=\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial y}=2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}=\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2},$$

zatem, szukane warunki, w postaci:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}:\frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial y}:\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}=1:2:1. \tag{26}$$

W analogiczny sposób możnaby wyprowadzić warunki całkowalności różniczek n-go rzędu, kształtu:

$$P_0dx^n+P_1dx^{n-1}dy+\ldots+P_rdx^{n-r}dy^r+\ldots+P_ndy^n,$$

gdzie P_0, P_1,..., P_n są danemi funkcyami, zmiennych, niezależnych x i y, w postaci:
$$\frac{\partial^n P_0}{\partial y^n}:\frac{\partial^n P_1}{\partial y^{n-1}\partial x}:\frac{\partial^n P_2}{\partial y^{n-2}\partial x^2}:\ldots:\frac{\partial^n P_n}{\partial y^n}=1:\binom{n}{1}:\binom{n}{2}:\ldots:1. \tag{27}$$

Ćwiczenia XVIII.

Wyznaczyć obok podane pochodne cząstkowe następujących funkcyj dwu zmiennych, niezależnych:

1) $z=x^3y^3$; $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^3$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2x^3y$.

2) $z=y^3+4x^2y+2x^3$; $\frac{\partial z}{\partial x}=8xy+6x^2$, $\frac{\partial z}{\partial y}=3y^2+4x^2$.

3) $z=x^3-3axy+y^3$; $\frac{\partial z}{\partial x}=3(x^2-ay)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=3(y^2-ax)$.

4) $z=27x^3-18x^2y+12xy^2-8y^3$; $\frac{\partial z}{\partial x}=3(27x^2-12xy+4y^2)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-6(3x^2-4xy+4y^2)$.

5) $z=ax^3+bxy-cy^5$; $\frac{\partial z}{\partial x}=3ax^2+by$; $\frac{\partial z}{\partial y}=bx-5cy^4$.

6) $z=x^y$; $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\log x$.

7) $z=e^y\arcsin x$; $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{e^y}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=e^y.\arcsin x$.

8) $z=\log\operatorname{tang}\frac{x}{y}$; $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2}{y\sin\frac{2x}{y}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x}{y^2\sin\frac{2x}{y}}$.

9) $z=\arcsin\frac{x}{y}$; $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}$.

10) $z=\arccos\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+y^2}$.

11) $z=\operatorname{arc\,tang}\frac{2x+y-x^2y}{1-2xy-x^2}$; $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2}{1+x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+y^2}$.

12) $z=\arcsin\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{xy\sqrt{2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x^2\sqrt{2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$.

Wyprowadzić obok podane pierwsze różniczki następujących funkcyj dwu zmiennych, zależnych:

13) $z = {}^3\!/_2\, x^2 y^2 - \frac{1}{3} x^3 + 2y^3 - y$; $dz = (3xy^2 - x^2)\, dx - (1 + 6y^2 - 3x^2 y)\, dy$.

14) $z = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}$; $dz = -\frac{4x}{(x^2 + y^2)^3} dx - \frac{4y}{(x^2 + y^2)^3} dy$.

15) $z = \frac{(x + a)^n}{(y + b)^m}$; $dz = \frac{(x + a)^{n-1}}{(y + b)^{m+1}} [n(y + b)\, dx - m(x + a)\, dy]$.

16) $z = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$; $dz = \frac{y}{x^2 \sqrt{x^2 + y^2}} [x\, dy - y\, dx]$.

17) $z = \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$; $dz = \frac{2xy}{(x^2 - y^2)^{1/2} (x^2 + y^2)^{3/2}} [y\, dx - x\, dy]$.

18) $z = \log \sqrt{\frac{x + y}{x - y}}$; $dz = \frac{x\, dy - y\, dx}{x^2 - y^2}$.

19) $z = xy\, e^{x+2y}$; $dz = e^{x+2y} [y(1 + x)\, dx + x(1 + 2y)\, dy]$.

20) $z = \log \sin \frac{x}{y}$; $dz = \frac{1}{y^2} \operatorname{cotg} \frac{x}{y} . (y\, dx - x\, dy)$.

21) $z = \arcsin \frac{x}{y}$; $dz = \frac{y\, dx - x\, dy}{y\sqrt{y^2 - x^2}}$. 22) $z = \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{y}$; $dz = \frac{y\, dx - x\, dy}{x^2 + y^2}$.

23) $z = \log \frac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{x - \sqrt{x^2 - y^2}}$; $dz = \frac{2(y\, dx - x\, dy)}{y\sqrt{x^2 - y^2}}$.

24) $z = \operatorname{arc\,tang} \frac{x - y}{x + y}$; $dz = \frac{y\, dx - x\, dy}{x^2 + y^2}$.

25) $z = \sin (x^2 y^3)$; $dz = x\, y^2 \cos (x^2 y^3) (2y\, dx + 3x\, dy)$.

Wyznaczyć pochodne cząstkowe i różniczki zupełne następujących funkcyj dwu zmiennych, niezależnych:

26) $z = x^m y^n$. 27) $z = x^2 y^3 - 3x^4 y + xy^4$. 28) $z = \frac{e^x y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

29) $z = \frac{a^2}{x^2} + \frac{y^2}{b^2}$. 30) $z = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x + y}$. 31) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. 32) $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

33) $z = e^{ax+by}$. 34) $z = \log (ax + by)$. 35) $z = \sin x \cos y$.

36) $z = \sin mx . \sin ny$. 37) $z = \sin x \log y + e^y \log x$.

Wykazać, że:

38) Skoro: $z = \frac{y^3 + x^3}{y - x}$, natenczas: $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2(y^3 + x^3)}{y - x}$.

39) Skoro: $z = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x + y}$, natenczas: $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x + y}$.

Wyprowadzić obok podane pochodne cząstkowe wyższych rzędów następujących funkcyj:

40) $z = \frac{2xy}{x^3 - y^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = -4 \frac{x^6 + 7x^3 y^3 + y^6}{(x^3 - y^3)^3}$.

41) $z = \sqrt{2xy + y^2}$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\, \partial y} = \frac{y^2 (y - x)}{(2xy + y^2)^{5/2}}$.

42) $z = y^x$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = y^{x-1} (1 + x \log y)$.

43) $z = x \operatorname{tang} y + y \operatorname{tang} x$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\, \partial y} = \frac{2(\cos x + 3 \sin^2 x)}{\cos^4 x}$.

44) $z = \sin x \log y + e^y \log x$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\cos x}{y} + \frac{e^y}{x}$.

45) $z = \arcsin \sqrt{\frac{x - y}{x}}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{1}{4} \frac{y}{(xy - y^2)^{3/2}}$.

46) $z = \text{arc tang} \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = \frac{2x^3 y}{(x^4 - y^4)^{3/2}}.$

47) Wykazać, że dla funkcyi: $z = \sin(ax + by)$, otrzymujemy:

$$\frac{\partial^m z}{\partial x^m} = a^m \sin\left(ax + by + m\frac{\pi}{2}\right), \quad \frac{\partial^n z}{\partial y^n} = b^n \sin\left(ax + by + n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m \, \partial y^n} = a^m b^n \sin\left\{ax + by + (m+n)\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Wyprowadzić obok podane różniczki zupełne wyższych rzędów, następującyc dwu zmiennych, niezależnych:

48) $z = x^m y^n; \; d^2 z = x^{m-2} y^{n-2} \{m(m-1) y^2 dx^2 + 2mnxy \, dx \, dy + n(n-1) x^2 dy^2\}.$

49) $z = \sqrt{x^2 + y^2}; \; d^2 z = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} [y^2 dx^2 - 2xy \, dx \, dy + x^2 dy^2].$

50) $z = \log(ax + by); \; d^2 z = -\frac{1}{(ax + by)^2} [a^2 dx^2 + 2\,ab\,dx\,dy + b^2 dy^2],$

$$d^n z = (-1)^{n-1} (n-1)! \left(\frac{a\,dx + b\,dy}{ax + by}\right)^n.$$

51) $z = e^{ax+by}; \; d^3 z = e^{ax+by} [a^3 dx^3 + 3a^2 b\,dx^2 dy + 3ab^2 dx\,dy^2 + b^3 dy^3],$

$$d^n z = e^{ax+by} (a\,dx + b\,dy)^n.$$

52) $z = \text{arc sin}\frac{x}{y}; \; d^2 z = \frac{1}{(y^2 - x^2)^{3/2}} \left[x\,dx^2 - 2y\,dx\,dy + \frac{(2y^2 - x^2)x}{y^2} dy^2\right].$

53) Wykazać, że, dla funkcyi: $z = x\sqrt{2xy + y^2}$, otrzymujemy:

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x\sqrt{2xy + y^2}.$$

Wyprowadzić obok podane całki funkcyj dwu zmiennych, niezależnych:

54) $\int y e^{x+2y} (1 + x) dx = xye^{x+2y} + \varphi(y).$

55) $\int \frac{y\,dy}{(x^2 + y^2)^3} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} + \varphi(x).$

56) $\int \frac{y\,dx}{x^2 + y^2} = \text{arc tang}\frac{x - y}{x + y} + \varphi(y).$

57) $\int \frac{x\,dy}{a^2 x^2 - b^2 y^2} = \frac{1}{2ab} \log\frac{ax + by}{ax - by} + \varphi(x).$

58) $\iint \frac{y^2 dx^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \sqrt{x^2 + y^2} + \varphi_1(y).x + \varphi_2(y).$

59) $\iint \frac{(2y^2 - x^2)x}{y^2 (y^2 - x^2)^{3/2}} dy^2 = \text{arc sin}\frac{x}{y} + \varphi_1(x).y + \varphi_2(x).$

Wyprowadzić następujące całki podwójne:

60) $\iint \frac{x^6 + 7x^3 y^3 + y^6}{(x^3 - y^3)^3} dx\,dy = -\frac{1}{2}\frac{xy}{x^3 - y^3} + \varphi_1(x) + \varphi_2(y).$

61) $\iint \frac{(x^2 + y^2)xy}{(x^2 - y^2)^3} dx\,dy = -\frac{1}{8}\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} + \varphi_1(x) + \varphi_2(y).$

62) $\iint \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx\,dy = \text{arc tang}\frac{x}{y} + \varphi_1(x) + \varphi_2(y).$

63) $\iint \frac{y\,dx\,dy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} = -\log(x + \sqrt{x^2 + y^2}) + \varphi_1(x) + \varphi_2(y).$

64) $\iint \frac{y\,dx\,dy}{(xy - y^2)^{3/2}} = 4\,\text{arc sin}\sqrt{\frac{x - y}{x}} + \varphi_1(x) + \varphi_2(y)$

65) $\int\int(\cos y+\cos x)dx\,dy=x\sin y+y\sin x+\varphi_1(x)+\varphi_2(y)$.

66) $\int\frac{2y\sqrt{x^2+y^2}+x^2(x^2+2y)^2}{x^2\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy=\frac{1}{2}\log xy+$

$$+\frac{1}{2}\log[\sqrt{x^2+y^2}-y]-\frac{y(\sqrt{x^2+y^2}+y)}{2x^2}+\varphi_1(x)+\varphi_2(y).$$

67) $\int\int\frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}=\text{arc tang}\frac{xy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}+\varphi_1(x)+\varphi_2(y)$.

Wykazać, że następujące różniczki są różniczkami zupełnemi i wyprowadzić ich całki, obok podane:

68) $dz=(a^2y+x^3)dx+(b^3+a^2x)dy$; $z=\frac{x^4}{4}+a^2xy+b^3y+C$.

69) $dz=(\sin y-y\sin x)dx+(\cos x+x\cos y)dy$; $z=x\sin y+y\cos x+C$.

70) $dz=\frac{xy\,dy-y\,dx}{x^2(x^2+y^2)^{1/2}}$; $z=\frac{(x^2+y^2)^{1/2}}{x}+C$. 71) $dz=\frac{x^2dy-y^2dx}{(x-y)^2}$; $z=\frac{xy}{x-y}+C$.

72) $dz=\frac{dx}{(x^2+y^2)^{1/2}}+\left\{1-\frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right\}\frac{dy}{y}$; $z=\log(x+\sqrt{x^2+y^2})+C$.

73) $dz=\left(3x^2+\frac{1}{x^2}+2xy^2-\frac{2y^3}{x^3}\right)dx+\left(3y^2+\frac{1}{y^2}+2x^2y+\frac{2y}{x^2}\right)dy$;

$$z=x^3+y^3-\frac{x+y}{xy}+y^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+C.$$

74) $dz=\left[1-\frac{4y^2}{(x-y)^2}\right]dx-\left[1-\frac{4x^2}{(x-y^2)}\right]dy$; $z=\frac{(x+y)^2}{x-y}+C$.

75) $dz=\left(\text{tang}\,y-\frac{y}{\sin^2x}-\frac{y}{x\sqrt{x-y^2}}\right)dx+\left(\text{cotg}\,x+\frac{x}{\cos^2y}+\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)dy$;

$$z=x\,\text{tang}\,y+y\,\text{cotg}\,x+\text{arc sin}\frac{y}{x}+C.$$

76) Wykazać, że różniczka drugiego rzędu: $y^3dx^2+6xy^2dx\,dy+3x^2y\,dy^2$, jest różniczką zupełną i wyznaczyć jej całkę.

Rozwiązania XVIII. Wskazówki: 1)—12) Różniczkowanie cząstkowe. 13)—25) Bezpośredniem różniczkowaniem według obu zmiennych, jakoteż za pomocą pochodnych, cząstkowych. 26)—39) Z pochodnych, cząstkowych, różniczki zupełne i na odwrót. 40—46) Sprawdzić wyniki, przy zmianie porządku różniczkowania. 48)—52) Zarówno bezpośrednio, jak przy pomocy pochodnych, cząstkowych. 54)—59) Całkowanie cząstkowe podług jednej zmiennej. 60)—67) Sprawdzić wyniki, przez zmianę porządku całkowania. 68)—75) Por. art. 19. 76) $z=\frac{1}{2}x^2y^3$.

Literatura. D. F. Gregory. Examples of the processes of the differential and integral calculus. Cambridge 1841. S. F. Lacroix. Traité du calcul differentiel et du calcul integral. 9-me edition revue par Hermite et Serret. 1881. po polsku wyszedł: Traktat początkowy rachunku różniczkowego i całkowego przez S. F. Lacroix, przełożony podług trzeciego wydania przez Michała Pełkę Polińskiego. Wilno, 1824.

Tematy do rozpraw naukowych.

1. Różniczkowanie wyraźnych i uwikłanych funkcyj o dwu zmiennych, niezależnych.
2. Całkowanie różniczek cząstkowych, z teoryą całek podwójnych.
3. Całkowanie zupełnych różniczek dowolnego rzędu, zawierających dwie zmienne niezależne.

Wykład XIX.

Rozwijanie funkcyj dwu zmiennych, niezależnych na szeregi.

1. Szereg Taylora dla funkcyi dwu zmiennych, niezależnych. Niech będzie daną funkcya: $z=f(x, y)$, dwu zmiennych, niezależnych x i y. Przyjmując pewne miejsce x, y, a więc, uważając przyjęte wartości na x i y chwilowo, jako stałe wiadome, nadajmy im przyrosty zmienne w postaci ht i kt, gdzie t jest dowolną zmienną, niezależną. Pod temi założeniami, weźmy pod uwagę funkcyę:

$$f(x+ht,\ y+kt)=\varphi(t),$$

która, wobec przyjętych wartości na x i y, przy pewnych stałych wartościach h i k, będzie funkcyą wyłącznie jednej zmiennej, niezależnej t.

Na podstawie szeregu Maclaurina, otrzymamy tedy:

$$\varphi(t)=\varphi(0)+\frac{\varphi'(0)}{1!}t+\frac{\varphi''(0)}{2!}t^2+\ldots+\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}t^n+R_n, \tag{1}$$

gdzie $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$,..., są wartościami funkcyi $\varphi(t)$ i jej pochodnych, względem t, dla $t=0$, a R_n resztą, przedstawiającą się, na podstawie wzoru Lagrange'a, (patrz T. I. str. 519.) w postaci: $R_n=\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\theta t)$, gdzie θ leży między 0, a 1, a na podstawie wzoru Cauchy'ego (T. I. str. 520), w postaci:

$$R_n=\frac{t^{n+1}}{n!}(1-\theta_1)^n\varphi(\theta_1 t), \text{ gdzie } 0<\theta_1<1.$$

Aby obliczyć, kolejno po sobie następujące, pochodne funkcyi:

$$\varphi(t)=f(x+ht,\ y+kt),$$

jednej zmiennej niezależnej t, połóżmy: $u=x+ht$, $v=y+kt$, tedy, uważając x, y, h, k, jako stałe, otrzymamy: $\frac{du}{dt}=h$, $\frac{dv}{dt}=k$, wobec tego, funkcya $\varphi(t)$ i jej pochodne, przedstawią się w następujących postaciach:

$$\varphi(t)=f(u, v),$$

$$\varphi'(t)=\frac{\partial f(u, v)}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt}=h\frac{\partial f}{\partial u}+k\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\varphi''(t)=\frac{\partial^2 f(u, v)}{\partial t^2}=h\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{du}{dt}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{dv}{dt}\right\}+k\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{du}{dt}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{dv}{dt}\right\}=$$

$$=h^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=\left(h\frac{\partial}{\partial u}+k\frac{\partial}{\partial v}\right)^{(2)}f,$$

$$\varphi'''(t)=\frac{\partial^3 f(u,v)}{\partial t^3}=\left(h\frac{\partial}{\partial u}+k\frac{\partial}{\partial v}\right)^{(3)}f,$$

. . . .

$$\varphi^{(n)}(t)=\frac{\partial^n f(u,v)}{\partial t^n}=\left(h\frac{\partial}{\partial u}+k\frac{\partial}{\partial v}\right)^{(n)}f. \qquad (2)$$

Z drugiej strony, mamy, dla dowolnego t, pochodne:

$$\frac{du}{dx}=1,\ \frac{dv}{dy}=1, \qquad \text{zatem:}$$

$$\frac{\partial f(u,v)}{\partial x}=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u},\quad \frac{\partial f(u,v)}{\partial y}=\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dy}=\frac{\partial f(u,v)}{\partial v},$$

wskutek tego:

$$\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u^2}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u^2},\quad \frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u\partial v}\cdot\frac{dv}{dy}=\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial v^2}\cdot\frac{dv}{dy}=\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial v^2},$$

podobnie:

$$\frac{\partial^3 f(u,v)}{\partial v^3}=\frac{\partial^3 f(u,v)}{\partial x^3},\quad \frac{\partial^3 f(u,v)}{\partial u^2\partial v}=\frac{\partial^3 f(u,v)}{\partial x^2\partial y},\quad \frac{\partial^3 f(u,v)}{\partial u\partial v^2}=\frac{\partial^3 f(u,v)}{\partial x\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^3 f(u,v)}{\partial v^3}=\frac{\partial^3 f(u,v)}{\partial y^3}, \text{ i t. d.}$$

Wobec tego, otrzymujemy:

$$\varphi(t)=f(x+ht,\ y+kt),\quad \varphi'(t)=h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\varphi''(t)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)}f,\quad \varphi'''(t)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(3)}f,$$

ogólnie:

$$\varphi^{(n)}(t)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)}f, \qquad (3)$$

skąd, dla $t=0$, dostajemy:

$$\varphi(o)=f(x,y),\quad \varphi'(o)=h\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+k\frac{\partial f(x,y)}{\partial y},$$

$$\varphi''(o)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)}f(x,y),\quad \varphi'''(o)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(3)}f(x,y),$$

ogólnie:

$$\varphi^{(n)}(o)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)}f(x,y). \qquad (4)$$

Podstawiwszy te wartości w równanie (1), otrzymujemy wzór:

$$\varphi(t)=f(x+ht,\ y+kt)=f(x,y)+\frac{t}{1!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)+\frac{t^2}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)}f(x,y)+$$

$$+\frac{t^3}{3!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(3)}f(x,y)+\ldots+\frac{t^n}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)}f(x,y)+R_n, \qquad (5)$$

gdzie, według wzoru Lagrange'a, reszta:

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n+1)}f(x+\theta h,\ y+\theta k),\ \theta<1,$$

według wzoru Cauchy'ego:

$$R_n=\frac{1}{n!}(1-\theta_1)^n\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n+1)}f(x+\theta_1 h,\ y+\theta_1 k),\ \theta_1<1.$$

Połóżmy w otrzymanym wzorze $t=1$, a dostaniemy wzór:

$$f(x+h,\ y+k)=f(x,\ y)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,\ y)+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)}f(x,y)+\dots+$$
$$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)}f(x,\ y)+R_n. \tag{6}$$

Powyżej otrzymany wzór (6), przedstawia wzór Taylora, w zastosowaniu do funkcyi $(x,\ y)$, dwu zmiennych, niezależnych x i y.

2. Wzór (6) prowadzi, dla $n=\infty$, do szeregu Taylora dla funkcyi $z=f(x,\ y)$ dwu zmiennych, niezależnych x i y, przedstawiającego się w postaci symbolicznej:

$$f(x+h,\ y+k)=f(x,\ y)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)}f+\dots+$$
$$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)}f+\dots \tag{7}$$

czyli w postaci rozwiniętej:

$$f(x+h,\ y+k)=f(x,\ y)+\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)+$$
$$+\frac{1}{3!}\left(h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+3h^2k\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}+3hk^2\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}+k^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)+\dots+$$
$$+\frac{1}{n!}\left(h^n\frac{\partial^n f}{\partial x^n}+\binom{n}{1}h^{n-1}k\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}+\dots+\binom{n}{r}h^{n-r}k^r\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-r}y^r}+\dots+k^n\frac{\partial^n f}{\partial y^n}\right)+\dots \tag{7'}$$

Wzór ten przedstawia wartość funkcyi: $f(x,\ y)$ w miejscu: $x+h,\ y+k$, gdy znane są wartości funkcyi $f(x,\ y)$ i wszystkich jej pochodnych cząstkowych w miejscu $x,\ y$.

Zastępując w tym wzorze $x+h$ przez x, $y+k$ przez y, a przytem x przez a, y przez b, a więc h przez $x-a$, k przez $y-b$, otrzymujemy szereg Taylora, w postaci:

$$f(x,\ y)=f(a,\ b)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{a,b}(x-a)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{a,b}(y-b)+\frac{1}{2!}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{a,b}(x-a)^2+\right.$$
$$\left.+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_{a,b}(x-a)(y-b)+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{a,b}(y-b)^2\right]+\frac{1}{3!}\left[\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_{a,b}(x-a)^3+\right.$$
$$\left.+3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\right)_{a,b}(x-a)^2(y-b)+3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}\right)_{a,b}(x-a)(y-b)^2+\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_{a,b}(y-b)^3\right]+\dots \tag{8}$$

przedstawiającej funkcyę $f(x,\ y)$ w postaci szeregu, uporządkowanego według rosnących potęg różnic: $(x-a)$ i $(y-b)$.

3. Dla $a=0$, $b=0$, otrzymujemy stąd szereg Maclaurin'a dla funkcyi: $f(x,\ y)$ dwu zmiennych, niezależnych x i y, w postaci:

$$f(x,\ y)=f(0,0)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{0,0}x+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{0,0}y+\frac{1}{2!}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{0,0}x^2+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_{0,0}xy+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{0,0}y^2\right]+\frac{1}{3!}\left[\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_{0,0}x^3+3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\right)_{0,0}x^2y+3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}\right)_{0,0}xy^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_{0,0}y^3\right]+\dots+\frac{1}{n!}\left[\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right)_{0,0}x^n+\binom{n}{1}\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}\right)_{0,0}x^{n-1}y+\dots+\right.$$
$$\left.+\binom{n}{r}\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-r}\partial y^r}\right)_{0,0}x^{n-r}y^r+\dots+\left(\frac{\partial^n f}{\partial y^n}\right)_{0,0}y^n\right]+\dots \tag{9}$$

przedstawiający daną funkcyę $f(x, y)$, w postaci szeregu, uporządkowanego według rosnących potęg zmiennych niezależnych x i y.

4. Maxima i minima funkcyj dwu zmiennych niezależnych. Szeregu Taylora dla funkcyj dwu zmiennych, niezależnych, możemy użyć do wyznaczenia warunków, pod którymi, i do wyznaczenia miejsc, w których dana funkcya, dwu zmiennych, niezależnych, posiada wartości największe, lub najmniejsze, czyli t. z. maxima, lub minima.

Dana funkcya $f(x, y)$ dwu zmiennych, niezależnych x, y, w pewnem szczególnem miejscu: x, y, będzie posiadała wartość największą (maximum), względnie najmniejszą (minimum), jeżeli wartości tej funkcyi w miejscach sąsiednich: $x+h$, $y+k$, przy dostatecznie małych przyrostach h i k, będą stale mniejsze, względnie stale większe od jej wartości: $f(x, y)$, w przyjętem miejscu x, y, bez względu na znaki tych przyrostów. Musi więc być stale:

$$f(x+h,\ y+k) < f(x,\ y) \text{ przy maximum},$$

zaś:

$$f(x+h,\ y+k) > f(x,\ y) \text{ przy minimum},$$

a więc musi być stale różnica:

$$f(x+h,\ y+k)-f(x,\ y) < 0, \text{ czyli ujemną, przy maximum},$$

$$f(x+h,\ y+k)-f(x,\ y) > 0, \text{ czyli dodatnią, przy minimum}.$$

Według wzoru Taylora, otrzymujemy tę różnicę w postaci:

$$f(x+h,\ y+k)-f(x,\ y)=h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}+R_2, \tag{10}$$

gdzie reszta R_2 będzie, przy nieskończenie małych przyrostach h i k, wielkością nieskończenie małą rzędu drugiego.

Znak różnicy: $f(x+h,\ y+k)-f(x,\ y)$ będzie, w ogólności, zależał od znaków przyrostów h i k, różnica ta będzie n. p. dla $h=0$, równą: $k\frac{\partial f}{\partial x}$, więc co do znaku zależną od znaku przyrostu k, dla $k=0$, będzie równą $h\frac{\partial f}{\partial x}$, a więc co do znaku zależną od znaku przyrostu h. Ażeby znak tej różnicy nie był zależny od znaków przyrostów h i k muszą się spełniać warunki:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}=0. \tag{11}$$

Chcąc więc wyznaczyć te układy wartości na x i y, które mogą wywołać maxima, albo minima funkcyi: $f(x, y)$, musimy, przedewszystkiem, rozwiązać ze względu na x i y, dwa równania: $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ i $\frac{\partial f}{\partial y}=0$.

5. Przyjmijmy teraz, że przyjęte wartości na x i y, czynią zadość obu tym warunkom, natenczas, otrzymamy szukaną różnicę, w postaci:

$$f(x+h,\ y+k)-f(x,\ y)=\frac{1}{2}\left\{h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right\}+R_3, \tag{12}$$

w której reszta R_3, przy nieskończenie małych przyrostach h i k, będzie nieskończenie małą, rzędu trzeciego.

Znak różnicy: $f(x+h,\ y+k)-f(x,\ y)$, będzie więc zależny od znaku wyrażenia:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}h\,k+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2,$$

które możemy, dla uproszczenia, napisać w postaci:

$$(11)\,h^2+2\,(12)\,hk+(22)\,k^2,\ \text{lub}:\ rh^2+2s\,hk+tk^2,$$

kładąc: $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=(11)=r,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=(12)=s,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=(22)=t,$$

i rozumiejąc przez te symbole wartości pochodnych, cząstkowych, drugiego rzędu danej funkcyi $f(x, y)$, w badanem miejscu x, y, dla którego:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0,\ \text{i}\ \frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

6. Chcąc ocenić znak wyrażenia: $(11)h^2+2(12)hk+(22)k^2$, przyjmijmy najpierw, że:

a) $(11)\gtrless 0$, wówczas, możemy to wyrażenie przedstawić w postaci:

$$(11)\,h^2+2(12)\,hk+(22)\,k^2=\frac{1}{(11)}\{(11)^2h^2+2\,(11)\,(12)\,hk+(11)\,(22)\,k^2\},\quad (13)$$

czyli:

$$(11)\,h^2+2\,(12)\,h\,k+(22)\,k^2=\frac{1}{(11)}\{[(11)\,h+(12)\,k]^2+[(11)\,(22)-(12)^2]\,k^2\},\quad (14)$$

z której dochodzimy do następujących wniosków:

1) Jeżeli $(11)(22)-(12)^2<0$, wówczas wyrażenie, ujęte w nawias $\{\ \}$, będzie miało znak dodatni, skoro $k=0$, ujemny, skoro: $(11)h+(22)k=0$, trójmian: $(11)h^2+2\,(12)\,hk+(22)\,k^2$, nie będzie więc, ani stale dodatni, ani stale ujemny, funkcya $f(x, y)$ w miejscu x, y, pomimo spełnienia warunków koniecznych: $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, nie posiada więc w tym przypadku, ani maximum, ani minimum.

2) Jeżeli $(11)(22)-(12)^2>0$, wówczas, wyrażenie, ujęte w nawias $\{\ \}$, będzie miało stale znak dodatni, trójmian: $(11)\,h^2+2(12)\,hk+(22)\,k^2$, będzie miał w tym przypadku znak wartości (11); funkcya $f(x, y)$ będzie więc w miejscu (x, y) posiadała maximum, skoro obok: $(11)\,(22)-(12)^2>0$ będzie $(11)<0$, a minimum, skoro, obok $(11)\,(22)-(12)^2>0$, będzie także $(11)>0$.

3) Jeżeli $(11)\,(22)-(12)^2=0$, wówczas wyrażenie, ujęte w nawias $\{\ \}$, będzie wprawdzie stale dodatnie, skoro przyrosty h i k będą tak dobrane, że będzie: $(11)h+(12)\,k\gtrless 0$, stanie się jednak zerem, skoro przyrosty h i k będą tak dobrane, że będzie: $(11)\,h+(12)\,k=0$. Trójmian: $(11)h^2+2(12)hk+(22)k^2$, będzie więc w ostatnim przypadku zerem, a znak różnicy: $f(x+h, y+k)-f(x, y)$, będzie zależał od znaku reszty R_3. Zachodzi tu zatem przypadek wątpliwy, który może być rozstrzygnięty na podstawie roztrząsania warunków, pod którymi wyrażenie trzeciego stopnia, kształtu:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}h^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}h^2k+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}hk^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}k^3,$$

będzie miało znak stały, niezależny od znaku przyrostów h i k.

b) Przyjąwszy w końcu, że w rozważanem miejscu (x, y) obok:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0\ \text{i}\ \frac{\partial f}{\partial y}=0,\ \text{jest także}\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0,\ \text{lub}:\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0,$$

czyli: $(11)=0$, lub $(22)=0$, otrzymamy trójmian $(11)h^2+2(12)hk+(22)k^2$, w postaci: $2(12)hk+(22)k^2=k\{2(12)h+(22)k\}$,
lub w postaci: $(11)h^2+2(12)hk=h\{(11)h+2(12)k\}$.

Wartość jego będzie więc tego samego, lub przeciwnego znaku, co znak przyrostu k, stosownie do tego, czy przyjmiemy przyrost h większy, czy mniejszy od wartości: $-\frac{(22)k}{2(12)}$, albo też będzie tego samego, lub przeciwnego znaku, co znak przyrostu h, stosownie do tego, czy przyjmiemy przyrost k większy, czy mniejszy od wartości: $-\frac{(11)h}{2(12)}$.

Funkcya $f(x,y)$ nie będzie tedy posiadała w tym przypadku, ani maximum, ani minimum, jak w przypadku: $(11)(22)-(12)^2<0$.

Jeżeliby wreszcie, obok $(11)=0$, było także $(12)=0$, wówczas, byłby trójmian rozważany, dla $k=0$, także zerem, zachodziłby tedy przypadek wątpliwy, którego rozstrzygnięcie wymagałoby badania reszty R_3, jak w przypadku: $(11)(22)-(12)^2=0$.

7. Znak reszty R_3 zależy od znaku wyrażenia:

$$h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+3h^2k\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}+3hk^2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}+k^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(3)}f, \qquad (15)$$

które, w przypadku:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}=0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2=0,$$

dla wszystkich wartości h i k, spełniających warunek:

$$(11)h+(12)k=0,\ \text{czyli}\ h\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+k\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0,$$

otrzymuje kształt: $$h^3\Delta_3=h^3.\frac{\left[(12)\frac{\partial}{\partial x}-(11)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(3)}}{(12)^3}f,$$

a więc, znak zależny od h.

Jeżeli więc $\Delta_3\gtrless 0$, funkcya $f(x,y)$ nie posiada w rozważanem miejscu ani maximum, ani minimum.

W przypadku $\Delta_3=0$, należy przystąpić do badania wielomianu czwartego stopnia:

$$h^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}+4h^3k\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\partial y}+6h^2k^2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}+4hk^3\frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3}+k^4\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(4)}f. \quad (16)$$

Dla wszystkich wartości h i k, czyniących zadość warunkowi: $(11)h+(12)k=0$, będzie znak powyższego wyrażenia, zgodny ze znakiem wyrażenia: $\left((12)\frac{\partial}{\partial x}-(11)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(4)}f$, którego znak dodatni wskazuje na minimum, a znak ujemny na maximum funkcyi $f(x,y)$.

W przypadku, gdy $\left((12)\frac{\partial}{\partial x}-(11)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(4)}f=0$, zachodzi znowu przypadek wątpliwy, którego rozstrzygnięcie wymaga kolejnego badania wyrażeń, kształtu:

$$\left((12)\frac{\partial}{\partial x}-(11)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)}f,$$

gdzie $n>4$; pierwszem wyrażeniem tego rodzaju, mającem wartość różną od zera, musi być wyrażenie parzystego stopnia, którego znak dodatni wskazuje na minimum, a znak ujemny na maximum funkcyi $f(x,y)$, w rozważanem miejscu.

8. Na podstawie powyższych rozstrząsań, dochodzimy do następujących wniosków:

Ażeby wyznaczyć maxima, lub minima danej funkcyi $f(x, y)$ kładziemy:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0, \text{ i } \frac{\partial f}{\partial y}=0$$

i rozwiązujemy te równania ze względu na x i y, obliczamy następnie, dla każdej pary (x, y) wartość $f(x, y)$ danej funkcyi i wartość t. z. wyróżnika funkcyjnego:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2=(11)(22)-(12)^2,$$

natenczas, w przypadku:

1) gdy $(11)(22)-(12)^2<0$, nie będzie ani maximum, ani minimum;

2) gdy $(11)(22)-(12)^2>0$, $(11)>0$, $f(x, y)$ będzie minimum;

3) gdy $(11)(22)-(12)^2>0$, $(11)<0$, $f(x, y)$ będzie maximum;

4) gdy $(11)(22)-(12)^2=0$, zachodzi przypadek wątpliwy, którego rozstrzygnięcie wymaga badania wyrażeń, kształtu: $\left((12)\frac{\partial}{\partial x}-(11)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)} f$, dla $n>2$.

Jeżeli przytem badaniu okaże się, że pierwszem wyrażeniem tego rodzaju, mającem w rozważanem miejscu (x, y), wartość różną od zera, jest wyrażenie nieparzystego stopnia: W_{2n+1}, natenczas otrzymana wartość $f(x, y)$, nie będzie ani maximum, ani minimum. Jeżeli zaś pierwszem wyrażeniem tego rodzaju, mającem wartość różną od zera, jest wyrażenie parzystego stopnia: W_{2n}, natenczas wartość $f(x, y)$ będzie maximum, gdy $W_{2n}<0$, a minimum, gdy $W_{2n}>0$.

9. **Przykłady wyznaczania maximów, lub minimów danej funkcyi.** 1) Wyznaczyć maxima i minima funkcyi: $f(x, y)=x^3-3axy+y^3$.

Rozwiązanie. Mamy tu: $\frac{\partial f}{\partial x}=3(x^2-ay)$, $\frac{\partial f}{\partial y}=3(y^2-ax)$, a więc, na wyznaczenie wartości na x i y, dwa równania: $x^2-ay=0$, $y^2-ax=0$, które mają wspólne pierwiastki:

$$\alpha)\ x=0,\ y=0,\quad \beta)\ x=a,\ y=a.$$

Pochodne cząstkowe drugiego rzędu danej funkcyi mają kształt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=-3a,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y,$$

będzie więc wyróżnik funkcyjny: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2=(11)(22)-(12)^2=36xy-9a^2$.

Dla $x=y=0$, mamy: $(11)(22)-(12)^2=-9a^2<0$, a więc, $f=0$, nie jest ani maximum, ani minimum.

Dla $x=y=a$, mamy: $(11)(22)-(12)^2=27a^2>0$, $(11)=6a$, zatem $f=-a^3$, jest minimum, gdy $a>0$, a maximum, gdy $a<0$.

Dana funkcya: $z=x^3-3axy+y^3$, ma zatem, przy dodatniem a minimum, a przy ujemnem a maximum, w miejscu $x=y=a$, równe $-a^3$.

2) Wyznaczyć maxima i minima funkcyi: $f(x, y)=x^4+y^4-x^2+xy-y^2$.

Rozwiązanie. Mamy tu:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4x^3-2x+y,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=4y^3-2y+x,$$

a więc, na wyznaczenie wartości x i y, dwa równania:

$$4x^3-2x+y=0,\ 4y^3-2y+x=0.$$

Celem rozwiązania tych równań, ze względu na x i y, dodajmy je najpierw i odejmijmy od siebie, a zastąpimy je dwoma równaniami następującemi:

$$4(x^3+y^3)-(x+y)=0,\ 4(x^3-y^3)-3(x-y)=0,$$

czyli: $$(x+y)[4(x^2-xy+y^2)-1]=0,\ (x-y)[4(x^2+xy+y^2)-3]=0,$$

z których otrzymamy następujące przypadki:

α) $x+y=0$, $x-y=0$, a więc: $x=0$, $y=0$,

β) $4(x^2-xy+y^2)-1=0$, $x-y=0$, a więc: $x=y=\pm\frac{1}{2}$,

γ) $4(x^2+xy+y^2)-8=0$, $x+y=0$, a więc: $x=-y=\pm\frac{\sqrt{8}}{2}$.

Pochodne cząstkowe drugiego rzędu danej funkcyi, przedstawiają się w postaci:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=(11)=12x^2-2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=(12)=1,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=(22)=12y^2-2,$$

bie zatem wyróżnik funkcyjny:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2=(11)(22)-(12)^2=4(6x^2-1)(6y^2-1)-1.$$

Wobec tego:

α) dla $x=y=0$, mamy: $(11)(22)-(12)^2=8$, $(11)=-2$, zatem maximum: $f=0$,

β) dla $x=y=\pm\frac{1}{2}$, mamy $(11)(22)-(12)^2=0$, zatem przypadek wątpliwy,

la $x=-y=\pm\frac{\sqrt{8}}{2}$, mamy: $(11)(22)-(12)^2=48$, $(11)=\frac{10}{4}$, zatem minimum: $f=-\frac{9}{8}$.

Chcąc usunąć wątpliwość przypadku β), w którym $x=y=\pm\frac{1}{2}$, musimy zbadać w tem jscu znak wyrażenia trzeciego stopnia:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}h^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}h^2k+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}hk^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}k^3.$$

W tym celu, otrzymujemy, dla danej funkcyi, pochodne cząstkowe trzeciego rzędu:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=24x,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=0,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=24y,$$

tem powyższe wyrażenie, dla $x=y=\pm {}^1/_2$, w postaci:

$$24xh^3+24yk^3=\pm 12(h^3+k^3).$$

Wyrażenie to staje się zerem dla $h=-k$, musimy więc zbadać dalsze wyrażenie artego stopnia:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}h^4+4\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\partial y}h^3k+6\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}h^2k^2+4\frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3}hk^3+\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}k^4.$$

Otrzymujemy tu:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}=24,\quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^3\partial y}=\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}=\frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3}=0,\quad \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}=24,$$

m, powyższe wyrażenie w postaci: $24h^4+24k^4$, o stałym znaku dodatnim, niezależnie naku przyrostów h i k, a więc, w miejscach $x=y=\pm\frac{1}{2}$, mamy minimum: $f=-\frac{1}{8}$.

Dana funkcya: $f(x, y)=x^4+y^4-x^2+xy-y^2$, ma więc trzy minima w miejscach: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ i dwa maxima w miejscach: $\left(\frac{\sqrt{8}}{2}, -\frac{\sqrt{8}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{8}}{2}, \frac{\sqrt{8}}{2}\right)$.

10. Zastosowanie teoryi maximów i minimów funkcyi dwu zmiennych leżnych do rozwiązywania rozmaitych zagadnień arytmetycznych, lub etrycznych.

Zagadnienie 1. Daną liczbę a podzielić tak na trzy składniki, aby suma kwadratów była minimum.

Oznaczając szukane składniki liczby a, przez x, y, $a-x-y$, otrzymuy sumę ich kwadratów:

$$S=x^2+y^2+(a-x-y)^2.$$

Na wyznaczenie minimum tej sumy dostajemy równania warunkowe:

$$\frac{\partial S}{\partial x}=2x-2(a-x-y)=0,\quad \frac{\partial S}{\partial y}=2y-2(a-x-y)=0,$$

tąd:

$$2x+y=a,\quad 2y+x=a,$$

em:

$$x=\frac{a}{3},\quad y=\frac{a}{3},\quad a-x-y=\frac{a}{3},\quad S=\frac{1}{3}a^2.$$

Ponieważ, dla tych wartości:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}=4,\ \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}=4,\ \frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial y}=2,\ \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial y}\right)^2=12>0,$$

zatem, suma $S=\frac{1}{3}a^2$ jest minimum.

Należy więc daną liczbę a podzielić na trzy równe części, aby sum kwadratów była minimum.

Geometrycznie znaczy to, że pośród trójkątów o jednakowym obwodzi ma trójkąt równoboczny najmniejszą sumę kwadratów swych boków, alb inaczej, wśród równoległościanów o jednakowej sumie krawędzi, ma sześcia najmniejszą przekątnię.

Zagadnienie 2. Daną liczbę a podzielić na takie trzy składniki, aby ich iloczyn był maximum.

Oznaczając szukane składniki przez x, y, $a-x-y$, otrzymujemy ich iloczyn:

$$P=xy\,(a-x-y).$$

Na wyznaczenie maximum, lub minimum tego iloczynu, otrzymujemy warunki:

$$\frac{\partial P}{\partial x}=y\,(a-x-y)-xy=0,\ \frac{\partial P}{\partial y}=x\,(a-x-y)-xy=0,$$

czyli:

$$x\,(x+2y-a)=0,\ y(y+2x-a)=0.$$

Warunkom tym stanie się zadość w następujących czterech przypadkach:

1) $x=0,\ y=0,$ 2) $x=0,\ y=a,$ 3) $x=a,\ y=0,$ 4) $x+2y=a,\ y+2x=a,$

czyli:

$$4)\ x=y=\frac{a}{3}.$$

Pomijając pierwsze trzy przypadki, otrzymujemy dla czwartego przypadku:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}=-2y=-\frac{2}{3}a,\ \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}=-2x=-\frac{2}{3}a,\ \frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y}=a-2x-2y=-\frac{1}{3}a,$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y}\right)^2=\frac{4}{3}a^2-\frac{1}{9}a^2=\frac{11}{9}a^2>0,\ \text{zatem:}\ P\max=\left(\frac{a}{3}\right)^3.$$

Należy więc daną liczbę podzielić na trzy równe części, aby iloczyn tych części był maximum.

Geometrycznie znaczy to, że, pośród trójkątów o jednakowym obwodzie, ma trójkąt równoboczny największy iloczyn swych boków, albo inaczej, że pośród równoległościanów o danej sumie krawędzi, ma sześcian największą objętość.

Zagadnienie 3. Na polu kąta $\measuredangle XOY=\alpha$ dane są dwa punkta P i Q. Wyznaczyć na ramionach OX i OY danego kąta takie dwa punkta A i B, aby suma ich odległości od siebie i od danych punktów, t. j. suma: $PA+AB+BQ$, była minimum.

Oznaczmy niewiadome odcinki: $OA=x$, $OB=y$ i wykreślmy z danego punktu P (fig. 5.) prostopadłą PP' na ramię OX, a z punktu Q prostopadłą QQ' na ramię OY i połóżmy $OP'=a$, $P'P=p$, $OQ'=b$, $Q'Q=q$, natenczas, będzie:

$$PA=\sqrt{p^2+(a-x)^2},\ BQ=\sqrt{q^2+(b-y)^2},\ AB=\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}.$$

Żądana suma przedstawi się zatem w postaci:

$$z=\sqrt{p^2+(a-x)^2}+\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}+\sqrt{q^2+(b-y)^2}.$$

Kładąc: $\frac{\partial z}{\partial x}=0$, $\frac{\partial z}{\partial y}=0$, otrzymujemy równania:

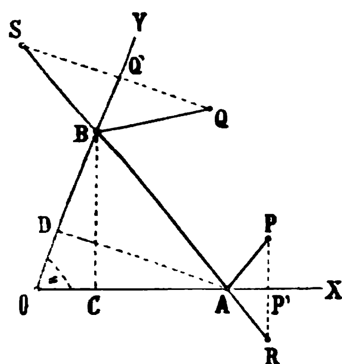


Fig. 5.

$$-\frac{a-x}{\sqrt{p^2+(a-x)^2}}+\frac{x-y\cos\alpha}{\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}}=0,$$
$$-\frac{b-y}{\sqrt{q^2+(b-y)^2}}+\frac{y-x\cos\alpha}{\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}}=0,$$

z których moglibyśmy x i y wyznaczyć.

Powyższe równania prowadzą wprost do konstrukcyi punktów: A i B.

Wykreśliwszy mianowicie z punktu B prostą $BC \perp OX$, a z punktu A, prostą $AD \perp OY$, poznamy, że powyższe równania sprowadzają się do stosunków:

$$\frac{AP'}{AP}=\frac{AC}{AB}, \quad \frac{BQ'}{BQ}=\frac{BD}{BA},$$

z których wynika, że: $\cos PAP'=\cos BAO$, $\cos QBQ'=\cos ABO$, a więc: $\sphericalangle PAP'=\sphericalangle BAO$, $\sphericalangle QBQ'=\sphericalangle ABO$.

Należy zatem przedłużyć PP' i odciąć $P'R=PP'$, podobnie, przedłużyć QQ' i odciąć $Q'S=QQ'$, czyli, inaczej, wykreślić obraz R punktu P w zwierciadle OX, a obraz S punktu Q w zwierciadle OY. Prosta SR przetnie tedy ramiona kąta XOY w szukanych punktach A i B.

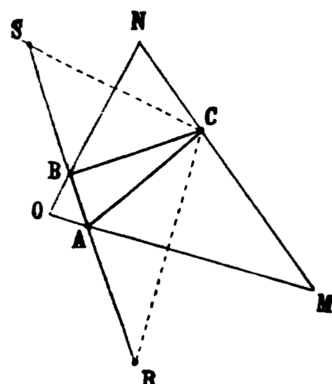


Fig. 6.

Że linia łamana $PABQ$ jest w istocie najkrótszą, widoczna wprost z figury, jest ona bowiem równą prostej RS, a każda inna linia łamana $PA'B'Q$ byłaby dłuższa, jak SR.

Ponieważ punkta P i Q mogą mieć dowolne położenie na polu kąta XOY, przeto rozwiązanie obejmuje także przypadek, w którym punkta P i Q nakrywają się w punkcie C.

Dotyczące zagadnienie opiewałoby: „wykreślić trójkąt o najmniejszym obwodzie tak, aby jeden jego wierzchołek wpadał w punkt C, a dwa inne leżałyby na ramionach danego kąta"; innemi słowy: „w dany trójkąt OMN wpisać trójkąt ABC o najmniejszym obwodzie tak, aby jeden z jego wierzchołków wpadał w dany punkt C boku MN". Konstrukcyę uwidocznia fig. 6.

11. Symbole nieoznaczone funkcyj dwu zmiennych, niezależnych. Podobnie, jak przy funkcyi jednej zmiennej niezależnej, (Patrz T. I. Wykład XXXVI.), możemy wszystkie symbole nieoznaczone, w których funkcye dwu zmiennych niezależnych, mogą występować, sprowadzić do symbolu nieoznaczonego, w postaci ilorazu: $\frac{0}{0}$.

Niech będzie więc dany iloraz: $z=\frac{f(x,\,y)}{F(x,\,y)}$, dwu funkcyj $f(x,y)$ i $F(x,y)$: dwu zmiennych niezależnych x i y, o którym przypuszczamy, że w pewnem miejscu $(x,\,y)$ przedstawia się w postaci nieoznaczonej:

$$z=\frac{f(x,\,y)}{F(x,\,y)}=\frac{0}{0},$$

gdy w tem miejscu przyjętem $(x,\,y)$, zarówno $f(x,\,y)=0$, jak też: $F(x,\,y)=0$.

Weźmy pod uwagę miejsce sąsiednie $x+h$, $y+k$, natenczas, otrzy dany iloraz, na podstawie szeregu Taylora, w postaci:

$$z=\frac{f(x+h,\ y+k)}{F(x+h,\ y+k)}=\frac{f(x,\ y)+h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}+R_2}{F(x,\ y)+h\frac{\partial F}{\partial x}+k\frac{\partial F}{\partial y}+R'_2},$$

skąd, ze względu na to, że w miejscu (x, y) zarówno $f(x, y)=0$, oraz $F(x,$ otrzymujemy, dla nieskończenie małych przyrostów h i k, stosunek:

$$z=\frac{f(x+h,\ y+k)}{F(x+h,\ y+k)}=\frac{h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}}{h\frac{\partial F}{\partial x}+k\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Połóżmy: $\frac{k}{h}=\lambda$, a wartości pochodnych w danem miejscu (x, y), będą: $\frac{\partial f}{\partial x}=p$, $\frac{\partial f}{\partial y}=q$, $\frac{\partial F}{\partial x}=P$, $\frac{\partial F}{\partial y}=Q$, tedy otrzymamy w granicy, gdy stają się zerami, żądany stosunek w postaci:

$$z=\frac{f(x,\ y)}{F(x,\ y)}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}+\lambda\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{p+q\lambda}{P+Q\lambda},$$

zawierającej dowolny spółczynnik λ.

Dany stosunek jest więc wogóle nieoznaczony, a tylko w szczegó przypadkach, prowadzi do wartości oznaczonej, gdy dowolny czynnik się usunąć z licznika i mianownika.

Stanie się to w przypadkach, gdy:

$\frac{\partial F}{\partial x}=\alpha\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}=\alpha\frac{\partial f}{\partial y}$, a więc, gdy $\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}$, czyli: $pQ=qP$,

t. z. gdy wartości pochodnych cząstkowych funkcyj: $f(x, y)$ i F w danem miejscu będą do siebie proporcyonalne.

W tym przypadku, otrzymujemy bowiem:

$$z=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}}{\alpha\frac{\partial f}{\partial x}+\alpha\lambda\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{1}{\alpha}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{p}{P}=\frac{q}{Q},$$

a więc wartość, zupełnie oznaczoną.

Warunkowi: $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}$, stanie się w szczególności zadość:

albo 1) gdy $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$, wtedy jest $z=0$,

albo 2) gdy $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=0$, wtedy $z=\infty$,

albo 3) gdy $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial x}=0$, wtedy $z=\frac{q}{Q}$,

albo 4) gdy $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial y}=0$, wtedy $z=\frac{p}{P}$.

12. Gdyby w przyjętem miejscu (x, y) były nietylko funkcye $f(x, y)$ i $F(x, y)$, lecz także wszystkie cztery pochodne cząstkowe pierwszego rzędu:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y},$$

równocześnie zerami, wówczas, otrzymamy, dla nieskończenie małych przyrostów h i k, stosunek:

$$Z=\frac{f(x+h, y+k)}{F(x+h, y+k)}=\frac{h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{h^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}},$$

a stąd, gdy znowu położymy $\frac{k}{h}=\lambda$, otrzymamy wartość graniczną:

$$z=\frac{f(x, y)}{F(x, y)}=\frac{0}{0}=\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\lambda\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\lambda^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\lambda\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}+\lambda^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}, \tag{18}$$

która jest z powodu dowolności czynnika λ, wogóle nieoznaczoną, a staje się tylko wyjątkowo oznaczoną, gdy się czynnik dowolny λ da usunąć z licznika i mianownika.

Ażeby ocenić, kiedy to nastąpi, połóżmy:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=r, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=s, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=t,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=R, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=S, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=T,$$

i wyprowadźmy warunek, pod którym trójmiany:

$$r+2s\lambda+t\lambda^2 \text{ i } R+2S\lambda+T\lambda^2,$$

będą miały wspólny czynnik, czyli, pod którym równania: $r+2s\lambda+t\lambda^2=0$ i $R+2S\lambda+T\lambda^2=0$, mają, przynajmniej, jeden wspólny pierwiastek.

W tym celu, wyrugujmy λ^2 z obu powyższych równań, a otrzymamy:

$$\lambda=\frac{1}{2}\frac{Rt-Tr}{sT-tS}.$$

Wstawiwszy tę wartość w którekolwiek z danych równań, otrzymamy szukany warunek w postaci:

$$(tR-rT)^2=4(sT-tS)(rS-sR). \tag{19}$$

Jeżeli ten warunek spełniają dane funkcye $f(x, y)$ i $F(x, y)$, wówczas, otrzymamy:

$$z=\frac{f(x, y)}{F(x, y)}=\frac{r+2s\lambda+t\lambda^2}{R+2S\lambda+T\lambda^2}=\frac{t}{T}\frac{\left(\lambda^2+2\frac{s}{t}\lambda+\frac{r}{t}\right)}{\left(\lambda^2+2\frac{S}{T}\lambda+\frac{R}{T}\right)}=\frac{t(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)}{T(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda'_2)}=\frac{t(\lambda-\lambda_2)}{T(\lambda-\lambda'_2)},$$

a więc otrzymamy wartość oznaczoną:

$$z=\frac{f(x, y)}{F(x, y)}=\frac{0}{0}=\frac{t}{T}, \text{ czyli: } z=\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}$$

gdy zarazem będzie: $\lambda'_2=\lambda_2$.

Warunek ten spełnia się jedynie w przypadku, gdy:

$$\frac{r}{R}=\frac{s}{S}=\frac{t}{T}, \tag{20}$$

t. z. gdy wartości równoimiennych pochodnych cząstkowych drugiego rzędu obu danych funkcyj $f(x, y)$ i $F(x, y)$ są w danem miejscu (x, y) do siebie proporcyonalne, otrzymujemy wtedy:

$$z=\frac{f(x, y)}{F(x, y)}=\frac{0}{0}=\frac{r}{R}=\frac{s}{S}=\frac{t}{T}=\varkappa,$$

a więc wartość oznaczoną $\varkappa$.

13. Gdyby wreszcie w przyjętem miejscu (x, y) sprowadzały się do zera, nie tylko funkcye $f(x, y)$, $F(x, y)$, lecz także wszystkie ich pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu, natenczas, należałoby przejść do różniczek trzeciego rzędu, a szukana wartość staje się tylko wówczas oznaczoną, skoro czynnik λ da się z licznika i mianownika usunąć.

Jeżeli czynnik λ, mogący przybierać rozmaite wartości nie da się usunąć z licznika i mianownika, wówczas, wartość stosunku, przedstawiającego się w postaci nieoznaczonej: $z=\frac{f(x, y)}{F(x, y)}=\frac{0}{0}$, jest w istocie nieoznaczoną.

Czy ta nieoznaczoność sięga granic: $+\infty$ i $-\infty$, czy też dowolnych, innych granic: a i b, można w każdym poszczególnym przypadku ocenić, uważając wartość z, jako funkcyę jednej zmiennej niezależnej λ i szukając wartości największych i najmniejszych tej funkcyi, która otrzymuje, jak powyżej podano, jedną z następujących postaci:

$$z=\frac{p+q\lambda}{P+Q\lambda}, \quad z=\frac{r+2s\lambda+t\lambda^2}{R+2S\lambda+T\lambda^2}, \text{ i t. d.}$$

w których spółczynniki przedstawiają wartości pochodnych cząstkowych funkcyj $f(x, y)$ i $F(x, y)$ w danem miejscu (x, y).

14. Przykłady. 1) Wyznaczyć wartość funkcyi: $z=\frac{2x^2+xy-3y^2}{4x^2-xy-3y^2}$, dla $x=1$, $y=1$.

Rozwiązanie. Mamy tu:

$$f=2x^2+xy-3y^2, \quad F=4x^2-xy-3y^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4x+y, \quad \frac{\partial F}{\partial x}=8x-y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=x-6y, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=-x-6y,$$

zatem:

$$z=\frac{2x^2+xy-3y^2}{4x^2-xy-3y^2}\Bigg/_{\substack{x=1\\y=1}}=\frac{0}{0}=\frac{(4x+y)+(x-6y)\lambda}{(8x-y)-(x+6y)\lambda}\Bigg/_{\substack{x=1\\y=1}}=\frac{5-5\lambda}{7-7\lambda}=\frac{5(1-\lambda)}{7(1-\lambda)}=\frac{5}{7},$$

a więc:

$$\frac{2x^2+xy-3y^2}{4x^2-xy-3y^2}\Bigg/_{\substack{x=1\\y=1}}=\frac{5}{7}.$$

2) Wyznaczyć wartość funkcyi:

$$z=\frac{2x^2-3xy+1}{x^2-5xy+4}\Bigg/_{\substack{x=1\\y=1}}.$$

Otrzymujemy tu:

$$z=\frac{(4x-3y)-3x\lambda}{(2x-5y)-5x\lambda}\Bigg/_{\substack{x=1\\y=1}}=\frac{1-3\lambda}{-3-5\lambda},$$

zatem wartość zupełnie nieoznaczoną w granicach od $-\infty$ do $+\infty$.

3) Wyznaczyć wartość funkcyi:

$$z=\frac{x^2+y^2}{a-\sqrt{x^2+y^2+a^2}} \text{ dla } \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}.$$

Mamy tu:

$$f=x^2+y^2, \quad F=a-\sqrt{x^2+y^2+a^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x, \quad \frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=2y, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}},$$

…m, dla $x=0$, $y=0$, nietylko $f=0$ i $F=0$, lecz także:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=0.$$

Mamy zatem wyznaczyć pochodne cząstkowe drugiego rzędu. Otrzymujemy tu:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\frac{y^2+a^2}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}=\frac{xy}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=-\frac{x^2+a^2}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}},$$

…m:

$$r=2, \quad s=0, \quad t=2, \quad R=-\frac{1}{a}, \quad S=0, \quad T=-\frac{1}{a}.$$

więc:

$$z=\frac{2+2\lambda^2}{-\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\lambda^2}=\frac{2(1+\lambda^2)}{-\frac{1}{a}(1+\lambda^2)}=-2a,$$

…li:

$$\frac{x^2+y^2}{a-\sqrt{x^2+y^2+a^2}}\Big/_{\substack{x=0\\y=0}}=-2a.$$

4) Wyznaczyć wartość funkcyi:

$$z=\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} \text{ dla } x=0, \; y=0.$$

Mamy tu:

$$f=(x+y)^2, \text{ zatem: } f_0=0; \quad F=x^2+y^2, \text{ zatem: } F_0=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2(x+y), \quad " \quad p=0; \quad \frac{\partial F}{\partial x}=2x, \quad " \quad P=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2(x+y), \quad " \quad q=0; \quad \frac{\partial F}{\partial y}=2y, \quad " \quad Q=0.$$

Musimy więc przystąpić do wyznaczania pochodnych cząstkowych drugiego rzędu, …rzymujemy tu:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2, \text{ zatem: } r=2; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=2, \text{ zatem: } R=2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y}=2, \quad " \quad s=2; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}=0, \quad " \quad S=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2, \quad " \quad t=2; \quad \frac{\partial F}{\partial y^2}=2, \quad " \quad T=2,$$

… więc

$$z=\frac{2+4\lambda+2\lambda^2}{2+2\lambda^2}=\frac{1+2\lambda+\lambda^2}{1+\lambda^2},$$

…zyli, z powodu dowolności λ, wartość nieoznaczoną. Uważając wartość z, jako funkcyą λ, otrzymamy:

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda}=\frac{2(1-\lambda^2)}{(1+\lambda^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \lambda^2}=\frac{4\lambda(\lambda^2-3)}{(1+\lambda^2)^3},$$

…atem dla $\lambda=1$, $z\max=2$, dla $\lambda=-1$, $z\min=0$. Szukana wartość jest nieoznaczoną w granicach od 0 do 2.

15. **Całkowanie funkcyj dwu zmiennych niezależnych za pomocą szeregów.** Rozwijanie funkcyj dwu zmiennych niezależnych, na szeregi potęgowe umożliwia także bezpośrednio rozwinięcie odnośnej całki, względnie, jej przedstawienie w postaci szeregu, gdy inne przedstawienie, za pomocą znanych funkcyj, okazuje się niemożliwe.

Jeżeli, mianowicie, dana funkcya $f(x, y)$ da się rozwinąć na szereg potęgowy w postaci

$$f(x, y) = f_0 + a_0 x + a_1 y + b_0 x^2 + b_1 xy + b_2 y^2 + c_0 x^3 + c_1 x^2 y + c_2 xy^2 + c_3 y^3 + \dots +$$
$$+ \dots + l_0 x^n + l_1 x^{n-1} y + l_2 x^{n-2} y^2 + \dots + l_{n-1} xy^{n-1} + l_n y^n + \dots$$

natenczas, otrzymujemy całki cząstkowe:

$$\int f(x, y)\,dx = \varphi(y) + f_0 . x + a_0 . \frac{x^2}{2} + a_1 xy + b_0 . \frac{x^3}{3} + b_1 . \frac{x^2 y}{2} + b_2 y^2 x + c_0 . \frac{x^4}{4} + c_1 \frac{x^3 y}{3} + c_2 \frac{x^2 y^2}{2} + c_3 y^3 x +$$
$$+ \dots + l_0 \frac{x^{n+1}}{n+1} + l_1 \frac{x^n y}{n} + l_2 \frac{x^{n-1} y^2}{n-1} + \dots + l_{n-1} \frac{x^2 y^{n-1}}{2} + l_n xy^n + \dots$$

$$\int f(x, y)\,dy = \varphi(x) + f_0 . y + a_0 xy + a_1 \frac{y^2}{2} + b_0 x^2 y + b_1 \frac{xy^2}{2} + b_2 \frac{y^3}{3} + c_0 x^3 y + c_1 \frac{x^2 y^2}{2} + c_2 \frac{xy^3}{3} + c_3 \frac{y^4}{4}$$
$$+ \dots + l_0 x^n y + l_1 \frac{x^{n-1} y^2}{2} + l_2 \frac{x^{n-2} y^3}{3} + \dots + l_{n-1} \frac{xy^n}{n} + l_n \frac{y^{n+1}}{n+1} + \dots$$

a całkę podwójną:

$$\int\int f(x, y)\,dx\,dy = \varphi(x) + \psi(y) + f_0 xy + a_0 \frac{x^2 y}{2} + a_1 \frac{xy^2}{2} + b_0 \frac{x^3 y}{3} + b_1 \frac{x^2 y^2}{4} + b_2 \frac{yx^3}{3} + \dots +$$
$$+ \dots + l_0 \frac{x^{n+1} y}{n+1} + l_1 \frac{x^n y^2}{2n} + l_2 \frac{x^{n-1} y^3}{3(n-1)} + \dots + l_{n-1} \frac{x^2 y^n}{2n} + l_n \frac{xy^{n+1}}{n+1} + \dots$$

15. Przykład. Mając n. p. daną funkcyą: $z = \dfrac{e^x \sin y}{x.y}$, otrzymujemy jej całki cząstkowe:

$$1) \int \frac{e^x \sin y}{xy}\,dx = \frac{\sin y}{y} \int \frac{e^x}{x}\,dx = \frac{\sin y}{y} \int \left\{ \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \dots \right\} dx,$$

czyli:
$$\int \frac{e^x \sin y}{xy}\,dx = \frac{\sin y}{y} \left\{ \log x + x + \frac{1}{2!}\frac{x^2}{2} + \frac{1}{3!}\frac{x^3}{3} + \dots + \frac{1}{n!}\frac{x^n}{n} + \dots \right\} + \varphi(y),$$

$$2) \int \frac{e^x \sin y}{xy}\,dy = \frac{e^x}{x} \int \frac{\sin y}{y}\,dy = \frac{e^x}{x} . \int \left\{ 1 - \frac{y^2}{3!} + \frac{y^4}{5!} - \frac{y^6}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n+1)!} + \dots \right\} dy$$

czyli:
$$\int \frac{e^x \sin y}{xy}\,dy = \frac{e^x}{x} \left\{ y - \frac{1}{3!}\frac{y^3}{3} + \frac{1}{5!}\frac{y^5}{5} - \frac{1}{7!}\frac{y^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\frac{y^{2n+1}}{2n+1} + \dots \right\} + \varphi(x),$$

a całkę podwójną:

$$\int\int \frac{e^x \sin y}{xy}\,dx\,dy = \left\{ \log x + x + \frac{1}{2!}\frac{x^2}{2} + \dots + \frac{1}{n!}\frac{x^n}{n} + \dots \right\} \int \frac{\sin y}{y}\,dy = \left(\log x + x + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + \dots + \right.$$
$$\left. + \dots + \frac{1}{n!}\frac{x^n}{n} + \dots \right) \left\{ y - \frac{1}{3!}\frac{y^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{y^{2n+1}}{2n+1} + \dots \right\} + \varphi(x) + \psi(y).$$

Ćwiczenia XIX.

Wykazać, że niżej podane różniczki, są różniczkami zupełnemi i wyznaczyć ich całki:

1) $dz = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{a^2 x^2 - b^2 y^2}$. 2) $dz = \dfrac{x\,dx + y\,dy}{(x^2 + y^2)^2}$.

3) $d^2 z = \dfrac{x}{(y^2 - x^2)^{3/2}}\,dx^2 - \dfrac{2y}{(y^2 - x^2)^{3/2}}\,dx\,dy + \dfrac{(2y^2 - x^2)\,x}{y^2 (y^2 - x^2)^{3/2}}$.

4) $d^2 z = \dfrac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\,dx^2 - \dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\,dx\,dy + \dfrac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\,dy^2$.

5) $d^2 z = \dfrac{dx^2 + 2\,dx\,dy + dy^2}{(x + y)^2}$. 6) $d^3 z = (dx^3 + 3\,dx^2\,dy + 3\,dx\,dy^2 + dy^3)\,e^{x+y}$.

7) $d^4 z = \sin x \sin y . dx^4 - 4 \cos x \cos y\,dx^3 dy + 6 \sin x \sin y\,dx^2 dy^2 - 4 \cos x \cos y\,dx\,dy^3 +$
$+ \sin x \sin y\,dy^4$,

Wyprowadzić następujące rozwinięcia:

8) $(x + h)^2 (a + y + k)^3 = x^2 (a + y)^3 + 2x (a + y)^3 h + 3x^2 (a + y)^2 k + (a + y)^3 h^2 +$
$+ 6x (a + y)^2 hk + 3x^2 (a + y) k^2 + 3 (a + y)^2 h^2 k + 6x (a + y) hk^2 + x^2 k^3 + 3(a + y) h^2 k^2 +$
$+ 2x (a + y) h k^3 + h^2 k^3$

9) $e^{x+y} = 1 + x + y + \dfrac{1}{2} x^2 + xy + \dfrac{1}{2} y^2 + \dfrac{1}{6} x^3 + \dfrac{1}{2} x^2 y + \dfrac{1}{2} xy^2 + \dfrac{1}{6} y^3 + \dots$

10) $\sin(x+y) = x + y - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{6}y^3 + \dots$

11) $\cos(ax+by) = 1 - \frac{a^2}{2}x^2 - abxy - \frac{b^2}{2}y^2 + \frac{a^4}{4!}x^4 + \frac{a^3b}{3!}x^3y + \frac{a^2b^2}{4}x^2y^2 +$
$+ \frac{ab^3}{3!}xy^3 + \frac{b^4}{4!}y^4 - \dots$

12) $\log(1+x-y) = x - y - \frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}x^3 - x^2y + xy^2 - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots$

13) $\operatorname{arc\,tang}(x-y) = x - y - \frac{1}{3}x^3 + x^2y - xy^2 + \frac{1}{3}y^3 + \dots$

14) $\arcsin(x+y) = x + y + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{6}y^3 + \dots$

15) $\log\frac{1+x+y}{1-x-y} = 2\left\{x + y + \frac{1}{3}(x+y)^3 + \frac{1}{5}(x+y)^5 + \dots\right\}.$

16) $\frac{\log[x+y+\sqrt{1+(x+y)^2}]}{\sqrt{1+(x+y)^2}} = x + y - \frac{2}{3}(x+y)^3 + \frac{2.4}{3.5}(x+y)^5 - \frac{2.4.6}{3.5.7}(x+y)^7 + \dots$

17) Wykazać, że funkcya: $z = x^2 - xy + y^2 - ax - by$, ma najmniejszą wartość w miejscu
$$x = \frac{a+2b}{3},\quad y = \frac{b+2a}{3}.$$

18) Wykazać, że funkcya: $z = x^3 - 3axy + y^3$, ma w przypadku, gdy $a > 0$, najmniejszą wartość, równą $-a^3$; wartość ta jest największą, gdy $a < 0$.

19) Wykazać, że funkcya: $z = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 8x + 8y$, ma minimum $= -12$ w miejscu: $x = 1$, $y = -1$.

20) Wykazać, że funkcya: $z = y^4 + x^3 - 8y^3 - 3x^2 + 18y^2 - 3x - 8y$, ma:

1) $z\max = 8 + 4\sqrt{2}$ w miejscu: $x = 1 - \sqrt{2}$, $y = 2$,

2) $z\min = -6 - 4\sqrt{2}$ w miejscach: $x = 1 + \sqrt{2}$, $y = 2 \pm \sqrt{3}$,

w miejscach: $(x = 1 - \sqrt{2},\ y = 2 \pm \sqrt{3})$, $(x = 1 + \sqrt{2},\ y = 2)$, nie posiada ani max. ani min.

21) Wykazać, że funkcya: $z = \frac{1+x^2+y^2}{1-ax-by}$, ma maximum, gdy $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{1+\sqrt{1+a^2+b^2}}{a^2+b^2}$, minimum, gdy $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{1-\sqrt{1+a^2+b^2}}{a^2+b^2}$.

22) Wykazać, że funkcya $z = \frac{a+bx+cy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$, ma największą wartość w miejscu:
$$x = \frac{b}{a},\quad y = \frac{c}{a}.$$

23) Wykazać, że funkcya: $z = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$, ma dla $x = y = 60^0$ maximum $= \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

24) Wykazać, że funkcya: $z = \cos\alpha\cos x + \sin\alpha\sin x\cos(y-\beta)$, ma wartość największą dla $x = \alpha$, $y = \beta$.

25) Wykazać, że funkcya: $z = a\cos x + b\sin x\cos y + c\sin x\sin y$ ma nieskończenie wiele max i min $= \pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

26) Wykazać, że funkcya $z = xe^{y+x\sin y}$ nie posiada ani maximum, ani minimum.

Wyznaczyć maxima i minima następujących funkcyj dwu zmiennych niezależnych:

27) $z = x^2 + y^2 - xy - 3y$. 28) $z = x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 10$.

29) $z = xy(a-x-y)$. 30) $z = x^3y^2(6-x-y)$. 31) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

32) $z = x^4 + y^4 - x^2 + xy - y^2$. 33) $z = \frac{x^2y^2}{(x-a)(y-b)}$. 34) $z = xy\sqrt{a^2b^2 - a^2x^2 - b^2y^2}$.

35) $z = x^2y(x^4 + 2y^2 - a)^2$. 36) $z = \sqrt{(a-x)(a-y)(x+y-a)}$.

37) $z = x^4 + y^4 - ax^2y - axy^2 + b^2x^2 + b^2y^2$.

38) $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y}$. 39) $z = (ax^2 + by^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

40) Liczbę a podzielić na takie trzy dodajniki, aby iloczyn z α-tej potęgi pierwszeg β-tej potęgi drugiego i γ-tej potęgi trzeciego dodajnika był maximum.

41) Kąt α podzielić na takie trzy kąty, aby iloczyn sinusów tych kątów był m ximum.

42) Liczbę a podzielić na takie trzy części x, y, z, aby wyrażenie $\frac{xy}{2} + \frac{xz}{3} + \frac{yz}{4}$, by maximum, lub minimum.

43) Dowieść, że pośród trójkątów o danym obwodzie, trójkąt równoboczny ma n większą powierzchnię.

44) Dowieść, że pośród równoległościanów prostokątnych, w których suma długoś krawędzi jest jednakową, równą a, sześcian o boku: $\frac{a}{3}$ ma największą objętość.

45) Wykazać, że między równoległościanami o danej objętości V, sześcian o bol równym $\sqrt[3]{V}$, ma najmniejszą powierzchnię.

46) Wykazać, że między ostrosłupami trójściennymi o danej objętości, czworościa umiarowy, ma najmniejszą powierzchnię.

47) Wykazać, że między ostrosłupami trójściennymi, o danej podstawie i danej w sokości, ma największą powierzchnię taki ostrosłup, którego ściany są do podstaw jednakowo nachylone.

48) Na polu trójkąta wyznaczyć punkt s tak, aby suma kwadratów jego odległoś od wierzchołków trójkąta była najmniejszą.

49) W ostrosłupie trójściennym wyznaczyć taki punkt, aby suma kwadratów jeg odległości od wierzchołków ostrosłupa była najmniejszą.

50) Na polu trójkąta (a, b, c) wyznaczyć taki punkt P, aby suma kwadratów jeg odległości od boków trójkąta była najmniejszą.

51) Na polu trójkąta ABC wyznaczyć taki punkt P, aby suma jego odległości o wierzchołków trójkąta była najmniejszą.

52) Na polu czworokąta $ABCD$, wyznaczyć tak punkt P, aby suma jego odległośc od wierzchołków czworokąta była najmniejszą.

53) W kulę o średnicy d wpisać równoległościan prostokątny o największej objętości

54) Na polu trójkąta ABC wyznaczyć taki punkt P, aby równoległościan prostokątny utworzony z odległości tego punktu od boków trójkąta, posiadał największą powierzchnię

55) Na polu trójkąta ABC wyznaczyć taki punkt P, aby równoległościan utworzony z odległości tego punktu od boków trójkąta, posiadał największą objętość.

Wyznaczyć wartości następujących funkcyj dwu zmiennych, niezależnych, przedsta wiające się w postaci symbolów nieoznaczonych:

56) $z = \frac{5x^2 - 6xy + y^2}{x^2 - 3xy + 2y^2}$, dla $\begin{matrix} x = 1. \\ y = 1. \end{matrix}$ 57) $z = \frac{\log(x+1) + \log(y+1)}{x+y}$, dla $\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}$.

58) $z = \frac{\log bx - \log ay}{b^2x^2 - a^2y^2}$, dla $\begin{matrix} x = a \\ y = b \end{matrix}$. 59) $z = \frac{\operatorname{arc\,tang}\left(1 - \frac{y}{x}\right)}{x^2 + y^2}$, dla $\begin{matrix} x = 1 \\ y = 1 \end{matrix}$.

60) $z = \frac{4x^2 - xy - 3y^2}{2x^2 + xy - y^2}$, dla $\begin{matrix} x = 1 \\ y = 1 \end{matrix}$. 61) $z = (2x^2 + xy - 3y^2)^{4x^2 - xy - 3y^2}$ dla $\begin{matrix} x = 1 \\ y = 1 \end{matrix}$.

62) $z = \frac{(bx - ay)\left(e^{\frac{a}{b}} - e^{\frac{x}{y}}\right)}{(\log bx - \log ay)^2}$, dla $\begin{matrix} x = a \\ y = b \end{matrix}$.

63) $z = \frac{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}{\rho - \sqrt{\rho^2 + (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}}$, dla $\begin{matrix} x = \alpha \\ y = \beta \end{matrix}$.

64) $z = \frac{(x-y) - x^3(1-y) + y^3(1-x)}{(x-y)(1-y)(1-x)}$, dla $\begin{matrix} x = 1 \\ y = 1 \end{matrix}$.

65) $z = \frac{\alpha^n(x-y) - x^n(\alpha - y) + y^n(\alpha - x)}{(x-y)(\alpha - y)(\alpha - x)}$, dla $\begin{matrix} x = \alpha \\ y = \alpha \end{matrix}$.

66) $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, dla $\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}$. 67) $z = \frac{(x+y)^3}{xy(x-y)}$, dla $\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}$.

Rozwiązania XIX. 1) $z=\frac{1}{2ab}\log\frac{ax+by}{ax-by}$. 2) $z=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x^2+y^2)^2}$. 3) $z=\arcsin\frac{x}{y}$.
) $z=\sqrt{x^2+y^2}$. 5) $z=\log\frac{1}{x+y}$. 6) $z=e^{x+y}$. 7) $z=\sin x\sin y$. 8) $f(x+h,\ y+k)$. 9)—16) szeregu **Maclaurina.** 17)—26) Patrz art. 9. 27) $z\min=-3$ dla $x=1$, $y=2$. 28) Minimum lla $x=2$, $y=1$. 29) Max. dla $x=y=\frac{a}{3}$. 30) Max. dla $x=3$, $y=2$. 31) $z\min=-8$ dla $x=\pm\sqrt{2}$, $y=\mp\sqrt{2}$, $z\max$ 0, dla $x=y=0$. 32) $z\max=0$, dla $x=0$, $y=0$, $z\min=-\frac{1}{8}$ dla $x=y=\pm\frac{1}{2}$, $z\min=-\frac{9}{8}$ dla $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y=\mp\frac{\sqrt{3}}{2}$. 33) $z\min=({}^{24}/_7\,ab)^2$ w miejscu: $x={}^2/_3\,a$, $y={}^2/_3\,b$. 34) $z\max=\frac{a^2b^2}{3\sqrt{3}}$ dla $x=\pm\frac{b}{\sqrt{3}}$, $y=\pm\frac{a}{\sqrt{3}}$. 35) $z\max$ la $x=\sqrt[4]{\frac{3a}{17}}$, $y=\sqrt[3]{\frac{a}{17}}$. 36) max. dla $x=y={}^2/_3\,a$. 37) 1) $x=0$, $y=0$, $z\min=0$; 2) $x=y=\frac{1}{8}(3a+\sqrt{9a^2-36b^2})$, $z\min=-{}^{27}/_{256}\,a^4+{}^9/_{16}\,a^2b^2-{}^1/_2\,b^4+{}^1/_{256}\,a(9a^2-32b^2)^{3/2}$, 3) $x=y={}^1/_8(3a-\sqrt{9a^2-32b^2})$ ani max. ani min. 88) $z$min. dla $x=y=\frac{a}{\sqrt[3]{3}}$. 39) 1) $x=y=0$, z min. 2) $z=0$, $y=\pm1$, $z\max$, gdy $a<b$, 3) $x=\pm1$, $y=0$, $z\max$, gdy $a>b$. 40) $x=\frac{\alpha a}{\alpha+\beta+\gamma}$, $y=\frac{\beta a}{\alpha+\beta+\gamma}$, $a-x-y=\frac{\gamma a}{\alpha+\beta+\gamma}$. 41) Każda część równa $\frac{\alpha}{3}$. 42) $\frac{x}{21}=\frac{y}{20}=\frac{z}{6}$. 49) Środek ciężkości ostrosłupa. 50) $PA=\frac{bc}{a^2+b^2+c^2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$, $PB=\frac{ac}{a^2+b^2+c^2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$, $PC=\frac{ab}{a^2+b^2+c^2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$. 51) $\measuredangle APB=\measuredangle BPC=\measuredangle CPA=120^0$. 52) Punkt przecięcia się przekątni AC i BD. 53) Sześcian o boku $\frac{d\sqrt{3}}{3}$. 54) Oznaczając przez x, y, z, odległości tego punktu od boków a, b, c, trójkąta o powierzchni Δ, otrzymujemy: $\frac{x}{{}^1/_2(b+c-a)}=\frac{y}{{}^1/_2(c+a-b)}=\frac{z}{{}^1/_2(a+b-c)}=\frac{2\Delta}{2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)}$. 55) $x=\frac{2\Delta}{3a}$, $y=\frac{2\Delta}{3b}$, $z=\frac{2\Delta}{3c}$. Z punktu tego wychodzą do wierzchołków promienie, dzielące powierzchnię trójkąta na 3 równe części.

56) -4. 57) 1. 58) $-\frac{b}{a}$. 59) $\frac{1}{2}$. 60) $\frac{7}{5}$. 61) 1. 62) $-a^2e^{\frac{b}{a}}$. 63) -2ρ. 64) 3. 65) $\binom{n}{2}a^{n-2}$. 66) Wartość nieoznaczona w granicach od $-\frac{1}{2}$ do $+\frac{1}{2}$. 67) wartość nieoznaczona w granicach od $-\infty$ do $+\infty$.

Literatura. Dr. Oskar Schlömilch. Übungsbuch zum -Studium der höheren Analysis. Erstes Theil. Aufgaben aus der Differentialrechnung. Leipzig 1888. J. Todhunter. A treatise on the Differential calculus with numerous examples. London 1885.

Tematy do rozprawek naukowych.

1. Teorya największości i najmniejszości funkcyj dwu zmiennych niezależnych.
2. Zastosowanie szeregu Taylora do badania obrazu funkcyj dwu zmiennych niezależnych.
3. Wartości graniczne symbolów nieoznaczonych, utworzonych z funkcyj dwu zmiennych, niezależnych.

Wykład XX.

Różniczkowanie i całkowanie funkcyj wyraźnych ilukolwiek zmiennych, niezależnych.

1. Pochodne cząstkowe i różniczka zupełna funkcyi n zmiennych, niezależnych. W danej funkcyi n zmiennych, niezależnych: $z=f(x_1, x_2, ..., x_n)$, możemy zmienić jedną zmienną niezależną x_1 o Δx_1, niezmieniając reszty zmiennych: $x_2, x_3, ..., x_n$. Tym sposobem, dochodzimy do stosunku różniczkowego: $\frac{\partial z}{\partial x_1}$, jako granicy stosunku różnicowego, w postaci:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}=\lim\frac{f(x_1+\Delta x_1, x_2, ..., x_n)-f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\Delta x_1}=f_1(x_1, x_2, ..., x_n). \qquad (1)$$

Otrzymany stosunek różniczkowy nazywamy cząstkowym stosunkiem różniczkowym, a nową funkcyą $f_1(x_1, x_2, ..., x_n)$, ten stosunek określającą, nazywamy pochodną cząstkową pierwszego rzędu funkcyi z podług zmiennej x_1.

Funkcya $z=f(x_1, x_2, ..., x_n)$, n zmiennych niezależnych, $x_1, x_2, ..., x_n$, ma, według tego, n pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu, w postaci:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial z}{\partial x_n}.$$

Tym pochodnym cząstkowym odpowiada analogicznie, jak przy funkcyi dwu zmiennych niezależnych, n różniczek cząstkowych pierwszego rzędu w postaci:

$$d_{x_1}z=\frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1, \quad d_{x_2}z=\frac{\partial z}{\partial x_2}dx_2, ..., d_{x_n}z=\frac{\partial z}{\partial x_n}dx_n,$$

których suma podaje zupełną różniczkę danej funkcyi: $z=f(x_1, x_2, ..., x_n)$ w postaci:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial z}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial z}{\partial x_n}dx_n. \qquad (2)$$

Różniczkę zupełną danej funkcyi: $z=f(x_1, x_2, ..., x_n)$, n zmiennych niezależnych: $x_1, x_2, ..., x_n$, możemy otrzymać bezpośrednio, różniczkując daną funkcyę równocześnie podług wszystkich n zmiennych niezależnych i porządkując otrzymane wyniki podług różniczek $dx_1, dx_2, ..., dx_n$, poszczególnych zmiennych, niezależnych. Spółczynniki przy tych różniczkach przedstawiają tedy pochodne cząstkowe danej funkcyi, ze względu na odnośne zmienne.

2. **Przykład.** Dla danej funkcyi: $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ trzech zmiennych niezależnych: z, otrzymamy różniczkę zupełną, w postaci:

$$du=\frac{1}{2}\frac{2x\,dx+2y\,dy+2z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

ąd, trzy pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

3. Pochodne i różniczki cząstkowe wyższych rzędów danej funkcyi n nych niezależnych. Pochodne cząstkowe: $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial z}{\partial x_n}$, danej yi: $z=f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$, n zmiennych, niezależnych: $x_1, x_2,\ldots, x_n$ są, w ogól- , znowu funkcyami n zmiennych, niezależnych: $x_1, x_2,\ldots, x_n$, mają więc własne pochodne cząstkowe, które nazywamy pochodnemi cząstemi drugiego rzędu danej funkcyi n zmiennych niezależnych.

Jeżeli, mianowicie, daną jest funkcya: $z=f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$, której pochodne kowe pierwszego rzędu oznaczymy kolejno przez:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}=f_1(x_1, x_2,\ldots, x_n),\ \frac{\partial z}{\partial x_2}=f_2(x_1, x_2,\ldots, x_n),\ldots,\ \frac{\partial z}{\partial x_n}=f_n(x_1, x_2,\ldots, x_n),$$

zas, różniczkując te funkcye cząstkowo podług poszczególnych zmien- niezależnych: $x_1, x_2,\ldots, x_n$, otrzymamy pochodne cząstkowe drugiego u:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}=f_{11}(x_1, x_2,\ldots, x_n),\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2}=f_{12}(x_1, x_2,\ldots, x_n),\ldots,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_n}=f_{1n}(x_1, x_2,\ldots, x_n),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_2\partial x_1}=f_{21}(x_1, x_2,\ldots, x_n),\ldots,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_2\partial x_n}=f_{2n}(x_1, x_2,\ldots, x_n),\ldots,\ \frac{\partial^n z}{\partial x_n^2}=f_{nn}(x_1, x_2,\ldots, x_n).$$

Podobnie, jak przy funkcyach dwu zmiennych niezależnych, (art. 5—7. 285—287.), można także tu dowieść, że:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x_2\partial x_1},\ \text{czyli, że: } f_{12}(x_1, x_2,\ldots, x_n)=f_{21}(x_1, x_2,\ldots, x_n), \tag{3}$$

że porządek różniczkowania danej funkcyi ilukolwiek zmiennych, nie- ych, ze względu na te zmienne, jest zupełnie obojętny.

Twierdzenie to, uogólnione do pochodnych rzędu wyższego nad drugi, my przedstawić ogólnie w postaci:

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} z}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}=\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} z}{\partial x_2^{\alpha_2}\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}=\ldots=\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} z}{\partial x_n^{\alpha_n}\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2},\ldots} \tag{4}$$

Dana funkcya: $z=f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ o n zmiennych niezależnych: $x_1, x_2,\ldots, x_n$ wskutek tego, tylko tyle pochodnych cząstkowych r-go rzędu, ile da tworzyć połączeń r-tej klasy z powtórzeniem z n elementów, a ilość ta z. T. I. str. 326.), jest określona wzorem:

$$C_n^{r\,(w)}=\binom{n+r-1}{r}=\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}. \tag{5}$$

Istnieje zatem dla danej funkcyi n zmiennych, niezależnych: $x_1, x_2,\ldots, x_n$:

$\binom{n}{1}=n$ pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu: $f_1, f_2,\ldots, f_n$,

$\binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$, drugiego rzędu: $f_{11}, f_{12}, \ldots, f_{nn}$,

$\binom{n+2}{3} = \frac{(n+2)(n+1)n}{1.2.3}$, trzeciego rzędu: $f_{111}, f_{112}, \ldots, f_{nnn}$,

$\binom{n+3}{4} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{1.2.3.4}$, czwartego rzędu: $f_{1111}, f_{1112}, \ldots, f_{nnnn}$

Z otrzymanej pochodnej cząstkowej: $(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)$-go rzędu:

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} z}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = f_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

danej funkcyi: $z=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ otrzymamy odnośną różniczkę cząstkową $(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)$-go rzędu tej funkcyi, jeżeli otrzymaną pochodnę cząstkową $(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)$-go rzędu, pomnożymy przez odpowiednią różniczkę $(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)$-go rzędu, w postaci:

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} z}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} dx_1^{\alpha_1} dx_2^{\alpha_2} \ldots dx_n^{\alpha_n} = f_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n), dx_1^{\alpha_1} dx_2^{\alpha_2} \ldots dx_n^{\alpha_n} \qquad (6)$$

4. **Przykład.** Funkcya: $u = z^3 + 3xyz - 5xy^2 - x^3$, trzech zmiennych niezależnych x, y, z ma 3 pochodne cząstkowe pierwszego rzędu:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3yz - 5y^2 - 3x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3xz - 10xy, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3z^2 + 3xy,$$

$\binom{3+1}{2} = \binom{4}{2}$, czyli 6 pochodnych cząstkowych, drugiego rzędu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -6x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -10x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 6z,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 3z - 10y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 3x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = 3y,$$

$\binom{3+2}{3} = \binom{5}{3}$, czyli 10 pochodnych cząstkowych trzeciego rzędu:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = -6, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = 6, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = -10, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 3, \text{ i t. d.},$$

którym odpowiada tyleż różniczek cząstkowych odnośnego rzędu.

5. **Różniczki zupełne wyższych rzędów danej funkcyi n zmiennych niezależnych.** Z różniczki zupełnej pierwszego rzędu danej funkcyi $z=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kształtu:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n, \qquad (7)$$

otrzymamy, na podstawie prawideł różniczkowania, jak przy funkcyi dwu zmiennych, niezależnych (art. 9. str. 287. i 288.), różniczkę zupełną drugiego rzędu, a następnie, kolejne różniczki zupełne wyższych rzędów, uważając, przytem różniczki $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, zmiennych, niezależnych: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, jako wielkości stałe, a więc, kładąc:

$$d(dx_1) = d^2x_1 = 0, \quad d^2x_2 = 0, \ldots, d^2x_n = 0,$$

ogólnie: $d^r x_1 = d^r x_2 = \ldots = d^r x_n = 0$, dla $r > 1$.

Tym sposobem, otrzymamy, najpierw t. z. drugą różniczkę zupełną, w postaci:

$$d^2z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)\cdot dx_1 + d\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)\cdot dx_2 + \ldots + d\left(\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)\cdot dx_n, \tag{8}$$

skąd, ze względu na to, że:

$$d\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2_1}dx_1 + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n}dx_n,$$

$$d\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}dx_1 + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_n}dx_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$d\left(\frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n}dx_1 + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_n}dx_2 + \ldots + \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2}dx_n,$$

otrzymujemy ją w postaci rozwiniętej:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2_1}dx^2_1 + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2_2}dx^2_2 + \ldots + \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2}dx^2_n + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}dx_1 dx_2 + \ldots + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n}dx_1 dx_n + \ldots$$

$$+ \ldots + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x_{n-1} \partial x_n}dx_{n-1}dx_n, \tag{9}$$

czyli, w postaci symbolicznej:

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^{(2)} z. \tag{10}$$

Różniczka zupełna drugiej różniczki zupełnej d^2z danej funkcyi z daje trzecią różniczką zupełną d^3z, w postaci symbolicznej:

$$d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^{(3)} z, \tag{11}$$

na podstawie której otrzymamy ogólnie r-tą różniczkę zupełną w postaci symbolicznej:

$$d^rz = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^{(r)} z. \tag{12}$$

Z tej postaci otrzymamy, na podstawie prawidła o potęgach wielomianu (**Patrz T. I. art. 9., str. 329.**), odnośny wzór, w postaci rozwiniętej:

$$d^r z = \sum_{\alpha+\beta+\ldots+\nu=r} \frac{r!}{\alpha!\,\beta!\ldots\nu!}\,\frac{\partial^{\alpha+\beta+\ldots+\nu} z}{\partial x_1^{\alpha}\,\partial x_2^{\beta}\ldots\partial x_n^{\nu}}\,dx_1^{\alpha}\,dx_2^{\beta}\ldots dx_n^{\nu}, \tag{13}$$

gdzie znak sumowy rozciąga się na wszystkie przypadki, w których wykładniki α, β,..., ν, przedstawiające rzędy pochodnych cząstkowych, względnie potęgi różniczek zmiennych, niezależnych, wybrane są z pośród liczb: 0, 1, 2,..., n tak, że suma: $\alpha+\beta+\ldots+\nu=r$.

Powyższa suma zawiera w rozwinięciu: $\binom{n+r-1}{r}$ wyrazów, t.j. tyle, ile pochodnych cząstkowych r-go rzędu posiada funkcya n zmiennych, niezależnych.

6. Że wzór powyższy jest ogólnie prawdziwy dla każdego r, możemy dowieść na podstawie indukcyjnego wnioskowania z r na $r+1$.

Przyjąwszy, bowiem, prawdziwość tego wzoru dla pewnego r, której, dla $r=2$ wprost dowiedliśmy, otrzymujemy z (13) wzór na $(r+1)$-szą różniczkę zupełną w postaci:

$$d^{r+1} z = \sum_{\alpha+\beta+\ldots+\nu=r} \frac{r!}{\alpha!\,\beta!\ldots\nu!}\left[\frac{\partial^{r+1} z}{\partial x_1^{\alpha+1}\partial x_2^{\beta}\ldots\partial x_n^{\nu}}dx_1^{\alpha+1}dx_2^{\beta}\ldots dx_n^{\nu} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^{r+1} z}{\partial x_1^{\alpha}\partial x_2^{\beta+1}\ldots\partial x_n^{\nu}}dx_1^{\alpha}dx_2^{\beta+1}\ldots dx_n^{\nu} + \ldots + \frac{\partial^{r+1} z}{\partial x_1^{\alpha}\partial x_2^{\beta}\ldots\partial x_n^{\nu+1}}\cdot dx_1^{\alpha}dx_2^{\beta}\ldots dx_n^{\nu+1}\right].$$

Zastępując teraz $\partial^{r+1}z$ przez ∂z^{r+1}, możemy powyższy wzór przedstawić symbolicznie w postaci:

$$d^{r+1}z = \sum_{\alpha+\beta+\ldots+\nu=r} \frac{r!}{\alpha!\beta!\ldots\nu!} \frac{\partial z^r}{\partial x_1{}^\alpha \partial x_2{}^\beta \ldots \partial x_n{}^\nu} dx_1{}^\alpha dx_2{}^\beta \ldots dx_n{}^\nu .$$
$$.\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n\right)$$

czyli:

$$d^{r+1}z = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n\right)^{(r)} . \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n\right),$$

skąd otrzymuje się ostatecznie wzór:

$$d^{r+1}z = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n\right)^{(r+1)},$$

zgodny z wzorem przyjętym dla $d^r z$, co dowodzi, że przyjęty wzór, prawdziwy dla $r=2$, jest też ogólnie prawdziwy.

7. Wyznaczywszy dla danej funkcyi n zmiennych, niezależnych, wszystkie pochodne cząstkowe r-go rzędu, otrzymujemy, na podstawie wzoru (13), różniczkę zupełną r-go rzędu tejże funkcyi.

Znalazłszy natomiast bezpośrednio, za pomocą prawideł różniczkowania, r-tą różniczkę zupełną danej funkcyi: $z=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, w postaci:

$$d^r z = \sum_{\alpha+\beta+\ldots+\nu=r} A_{\alpha,\beta,\ldots,\nu} dx_1{}^\alpha dx_2{}^\beta \ldots dx_n{}^\nu, \tag{14}$$

otrzymujemy w funkcyach $A_{\alpha\beta\ldots\nu}$ wszystkie pochodne cząstkowe n-go rzędu, opatrzone odpowiednimi spółczynnikami. Mianowicie, będzie:

$$A_{\alpha\beta\ldots\nu} = \frac{r!}{\alpha!\beta!\ldots\nu!} \frac{\partial^r z}{\partial x_1{}^\alpha \partial x_2{}^\beta \ldots \partial x_n{}^\nu}, \tag{15}$$

skąd otrzymujemy poszczególne pochodne cząstkowe r-go rzędu danej funkcyi, w postaci:

$$\frac{\partial^r z}{\partial x_1{}^\alpha \partial x_2{}^\beta \ldots \partial x_n{}^\nu} = \frac{\alpha!\beta!\ldots\nu!}{(\alpha+\beta+\ldots+\nu)!} A_{\alpha\beta\ldots\nu}. \tag{16}$$

8. **Przykład.** Dla funkcyi: $u=z^3+3xyz-5xy^2-x^3$, trzech zmiennych, niezależnych: x, y, z, otrzymujemy, na podstawie wzoru (13), z uwzględnieniem pochodnych cząstkowych, w art. 4. wyznaczonych, pierwszą różniczkę zupełną w postaci:

$$du = (3yz-5y^2-3x^2)\,dx + (3xz-10\,xy)\,dy + (3z^2+3xy)\,dz,$$

drugą różniczkę zupełną w postaci:

$$d^2u = -6x\,.\,dx^2 - 10\,x\,.\,dy^2 + 6z\,.\,dz^2 + 2(3z-10\,y)\,dx\,dy + 6x\,.\,dy\,dz + 6y\,dx\,dz,$$

wreszcie trzecią różniczkę zupełną w postaci:

$$d^3u = -6dx^3 + 6dz^3 - 30\,dx\,dy^2 + 18\,dx\,dy\,dz,$$

a w końcu: czwartą różniczkę zupełną: $d^4u=0$.

Nawzajem, otrzymujemy z pierwszej różniczki zupełnej funkcyi:

$$u = z^3 + 3xyz - 5xy^2 - x^3,$$

otrzymanej wprost, za pomocą metody różniczkowania danej funkcyi podług wszystkich zmiennych, w postaci:

$$du = (3\,yz - 5y^2 - 3\,x^2)\,dx + (3xz - 10xy)\,dy + (3z^2 + 3\,xy)\,dz,$$

pochodne cząstkowe pierwszego rzędu:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3\,yz - 5y^2 - 3\,x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3xz - 10\,xy, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3\,z^2 + 3xy.$$

Z drugiej różniczki zupełnej, otrzymanej w postaci:

$$d^2u = -6x\,dx^2 - 10x\,dy^2 + 6z\,dz^2 + (6z - 20y)\,dx\,dy + 6x\,dy\,dz + 6y\,dx\,dz,$$

otrzymujemy pochodne cząstkowe drugiego rzędu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -6x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -10x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 6z, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 3z - 10y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = 3x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} = 3y.$$

Z trzeciej różniczki zupełnej w postaci:

$$d^3u = -6\,dx^3 + 6\,dz^3 - 30\,dx\,dy^2 + 18\,dx\,dy\,dz,$$

otrzymujemy znowu pochodne cząstkowe trzeciego rzędu:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = -6, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = 6, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2} = -10, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = 3 \quad \text{i t. d.}$$

9. Własności pochodnych cząstkowych funkcyj jednorodnych o ilukolwiek zmiennych, niezależnych. Funkcyę n zmiennych, niezależnych: $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nazywamy f u n k c y ą j e d n o r o d n ą m-go s t o p n i a, jeżeli składa się z wyrazów, z których każdy jest stopnia m-go, jak n. p. funkcya jednorodna, całkowita, kształtu:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha+\beta+\ldots+\nu=m} A_{\alpha\beta\ldots\nu}\, x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \ldots x_n^{\nu}.$$

Dla tej funkcyi jednorodnej utrzymuje się widocznie tożsamość:

$$\varphi(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^m \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{17}$$

która służy ogólnie do określenia funkcyj jednorodnych.

Połóżmy:

$$u_1 = tx_1, \quad u_2 = tx_2, \quad \ldots, \quad u_n = tx_n,$$

natenczas, możemy powyższą tożsamość napisać w postaci:

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = t^m \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Uważajmy w tym wzorze zmienne $x_1, x_2, \ldots, x_n$ chwilowo za stałe, a tylko t, jako jedyną zmienną, niezależną, i wyznaczmy obustronnie r-tą różniczkę zupełną, natenczas otrzymujemy:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial u_2} du_2 + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial u_n} du_n\right)^{(r)} =$$
$$= m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+1)\, t^{m-r} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dt^r,$$

a że, wobec założeń powyższych, $du_1 = x_1 dt$, $du_2 = x_2 dt$, ..., $du_n = x_n dt$, przeto, opuszczając w otrzymanym powyżej wzorze wspólny czynnik dt^r, otrzymujemy wzór:

$$\left(x_1 \frac{\partial\varphi}{\partial u_1} + x_2 \frac{\partial\varphi}{\partial u_2} + \ldots + x_n \frac{\partial\varphi}{\partial u_n}\right)^{(r)} = m(m-1)\ldots(m-r+1)\, t^{m-r} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Połóżmy teraz w tym wzorze: $t=1$, natenczas zmienne $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sprowadzają się do zmiennych: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a pochodne: $\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial u_n}$ do pochodnych: $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}$. Wzór powyższy sprowadza się, wobec tego, do postaci:

$$\left(x_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)^{(r)} = m(m-1)\ldots(m-r+1) . \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{18}$$

z której, dla $r=1$, otrzymujemy wzór szczególny (wzór Eulera):

$$x_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} = m . \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{19}$$

Wzory (18) i (19) wypowiadają własności, dotyczące pochodnych cząstkowych wszelkich funkcyj jednorodnych o ilukolwiek zmiennych, niezależnych.

Dadzą się one wysłowić, jak następuje:

Jeżeli w pierwszej zupełnej różniczce jakiejkolwiek funkcyi jednorodnej zastąpimy różniczki: $dx_1, dx_2, ..., dx_n$ przez zmienne: $x_1, x_2, ..., x_n$, to otrzymamy funkcyę samą, pomnożoną przez jej stopień m, jeżeli zaś uczynimy to samo w r-tej różniczce zupełnej, natenczas otrzymamy w wyniku daną funkcyę, pomnożoną przez iloczyn: $m(m-1)...(m-r+1)$

10. Przykłady. 1) Dla funkcyi: $u=\frac{xy}{x+z}$, która jest funkcyą ułamkową jednorodną, stopnia pierwszego trzech zmiennych x, y, z, otrzymamy różniczkę zupełną:

$$du=\frac{yz}{(x+z)^2}dx+\frac{x^2+xz}{(x+z)^2}dy-\frac{xy}{(x+z)^2}dz,$$

a zastępując w niej różniczki: dx, dy, dz przez zmienne: x, y, z, otrzymujemy, według wzoru Eulera: $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=mu$, z powodu $m=1$, tożsamość:

$$\frac{yz}{(x+z)^2}x+\frac{x^2+xz}{(x+z)^2}y-\frac{xy}{(x+z)^2}z=\frac{xy}{x+z}.$$

2) Dla funkcyi: $u=x\sqrt{2xy+y^2}$, która jest funkcyą algebraiczną, niewymierną, a zarazem jednorodną stopnia drugiego, dwu zmiennych, otrzymujemy drugą różniczkę zupełną:

$$d^2u=\frac{3xy^2+2y^3}{(2xy+y^2)^{3/2}}dx^2+\frac{2(3x^2y+3xy^2+y^3)}{(2xy+y^2)^{3/2}}dx\,dy+\frac{-x^3}{(2xy+y^2)^{3/2}}dy^2,$$

a zastępując w niej różniczki dx, dy przez zmienne x, y otrzymujemy według wzoru:

$$x^2\frac{\partial u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=m(m-1)u,$$

z powodu $m=2$ tożsamość:

$$\frac{3xy^2+2y^3}{(2xy+y^2)^{3/2}}x^2+\frac{2(3x^2y+3xy^2+y^3)}{(2xy+y^2)^{3/2}}xy-\frac{x^3}{(2xy+y^2)^{3/2}}y^2=2x\sqrt{2xy+y^2}.$$

3) Dla funkcyi: $u=\log\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}$, która jest funkcyą przestępną dwu zmiennych x i y, a przytem funkcyą jednorodną zerowego stopnia, otrzymujemy z równania różniczki zupełnej: $du=\frac{2y\,dx-2x\,dy}{4\sqrt{x^2-y^2}}$, z powodu $m=0$, tożsamość:

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2x}{\sqrt{x^2-y^2}}-\frac{2x}{\sqrt{x^2-y^2}}=0.$$

11. Jednorodne formy algebraiczne. Szczególny przypadek funkcyj jednorodnych zmiennych, niezależnych: $x_1, x_2, ..., x_n$ stanowią funkcye jednorodne, algebraiczne, wymierne, całkowite. Funkcye takie przedstawiają się w postaci: $u=\Sigma A_{\alpha,\beta,...,\nu}\,x_1^{\alpha}x_2^{\beta}....x_n^{\nu}$,
gdzie $\alpha+\beta+...+\nu=m$, i nazywają się zwykle formami algebraicznemi n zmiennych m-go stopnia.

W szczególności, nazywają się formy algebraiczne, w których $m=1$, a więc, formy, kształtu: $u=a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n$, formami liniowemi; formy algebraiczne, w których $m=2$, a więc formy, kształtu:

$$u=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+...+a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+...+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

formami kwadratowemi. Z form algebraicznych wyższych stopni nazywają się zwykle formy algebraiczne trzeciego stopnia ($m=3$) formami sześciennemi (kubicznemi), a formy czwartego stopnia ($m=4$), formami dwukwadratowemi (bikwadratowemi).

Z formy liniowej: $u=a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n$ otrzymamy ogólną formę algebraiczną m-go stopnia, jeżeli w najprostszej formie algebraicznej m-go

stopnia, przedstawiającej się w postaci rozwiniętej m tej potęgi dowolnej formy liniowej, t. j. w postaci: $u_m=(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n)^m$, poszczególne wyrazy rozwinięcia opatrzymy dowolnymi spółczynnikami. Ogólna forma algebraiczna m-go stopnia ma zatem tyle wyrazów, ile ich jest w rozwiniętej m-tej potędze wielomianu n-wyrazowego t. j. $\binom{m+n-1}{m}$ wyrazów.

W szczególności, ogólna forma liniowa n zmiennych ma n wyrazów, kwadratowa ma $\binom{n+1}{2}$, sześcienna $\binom{n+2}{3}$, dwukwadratowa $\binom{n+3}{4}$ wyrazów.

Formy algebraiczne dowolnego stopnia otrzymują wreszcie osobne nazwy, stosownie do ilości zmiennych. W szczególności, formy algebraiczne o dwu zmiennych $(n=2)$, jak $u=ax+by$, $u^m=(ax+by)^m$, nazywają się formami dwójkowemi, formy algebraiczne o trzech zmiennych $(n=3)$, jak $u=ax+by+cz$, $u^m=(ax+by+cz)^m$, formami trójkowemi, formy algebraiczne o czterech zmiennych, jak: $u=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4$, $u^m=(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4)^m$, formami czwórkowemi, ..., formy algebraiczne o n zmiennych, jak:

$$u=a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n,\quad u^m=(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n)^m$$

formami n-jednostkowemi.

Badanie własności form algebraicznych stanowi osobną gałęź algebry wyższej, zwaną teoryą form.

Na oznaczanie form różnego rodzaju używa się niekiedy, za przykładem Cayley'a, znakowania skróconego, które polega na tem, że ujmuje się w nawias najpierw wszystkie spółczynniki formy, kolejno po sobie następujące, a podzielone przez odnośne liczebne spółczynniki dwumianowe, względnie wielomianowe, a następnie, dołącza się w nowy nawias ujęte wielkości zmienne tej formy, pisząc u góry tego nawiasu stopień tej formy i sprowadzając kreski sąsiednie nawiasu do krzyżowania. Według tego znakowania pisze się więc n. p. formę dwójkową, sześcienną: $ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3$ w postaci: $(a,b,c,d)(x,y)^3$.

W przypadkach, gdy bliższe określenie spółczynników jest zbyteczne, ogranicza się to znakowanie tylko do zestawienia zmiennych formy, oznaczając n. p. formę dwójkową n-go stopnia symbolem: $(x,y)^n$. Przy badaniu form o pewnej ilości zmiennych, używa się niekiedy znakowania skróconego, wprowadzonego przez Aronholda, w postaci symboli: a_x^m, gdzie a przypomina spółczynniki, x zmienne, a m stopień formy.

Bardziej odpowiedniem i coraz bardziej używanem jest jednak znakowanie form, oparte na układzie wskaźników, według którego, dla oznaczania zmiennych używa się wyłącznie litery x, a na oznaczanie spółczynników litery a, dołączając do tych liter odpowiednie wskaźniki.

12. Uwaga. Różniczki zupełne funkcyi: $z=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ są algebraicznemi formami ze względu na różniczki $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, a mianowicie pierwsza różniczka zupełna dz jest ze względu na różniczki formą liniową o spółczynnikach, które są pierwszemi pochodnemi cząstkowemi danej funkcyi, druga różniczka d^2z jest formą kwadratową ze względu na te różniczki o spółczynnikach, które są drugiemi pochodnemi cząstkowemi, pomnożonemi przez odpowiednie spółczynniki wielomianowe, trzecia różniczka zupełna jest formą sześcienną; ogólnie m-ta różniczka zupełna jest formą algebraiczną m-go stopnia ze względu na różniczki $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ o spółczynnikach które są pochodnemi cząstkowemi m-go rzędu danej funkcyi, pomnożonemi przez odpowiednie spółczynniki wielomianowe, i przedstawia się ogólnie w postaci:

$$d^m u=\sum_{\alpha+\beta+\ldots+\nu=m}\frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\nu!}\,\frac{\partial^m f}{\partial x_1{}^\alpha \partial x_2{}^\beta\ldots\partial x_n{}^\nu}\,dx_1{}^\alpha.\,dx_2{}^\beta.\ldots.dx_n{}^\nu.$$

13. Całki cząstkowe danej funkcyi n zmiennych, niezależnych. Uważając daną funkcyę: $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, jako pochodną czastkową innej niewiadomej funkcyi z, ze względu na jedną z tych zmiennych, a więc, kładąc n. p.

$$\frac{\partial^r z}{\partial x_i^r} = f(x_1, x_2, .., x_n),$$

znajdziemy funkcyę pierwotną:

$$z = \int\int ... \int f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_i^r,$$

jeżeli daną funkcyę: $f(x_1, x_2, .., x_n)$ kolejno r-razy ze względu na zmienną x_i scałkujemy; otrzymujemy tedy szukaną funkcyę, analogicznie do wzoru (20) str. 290., w ogólnej postaci:

$$\int\int ... \int f(x_1, x_2, .., x_n)\, dx_i^r = F(x_1, x_2, ..., x_n) + \psi_1 x_i^{r-1} + \psi_2 . x_i^{r-2} + ... + \psi_{r-1}\, x + \psi_r, \quad (20)$$

gdzie $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ jest najprostszą funkcyą n zmiennych, niezależnych, otrzymaną z funkcyi $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, na podstawie r-krotnego całkowania cząstkowego, ze względu na zmienną x_i, a spółczynniki $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_r$, są dowolnemi funkcyami pozostałych zmiennych: $x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$.

14. Całki wielokrotne. Uważając daną funkcyę: $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, jako pochodną cząstkową niewiadomej funkcyi z ze względu na wszystkie zmienne $x_1, x_2, ..., x_n$, a więc, kładąc:

$$\frac{\partial^n z}{\partial x_1\, \partial x_2 ... \partial x_n} = f_1(x_1, x_2, ..., x_n),$$

znajdziemy funkcyę pierwotną:

$$z = \int\int ... \int f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_1\, dx_2 ... dx_n = \int dx_1 \int dx_2 ... \int f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_n,$$

jeżeli daną funkcyę: $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ scałkujemy kolejno podług każdej ze zmiennych $x_1, x_2, ..., x_n$.

Całkowanie kolejne funkcyi: $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, wielu zmiennych, niezależnych według każdej z tych zmiennych, nazywamy **całkowaniem wielokrotnem**, a całki, kształtu: $\int\int ... \int f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_1 ... dx_n$, nazywamy **całkami wielokrotnemi**.

Porządek całkowania, obojętny przy funkcyach dwu zmiennych, niezależnych (por. art. 13. str. 290. i nast.), jest tem samem obojętny także przy ilukolwiek zmiennych, niezależnych.

Chcąc otrzymać najogólniejszą postać całki n-krotnej, kształtu: $\int\int ... \int f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_1 dx_2 ... dx_n$, należy do otrzymanego wyniku: $F(x_1, x_2, ..., x_n)$, dołączyć jeszcze sumę n dowolnych funkcyj: $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n$, gdzie Φ_i zawiera wszystkie zmienne, prócz zmiennej x_i.

Jest tedy najogólniej:

$$\int\int ... \int f(x_1, ..., x_n)\, dx_1 dx_2 ... dx_n = F(x_1, x_2, ..., x_n) + \Phi_1(x_2, x_3 ... x_n) + \\ + \Phi_2(x_1, x_3, ... x_n) + ... + \Phi_n(x_1, x_2, ..., x_{n-1}), \quad (21)$$

skoro:

$$\frac{\partial^n F(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_1\, \partial x_2 ... \partial x_n} = f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

15. Przykład. Wyznaczyć całkę potrójną, kształtu:

$$\int\int\int \frac{3\, xyz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}\, dx\, dy\, dz.$$

Całkując daną funkcyę, najpierw podług x, i uważając pozostałe zmienne za stałe, otrzymujemy:

$$\int \frac{3xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\,dx = 3yz\int\frac{xdx}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = -\frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Całkując dalej otrzymaną nową funkcyę podług zmiennej y, otrzymujemy:

$$\iint \frac{3xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\,dx\,dy = -\int\frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dy = +\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}},$$

całkując ostatni wynik podług z, otrzymujemy:

$$\iiint \frac{3xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\,dx\,dy\,dz = \int\frac{zdz}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Szukana całka potrójna przedstawia się zatem w najogólniejszej postaci:

$$\iiint \frac{3xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\,dx\,dy\,dz = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + \Phi_1(y, z) + \Phi_2(z, x) + \Phi_3(x, y).$$

16. Całkowanie różniczek zupełnych pierwszego rzędu o n zmiennych, niezależnych. Różniczka zupełna danej funkcyi: $z=f(x_1, x_2,..., x_n)$ przedstawia się, jak wiadomo, w postaci:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial z}{\partial x_n}dx_n.$$

Dowolnie z n zmiennych $x_1, x_2,..., x_n$, utworzone wyrażenie różniczkowe, kształtu:

$$M_1dx_1 + M_2dx_2 + ... + M_ndx_n,$$

będzie zatem tylko wówczas zupełną różniczką, jeżeli istnieje taka funkcya od n zmiennych: $x_1, x_2,..., x_n$, że będzie:

$$M_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1},\quad M_2 = \frac{\partial z}{\partial x_2}, ...,\quad M_n = \frac{\partial z}{\partial x_n}.$$

W takim razie, musiałyby się spełniać relacye:

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2} = \frac{\partial M_2}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial M_1}{\partial x_n} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_n} = \frac{\partial M_n}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial M_{n-1}}{\partial x_n} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_{n-1}\partial x_n} = \frac{\partial M_n}{\partial x_{n-1}},$$

z których otrzymujemy: $\binom{n}{2}$ warunków, kształtu:

$$\frac{\partial M_i}{\partial x_k} = \frac{\partial M_k}{\partial x_i},\quad \begin{matrix} i=1,2,...,n, \\ k=1,2,...,n, \end{matrix} \tag{22}$$

pod którymi wyrażenie różniczkowe będzie zupełną różniczką pewnej niewiadomej funkcyi n zmiennych, niezależnych: $x_1, x_2, ..., x_n$.

Warunki powyższe nazywamy też **warunkami całkowalności**, odnośną funkcyę z nazywamy **całką danej różniczki zupełnej**.

Pod tymi warunkami, piszemy:

$$dz = M_1dx_1 + M_2dx_2 + ... + M_ndx_n,$$

odnośną całkę, oznaczamy w postaci:

$$z = \int(M_1dx_1 + M_2dx_2 + ... + M_ndx_n). \tag{23}$$

17. Mając ją wyznaczyć, weźmy pod uwagę, że różniczka M_1dx_1 jest jej cząstkową różniczką, ze względu na x_1, możemy, zatem, położyć:

$$z = \int M_1dx_1 + C_1,$$

gdzie stała całkowania C_1 ma być niezależną tylko od x_1, może być jednak funkcyą pozostałych $(n-1)$ zmiennych, niezależnych: $x_2, ..., x_n$.

Połóżmy: $C_1 = \varphi_1(x_2, ..., x_n)$, a więc:

$$z = \int M_1dx_1 + \varphi_1(x_2, ..., x_n),$$

wówczas, na wyznaczenie funkcyi φ_1, otrzymujemy z warunku: $\frac{\partial z}{\partial x_2} = M_2$, równanie:

$$\int \frac{\partial M_1}{\partial x_2} dx_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = M_2,$$

z którego dostajemy:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = M_2 - \int \frac{\partial M_1}{\partial x_2} dx_1,$$

a więc:

$$\varphi_1 = \int \left[M_2 - \int \frac{\partial M_1}{\partial x_2} dx_1 \right] dx_2 + C_2,$$

gdzie C_2 może być funkcyą pozostałych $(n-2)$ zmiennych: $x_3, ..., x_n$.

Połóżmy $C_2 = \varphi_2(x_3, ..., x_n)$, a więc:

$$\varphi_1(x_2, ..., x_n) = \int \left[M_2 - \int \frac{\partial M_1}{\partial x_2} dx_1 \right] dx_2 + \varphi_2(x_3, ..., x_n),$$

natenczas, otrzymujemy szukaną całkę, w postaci:

$$z = \int M_1 dx_1 + \int \left[M_2 - \int \frac{\partial M_1}{\partial x_2} dx_1 \right] dx_2 + \varphi_2(x_3, ..., x_n),$$

w której $\varphi_2(x_3, ..., x_n)$ wyznaczymy znowu z warunku: $\frac{\partial z}{\partial x_3} = M_3$.

Postępując dalej w ten sposób, dojdziemy w końcu do funkcyi $\varphi_{n-1}(x_n)$, do wyznaczenia której posłuży warunek: $\frac{\partial z}{\partial x_n} = M_n$.

18. Całkowanie różniczek zupełnych ilukolwiek zmiennych, możemy więc wykonać w sposób następujący:

Całkujemy jedną z różniczek cząstkowych, n. p.: $M_1 dx_1$, cząstkowo ze względu na odnośną zmienną x_1, a zamiast stałej dołączamy do wyniku funkcyę zmiennej x_2, uważając pozostałe zmienne, jako stałe. Funkcyę tą wyznaczamy następnie na tej zasadzie, że pochodna cząstkowa otrzymanego wyniku względem x_2 winna być spółczynnikiem M_2, przyczem dołączamy znowu, zamiast stałej, funkcyę zmiennej x_3, i postępujemy tak dalej, aż dojdziemy do spółczynnika M_n, który ma być równy pochodnej cząstkowej ostatecznie otrzymanego wyniku względem x_n.

Z odnośnego porównania znajdziemy ostatnią dołączoną funkcyę, jako funkcyę wyłącznie zmiennej x_n, poczem dołączamy do wyniku dowolną stałą C i otrzymujemy ostatecznie całkę ogólną danej różniczki zupełnej.

Z postępowania tego wynika wprost następująca, skrócona, metoda całkowania różniczek zupełnych.

Całkujemy różniczkę: $M_1 dx_1$, podług x_1, a do wyniku dołączamy najpierw całkę tych wyrazów z różniczki $M_2 dx_2$, które nie zawierają zmiennej x_1, następnie całkę z tych wyrazów różniczki $M_3 dx_3$, które nie zawierają zmiennych x_1 i x_2, ogólnie całkę tych wyrazów różniczki $M_r dx_r$, które nie zawierają zmiennych $x_1, x_2, ..., x_{r-1}$, a w końcu, dołączamy całkę tych wyrazów różniczki $M_n dx_n$, które nie zawierają zmiennych: $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$, czyli zawierają wyłącznie zmienną x_n, i dodajemy stałą dowolną C. Otrzymana w ten sposób suma będzie całką ogólną danej różniczki zupełnej o n zmiennych, niezależnych: $x_1, x_2, ..., x_n$.

19. Przykłady. 1) Wyznaczyć całkę różniczki zupełnej o czterech zmiennych, kształtu:

$$dz = (2x_1 + x_2^2 + 2x_1 x_4 - x_3) dx_1 + 2x_1 x_2 dx_2 - x_1 dx_3 + x_1^2 dx_4.$$

Ażeby się przekonać, czy dana różniczka jest różniczką zupełną, mamy tu:

$$M_1 = 2x_1 + x_2^2 + 2x_1 x_4 - x_3, \quad M_2 = 2x_1 x_2, \quad M_3 = -x_1, \quad M_4 = x_1^2,$$

skąd otrzymujemy:

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_2}=2x_2,\quad \frac{\partial M_1}{\partial x_3}=-1,\quad \frac{\partial M_1}{\partial x_4}=2x_1,\quad \frac{\partial M_2}{\partial x_1}=2x_2,\quad \frac{\partial M_2}{\partial x_3}=0,\quad \frac{\partial M_2}{\partial x_4}=0,$$

$$\frac{\partial M_3}{\partial x_1}=-1,\quad \frac{\partial M_3}{\partial x_2}=0,\quad \frac{\partial M_3}{\partial x_4}=0,\quad \frac{\partial M_4}{\partial x_1}=2x_1,\quad \frac{\partial M_4}{\partial x_2}=0,\quad \frac{\partial M_4}{\partial x_3}=0,$$

m:

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_2}=\frac{\partial M_2}{\partial x_1}=2x_2,\quad \frac{\partial M_1}{\partial x_3}=\frac{\partial M_3}{\partial x_1}=-1,\quad \frac{\partial M_1}{\partial x_4}=\frac{\partial M_4}{\partial x_1}=2x_1,$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial x_3}=\frac{\partial M_3}{\partial x_2}=0,\quad \frac{\partial M_2}{\partial x_4}=\frac{\partial M_4}{\partial x_2}=0,\quad \frac{\partial M_3}{\partial x_4}=\frac{\partial M_4}{\partial x_3}=0.$$

Mamy więc tu spełnionych $\binom{4}{2}$, czyli 6 warunków całkowalności, które dowodzą, że różniczka jest w istocie różniczką zupełną pewnej funkcyi czterech zmiennych, nie-żnych.

Mając wyznaczyć tą funkcyę, połóżmy:

$$z=\int(2x_1+x_2^2+2x_1x_4-x_3)\,dx_1+\varphi_1(x_2),$$

otrzymamy:

$$z=x_1^2+x_1x_2^2+x_1^2x_4-x_1x_3+\varphi_1(x_2),$$

ie, na wyznaczenie φ_1, otrzymamy z warunku: $\frac{\partial z}{\partial x_2}=M_2$, równanie: $2x_1x_2+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}=2x_1x_2$, którego dostajemy: $\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}=0$, a więc: $\varphi_1=C_2=\varphi_2(x_3)$, a zatem:

$$z=x_1^2+x_1x_2^2+x_1^2x_4-x_1x_3+\varphi_2(x_3).$$

Z warunku: $\frac{\partial z}{\partial x_3}=M_3$ dostajemy dalej równanie: $-x_1+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3}=-x_1$, z którego wy-wa: $\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3}=0$, $\varphi_2=C_3=\varphi_3(x_4)$, zatem: $z=x_1^2+x_1x_2^2+x_1^2x_4-x_1x_3+\varphi_3(x_4)$.

Na wyznaczenie $\varphi_3(x_4)$ otrzymujemy wreszcie z warunku: $\frac{\partial z}{\partial x_4}=M_4$, równanie:

$$x_1^2+\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_4}=x_1^2,$$

którego otrzymujemy: $\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_4}=0$, a więc: $\varphi_3(x_4)=C$.

Szukaną całką ogólną będzie więc funkcya:

$$z=x_1^2+x_1x_2^2+x_1^2x_4-x_1x_3+C.$$

Do tego wyniku dochodzimy wprost metodą skróconą, na podstawie wzoru:

$$z=\int(2x_1+x_2^2+2x_1x_4-x_3)\,dx_1+C,$$

ż w różniczce: $M_2dx_2=2x_1x_2dx_2$ nie ma wyrazów bez x_1, w różniczce $M_3dx_3=-x_1dx_3$, ma wyrazów bez x_1 i x_2, a w różniczce $M_4dx_4=x_1^2dx_4$, nie ma wyrazów bez x_1, x_2, x_3.

Jest tedy wprost: $z=x_1^2+x_1x_2^2+x_1^2x_4-x_1x_3+C$.

2) Wyznaczyć całkę ogólną różniczki:

$$dz=(x_2+x_3+x_4)\,dx_1+(x_3+x_4+x_1)\,dx_2+(x_4+x_1+x_2)\,dx_3+(x_1+x_2+x_3)\,dx_4.$$

Mamy tu spełnione warunki całkowalności, ponieważ:

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_2}=\frac{\partial M_2}{\partial x_1}=1,\quad \frac{\partial M_1}{\partial x_3}=\frac{\partial M_3}{\partial x_1}=1,\quad \dots,\quad \frac{\partial M_3}{\partial x_4}=\frac{\partial M_4}{\partial x_3}=1,$$

Możemy zatem położyć:

$$z=\int(x_2+x_3+x_4)\,dx_1+\varphi_1,\quad\text{czyli:}\quad z=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+\varphi_1,$$

wyznaczenie φ_1 otrzymujemy warunek: $x_1+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}=x_3+x_4+x_1$, z którego dostajemy:

$=x_3+x_4$, zatem: $\varphi_1=x_2x_3+x_2x_4+\varphi_2$, a więc: $z=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+\varphi_2$.

Kładąc: $\frac{\partial z}{\partial x_3} = x_4 + x_1 + x_2$, otrzymujemy równanie: $x_1 + x_2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} = x_4 + x_1 + x_2$, z którego dostajemy: $\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} = x_4$, zatem $\varphi_2 = x_3 x_4 + \varphi_3$, a więc:

$$z = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 + \varphi_3.$$

Z warunku: $\frac{\partial z}{\partial x_4} = x_1 + x_2 + x_3$, otrzymujemy, w końcu:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_4} = x_1 + x_2 + x_3, \text{ czyli: } \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_4} = 0,$$

a więc: $\varphi_3 = C$, gdzie C jest już stałą dowolną. Ostatecznie, otrzymujemy, zatem, szukaną całkę ogólną danej różniczki zupełnej, w postaci:

$$z = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 + C.$$

Postępując metodą skróconą, otrzymujemy wprost:

$$z = \int (x_2 + x_3 + x_4)\, dx_1 + \int (x_3 + x_4)\, dx_2 + \int x_4\, dx_3 + C,$$

zatem, jak powyżej:

$$z = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_1 x_4 + x_3 x_4 + C.$$

20. Całkowanie różniczek zupełnych o trzech zmiennych, niezależnych. Warunki całkowalności wyrażeń różniczkowych pierwszego rzędu o trzech zmiennych x, y, z, kształtu: $P dx + Q dy + R dz$, wynikają z rozważań art. 16., względnie z warunków:

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial u}{\partial z}$$

w postaci:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \tag{24}$$

Pod tymi warunkami, możemy położyć:

$$du = P dx + Q dy + R dz, \tag{25}$$

a otrzymamy:

$$u = \int P dx + \varphi(y),$$

a że: $\int \frac{\partial P}{\partial y} dx + \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} = Q$, a więc: $\varphi(y) = \int \left[Q - \int \frac{\partial P}{\partial y} dx \right] dy + \psi(z)$,

przeto, otrzymujemy:

$$u = \int P dx + \int \left[Q - \int \frac{\partial P}{\partial y} dx \right] dy + \psi(z).$$

Z warunku $\frac{\partial u}{\partial z} = R$, mamy:

$$\int \frac{\partial P}{\partial z} dx + \int \left[\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{\partial P}{\partial y} dx \right] dy + \frac{\partial \psi(z)}{\partial z} = R,$$

czyli:

$$\frac{\partial \psi(z)}{\partial z} = R - \int \frac{\partial P}{\partial z} dx - \int \left[\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{\partial P}{\partial y} dx \right] dy,$$

zatem:

$$\psi(z) = \int \left[R - \int \frac{\partial P}{\partial z} dx - \int \left[\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{\partial P}{\partial y} dx \right] dy \right] dz + C,$$

ięc, otrzymujemy ostatecznie całkę ogólną:

$$u = \int [P dx + Q dy + R dz],$$

postaci wzoru:

$$\int P dx + \int\left[Q - \int \frac{\partial P}{\partial y} dx\right] dy + \int\left[R - \int \frac{\partial P}{\partial z} dx - \int\left[\frac{\partial Q}{dz} - \frac{\partial}{\partial_z}\int \frac{\partial P}{\partial y} dx\right] dy\right] dz + C. \tag{26}$$

Otrzymany wzór wykazuje bezpośrednio, że do całki: $\int P dx$, należy ...czyć całkę podług y, z tych wyrazów spółczynnika Q, które nie zawie... zmiennej x, a następnie całkę podług z, z tych wyrazów spółczyn... R, które zawierają wyłącznie zmienną z bez zmiennych x i y.

21. **Przykłady.** 1) Wyznaczyć całkę, kształtu:

$$u = \int\left[\frac{y\,dx}{a-z} + \frac{x\,dy}{a-z} + \frac{xy\,dz}{(a-z)^2}\right].$$

Mamy tu: $P = \frac{y}{a-z}$, $Q = \frac{x}{a-z}$, $R = \frac{xy}{(a-z)^2}$, zatem:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{a-z} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{x}{(a-z)^2} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{y}{(a-z)^2} = \frac{\partial P}{\partial z},$$

...ię, pod znakiem całkowania, różniczkę zupełną.

Ponieważ w spółczynniku: $Q = \frac{x}{a-z}$, nie ma wyrazów bez zmiennej x, a w spół...niku: $R = \frac{xy}{(a-z)^2}$, nie ma wyrazów bez x i y, a przytem:

$$\int P dx = \int \frac{y\,dx}{a-z} = \frac{xy}{a-z} + C,$$

...o, otrzymujemy podaną całkę wprost w postaci: $u = \frac{xy}{a-z} + C$.

2) Zbadać całkowalność różniczki: $du = (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz$ i wyzna...ć jej całkę ogólną.

Mamy tu:

$$P = y+z, \quad Q = x+z, \quad R = x+y, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{dx}, \quad \frac{\partial Q}{dz} = 1 = \frac{\partial R}{dy}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = 1 = \frac{\partial P}{\partial z};$$

...a różniczka jest więc różniczką zupełną.

Jej całka przedstawia się w postaci:

$$u = \int (y+z)\,dx + \int z\,dy = xy + zx + yz + C, \quad \text{czyli:} \quad u = xy + yz + zx = C.$$

22. **Warunki całkowalności różniczek wyższych rzędów o ilukolwiek ...ennych.** Chcąc zbadać, czy dana różniczka r-go rzędu zmiennych, nieza...ych: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, przedstawiająca się w postaci:

$$\sum_{\alpha+\beta+\ldots+\nu=r} M_{\alpha,\beta,\ldots,\nu}\, dx_1^{\alpha}\, dx_2^{\beta} \ldots dx_n^{\nu}$$

różniczką zupełną, należałoby ją porównać z wzorem na różniczkę zu...ą r-go rzędu dowolnej funkcyi n zmiennych, niezależnych, przedstawia...m się w postaci:

$$d^r z = \sum_{\alpha+\beta+\ldots+\nu=r} \frac{r!}{\alpha!\,\beta!\ldots\nu!}\,\frac{\partial^{\alpha+\beta+\ldots+\nu} z}{\partial x_1^{\alpha}\,\partial x_2^{\beta}\ldots\partial x_n^{\nu}}\,dx_1^{\alpha}\,dx_2^{\beta}\ldots dx_n^{\nu}.$$

Porównywając odnośne spółczynniki, otrzymujemy relacye, kształtu:

$$M_{\alpha,\beta,\ldots,\nu} = \frac{r!}{\alpha!\,\beta!\ldots\nu!}\,\frac{\partial^{\alpha+\beta+\ldots+\nu} z}{\partial x_1^{\alpha}\,\partial x_2^{\beta}\ldots\partial x_n^{\nu}},$$

które musiałyby się spełnić, przy pewnej niewiadomej funkcyi z, dla wszelkich wartości $\alpha, \beta, \ldots, \nu$, czyniących zadość warunkowi: $\alpha+\beta+\ldots+\nu=r$.

Przyjmijmy dwie grupy liczb tego rodzaju: $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ i $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \nu_1$ tak, że $\alpha+\beta+\ldots+\nu=r$, jakoteż $\alpha_1+\beta_1+\ldots+\nu_1=r$, natenczas, otrzymamy dwie relacye następujące:

$$M_{\alpha,\beta,\ldots,\nu}=\frac{r!}{\alpha!\,\beta!\ldots\nu!}\,\frac{\partial^r z}{\partial x_1^{\alpha}\,\partial x_2^{\beta}\ldots\partial x_n^{\nu}},$$

$$M_{\alpha_1,\beta_1,\ldots,\nu_1}=\frac{r!}{\alpha_1!\,\beta_1!\ldots\nu_1!}\,\frac{\partial^r z}{\partial x_1^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\beta_1}\ldots\partial x_n^{\nu_1}},$$

z których wynikają dwie następujące relacye:

$$\frac{\partial^r M_{\alpha,\beta,\ldots,\nu}}{\partial x_1^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\beta_1}\ldots\partial x_n^{\nu_1}}=\frac{r!}{\alpha!\,\beta!\ldots\nu!}\,\frac{\partial^{2r} z}{\partial x_1^{\alpha+\alpha_1}\,\partial x_2^{\beta+\beta_1}\ldots\partial x_n^{\nu+\nu_1}}=$$

$$\frac{\partial^r M_{\alpha_1,\beta_1,\ldots,\nu}}{\partial x_1^{\alpha}\,\partial x_2^{\beta}\ldots\partial x_n^{\nu}}=\frac{r!}{\alpha_1!\,\beta_1!\ldots\nu_1!}\,\frac{\partial^{2r} z}{\partial x_1^{\alpha+\alpha_1}\,\partial x_2^{\beta+\beta_1}\ldots\partial x_n^{\nu+\nu_1}},$$

a stąd, szukane warunki całkowalności danej różniczki w postaci:

$$\frac{\partial^r M_{\alpha,\beta,\ldots,\nu}}{\partial x_1^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\beta_1}\ldots\partial x_n^{\nu_1}}:\frac{\partial^r M_{\alpha_1,\beta_1,\ldots,\nu_1}}{\partial x_1^{\alpha}\,\partial x_2^{\beta}\ldots\partial x_n^{\nu}}=\frac{r!}{\alpha!\,\beta!\ldots\nu!}:\frac{r!}{\alpha_1!\,\beta_1!\ldots\nu_1!},\qquad(27)$$

które musiałyby się spełnić dla wszelkich połączeń liczb 0, 1, 2, ..., n o sumie równej r, których ilość określa się, jak wiadomo, symbolem:

$$\binom{n+r-1}{r}=\frac{(n+r-1)(n+r-2)\ldots n}{1.2\ldots r}.$$

Ćwiczenia XX.

1) Wykazać, że między różniczkami trzech boków a, b, c i kąta γ dowolnego trójkąta płaskiego zachodzi związek: $dc=\cos\beta\, da+\cos\alpha\, db+a\sin\beta\, d\gamma$ i objaśnić go geometrycznie.

2) Wykazać, że między różniczkami trzech boków a, b, c i kąta C dowolnego trójkąta sferycznego zachodzi związek: $dc=\cos B\, da+\cos A\, db+\sin a\sin B\, dC$ i objaśnić go geometrycznie.

3) Wykazać, że między różniczkami dwu boków a, b i dwu kątów przeciwległych α, β dowolnego trójkąta płaskiego zachodzi związek:

$$\frac{da}{a}+\frac{d\beta}{\operatorname{tang}\beta}=\frac{db}{b}+\frac{d\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}.$$

4) Wykazać, że między różniczkami dwu boków a, b i dwu kątów A, B, dowolnego trójkąta sferycznego zachodzi związek:

$$\frac{da}{\operatorname{tang}a}+\frac{dB}{\operatorname{tang}B}=\frac{db}{\operatorname{tang}b}+\frac{dA}{\operatorname{tang}A}.$$

Dane są trzy wielkości, wyznaczające trójkąt płaski o bokach a, b, c i kątach α, β, γ: obrachować trzy pozostałe i wyznaczyć wpływ, jaki nieskończenie mała zmiana jednej, dwu, lub wszystkich trzech wielkości danych, wywiera na wielkości obrachowane. W szczególności, rozwiązać dotyczące zagadnienia w przypadkach, gdy dane są:

5) a, α, β, 6) a, b, γ, 7) a, b, α, 8) a, b, c.

Analogiczne zagadnienia rozwiązać dla trójkąta sferycznego o bokach a, b, c i kątach A, B, C w przypadkach, gdy dane są:

9) a, b, c, 10) a, b, C, 11) a, b, A, 12) A, B, c,
13) A, B, a, 14) A, B, C.

Z danych trzech wielkości, odpowiadających różnym przypadkom rozwiązania Δ trój- płaskiego, obrachować różniczkę zupełną $d\Delta$ powierzchni trójkąta w poszczególnych przypadkach, tudzież wyznaczyć pochodne cząstkowe:

15) $\frac{\partial\Delta}{\partial a}, \frac{\partial\Delta}{\partial\alpha}, \frac{\partial\Delta}{\partial\beta}$, 16) $\frac{\partial\Delta}{\partial a}, \frac{\partial\Delta}{\partial b}, \frac{\partial\Delta}{\partial\gamma}$,

17) $\frac{\partial\Delta}{\partial a}, \frac{\partial\Delta}{\partial b}, \frac{\partial\Delta}{\partial\alpha}$, 18) $\frac{\partial\Delta}{\partial a}, \frac{\partial\Delta}{\partial b}, \frac{\partial\Delta}{\partial c}$.

Wyznaczyć zupełne różniczki pierwszego rzędu i pochodne cząstkowe następujących funkcyj:

19) $u=\frac{xy}{a-z}$, 20) $u=\frac{ax-by}{z}$, 21) $u=(x+y)^2(y+z)$,

22) $u=xy+yz+xz$, 23) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}+\text{arc tang}\frac{x}{z}+\frac{z^2}{2}$,

24) $u=\sin(x+y)\sin z+\cos(x+y)\cos z$, 25) $u=\sin ax+\sin by+\text{arc tang}\frac{y}{z}$.

Wyznaczyć obok podane różniczki zupełne wyższych rzędów dla funkcyj:

26) $u=axy-y^2$, $d^2u=(ax-2y)d^2y-2dy^2+2a\,dy\,dx+ay\,dx$,

27) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $d^2u=\frac{(x\,dy-y\,dx)^2+(z\,dx-x\,dz)^2+(y\,dz-z\,dy)^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$,

28) $u=e^{ax+by+cz}$, $d^nu=e^{ax+by+cz}(adx+bdy+cdz)^n$,

29) $u=\log(ax+by+cz)$, $d^nu=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(ax+by+cz)^n}(adx+bdy+cdz)^n$,

30) $u=\log(y^x.z^y.x^z)$,

$$d^3u=2\left(\frac{z}{x^3}dx^3+\frac{x}{y^3}dy^3+\frac{y}{z^3}dz^3\right)-3\left(\frac{1}{x^2}dz\,dx^2+\frac{1}{y^2}dx\,dy^2+\frac{1}{z^2}dy\,dz^2\right).$$

31) Jeżeli $u=x^3z^4+e^xy^2z^3+x^2y^3z^2$, wykazać, że: $\frac{\partial^4u}{\partial x^2\,\partial y\,\partial z}=6e^xyz^2+8yz$.

32) Jeżeli $u=\log(x^3+y^3+z^3-3xyz)$, wykazać, że:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{3}{x+y+z},\quad \frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=-\frac{3}{(x+y+z)^2}.$$

33) Jeżeli $z=Ax^\alpha y^{\alpha'}+Bx^\beta y^{\beta'}+\ldots$, gdzie $\alpha+\alpha'=\beta+\beta'=\ldots=n$, a więc z jest funkcyą jednorodną ze względu na zmienne x i y, wykazać, że:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=nz,\quad x^2\frac{\partial^2z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2z}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=n(n-1)z.$$

Sprawdzić wzory, w ćw. 33. podane, dla następujących funkcyj:

34) $z=\frac{xy}{x+y}$, 35) $z=\frac{y^4+x^4}{y-x}$,

36) $z=\sqrt[3]{x^2+y^2}$; 37) $z=\text{arc sin}\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$.

38) **Wykazać, że funkcya jednorodna n-go stopnia, kształtu:**

$$z=x^n\varphi\left(\frac{y}{z}\right)+y^n\psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

prowadzi, przy jakichkolwiek funkcyach φ i ψ, do równania różniczkowego, cząstkowego:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=nz.$$

Wyprowadzić obok podane równania różniczkowe, cząstkowe następujących funkcyj:

39) $z=\frac{1}{\varphi(x+ay)}$; $\frac{\partial z}{\partial y}-a\frac{\partial z}{\partial x}=0$;

40) $z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+\psi\left(\frac{y}{z}\right)$; $x^2\frac{\partial^2z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2z}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=0$.

41) $z = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

42) $z = x\varphi(xy) + y\psi(xy)$; $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

43) $u = \varphi_1(x^2-y^2).\varphi_2(y^2-z^2).\varphi_3(z^2-x^2)$; $yz\frac{\partial u}{\partial x} + zx\frac{\partial u}{\partial y} + xy\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$

Wykazać, że:

44) $\int\int\frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = \text{arc tang}\frac{xy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + \varphi_1(x) + \varphi_2(y).$

45) $\int\int\int\frac{xz}{(a^2-z^2)^2}\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{4}\frac{x^2y}{a^2-z^2} + \varphi_1(y,z) + \varphi_2(x,z) + \varphi_3(x,y)$

46) $\int\int\int(1+3xyz+x^2y^2z^2)e^{xyz}\,dx.dy\,dz = e^{xyz} + \varphi_1(y,z) + \varphi_2(x,z) + \varphi_3(x,y),$

47) $\int\int\int\int\frac{x_1x_2x_3x_4}{(x_3^2+x_4^2)^2}\,dx_1dx_2dx_3dx_4 = \frac{1}{32}\frac{x_1^2x_2^2}{x_3^2+x_4^2} + \varphi_1(x_2,x_3,x_4) + \varphi_2(x_1,x_3,x_4) +$
$+ \varphi_3(x_1,x_2,x_4) + \varphi_4(x_1,x_2,x_3).$

Wykazać, że niżej podane różniczki są różniczkami zupełnemi i wyznaczyć ich całki ogólne.

48) $du = \frac{y\,dx}{a-z} + \frac{x\,dy}{a-z} + \frac{xy\,dz}{(a-z)^2}.$

49) $du = \frac{a}{z}dx - \frac{b}{z}dy + \frac{by-ax}{z^2}dz.$

50) $du = 2(x+y)(y+z)\,dx + (x+y)(x+3y+2z)\,dy + (x+y)^2\,dz.$

51) $du = (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz.$

52) $du = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} + \frac{z\,dx - x\,dz}{x^2+z^2} + z\,dz.$

53) $du = \sin(x+y-z)\,[dz - dx - dy].$

54) $du = a\cos ax.dx + \left[b\cos by + \frac{z}{y^2+z^2}\right]dy - \frac{y}{y^2+z^2}dz.$

Rozwiązania XX. 1) Wypływa z wzoru: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, z uwzględnieniem znanych relacyj z trygonometryi płaskiej. 2) z wzoru: $\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos C$, z uwzględnieniem znanych relacyj z trygonometryi sferycznej. 3) Wynika z wzoru: $a\sin\beta = b\sin\alpha$. 4) Wynika z wzoru: $\sin a\sin B = \sin b\sin A$. 5)—8) Cztery przypadki rozwiązania trójkątów płaskich. 9—14) Sześć przypadków rozwiązania trójkątów sferycznych Patrz T. I. str. 13. 15)—18) Patrz T. I. str. 23. 19)—30) Na dwa sposoby. Patrz art. 7. str. 322. 31)—38) Funkcye jednorodne, Patrz art. 9., 10. 39)—43) Za pomocą różniczkowania cząstkowego i rugowania funkcyj dowolnych. 48—54) Patrz Ćw. 19—25.

Literatura. J. Bertrand Traité de calcul differentiel et de calcul intégral. Paris 1864, Edouard Goursat. Cours d'analyse mathématique Tom I. Paris 1902. Adolf Sągajło. Wykład zupełny algebry. Część druga: Algebra wyższa. Paryż 1874.

Tematy do rozprawek naukowych.

1. Teorya zupełnych różniczek funkcyj ilukolwiek zmiennych, niezależnych i metody ich całkowania.
2. Teorya funkcyj jednorodnych ilukolwiek zmiennych.
3. Całki wielokrotne funkcyj ilukolwiek zmiennych.

Wykład XXI.

Rozwijanie funkcyj ilukolwiek zmiennych na szeregi i odnośne zastosowania.

1. Wzór Taylora dla funkcyj ilukolwiek zmiennych, niezależnych. Wzór Taylora da się, podobnie, jak dla funkcyj dwu zmiennych, niezależnych rozszerzyć do ilukolwiek zmiennych, niezależnych.

Niech będzie daną funkcya: $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, n zmiennych, niezależnych: $x_1, x_2, ..., x_n$. Przyjmijmy pewne miejsce $(x_1, x_2, ..., x_n)$, w którem funkcya ma wartość: $z=f(x_1, x_2, ..., x_n)$, a w jego otoczeniu drugie miejsce $(x_1+h_1t, x_2+h_2t, ..., x_n+h_nt)$, uważając t, jako jedyną zmienną, niezależną, natenczas możemy odpowiednią wartość funkcyi w tem miejscu sąsiedniem uważać, jako funkcyę wyłącznie jednej zmiennej niezależnej t, pisząc:

$$f(x_1+h_1t, x_2+h_2t, ..., x_n+h_nt)=\varphi(t).$$

Na podstawie wzoru Maclaurina, mamy:

$$\varphi(t)=\varphi(0)+t\varphi'(0)+\frac{t^2}{2!}\varphi''(0)+...+\frac{t^n}{n!}\varphi^{(n)}(0)+R_n, \tag{1}$$

gdzie, między innemi: $R_n=\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\theta t)$, przyczem $0<\theta<1$.

Celem obliczenia wartości: $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$, ..., $\varphi^{(n)}(0)$, ..., otrzymujemy z określenia: $\varphi(t)=f(x_1+h_1t, x_2+h_2t, ..., x_n+h_nt)$, kładąc:

$$u_1=x_1+h_1t,\ u_2=x_2+h_2t,\ ...,\ u_n=x_n+h_nt, \text{ a więc:}$$
$$\varphi(t)=f(u_1, u_2, ..., u_n);$$

najpierw pierwszą pochodną funkcyi $\varphi(t)$, w postaci:

$$\varphi'(t)=h_1\frac{\partial f}{\partial u_1}+h_2\frac{\partial f}{\partial u_2}+...+h_n\frac{\partial f}{\partial u_n},$$

drugą pochodną, w postaci:

$$\varphi''(t)=h_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2}+h_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2}+...+h_n^2\frac{\partial^2 f}{\partial u_n^2}+2h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial u_1\partial u_2}+$$
$$+2h_1h_3\frac{\partial^2 f}{\partial u_1\partial u_3}+...+2h_{n-1}h_n\frac{\partial^2 f}{\partial u_{n-1}\partial u_n},$$

czyli, w postaci symbolicznej:

$$\varphi''(t)=\left(h_1\frac{\partial}{\partial u_1}+h_2\frac{\partial}{\partial u_2}+...+h_n\frac{\partial}{\partial u_n}\right)^{(2)}f,$$

ogólnie, n tą pochodną w postaci symbolicznej:

$$\varphi^{(n)}(t)=\left(h_1\frac{\partial}{\partial u_1}+h_2\frac{\partial}{\partial u_2}+...+h_n\frac{\partial}{\partial u_n}\right)^{(n)}f,$$

skąd otrzymujemy wartości funkcyi $\varphi(t)$ i jej pochodnych w miejscu $t=0$ w postaci:

$$\varphi(0)=f(x_1, x_2, ..., x_n), \quad \varphi'(0)=h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+...+h_n\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

ogólnie:

$$\varphi^{(n)}(0)=\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+...+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{(n)}f.$$

Wstawiwszy te wartości we wzór (1) i kładąc $t=1$, otrzymujemy wzór:

$$f(x_1+h_1, x_2+h_2, ..., x_n+h_n)=f(x_1, x_2, ..., x_n)+\left[h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+...h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right]f+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+...+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^{(2)}f+...+\frac{1}{n!}\left[h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+...+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^{(n)}f+R_n, \tag{2}$$

który jest właśnie wzorem Taylora dla funkcyj ilukolwiek zmiennych, niezależnych.

2. Wzór ten przedstawia wartość funkcyi n-zmiennych, niezależnych w pewnem miejscu: x_1+h_1, x_2+h_2, ..., x_n+h_n, gdy znaną jest wartość tej funkcyi w pewnem miejscu: x_1, x_2, ..., x_n, i wartość wszystkich jej pochodnych cząstkowych w tem miejscu, aż do n-go rzędu włącznie, przyczem reszta:

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+...+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{(n)}f(x_1+\Theta h_1, x_2+\Theta h_2...x_n+\Theta h_n),$$

gdzie $0<\Theta<1$, zależna od wartości pochodnych cząstkowych $(n+1)$-go rzędu w pewnem miejscu pośredniem: $x_1+\Theta h_1$, $x_2+\Theta h_2$, ..., $x_n+\Theta h_n$, może, w przypadku, gdy te wartości są skończone, stać się ze wzrostem n mniejszą od wszelkiej liczby, dowolnie małej.

Kładąc: $f(x_1+h_1, x_2+h_2, ..., x_n+h_n)=Z$, zaś: $f(x_1, x_2, ..., x_n)=z$, i uwzględniając nieskończenie małe przyrosty: h_1, h_2, ..., h_n, możemy położyć:

$$\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+...+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)f(x_1, x_2, ..., x_n)=dz,$$

$$\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+...+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{(n)}f(x_1, x_2, ..., x_n)=d^n z,$$

a sprowadzimy tym sposobem wzór (2) do postaci:

$$Z=z+\frac{dz}{1}+\frac{d^2z}{2!}+\frac{d^3z}{3!}+...+\frac{d^nz}{n!}+R_n. \tag{3}$$

Kładąc: $Z-z=\Delta z$, otrzymamy stąd wzór:

$$\Delta z=dz+\frac{d^2z}{2!}+\frac{d^3z}{3!}+...+\frac{d^nz}{n!}+R_n, \tag{4}$$

wykazujący zależność przyrostu Δz funkcyi z ilukolwiek zmiennych, niezależnych od jej różniczek zupełnych.

3. Szeregi Taylora i Maclaurina dla funkcyj ilukolwiek zmiennych, niezależnych. Zastępując we wzorze (2) wartości: x_1+h_1, x_2+h_2, ..., x_n+h_n, przez $x_1, x_2, ..., x_n$, przytem $x_1, x_2, ..., x_n$ przez $a_1, a_2, ..., a_n$, a zatem $h_1, h_2, ..., h_n$ przez x_1-a_1, x_2-a_2, ..., x_n-a_n, dalej, oznaczając wartości pochodnych cząstkowych funkcyi: $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ w miejscu: a_1, a_2, ..., a_n, dla krótkości, przez:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_a, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_a, \quad ..., \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_a, \quad ...,$$

i przyjmując za $\lim\limits_{n=\infty} R_n=0$, otrzymujemy szereg Taylora dla funkcyj ilukolwiek zmiennych, w postaci:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(a_1, a_2, \dots, a_n) + (x_1 - a_1)\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_a + (x_2 - a_2)\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_a + \dots +$$
$$+ (x_n - a_n)\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_a + \frac{1}{2!}\left\{(x_1 - a_1)^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right)_a + \dots + (x_n - a_n)^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\right)_a +\right.$$
$$\left. + 2(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)_a + \dots + 2(x_{n-1} - a_{n-1})(x_n - a_n)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1}\partial x_n}\right)_a\right\} + \dots \quad (5)$$

a więc, w postaci szeregu, uporządkowanego według potęg różnic: $x_1 - a_1$, $x_2 - a_2$, ..., $x_n - a_n$, kształtu:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = A_0 + A_1(x_1 - a_1) + A_2(x_2 - a_2) + \dots + A_n(x_n - a_n) +$$
$$+ A_{11}(x_1 - a_1)^2 + A_{22}(x_2 - a_2)^2 + \dots + A_{nn}(x_n - a_n)^2 + 2A_{12}(x_1 - a_1)(x_2 - a_2) + \dots +$$
$$+ \dots + 2A_{n-1,n}(x_{n-1} - a_{n-1})(x_n - a_n) + \dots,$$

gdzie spółczynniki A, przedstawiają kolejne wartości funkcyi i jej pochodnych cząstkowych w przyjętem miejscu: $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Kładąc we wzorze (5): $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, otrzymujemy szereg Maclaurina w postaci:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(0, 0, \dots, 0) + x_1\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0 + x_2\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0 + \dots + x_n\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0 +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left\{x_1^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right)_0 + x_2^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right)_0 + \dots + x_n^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\right)_0 + 2x_1x_2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\right)_0 + \dots + \right. \quad (6)$$
$$\left. + \dots + 2x_{n-1}x_n\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1}\partial x_n}\right)_0\right\} + \dots$$

t. j. w postaci szeregu, uporządkowanego według potęg zmiennych, niezależnych $x_1, x_2, \dots, x_n$, kształtu:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 +$$
$$+ 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n + \dots,$$

gdzie spółczynniki a przedstawiają wartości funkcyi i jej pochodnych cząstkowych w miejscu: $(0, 0, \dots, 0)$.

4. Przykłady. 1) Funkcyę: $u = x^2 - y^2 + z^2$, rozwinąć, według potęg: $(x-1)$, $(y-2)$, $(z-3)$. Mamy tu:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} = 0,$$

a w miejscu: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, dostajemy:

$$(u) = 1 - 4 + 9 = 6, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -4, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 6, \quad \dots,$$

a zatem, na podstawie szeregu Taylora, otrzymujemy rozwinięcie:

$$u = 6 + 2(x-1) - 4(y-2) + 6(z-3) + \frac{1}{2!}[2(x-1)^2 - 2(y-2)^2 + 2(z-3)^2],$$

czyli:

$$u = 6 + 2(x-1) - 4(y-2) + 6(z-3) + (x-1)^2 - (y-2)^2 + (z-3)^2,$$

które nazywamy rozwinięciem danej funkcyi: $u = x^2 - y^2 + z^2$, w otoczeniu miejsca: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

2) Funkcyę: $f(x, y, z) = e^x \sin y + e^y \cos z$, rozwinąć na szereg potęgowy. Mamy tu:

$$f(x, y, z) = e^x \sin y + e^y \cos z, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^x \cos y + e^y \cos z, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -e^y \sin z,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=e^x \sin y,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-e^x \sin y+e^y \cos z,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=-e^y \cos z,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=e^x \cos y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}=-e^y \sin z,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=e^x \sin y,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=-e^x \cos y+e^y \cos z,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial z^3}=e^y \sin z,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}=e^x \cos y,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}=-e^x \sin y,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z}=0,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2}=0,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial z}=-e^y \sin z,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z^2}=-e^y \cos z,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}=0,\quad \text{i t. d., a stąd:}$$

$$f_0=1,\quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0=0,\quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0=1,\quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0=0,\quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0=0,\quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0=1,\quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_0=-1,$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0=1,\quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right)_0=0,\quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right)_0=0,\quad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0=0,\quad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_0=0,\quad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}\right)_0=0,\quad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_0=1,$$

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\right)_0=0,\quad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z}\right)_0=0,\quad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2}\right)_0=0,\quad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial z}\right)_0=0,\quad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z^2}\right)_0=-1,\quad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}\right)_0=0,\ \text{i t. d.}$$

Na podstawie wzoru Maclaurina, otrzymujemy zatem rozwinięcie:

$$e^x \sin y+e^y \cos z=1+2y+\frac{y^2}{2!}-\frac{z^2}{2!}+\frac{xy}{1!1!}+\frac{x^2y}{1!2!}-\frac{y^2z^2}{1!2!}+\frac{y^4}{4!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{x^3y}{1!3!}$$
$$-\frac{xy^3}{1!3!}-\frac{y^2z^2}{2!2!}-\frac{2y^5}{5!}+\ldots,$$

które nazywamy rozwinięciem danej funkcyi: $e^x \sin y+e^y \cos z$, w otoczeniu miejsca:
$x=0,\ y=0,\ z=0.$

5. Maxima i minima funkcyj ilukolwiek zmiennych, niezależnych. Funkcya $z=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ posiada w pewnem przyjętem miejscu: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ maximum, względnie minimum, jeżeli w otoczeniu miejsca przyjętego, więc w miejscach sąsiednich: $x_1+h_1,\ x_2+h_2,\ \ldots,\ x_n+h_n$, przy dostatecznie małych przyrostach: $h_1, h_2, \ldots, h_n$, wartości tej funkcyi, w postaci:

$$f(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots, x_n+h_n),$$

są stale mniejsze, względnie, stale większe od wartości: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, w przyjętem miejscu: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, bez względu na znaki przyrostów: $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$. Musi być, zatem:

$$f(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots, x_n+h_n)<f(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \text{przy maximum},$$
$$f(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots, x_n+h_n)>f(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \text{przy minimum},$$

czyli, różnica:

$f(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots, x_n+h_n)-f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, musi być stałego znaku, a to, stale ujemną przy maximum, a stale dodatnią przy minimum.

Według wzoru Taylor'a, otrzymujemy tu różnicę, dla nieskończenie małych przyrostów: $h_1, h_2, \ldots, h_n$, w postaci:

$$f(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots, x_n+h_n)-f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\ldots+h_n\frac{\partial f}{\partial x_n}\quad .(7)$$

a więc, w postaci formy liniowej, ze względu na przyrosty: $h_1, h_2, \ldots, h_n$, kształtu: $u_n{}^1=\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}h_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}h_n$. Znak ten będzie więc tylko wówczas niezależny od znaków, jakie otrzymują przyrosty: $h_1, h_2, \ldots, h_n$, skoro się spełnią warunki:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=0,\quad \ldots,\quad \frac{\partial f}{\partial x_n}=0. \qquad (8)$$

Chcąc zatem wyznaczyć te układy wartości na $x_1, x_2, \ldots, x_n$, które mogą wywołać maxima, albo minima funkcyi: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, musimy, przedewszyst-

ciem rozwiązać układ n równań, o n niewiadomych, kształtu:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=f_1=0,\ \frac{\partial f}{\partial x_2}=f_2=0,\ \ldots,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}=f_n=0.$$

Dla tak wyznaczonych wartości, przedstawia się szukana różnica, dla nieskończenie małych przyrostów: $h_1, h_2, \ldots, h_n$, w postaci:

$$f(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots, x_n+h_n)-f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{h_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+h_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}+\ldots+h_n^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}+2h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}+\ldots+2h_{n-1}h_n\frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1}\partial x_n}\right\} \quad (9)$$

jest więc nieskończenie małą, drugiego rzędu, a znak jej będzie taki sam, jak znak formy kwadratowej:

$$u_n^2=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}h_1^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}h_2^2+\ldots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}h_n^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}h_1h_2+\ldots+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1}\partial x_n}h_{n-1}h_n. \quad (10)$$

Należałoby więc, przedewszystkiem, zbadać, czy i pod jakimi warunkami, powyższa forma kwadratowa, może być stale dodatnią, względnie, stale ujemną, niezależnie od przyrostów: $h_1, h_2, \ldots, h_n$.

W tym celu, przedstawmy ją, dla skrócenia, w postaci:

$$u_n^2=f_{11}h_1^2+f_{22}h_2^2+\ldots+f_{nn}h_n^2+2f_{12}h_1h_2+\ldots+2f_{n-1\,n}h_{n-1}h_n, \quad (11)$$

rozumiejąc przez f_{ix}, wartości drugich pochodnych cząstkowych danej funkcyi, w rozważanem miejscu: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, spełniającem warunki:

$$f_1=0,\ f_2=0,\ \ldots,\ f_n=0.$$

Zgodnie z wzorem Eulera, możemy tą formę przedstawić w postaci:

$$u_n^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial h_1}h_1+\frac{\partial u}{\partial h_2}h_2+\ldots+\frac{\partial u}{\partial h_n}h_n\right)^{(2)},\ \text{a więc:}$$

$$\begin{aligned} u_n^2=&(f_{11}h_1+f_{12}h_2+\ldots+f_{1n}h_n)h_1+\\ &+(f_{21}h_1+f_{22}h_2+\ldots+f_{2n}h_n)h_2+\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\\ &+(f_{n1}h_1+f_{n2}h_2+\ldots+f_{nn}h_n)h_n, \end{aligned} \quad (12)$$

czyli:

$$u_n^2=\sum_{i=1}^{i=n}(f_{i1}h_1+f_{i2}h_2+\ldots+f_{in}h_n)h_i,$$

z której wynika, że dana forma może, dla wartości: $h_1, h_2, \ldots, h_n$, różnych od zera, stać się równą zeru, skoro się spełni równocześnie następujący układ równań:

$$\begin{aligned} f_{11}h_1+f_{12}h_2+\ldots+f_{1n}h_n&=0\\ f_{21}h_1+f_{22}h_2+\ldots+f_{2n}h_n&=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\\ f_{n1}h_1+f_{n2}h_2+\ldots+f_{nn}h_n&=0, \end{aligned} \quad (13)$$

a więc, układ równań liniowych i jednorodnych, ze względu na niewiadome: $h_1, h_2, \ldots, h_n$, co staje się jednak niemożebnem, skoro wyznacznik D_n, tego układu równań:

$$D_n=\begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12}, & \ldots, & f_{1n}\\ f_{21}, & f_{22}, & \ldots, & f_{2n}\\ \ldots & & & \\ f_{n1}, & f_{n2}, & \ldots, & f_{nn} \end{vmatrix}, \quad (14)$$

jest różnym od zera.

Wyznacznik ten jest, z powodu, że $f_{ix}=f_{xi}$, wyznacznikiem symetrycznym, a nazywamy go **wyróżnikiem formy kwadratowej** u_n^2, przed-

stawionej w postaci (11), a taką formę kwadratową, której wyróżnik jest różny od zera, nazywamy formą kwadratową, właściwą.

Przypuśćmy więc, że wyróżnik: $D_n = |f_{i\varkappa}|$, $i, \varkappa = 1, 2, \ldots, n$, danej formy kwadratowej: $u_n^2 = \Sigma f_{i\varkappa} h_i h_\varkappa$, jest różny od zera, i oznaczmy przez $\varphi_{i\varkappa}$ minory elementów $f_{i\varkappa}$ w wyznaczniku $|f_{i\varkappa}|$, natenczas, otrzymujemy znane relacye:

$$f_{i1}\varphi_{\varkappa 1} + f_{i2}\varphi_{\varkappa 2} + \ldots + f_{in}\varphi_{\varkappa n} = \begin{matrix} D_n, \text{ gdy } i = \varkappa, \\ 0, \text{ gdy } i \gtrless \varkappa. \end{matrix}$$

Połóżmy:

$$h_1 - \frac{\varphi_{n1}}{\varphi_{nn}} h_n = h'_1, \quad h_2 - \frac{\varphi_{n2}}{\varphi_{nn}} h_n = h'_2, \; \ldots, \; h_{n-1} - \frac{\varphi_{n\,n-1}}{\varphi_{nn}} h_n = h'_{n-1}, \tag{15}$$

czyli:

$$h_1 = h'_1 + \frac{\varphi_{n1}}{\varphi_{nn}} h_n, \quad h_2 = h'_2 + \frac{\varphi_{n2}}{\varphi_{nn}} h_n, \; \ldots, \; h_{n-1} = h'_{n-1} + \frac{\varphi_{n,n-1}}{\varphi_{nn}} h_n,$$

natenczas, spółczynnik przy h_i, we wzorze (12), przedstawi się w postaci:

$$f_{i1}h_1 + f_{i2}h_2 + \ldots + f_{in}h_n = f_{i1}h'_1 + f_{i2}h'_2 + \ldots + f_{i\,n-1}h'_{n-1} +$$
$$+ \frac{h_n}{\varphi_{nn}} \{f_{i1}\varphi_{n1} + f_{i2}\varphi_{n2} + \ldots + f_{in}\varphi_{nn}\},$$

a więc, ze względu na to, że: $f_{i1}\varphi_{n1} + f_{i2}\varphi_{n2} + \ldots + f_{in}\varphi_{nn} = 0$, gdy $i < n$, w postaci:

$$f_{i1}h_1 + f_{i2}h_2 + \ldots + f_{in}h_n = f_{i1}h'_1 + f_{i2}h'_2 + \ldots + f_{i\,n-1}h'_{n-1}, \tag{16}$$

natomiast spółczynnik, przy h_n, otrzymuje kształt:

$$f_{n1}h_1 + f_{n2}h_2 + \ldots + f_{nn}h_n = f_{n1}h'_1 + f_{n2}h'_2 + \ldots + f_{n,n-1}h'_{n-1} +$$
$$+ \frac{h_n}{\varphi_{nn}} (f_{n1}\varphi_{n1} + f_{n2}\varphi_{n2} + \ldots + f_{nn}\varphi_{nn}),$$

a więc, ze względu na to, że: $f_{n1}\varphi_{n1} + f_{n2}\varphi_{n2} + \ldots + f_{nn}\varphi_{nn} = D_n$, a $\varphi_{nn} = D_{n-1} = |f_{i\varkappa}|$ $(i, \varkappa = 1, 2, \ldots, n-1)$, przedstawi się w postaci:

$$f_{n1}h_1 + f_{n2}h_2 + \ldots + f_{nn}h_n = f_{n1}h'_1 + f_{n2}h'_2 + \ldots + f_{n,n-1}h'_{n-1} + \frac{D_n h_n}{D_{n-1}}. \tag{17}$$

Dana forma kwadratowa u_n^2 sprowadza się, więc, wskutek podstawienia (15), do następującej postaci:

$$u_n^2 = (f_{11}h'_1 + f_{12}h'_2 + \ldots + f_{1,n-1}h'_{n-1})h_1 + (f_{21}h'_1 + f_{22}h'_2 + \ldots + f_{2,n-1}h'_{n-1})h_2 +$$
$$+ \ldots + (f_{n1}h'_1 + f_{n2}h'_2 + \ldots + f_{n,n-1}h'_{n-1})h_{n-1} + \frac{D_n h_n^2}{D_{n-1}},$$

którą, ze względu na to, że $f_{i\varkappa} = f_{\varkappa i}$, możemy także napisać w postaci:

$$u_n^2 = (f_{11}h_1 + f_{12}h_2 + \ldots + f_{1n}h_n)h'_1 + (f_{21}h_1 + f_{22}h_2 + \ldots + f_{2n}h_n)h'_2 +$$
$$+ \ldots + (f_{n-1,1}h_1 + f_{n-1,2}h_2 + \ldots + f_{n-1,n}h_n)h'_{n-1} + \frac{D_n h_n^2}{D_{n-1}},$$

a więc, ze względu na wzory (16) i (17), w postaci:

$$u_n^2 = (f_{11}h'_1 + f_{12}h'_2 + \ldots + f_{1,n-1}h'_{n-1})h'_1 + (f_{21}h'_1 + f_{22}h'_2 + \ldots + f_{2,n-1}h'_{n-1})h'_2 +$$
$$+ \ldots + (f_{n-1,1}h'_1 + f_{n-1,2}h'_2 + \ldots + f_{n-1,n-1}h'_{n-1})h'_{n-1} + \frac{D_n h_n^2}{D_{n-1}},$$

czyli: $u_n^2 = u_{n-1}^2 + \frac{D_n h_n^2}{D_{n-1}}$, gdzie u_{n-1}^2 jest formą kwadratową, $(n-1)$ zmiennych: $h'_1, h'_2, \ldots, h'_{n-1}$, kształtu: $\sum\limits_{i,\varkappa} f_{i\varkappa}h'_i h'_\varkappa$, $(i, \varkappa = 1, 2, \ldots, n-1)$, która powstaje z formy u_n^2, gdy w niej położymy: $h_n = 0$, a zmienne: $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$, zastąpimy przez: $h'_1, h'_2, \ldots, h'_{n-1}$.

Przekształcając, analogicznie, formę: u_{n-1}^2, której wyznacznikiem jest wyznacznik: $D_{n-1} = |f_{ix}|$, $i, x = 1, 2, \ldots, n-1$, otrzymujemy:

$$u_{n-1}^2 = u_{n-2}^2 + \frac{D_{n-1}}{D_{n-2}}(h'_{n-1})^2,$$

gdzie u_{n-2}^2, będzie formą kwadratową $(n-2)$ zmiennych: $h''_1, h''_2, \ldots, h''_{n-2}$, kształtu:

$$u^2_{n-2} = \sum_{i,x}^{n-2} f_{ix} h_i'' h_x''.$$

Postępując tak dalej, otrzymamy: $u^2_{n-2} = u^2_{n-3} + \frac{D_{n-2}}{D_{n-3}}(h''_{n-2})^2$, i t. d., w końcu: $u_2^2 = u_1^2 + \frac{D_2}{D_1}(h_2^{(n-2)})^2$, gdzie: $u_1^2 = D_1(h_1^{(n-1)})^2 = f_{11}(h_1^{(n-1)})^2$.

Dana forma kwadratowa, n zmiennych: $h_1, h_2, \ldots, h_n$, sprowadza się, tym sposobem, do postaci:

$$u_n^2 = D_1[h_1^{(n-1)}]^2 + \frac{D_2}{D_1}[h_2^{(n-2)}]^2 + \ldots + \frac{D_{n-1}}{D_{n-2}}[h'_{n-1}]^2 + \frac{D_n}{D_{n-1}} h_n^2,$$

czyli:

$$u_n^2 = D_1 s_1^2 + \frac{D_2}{D_1} s_2^2 + \ldots + \frac{D_{n-1}}{D_{n-2}} s^2_{n-1} + \frac{D_n}{D_{n-1}} s_n^2, \qquad (18)$$

gdzie: $s_1 = h_1^{(n-1)}$, $s_2 = h_2^{(n-2)}$, ..., $s_{n-1} = h'_{n-1}$, $s_n = h_n$, przedstawiają pewne wartości, zależne od przyrostów zmiennych: $h_1, h_2, \ldots, h_n$.

Z powyższej postaci, zwanej postacią kanoniczną formy kwadratowej, możemy wprost poznać, czy, i pod jakimi warunkami, dana forma, może być stale dodatnią, względnie stale ujemną, niezależnie od przyrostów: $h_1, h_2, \ldots, h_n$, a tem samem, niezależnie od wartości: $s_1, s_2, \ldots, s_n$.

Przedewszystkiem, poznamy z (18), że forma u_n^2, będzie stale dodatnią, gdy będzie równocześnie: $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, ..., $D_{n-1} > 0$, $D_n > 0$. Są to warunki nietylko wystarczające, ale zarazem konieczne; w przeciwnym razie, moglibyśmy łatwo wywołać znak ujemny, nadając przyrostom h_i takie wartości, aby odpowiednie s_i, opatrzone dodatnimi znakami, były zerami. Forma (18) będzie natomiast stale ujemną, skoro: $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, $D_3 < 0, \ldots, (-1)^n D_n > 0$. I to są warunki nietylko wystarczające, ale zarazem konieczne, gdyż w przeciwnym razie moglibyśmy zawsze, sprowadzając pewne s_i do zera, wywołać znak dodatni formy. Dochodzimy zatem do następującego wniosku:

Funkcya: $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ staje się, w pewnem miejscu minimum, skoro w tem miejscu wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu: $f_1, f_2, \ldots, f_n$, są zerami, i skoro równocześnie wszystkie wyznaczniki D_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, utworzone z pochodnych cząstkowych drugiego rzędu, mają w tem miejscu wartości dodatnie, t. j. skoro:

$$f_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} f_{11}, f_{12} \\ f_{12}, f_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} f_{11}, f_{12}, f_{13} \\ f_{12}, f_{22}, f_{23} \\ f_{13}, f_{23}, f_{33} \end{vmatrix} > 0, \ \ldots, \ \begin{vmatrix} f_{11}, f_{12}, \ldots, f_{1n} \\ f_{12}, f_{22}, \ldots, f_{2n} \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ f_{1n}, f_{2n}, \ldots, f_{nn} \end{vmatrix} > 0,$$

staje się zaś maximum, skoro pierwsze pochodne cząstkowe są wszystkie zerami, a natomiast wyznaczniki D_i, utworzone z pochodnych cząstkowych drugiego rzędu, są, przy parzystym stopniu i, dodatnie, a przy nieparzystym stopniu i, ujemne, t. j. skoro:

$$f_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} f_{11}, f_{12} \\ f_{12}, f_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} f_{11}, f_{12}, f_{13} \\ f_{12}, f_{22}, f_{23} \\ f_{13}, f_{23}, f_{33} \end{vmatrix} < 0, \ \ldots, \ (-1)^n \begin{vmatrix} f_{11}, f_{12}, \ldots, f_{1n} \\ f_{12}, f_{22}, \ldots, f_{2n} \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ f_{1n}, f_{2n}, \ldots, f_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Jeżeli warunki powyższe nie spełniają się, a forma kwadratowa u_2 posiada wyróżnik $D_n = |f_{ik}|$, różny od zera, natenczas funkcya nie posiada w tem miejscu, na pewno, ani maximum, ani minimum. Gdy wyróżnik $D_n = |f_{ik}| = 0$, zachodzi przypadek wątpliwy, który wymaga badania formy sześciennej, n zmiennych przyrostów, kształtu:

$$u_n^3 = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} h_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} h_n\right)^{(3)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

ewentualnie form wyższego rzędu.

W ogólności, można zauważyć, że maxima i minima funkcyj wielu zmiennych, niezależnych, tem rzadziej występować usiłują, czem większa jest ilość zmiennych.

6. Mając na uwadze, że wartości zmiennych, niezależnych, sprowadzające pierwsze pochodne cząstkowe do zera, muszą, na wypadek maximum, lub minimum, przy dwu zmiennych, niezależnych, spełniać warunki:

$$f_{11} \gtrless 0, \quad f_{11} f_{22} - f_{12}^2 > 0,$$

przy trzech zmiennych, niezależnych, nadto warunek:

$$\begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12}, & f_{13} \\ f_{12}, & f_{22}, & f_{23} \\ f_{13}, & f_{23}, & f_{33} \end{vmatrix} \gtrless 0, \quad \text{i t. d.},$$

dochodzimy do spostrzeżenia, że przy maximach, lub minimach, funkcyj ilukolwiek zmiennych, wysuwa się, na czoło, warunek:

$$f_{11} f_{22} - f_{12}^2 > 0, \quad \text{czyli:} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} > 0,$$

zwany zwykle warunkiem Lagrange'a.

7. **Przykłady.** 1) Wyznaczyć maxima i minima funkcyi u, trzech zmiennych, niezależnych: x, y, z, kształtu:

$$u = \frac{xyz}{(a+x)(x+y)(y+z)(z+b)}.$$

Rozwiązanie. Zauważmy przedewszystkiem, że, skoroby funkcya miała w pewnem miejscu x, y, z, maximum, lub minimum, to miałaby je także, w tem miejscu, funkcya: $v = \log u$. Wobec tego szukajmy maxima, lub minima funkcyi:

$$v = \log u = \log x + \log y + \log z - \log(a+x) - \log(x+y) - \log(y+z) - \log(z+b).$$

W tym celu, otrzymamy pierwsze warunki konieczne:

$$v_1 = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{a+x} - \frac{1}{x+y} = 0,$$

$$v_2 = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{y} - \frac{1}{x+y} - \frac{1}{y+z} = 0,$$

$$v_3 = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{y+z} - \frac{1}{z+b} = 0,$$

z których wynikają równania:

$$(a+x)(x+y) - x(x+y) - x(a+x) = 0,$$

$$(x+y)(y+z) - y(y+z) - y(x+y) = 0,$$

$$(y+z)(z+b) - z(z+b) - z(y+z) = 0,$$

$$\text{czyli:} \quad ay - x^2 = 0, \quad xz - y^2 = 0, \quad by - z^2 = 0,$$

wyznaczające trzy niewiadome: x, y, z.

Na podstawie twierdzenia, o równych stosunkach, otrzymujemy stąd:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{b} = \sqrt[4]{\frac{axyz}{bxyz}} = \sqrt[4]{\frac{a}{b}} = \frac{1}{q}, \text{ zatem: } x = a\sqrt[4]{\frac{b}{a}}, \quad y = a\left(\sqrt[4]{\frac{b}{a}}\right)^2, \quad z = a\left(\sqrt[4]{\frac{b}{a}}\right)^3,$$

czyli: $x = aq$, $y = aq^2$, $z = aq^3$.

Dla tych wartości otrzymujemy:

$$v_{11}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(a+x)^2}+\frac{1}{(x+y)^2}=-\frac{2}{a^2q(1+q)^2},$$

$$v_{22}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-\frac{1}{y^2}+\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}=-\frac{2}{a^2q^3(1+q)^2},$$

$$v_{33}=\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+b)^2}=-\frac{2}{a^2q^5(1+q)^2},$$

$$v_{12}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=\frac{1}{(x+y)^2}=\frac{1}{a^2q^2(1+q)^2},\quad v_{13}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z}=0,\quad v_{23}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}=\frac{1}{(y+z)^2}=\frac{1}{a^2q^4(1+q)^2}.$$

zatem:

$$D_1=v_{11}=-\frac{2}{a^2q(1+q)^2},\quad D_2=\begin{vmatrix} v_{11}, & v_{12} \\ v_{12}, & v_{22}\end{vmatrix}=\frac{1}{a^4q^2(1+q)^4}\begin{vmatrix} -2, & \frac{1}{q} \\ \frac{1}{q}, & -\frac{2}{q^2}\end{vmatrix}=\frac{3}{a^4q^6(1+q)^4},$$

$$D_3=\begin{vmatrix} v_{11}, & v_{12}, & v_{13} \\ v_{12}, & v_{22}, & v_{23} \\ v_{13}, & v_{23}, & v_{33}\end{vmatrix}=\frac{1}{a^6q^3(1+q)^6}\begin{vmatrix} -2, & \frac{1}{q}, & 0 \\ \frac{1}{q}, & -\frac{2}{q^2}, & \frac{1}{q^3} \\ 0, & \frac{1}{q^3}, & -\frac{2}{q^4}\end{vmatrix}=-\frac{4}{a^6q^9(1+q)^6},$$

a więc: $D_1<0$, $D_2>0$, $D_3<0$, gdy $q>0$, zaś: $D_1>0$, $D_2>0$, $D_3>0$, gdy $q<0$.

Dana funkcya ma zatem, w miejscu: $x=a\sqrt[4]{\frac{b}{a}}$, $y=a\left(\sqrt[4]{\frac{b}{a}}\right)^2$, $z=a\left(\sqrt[4]{\frac{b}{a}}\right)^3$,

wartość największą: $u_{\max}=\frac{1}{(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})^4}$, a w miejscu:

$$x=-a\sqrt[4]{\frac{b}{a}},\quad y=a\left(\sqrt[4]{\frac{b}{a}}\right)^2,\quad z=-a\left(\sqrt[4]{\frac{b}{a}}\right)^3,$$

wartość najmniejszą: $u_{\min}=\frac{1}{(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})^4}$.

2) Znaleźć maxima i minima funkcyi n zmiennych, niezależnych, kształtu

$$u=\sum_{i=1}^{i=n}(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n-\alpha_i)^2.$$

Kładąc, dla skrócenia: $\varphi_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n-\alpha_i$, zatem:

$$u=\varphi_1^2+\varphi_2^2+\ldots+\varphi_n^2,$$

otrzymujemy, na wyznaczenie wartości: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, które mogą wywołać minimum funkcyi, równania warunkowe, w postaci:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_1}=a_{11}\varphi_1+a_{12}\varphi_2+\ldots+a_{1n}\varphi_n=0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_2}=a_{21}\varphi_1+a_{22}\varphi_2+\ldots+a_{2n}\varphi_n=0,$$

. . . .

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_n}=a_{n1}\varphi_1+a_{n2}\varphi_2+\ldots+a_{nn}\varphi_n=0.$$

Równania te są liniowe, ze względu na niewiadome: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, przedstawiając się w postaci: $c_{1i}x_1+c_{2i}x_2+\ldots+c_{ni}x_n=\alpha_1a_{1i}+\alpha_2a_{2i}+\ldots+\alpha_na_{ni}$, $(i=1,2,\ldots,n)$, gdzie $c_{i\varkappa}$ są elementami wyznacznika: $|c_{i\varkappa}|=|a_{i\varkappa}|^2$, wyznaczają więc, jednoznacznie, te niewiadome.

Otrzymujemy tu, dalej:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=a_{i1}^2+a_{i2}^2+\ldots+a_{in}^2,\quad \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_\varkappa}=a_{i1}a_{\varkappa 1}+a_{i2}a_{\varkappa 2}+\ldots+a_{in}a_{\varkappa n},\ \text{gdy } i\gtrless\varkappa,$$

jest, zatem: $D_1=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}>0$.

Wyznaczniki: $D_2, D_3, \ldots, D_r$, kształtu:

$$D_r = |u_{i\varkappa}| = \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial_\varkappa}\right|, \quad i, \varkappa = 1, 2, \ldots, r,$$

przedstawiają sumę kwadratów, wyznaczników: 2, 3, ..., r-go rzędu, powstałych z połączenia pierwszych r kolumn i takich samych r wierszy wyznacznika: $|a_{i\varkappa}|$, są zatem wszystkie dodatnie. Otrzymane wartości wywołują więc minimum danej funkcyi.

8. Maxima i minima funkcyj ilukolwiek zmiennych, poddanych pewnym warunkom dodatkowym. Niech będzie daną funkcya: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, której zmienne: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, poddane są m warunkom dodatkowym:

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$
$$\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

gdzie $m < n$. Na podstawie tych m równań warunkowych, dałoby się m zmiennych wyrazić przez pozostałe $(n-m)$ zmienne; dana funkcya przedstawia się, wobec tego, jako funkcya $(n-m)$ zmienych, niezależnych.

Mając wyznaczyć maxima i minima tej funkcyi, weźmy pod uwagę funkcyę następującą, podaną w postaci:

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda_1 . \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \\ + \lambda_2 . \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots + \lambda_m . \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned} \qquad (19)$$

w której spółczynniki: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ są, na razie, zupełnie dowolne, to poznamy z łatwością, że funkcya: $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, wobec warunków: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_m = 0$, może zastąpić daną funkcyę: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Wartości: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, które są w stanie wywołać maxima, lub minima funkcyi: $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, muszą, na podstawie szeregu Taylora:

$$F(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \frac{\partial F}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} h_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n} h_n + R_2,$$

czynić zadość następującym równaniom:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} &= \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \ldots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} &= \frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + \ldots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} = 0, \end{aligned} \qquad (20)$$

a nadto, z powodu, że to mają być miejsca funkcyi: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, muszą jeszcze sprawdzać m równań dodatkowych:

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \ \ldots, \ \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Mamy, zatem, w całości $(m+n)$ równań, które mogą posłużyć do wyznaczenia $(m+n)$ niewiadómych: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Tym sposobem, otrzymujemy wszystkie układy wartości n zmiennych: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, które mogą wywołać maxima, lub minima funkcyi: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, gdy jej n zmienne poddane są nadto m warunkom dodatkowym.

9. Przykłady. 1) Wyznaczyć maximum funkcyi: $f = xyz$, jeżeli zmienne: x, y, z, spełniać mają warunek dodatkowy: $\varphi = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - d^2 = 0$.

Utworzymy funkcyę: $F = f + \lambda\varphi = xyz + \lambda(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - d^2)$, której maxima i minima, pod założeniem: $\varphi = 0$, wyznaczyć mamy; otrzymujemy tu równania warunkowe:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yz + 2\lambda a^2 x = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = xz + 2\lambda b^2 y = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = xy + 2\lambda c^2 z = 0,$$

prowadzą do stosunków:

$$-2\lambda=\frac{yz}{a^2x}=\frac{xz}{b^2y}=\frac{xy}{c^2z}=\frac{3xyz}{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2}=\frac{3xyz}{d^2},$$

rych dostajemy: $x^2=\frac{d^2}{3a^2}$, $y^2=\frac{d^2}{3b^2}$, $z^2=\frac{d^2}{3c^2}$, a stąd:

$$x=\frac{d\sqrt{3}}{3a},\quad y=\frac{d\sqrt{3}}{3b},\quad z=\frac{d\sqrt{3}}{3c}.$$

tości, na x, y, z otrzymane, wywołują maximum funkcyi, co poznamy po drugich po-nych cząstkowych funkcyi: $F=f+\lambda\varphi$. Otrzymujemy tu:

$$F_{11}=\frac{\partial^2F}{\partial x^2}=2a^2\lambda,\quad F_{22}=\frac{\partial^2F}{\partial y^2}=2b^2\lambda,\quad F_{33}=\frac{\partial^2F}{\partial z^2}=2c^2\lambda,$$

$$F_{12}=\frac{\partial^2f}{\partial x\,\partial y}=z,\quad F_{13}=\frac{\partial^2F}{\partial x\,\partial z}=y,\quad F_{23}=\frac{\partial^2F}{\partial y\,\partial z}=x,$$

m, ze względu na to, że: $\lambda=-\frac{3xyz}{2d^2}=-\frac{d\sqrt{3}}{6abc}$, otrzymujemy:

$$D_1=F_{11}=2a^2\lambda=-\frac{ad\sqrt{3}}{bc}<0,\ \text{następnie: } D_2>0,\ D_3<0,\ \ldots$$

Otrzymane wartości wywołują zatem, w przypadku, gdy są dodatnie, maximum:

$$f_{\max}=\frac{d^3\sqrt{3}}{9abc}.$$

2) Wyznaczyć minimum funkcyi: $f=(x_1-\alpha_1)^2+(x_2-\alpha_2)^2+\ldots+(x_n-\alpha_n)^2$, której zmienne $x_1, \ldots, x_n$ spełniają warunek dodatkowy: $\varphi=a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n+a_0=0$.

W tym celu, utworzymy funkcyę:

$$F=f+\lambda\varphi=[(x_1-\alpha_1)^2+\ldots+(x_n-\alpha_n)^2]+\lambda[a_1x_1+\ldots+a_nx_n+a_0],$$

a wyznaczenie niewiadomych: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, które, przy warunku $\varphi=0$, mogą wywołać xima, lub minima tej funkcyi, otrzymujemy równania:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=2(x_1-\alpha_1)+a_1\lambda=0,\quad \frac{\partial F}{\partial x_2}=2(x_2-\alpha_2)+a_2\lambda=0,\ \ldots,\ \frac{\partial F}{\partial x_n}=2(x_n-\alpha_n)+a_n\lambda=0,$$

wadzące do stosunków:

$$-\frac{\lambda}{2}=\frac{x_1-\alpha_1}{a_1}=\frac{x_2-\alpha_2}{a_2}=\ldots=\frac{x_n-\alpha_n}{a_n}=$$

$$=\frac{a_1(x_1-\alpha_1)+a_2(x_2-\alpha_2)+\ldots+a_n(x_n-\alpha_n)}{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}=-\frac{a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\ldots+a_n\alpha_n+a_0}{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2},$$

których otrzymujemy:

$$x_1-\alpha_1=-\frac{1}{2}a_1\lambda,\quad x_2-\alpha_2=-\frac{1}{2}a_2\lambda,\ \ldots,\ x_n-\alpha_n=-\frac{1}{2}a_n\lambda,$$

yczem:

$$\frac{1}{2}\lambda=\frac{a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\ldots+a_n\alpha_n+a_0}{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}.$$

Aby wykazać, że powyższe wartości wywołują minimum funkcyi, wyznaczamy, pod runkiem $\varphi=0$, drugie pochodne cząstkowe funkcyi: $F+\lambda\varphi$. Otrzymujemy tu:

$$F_{11}=\frac{\partial^2F}{\partial x_1^2}=2,\quad F_{22}=\frac{\partial^2F}{\partial x_2^2}=2,\ \ldots,\ F_{nn}=\frac{\partial^2F}{\partial x_n^2}=2,$$

$$F_{12}=\frac{\partial^2F}{\partial x_1\partial x_2}=0,\quad F_{13}=\frac{\partial^2F}{\partial x_1\partial x_3}=0,\ \ldots,\ F_{n-1,n}=\frac{\partial^2F}{\partial x_{n-1}\partial x_n}=0,$$

tem:

$$D_1=F_{11}>0,\quad D_2=\begin{vmatrix}F_{11}, F_{12}\\ F_{12}, F_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2, 0\\ 0, 2\end{vmatrix}=4>0,\ \text{dalej: } D_3>0,\ D_4>0,\ \ldots,\ D_n>0.$$

Wartości te wywołują więc w istocie minimum funkcyi, a jej odpowiednia wartość stawia się w postaci:

$$f_{\min}=\frac{\lambda^2}{4}(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2),\ \text{czyli: } f_{\min}=\frac{(a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\ldots+a_n\alpha_n+a_0)^2}{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}.$$

10. Zastosowanie teoryi maximów i minimów funkcyj ilukolwiek zmiennych, do rozwiązywania zagadnień z analizy i geometryi. W zastosowaniach teoryi maximum i minimum funkcyj do rozwiązywania zagadnień z analizy lub geometryi, wskazuje niejednokrotnie już sama natura zagadnienia, czy otrzymane wartości prowadzą do maximum, czy też do minimum.

Zagadnienie 1. Liczbę a podzielić na n części: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, aby iloczyn wskazanych ich potęg był możliwie największy.

Mamy tu: $u=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$, przyczem: $x_1+x_2+\ldots+x_n=a$.

Kładąc: $U=u+\lambda\varphi=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}+\lambda(x_1+x_2+\ldots+x_n-a)$, otrzymujemy równania warunkowe:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}=\alpha_1 x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}+\lambda=0,\ \ldots,\ \frac{\partial U}{\partial x_n}=\alpha_n x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n-1}+\lambda=0,$$

z których dostajemy:

$$-\lambda=\frac{\alpha_1 x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}}{x_1}=\ldots=\frac{\alpha_n x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}}{x_n}=$$

$$=\frac{x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)}{x_1+x_2+\ldots+x_n}=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{a}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n},$$

a stąd:

$$x_1=\frac{a\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n},\ \ldots,\ x_n=\frac{a\alpha_n}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n},$$

zatem:

$$u_{\max}=\frac{\alpha_1^{\alpha_1}\alpha_2^{\alpha_2}\ldots\alpha_n^{\alpha_n}}{(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}}\cdot a^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}.$$

Zagadnienie 2. Dane są n punktów: $P_1, P_2, \ldots, P_n$, w przestrzeni. Wyznaczyć taki punkt S, aby suma kwadratów ich oddaleń, od tego punktu, pomnożonych przez liczby: $p_1, p_2, \ldots, p_n$, była możliwie najmniejszą.

Oznaczmy przez a_i, b_i, c_i, spółrzędne danego punktu P_i, a przez x, y, z, spółrzędne szukanego punktu S, natenczas, otrzymamy funkcyę:

$$u=p_1[(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2]+\ldots+p_n[(x-a_n)^2+(y-b_n)^2+(z-c_n)^2],$$

której najmniejszą wartość mamy wyznaczyć. W tym celu, otrzymujemy równanie warunkowe:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}=p_1(x-a_1)+p_2(x-a_2)+\ldots+p_n(x-a_n)=0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}=p_1(y-b_1)+p_2(y-b_2)+\ldots+p_n(y-b_n)=0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial z}=p_1(z-c_1)+p_2(z-c_2)+\ldots+p_n(z-c_n)=0,$$

z których otrzymujemy wartości:

$$x=\frac{a_1p_1+a_2p_2+\ldots+a_np_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n},\ y=\frac{b_1p_1+b_2p_2+\ldots+b_np_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n},\ z=\frac{c_1p_1+c_2p_2+\ldots+c_np_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n},$$

wywołujące minimum danej funkcyi.

Jeżeli: $p_1=p_2=\ldots=p_n=1$, natenczas, spółrzędne szukanego punktu przedstawiają się w postaci:

$$x=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n},\ y=\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n},\ z=\frac{c_1+c_2+\ldots+c_n}{n}.$$

Ćwiczenia XXI.

1) **Wykazać, że:**

$$f(x+h, y+k, z+l) = f(x, y, z) + \left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} + l\frac{\partial f}{\partial z}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + l^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2kh\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + 2hl\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} + 2kl\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\right) +$$
$$+ \ldots + \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}\right)^{(n)} f + \ldots$$

Rozwinąć następujące funkcye:

2) $u = x + y^2 - x^2y - x^2$, w miejscu: $x = y = 1$.

3) $u = (x+1)(y+1)(z+1)$, w miejscu: $x = y = z = 0$.

4) $u = \frac{xy}{ax + by}$, w miejscu: $x = a$, $y = b$.

5) $u = \frac{x^2y}{a^2 - z^2}$, w miejscu: $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$.

6) $u = (x^3 + y^3 + z^3) - x^2yz - xy^2z - xyz^2$, w miejscu: $x = y = z = 1$.

7) $u = \sin(mx + ny)$, w miejscu: $x = y = 0$.

8) $u = \frac{e^{xy}}{\sqrt{y^2 + z^2}}$, w miejscu: $x = 0$, $y = z = 1$.

9) **Wyznaczyć spółczynniki A rozwinięcia:**

$${}^2 + y^2 - z^2 = A_0 + A_1(x-1) + A_2(y-2) + A_3(z-3) + A_{11}(x-1)^2 + A_{22}(y-2)^2 + A_{33}(z-3)^2 +$$
$$+ 2A_{12}(x-1)(y-2) + 2A_{13}(x-1)(z-3) + 2A_{23}(y-2)(z-3).$$

10) **Wyprowadzić rozwinięcie:**

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xy + y^2}} = 1 + \frac{y}{2!}\frac{d(x^2-1)}{dx} + \frac{y^2}{2!\,2^2}\frac{d^2(x^2-1)^2}{dx^2} + \ldots = \sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{y^n}{n!\,2^n}\frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n}.$$

Wyznaczyć maxima i minima następujących funkcyj:

11) $u = (x + y - z)(x + z - y)(y + z - x)$.

12) $u = (x + y + z)^3 - 3(x + y + z) - 24xyz + a^3$.

13) $u = \frac{xyz}{(x+1)(x+y)(y+z)(z+1)}$.

14) $u = x^2 + y^2 + z^2 + (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2 - 2(b-y)z\cos\alpha - 2(c-z)x\cos\beta -$
$- 2(a-x)y\cos\gamma$.

15) $u = \sqrt{(a-x)^2 + y^2 - 2(a-x)y\cos\gamma} + \sqrt{(b-y)^2 + z^2 - 2(b-y)z\cos\alpha} +$
$+ \sqrt{(c-z)^2 + x^2 - 2(c-z)x\cos\beta}$.

16) $u = 2xy + 2xz + 2yz$, skoro: $xyz = a^3$.

17) $u = xyz$, przyczem: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

18) $u = \frac{a^4}{x^2} + \frac{b^4}{y^2} + \frac{c^4}{z^2}$, przyczem: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

19) $u = ax + by + cz$, jeżeli: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

20) $u = (x+1)(y+1)(z+1)$, skoro: $a^x b^y c^z = A$.

21) $z = x + 2y$, skoro: $(x + y\cos\alpha)y\sin\alpha = c$.

22) $z = (x-a)^2 + (y-b)^2$, skoro: $a_{11}(x-a)^2 + a_{22}(y-b)^2 + 2a_{12}(x-a)(y-b) + A = 0$.

23) $r = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\gamma}$, skoro: $ax^2 + by^2 + 2cxy = k$.

24) $u = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$, jeżeli: $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

25) W dany trójkąt ABC wpisać trójkąt MNP, o najmniejszym obwodzie.

26) Z danego stożka kołowego wyciąć walec o największej objętości.

27) Zbudować naczynie walcowe, o danej objętości, a możliwie najmniejszej powierzchni.

28) Z pośród stożków, o danej objętości V, wyznaczyć stożek, któryby miał możliwie najmniejszą powierzchnię P.

29) Na elipsie: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, dane są dwa punkta: $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$, znaleźć na niej punkt trzeci P_3, tak, aby powierzchnia trójkąta $P_1P_2P_3$ była możliwie największą.

30) W daną elipsę (a, b) wpisać trójkąt, o możliwie największej powierzchni Δ.

31) Wykazać, że stożek największy, w kulę wpisany, ma $^8/_{27}$ objętości kuli.

32) Jaką powierzchnię ma walec największy, wpisany w kulę, o promieniu a.

33) Wyznaczyć punkt $P(x, y, z)$, tak, aby suma kwadratów jego odległości od n danych punktów: $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i=1, 2, ..., n$, była możliwie najmniejszą.

34) Wyznaczyć punkt $P(x, y, z)$, tak, aby suma kwadratów jego odległości od n płaszczyzn: $E_i = x\cos\alpha_i + y\cos\beta_i + z\cos\gamma_i - p_i = 0$, $(i=1, 2, ..., n)$, była możliwie najmniejszą.

35) Wyznaczyć najkrótszą odległość punktu: $P(\xi, \eta, \zeta)$, od płaszczyzny:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

36) Wyznaczyć najkrótszą odległość dwu prostych:

$$\frac{x-a_1}{l_1}=\frac{y-b_1}{m_1}=\frac{z-c_1}{n_1}; \quad \frac{x-a_2}{l_2}=\frac{y-b_2}{m_2}=\frac{z-c_2}{n_2}.$$

37) Przez punkt dany: $P(\xi, \eta, \zeta)$, przesunąć płaszczyznę: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, tak, aby, z płaszczyznami spółrzędnych, utworzyła najmniejszy czworościan.

38) Wykazać, że między stożkami prostemi, o jednakowej objętości, ma najmniejszą pobocznicę ten stożek, którego bok $=r\sqrt{3}$, gdzie r jest promieniem podstawy.

39) Wykazać, że między stożkami, o jednakowej objętości, ma ten najmniejszą powierzchnię, której bok jest równy potrójnemu promieniowi podstawy.

40) Wykazać, że funkcya trzech zmiennych, niezależnych: x, y, z, kształtu:

$$u = xy^2z^3(a-x-y-z),$$

ma największą wartość, równą: $108\left(\frac{a}{7}\right)^7$, dla: $x = {}^1/_7\, a$, $y = {}^2/_7\, a$, $z = {}^3/_7\, a$.

41) Wykazać, że funkcya: $u = xyz(a^2-x^2-y^2-z^2)$, ma, dla $x=y=z=\frac{a\sqrt{5}}{5}$: $u_{\max}=\frac{2a^5\sqrt{5}}{125}$, zaś, dla $x=y=z=\frac{-a\sqrt{5}}{5}$: $u_{\min}=\frac{-2a^5\sqrt{5}}{125}$.

42) Wykazać, że funkcya: $u = ax^2 - bxy + xz + yz$, w miejscu: $x=y=z=0$, nie posiada ani maximum, ani minimum.

43) Wykazać, że funkcya: $u=x^2+y^2+z^2$, której zmienne: x, y, z, poddane są warunkom dodatkowym: $x+y+z=k$, $ax+by+cz=0$, posiada maximum, o wartości: $u=\frac{k^2}{(3s_2-s_1^2)^2}[(s_2-as_1)^2+(s_2-bs_1)^2+(s_2-cs_1)^2]$, gdzie: $s_1=a+b+c$, $s_2=a^2+b^2+c^2$.

44) Wykazać, że funkcya: $u=x_1.x_2.....x_n$, której zmienne poddane są warunkowi: $x_1+x_2+...+x_n=a$, posiada maximum w miejscu: $x_1=x_2=...=x_n=\frac{a}{n}$.

45) Wykazać, że funkcya: $u=xy^2z^3$, której zmienne x, y, z związane są równaniem: $x+my^2+nz^3=a$, posiada największą wartość, równą: $\frac{a^3}{27mn}$.

46) Wykazać, że funkcya: $u=(a^x-1)(b^y-1)(c^z-1)$, której zmienne związane są warunkiem: $a^xb^yc^z=A$, ma minimum, równe: $(\sqrt[3]{A}-1)^3$.

47) Wykazać, że funkcya: $u=\frac{a^{x+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{y+1}-1}{b-1}\cdot\frac{c^{z+1}-1}{c-1}$, której zmienne x, y, z, łączy równanie: $a^xb^yc^z=A$, osiąga maximum, równe: $\frac{(\sqrt[3]{abcA}-1)^3}{(a-1)(b-1)(c-1)}$.

48) Wykazać, że funkcya: $u = 4yz(a-x)$, której zmienne związane są równaniem: $\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x$, posiada maximum, w miejscu: $x = \frac{1}{2}a$, $y = \sqrt{\frac{1}{2}ap}$, $z = \sqrt{\frac{1}{2}aq}$, równe: $u = a^2\sqrt{pq}$.

49) Wyznaczyć wartości funkcyi: $u = \frac{4x^2 + 3y + z - 1}{\sin x + \operatorname{tang} y + \log z}$, dla $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$.

50) Wykazać, że funkcya: $u = \frac{\cos^2(x+y) - \cos^2 z}{(x+y)^2 - z^2}$, dla $x = y$, $z = 2x$, sprowadza się, do postaci: $u = -\frac{\sin 4x}{4x}$.

Rozwiązania XXI. 11) Max. dla $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$. 12) Max. w miejscu: (1, 1, 1), minimum w miejscu: (—1, —1, —1). 13) $u_{max} = \frac{1}{16}$. 16) $u_{min} = 6a^2$. 17) $u_{max} = \frac{abc}{3\sqrt{3}}$. 18) $u_{min} = (a+b+c)^2$. 19) $u_{max} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$. 20) $u_{max} = \frac{\{\log \sqrt[3]{abcA}\}^3}{\log a \log b \log c}$. 21) $z_{min} = 2\sqrt{\frac{(2-\cos\alpha)c}{\sin\alpha}}$. 22) Największą wartość z_1, i najmniejszą z_2, wyznacza równanie: $(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)Z^2 + (a_{11} + a_{22})ZA + A^2 = 0$. 23) Wartości największe i najmniejsze na r, podaje równanie: $(ab - c^2)r^4 - (a + b - 2\cos\gamma)kr^2 + k^2\sin^2\gamma = 0$. 25) Wierzchołki M, N, P, są rzutami wierzchołków A, B, C, na przeciwległe boki. 26) Największy walec ma $\frac{4}{9}$ część stożka. 27) Promień podstawy musi być równy wysokości walca. 28) $O_{min} = 2\sqrt[3]{9\pi V^2}$ 29) Punkt P_2 leży na końcach średnicy z cięciwą P_1P_2 sprzężonej. 30) $\Delta = \frac{3}{4}ab\sqrt{3}$. 32) $a^2\pi(\sqrt{5}+1)$. 33) $x = \frac{\Sigma x_i}{n}$, $y = \frac{\Sigma y_i}{n}$, $z = \frac{\Sigma z_i}{n}$. 34) Minimum funkcyi: $u = E_1^2 + E_2^2 + \ldots + E_n^2$. 37) Najmniejszy czworościan ma krawędzie: $a = 3\xi$, $b = 3\eta$, $c = 3\zeta$ i objętość: $V = \frac{9}{2}\xi\eta\zeta$. 49) $u = \frac{3\lambda + \mu}{1 + \lambda + \mu}$, gdzie λ i μ dowolne.

Literatura. M. C. Jordan. Cours d'analyse de l'école polytechnique. Tome premier. Calcul différentiel. Paris 1882. Dr. Ludwig Kiepert. Grundriss der Differential- und Integralrechnung. Hannover 1901.

Tematy do rozpraw naukowych.

1. O największej powierzchni figur równego obwodu, czyli t. z. figur izoperymetrycznych.
2. O wielościanach, które, przy danej objętości, zajmują najmniejszą powierzchnię.
3. Wartości graniczne symbolów nieoznaczonych, utworzonych z funkcyi ilukolwiek zmiennych, niezależnych.

Wykład XXII.

Zasady teoryi przekształceń funkcyj ilukolwiek zmiennych.

1. Określenie pojęcia przekształcenia funkcyj. Szereg Taylora dozwala funkcyę n zmiennych, niezależnych: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kształtu: $z=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, przekształcić na funkcyę innych n zmiennych, niezależnych: $y_1, y_2, \ldots, y_n$, w postaci: $z=F(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, jeżeli położymy: $y_1=x_1-a_1$, $y_2=x_2-a_2$, $\ldots$, $y_n=x_n-a_n$.

Jeżeli, w ogóle, w danej funkcyi n zmiennych: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, zastąpimy te zmienne, przez inne zmienne: $y_1, y_2, \ldots, y_n$, za pomocą relacyj:

$$x_1=\varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad x_2=\varphi_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad \ldots, \quad x_n=\varphi_n(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

natenczas, powiadamy, że daną funkcyę: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, przekształcamy na funkcyę: $F(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, za pomocą powyższych podstawień, zwanych także wzorami odnośnego przekształcenia.

Szczególniej interesującemi są przekształcenia funkcyj algebraicznych, wymiernych, zwanych formami algebraicznemi m-go stopnia, o n zmiennych, a w szczególności przekształcenia form kwadratowych ilukolwiek zmiennych, za pomocą podstawień liniowych, któremi się zajmiemy w niniejszym wykładzie.

2. Przekształcenie liniowe form algebraicznych. Jeżeli w danej formie algebraicznej: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zastąpimy zmienne $x_1, x_2, \ldots, x_n$ przez inne zmienne: $y_1, y_2, \ldots, y_n$, na podstawie związków liniowych:

$$\begin{array}{l} x_1=a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots+a_{1n}y_n \\ x_2=a_{21}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{2n}y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n=a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\ldots+a_{nn}y_n, \end{array} \tag{1}$$

natenczas, dana forma algebraiczna $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, zamieni się na nową formę algebraiczną: $F(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, o zmiennych $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Przejście od pierwszej formy: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ do drugiej: $F(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, określone równaniami liniowemi (1) nazywamy: l i n i o w e m p r z e k s z t a ł c e n i e m danej formy, a wyznacznik, utworzony ze spółczynników danych równań liniowych, w postaci:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn} \end{vmatrix},$$

azywamy modułem danego przekształcenia liniowego. Moduł ten musi yć różnym od zera (patrz T. I., art. 3., str. 352. i nast.).

Chcąc, na odwrót, z drugiej formy: $F(y_1, y_2, ..., y_n)$ przejść do formy pierwotnej: $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, musimy użyć nowego przekształcenia liniowego, które azywamy przekształceniem odwrotnem. Równania, określające przekształcenie liniowe, odwrotne, otrzymujemy z równań pierwotnego przekształcenia liniowego, rozwiązując je według zmiennych y.

Oznaczając przez α_{ik} minor elementu a_{ik} w wyznaczniku D (patrz T. I., art. 10., str. 343.), otrzymamy, na podstawie prawidła rozwiązywania układu równań, pierwszego stopnia, o n niewiadomych (patrz T. I., wykład XXVII.), następujące równania:

$$\begin{aligned} Dy_1 &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2 + ... + \alpha_{n1}x_n \\ Dy_2 &= \alpha_{12}x_2 + \alpha_{22}x_2 + ... + \alpha_{n2}x_n \\ &\dots\dots\dots\dots \\ Dy_n &= \alpha_{1n}x_1 + \alpha_{2n}x_2 + ... + \alpha_{nn}x_n, \end{aligned} \tag{2}$$

które są wzorami odnośnego przekształcenia odwrotnego. Moduł przekształcenia przedstawia się w postaci:

$$\Delta = \frac{1}{D^n} \begin{vmatrix} \alpha_{11}, \alpha_{21}, ..., \alpha_{n1} \\ \alpha_{12}, \alpha_{22}, ..., \alpha_{n2} \\ \dots\dots \\ \alpha_{1n}, \alpha_{2n}, ..., \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \frac{|\alpha_{ik}|}{D^n},$$

a że wyznacznik dołączony: $|\alpha_{ik}| = D^{n-1}$ (patrz T. I., str. 343.), więc:

$$\Delta = \frac{D^{n-1}}{D^n} = \frac{1}{D}. \tag{3}$$

a zatem: ***Moduł przekształcenia odwrotnego jest odwrotnością modułu przekształcenia pierwotnego.***

W szczególnym przypadku, gdy $D = \pm 1$, jest także $\Delta = \pm 1$, a takie przekształcenia liniowe, których moduł $= \pm 1$, nazywamy przekształceceniami jednomodułowemi (unimodularnemi).

3. Przekształcenia ortogonalne. Pomiędzy przekształceniami liniowemi, zasługują na szczególniejszą uwagę przekształcenia ortogonalne. Są to przekształcenia liniowe, które nie zmieniają sumy kwadratów wielkości zmiennych, w których więc:

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2. \tag{4}$$

Ażeby przekształcenia liniowe, określone równaniami (1), były ortogonalne, musiałaby się sprawdzić tożsamość:

$$\begin{aligned} &(a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n)^2 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n)^2 + \\ &+ ... + (a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n)^2 = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2, \end{aligned}$$

czyli:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + ... + a_{in}y_n)^2 = \sum_{i=1}^{i=n} y_i^2. \tag{5}$$

Wymaga to spełnienia następujących warunków:

$$\begin{aligned} &a_{11}^2 + a_{21}^2 + ... + a_{n1}^2 = 1; \quad a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + ... + a_{n1}a_{n2} = 0 \\ &a_{12}^2 + a_{22}^2 + ... + a_{n2}^2 = 1; \quad a_{12}a_{1n} + a_{22}a_{2n} + ... + a_{n2}a_{nn} = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{1n}^2 + a_{2n}^2 + ... + a_{nn}^2 = 1; \quad a_{1,n-1}a_{1n} + a_{2,n-1}a_{2n} + a_{n,n-1}a_{nn} = 0, \end{aligned}$$

które możemy napisać w postaci:

$$a_{1i}a_{1\varkappa}+a_{2i}a_{2\varkappa}+\ldots+a_{ni}a_{n\varkappa}=\begin{matrix}1, \text{ gdy } i=\varkappa. \\ 0, \text{ gdy } i \gtrless \varkappa.\end{matrix} \qquad (6)$$

Warunki te są nie tylko konieczne, ale zarazem wystarczające, jeżeli się bowiem one spełniają, natenczas spełnia się także relacya (4), określająca przekształcenie ortogonalne.

4. Wyznacznik ortogonalny. Jeżeli dany wyznacznik: $D=|a_{i\varkappa}|$ $(i, \varkappa=1, 2, \ldots, n)$ możemy użyć, jako moduł przekształcenia ortogonalnego, tedy nazywamy go wprost wyznacznikiem ortogonalnym. Ażeby dany wyznacznik był wyznacznikiem ortogonalnym, jest warunkiem koniecznym, a zarazem wystarczającym, aby między jego elementami $a_{i\varkappa}$ zachodziły związki, określone równaniami (6):

$$a_{1i}a_{1\varkappa}+a_{2i}a_{2\varkappa}+\ldots+a_{ni}a_{n\varkappa}=\begin{matrix}1, \text{ dla } i=\varkappa, \\ 0, \text{ dla } i \gtrless \varkappa.\end{matrix}$$

Pod tymi warunkami przedstawi się kwadrat takiego wyznacznika, na podstawie wzoru (19), T. I., str. 347. w postaci:

$$D^2=|a_{i\varkappa}|^2=|c_{i\varkappa}|,$$

gdzie: $c_{i\varkappa}=c_{\varkappa i}=0$, gdy $i \gtrless \varkappa$, zaś $c_{ii}=1$, będzie, więc:

$$D^2=\begin{vmatrix}1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & 1, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \ldots, & 1\end{vmatrix}, \text{ czyli: } D^2=1, \text{ a więc: } D=\pm 1, \text{ a zatem:}$$

Wszelki wyznacznik ortogonalny ma wartość równą $+1$, *lub* -1.

Przekształcenie ortogonalne jest więc, zarazem, przekształceniem jednomodułowem (art. 2., str. 351.), a nazywamy je przekształceniem ortogonalnem, dodatniem, lub w prawo zwrotnem, gdy $D=+1$, a ujemnem, lub w lewo zwrotnem, gdy $D=-1$.

5. Połóżmy w warunku (6), cechującym wyznacznik ortogonalny, kolejno: $i=1, 2, \ldots, n$, a otrzymamy n równań, w postaci:

$$\begin{aligned}
a_{11}a_{1\varkappa}+a_{21}a_{2\varkappa}+\ldots+a_{n1}a_{n\varkappa}&=0 \\
a_{12}a_{1\varkappa}+a_{22}a_{2\varkappa}+\ldots+a_{n2}a_{n\varkappa}&=0 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot& \\
a_{1\varkappa}a_{1\varkappa}+a_{2\varkappa}a_{2\varkappa}+\ldots+a_{n\varkappa}a_{n\varkappa}&=1 \qquad (7) \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot& \\
a_{1n}a_{1\varkappa}+a_{2n}a_{2\varkappa}+\ldots+a_{nn}a_{n\varkappa}&=0,
\end{aligned}$$

które możemy rozwiązać, ze względu na: $a_{1\varkappa}, a_{2\varkappa}, \ldots, a_{n\varkappa}$, jako układ równań liniowych.

Otrzymujemy, tedy:

$$a_{1\varkappa}=\frac{0.\alpha_{11}+0.\alpha_{12}+\ldots+1.\alpha_{1\varkappa}+\ldots+0.\alpha_{1n}}{a_{11}\alpha_{11}+a_{12}\alpha_{12}+\ldots+a_{1\varkappa}\alpha_{1\varkappa}+\ldots+a_{1n}\alpha_{1n}}=\frac{\alpha_{1\varkappa}}{D},$$

podobnie:

$$a_{2\varkappa}=\frac{\alpha_{2\varkappa}}{D}, \ldots, a_{i\varkappa}=\frac{\alpha_{i\varkappa}}{D}, \ldots, a_{n\varkappa}=\frac{\alpha_{n\varkappa}}{D},$$

a że: $D=\pm 1$, zatem, otrzymujemy, ogólnie: $a_{i\varkappa}=\pm\alpha_{i\varkappa}$ $(i, \varkappa=1, 2, \ldots, n)$. (8)

To znaczy: *Każdy element wyznacznika ortogonalnego, jest równy swemu minorowi, wziętemu z tym samym, lub z przeciwnym znakiem, stosownie do tego, czy ten wyznacznik jest dodatnim, czy też ujemnym.*

Naodwrót, jeżeli: $a_{i\varkappa}=\frac{\alpha_{i\varkappa}}{D}$, tedy wyrażenie:

$$a_{1i}a_{1\varkappa}+a_{2i}a_{2\varkappa}+\ldots+a_{ni}a_{n\varkappa}=\frac{a_{1i}\alpha_{1\varkappa}+a_{2i}\alpha_{2\varkappa}+\ldots+a_{ni}\alpha_{n\varkappa}}{D},$$

staje się więc, równem 1, gdy $i=\varkappa$, a równe zeru, gdy $i \gtrless \varkappa$, a zatem wyznacznik D jest w tym przypadku wyznacznikiem ortogonalnym.

6. **Wyznaczywszy dla danego przekształcenia ortogonalnego, określonego wzorami:**

$$x_i = a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + \ldots + a_{in} y_n, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

i $D^2 = |a_{ix}|^2 = 1$, odpowiednie przekształcenie odwrotne, otrzymamy:

$$y_i = \frac{\alpha_{1i} x_1 + \alpha_{2i} x_2 + \ldots + \alpha_{ni} x_n}{D},$$

i, ze względu na to, że: $a_{ix} = \frac{\alpha_{ix}}{D}$, otrzymujemy wzory:

$$y_i = a_{1i} x_1 + a_{2i} x_2 + \ldots + a_{ni} x_n, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{9}$$

...jące, że przekształcenie odwrotne, względem przekształcenia ortogonalnego, jest rów... przekształceniem ortogonalnem.

Z modułu przekształcenia ortogonalnego otrzymujemy, mianowicie, moduł przekształ...a odwrotnego, jeżeli z kolumn pierwszego porobimy wiersze, a wskutek takiej prze...y, wyznacznik nie zmienia swej wartości, zatem:

Moduł przekształcenia ortogonalnego jest identyczny z modułem swego przekształcenia od...go.

Stąd wypływa, naodwrót, twierdzenie następujące:

Jeżeli dwa przekształcenia, odwrotne względem siebie, mają jednakowe moduły, w ten sposób ...e, że z wierszy jednego, powstają kolumny drugiego, natenczas oba przekształcenia są orto...e.

7. **Elementy wyznacznika ortogonalnego, n-go rzędu** muszą, na podstawie równań (6) ...dzać n wyrażeń do 1, a $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ wyrażeń do zera, muszą więc uczynić zadość: $\binom{n}{2} = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ warunkom, ale ilość wszystkich elementów wy...ika n-go rzędu jest równa n^2, zatem, chcąc utworzyć dowolny wyznacznik ortogo...y, możemy przyjąć: $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ elementów, dowolnie, a pozostałe $\binom{n+1}{2}$ elementów z $\binom{n+1}{2}$ równań liniowych wyznaczyć. A zatem:

Wyznacznik ortogonalny jest określony $\binom{n}{2}$, *dowolnie obranymi elementami.*

8. **Zastosowanie przekształceń liniowych do danej formy liniowej ilu...iek zmiennych.** Niech będzie daną forma liniowa n zmiennych, nieza...ych: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, w postaci:

$$u_n{}^1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n. \tag{10}$$

Zastosujmy do niej przekształcenie liniowe, określone wzorami:

$$\begin{aligned} x_1 &= l_{11} y_1 + l_{12} y_2 + \ldots + l_{1n} y_n \\ x_2 &= l_{21} y_1 + l_{22} y_2 + \ldots + l_{2n} y_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= l_{n1} y_1 + l_{n2} y_2 + \ldots + l_{nn} y_n, \end{aligned}$$

...odule: $|l_{ix}| = L$, różnym od zera, natenczas, otrzymamy:

$$u_n{}^1 = a_1 (l_{11} y_1 + l_{12} y_2 + \ldots + l_{1n} y_n) + a_2 (l_{21} y_1 + l_{22} y_2 + \ldots + l_{2n} y_n) + \\ + \ldots + a_n (l_{n1} y_1 + l_{n2} y_2 + \ldots + l_{nn} y_n).$$

Uporządkowawszy wynik, podług nowych zmiennych, niezależnych: $y_1, \ldots, y_n$, otrzymamy formę przekształconą, w postaci:

$$u_n{}^1 = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_n y_n, \tag{11}$$

...ie:

$$b_x = a_1 l_{1x} + a_2 l_{2x} + \ldots + a_n l_{nx}, \quad (x = 1, 2, \ldots, n). \tag{12}$$

9. Mając do rozporządzenia n^2 spółczynników l_{ix}, możemy je, na nieskończenie wiele ...obów, tak obrać, aby spółczynniki b_x, formy przekształconej, miały pewne, z góry ...ne, wartości. Wystarczy, w tym celu, wybrać $n^2 - n$ spółczynników liniowego prze...łcenia, dowolnie, jednakże tak, aby moduł przekształcenia L nie był równy zeru, ...tę n spółczynników możemy już wyznaczyć z n równań liniowych, kształtu (12).

Możemy n. p. przyjąć spółczynniki $l_{i\varkappa}=0$, gdy $i \gtrless \varkappa$, a otrzymamy:

$$b_1=a_1 l_{11},\ b_2=a_2 l_{22},\ ...,\ b_n=a_n l_{nn},$$

zatem: $b_i=a_i l_{ii}$, a więc: $l_{ii}=\frac{b_i}{a_i}$, $(i=1, 2, ..., n)$.

Forma liniowa: $u_n{}^1=a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n$, przejdzie, wskutek takiego przekształcenia, o module: $L=l_{11}l_{22}...l_{nn}$, na formę: $u_n{}^1=l_{11}a_1y_1+l_{22}a_2y_2+...+l_{nn}a_ny_n$, czyli:

$$u_n{}^1=b_1y_1+b_2y_2+...+b_ny_n,$$

której spółczynniki będą miały pewne, a priori podane, wartości.

10. Kolejne zastosowanie kilku przekształceń liniowych do danej formy Stosując do danej formy n zmiennych: $x_1, x_2, ..., x_n$, przekształcenie liniowe określone wzorami: $x_i=l_{i1}y_1+l_{i2}y_2+...+l_{in}y_n$, o module: $|l_{i\varkappa}|=L\gtrless 0$, a następnie, do otrzymanej nowej formy n zmiennych: $y_1, y_2, ..., y_n$, nowe przekształcenie liniowe, określone wzorami: $y_i=l_{i1}'z_1+l_{i2}'z_2+...+l_{in}'z_n$, o module $|l'_{i\varkappa}|=L'\gtrless 0$, natenczas, wyrażając zmienne x_i przez zmienne z_i, otrzymujemy wzory bezpośredniego przekształcenia liniowego formy o zmiennych $x_1, x_2, ..., x_n$, na formę o zmiennych: $z_1, z_2, ..., z_n$, w postaci:

$$x_i=l_{i1}(l_{11}'z_1+l_{12}'z_2+...+l_{1n}'z_n)+l_{i2}(l_{21}'z_1+l_{22}'z_2+...+l_{2n}'z_n)+$$
$$+...+l_{in}(l_{n1}'z_1+l_{n2}'z_2+...+l'_{nn}z_n),$$

czyli: $x_i=p_{i1}z_1+p_{i2}z_2+...+p_{in}z_n$, gdzie: $p_{i\varkappa}=l_{i1}l_{1\varkappa}'+l_{i2}l_{2\varkappa}'+...+l_{in}l_{n\varkappa}'$.

Moduł tego przekształcenia bezpośredniego przedstawia się, w postaci $P=|p_{i\varkappa}|=|l_{i1}l_{1\varkappa}'+l_{i2}l_{2\varkappa}'+...+l_{in}l_{n\varkappa}'|$, $(i, \varkappa=1, 2, ..., n)$, a że, na podstawie prawidła mnożenia wyznaczników: $|l_{i1}l_{1\varkappa}'+l_{i2}l_{2\varkappa}'+...+l_{in}l_{n\varkappa}'|=|l_{i\varkappa}|.|l_{i\varkappa}'|$, przeto $|p_{i\varkappa}|=|l_{i\varkappa}|.|l_{i\varkappa}'|$, czyli: $P=LL'$. To znaczy:

Dane dwa kolejne przekształcenia liniowe dadzą się zastąpić jednem przekształceniem liniowem, którego moduł jest równy iloczynowi modułów obu danych przekształceń.

11. Zastosowanie przekształceń liniowych do układu form liniowych Układ form liniowych, kształtu:

$$f_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+...+a_{in}x_n\ (i=1, 2, ..., n), \tag{13}$$

zamienia się, wskutek przekształcenia liniowego, określonego wzorami:

$$x_i=l_{i1}y_1+l_{i2}y_2+...+l_{in}y_n,\ (i=1, 2, ..., n), \tag{14}$$

na układ form liniowych, kształtu:

$$f_i=b_{i1}y_1+b_{i2}y_2+...+b_{in}y_n,\ (i=1, 2, ..., n). \tag{15}$$

Spółczynniki $b_{i\varkappa}$, form przekształconych, pozostają ze spółczynnikami form pierwotnych, w prostej zależności. Aby je wyznaczyć, zastosujmy przekształcenie (14) do i-tej formy układu, a otrzymamy:

$$f_i=a_{i1}(l_{11}y_1+l_{12}y_2+...+l_{1n}y_n)+a_{i2}(l_{21}y_1+l_{22}y_2+...+l_{2n}y_n)+$$
$$+...+a_{in}(l_{n1}y_1+l_{n2}y_2+...+l_{nn}y_n),$$

czyli:

$$f_i=\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n}(a_{i1}l_{1\varkappa}+a_{i2}l_{2\varkappa}+...+a_{in}l_{n\varkappa})y_\varkappa,$$

zatem:

$$b_{i\varkappa}=a_{i1}l_{1\varkappa}+a_{i2}l_{2\varkappa}+...+a_{in}l_{n\varkappa}. \tag{16}$$

Spółczynniki układu n form liniowych (13) tworzą wyznacznik n-go rzędu

$$A=\begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n} \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nn} \end{vmatrix}=|a_{i\varkappa}|,\ (i, \varkappa=1, 2, ..., n),$$

który nazywamy wyznacznikiem danego układu form liniowyc

Odnośny wyznacznik dla układu form przekształconych, przedstawia na podstawie wzoru (16), w postaci:

$$B = |b_{i\varkappa}| = |l_{1\varkappa}a_{i1}+l_{2\varkappa}a_{i2}+\dots+l_{n\varkappa}a_{in}|, \quad (i,\varkappa = 1, 2, \dots, n),$$

a, według prawideł mnożenia wyznaczników:

$$|l_{1\varkappa}a_{i1}+l_{2\varkappa}a_{i2}+\dots+l_{n\varkappa}a_{in}| = |l_{i\varkappa}|.|a_{i\varkappa}|,$$

am, otrzymujemy: $|b_{i\varkappa}| = |l_{i\varkappa}|.|a_{i\varkappa}|$, czyli:

$$\begin{vmatrix} b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n} \\ b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ b_{n1}, b_{n2}, \dots, b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_{11}, l_{12}, \dots, l_{1n} \\ l_{21}, l_{22}, \dots, l_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ l_{n1}, l_{n2}, \dots, l_{nn} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn} \end{vmatrix},$$

ęc: $B = L.A.$

To znaczy: *Wyznacznik przekształconego układu form liniowych jest równy cznikowi układu pierwotnego, pomnożonemu przez moduł przekształcenia.*

12. Zastosowanie przekształceń liniowych do form kwadratowych, ilu- lek zmiennych. Niech będzie daną forma kwadratowa n zmiennych, ależnych, w postaci:

$$u_n^2 = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n,$$

i:

$$u_n^2 = \sum_{i,\varkappa}^{n} a_{i\varkappa}x_i x_\varkappa.$$

Przypuśćmy, że jej wyróżnik, przedstawiający się w postaci wyznacznika tycznego:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{12}, a_{22}, \dots, a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{nn} \end{vmatrix},$$

: $A = |a_{i\varkappa}|$, $i, \varkappa = 1, 2, \dots, n$, z warunkiem: $a_{i\varkappa} = a_{\varkappa i}$, jest różny od zera, więc, dana forma kwadratowa jest formą kwadratową, właściwą, i zastosujmy do niej przekształcenie liniowe, określone wzorami:

$$\begin{aligned} x_1 &= l_{11}y_1 + l_{12}y_2 + \dots + l_{1n}y_n \\ x_2 &= l_{21}y_1 + l_{22}y_2 + \dots + l_{2n}y_n \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= l_{n1}y_1 + l_{n2}y_2 + \dots + l_{nn}y_n, \end{aligned}$$

odule: $|l_{i\varkappa}| = L$, różnym od zera, natenczas, dana forma kwadratowa kształci się na następującą:

$$\begin{aligned} u_n^2 = {} & a_{11}(l_{11}y_1 + l_{12}y_2 + \dots + l_{1n}y_n)^2 + a_{22}(l_{21}y_1 + l_{22}y_2 + \dots + l_{2n}y_n)^2 + \dots + \\ & (l_{n1}y_1 + l_{n2}y_2 + \dots + l_{nn}y_n)^2 + 2a_{12}(l_{11}y_1 + l_{12}y_2 + \dots + l_{1n}y_n).(l_{21}y_1 + l_{22}y_2 + \dots + l_{2n}y_n) + \\ & + \dots + 2a_{n-1,n}(l_{n-1,1}y_1 + l_{n-1,2}y_2 + \dots + l_{n-1,n}y_n).(l_{n1}y_1 + l_{n2}y_2 + \dots + l_{nn}y_n), \end{aligned}$$

i:

$$u_n^2 = \sum_{i,\varkappa}^{n} a_{i\varkappa}(l_{i1}y_1 + l_{i2}y_2 + \dots + l_{in}y_n)(l_{\varkappa 1}y_1 + l_{\varkappa 2}y_2 + \dots + l_{\varkappa n}y_n),$$

c, na nową formę kwadratową, n zmiennych: $y_1, y_2, \dots, y_n$, kształtu:

$$u_n^2 = b_{11}y_1^2 + b_{22}y_2^2 + \dots + b_{nn}y_n^2 + 2b_{12}y_1y_2 + \dots + 2b_{n-1,n}y_{n-1}y_n,$$

i:

$$u_n^2 = \sum_{i=\varkappa}^{n} b_{i\varkappa}y_i y_\varkappa.$$

Na wyznaczenie spółczynników $b_{i\varkappa}$, formy przekształconej, otrzymujem wzór ogólny:

$$b_{i\varkappa}=l_{i1}(l_{1\varkappa}a_{11}+l_{2\varkappa}a_{12}+\ldots+l_{n\varkappa}a_{1n})+l_{i2}(l_{1\varkappa}a_{21}+l_{2\varkappa}a_{22}+\ldots+l_{n\varkappa}a_{2n})+$$
$$+\ldots+l_{in}(l_{1\varkappa}a_{n1}+l_{2\varkappa}a_{n2}+\ldots+l_{n\varkappa}a_{nn}).$$

Połóżmy: $A_{i\varkappa}=l_{1\varkappa}a_{i1}+l_{2\varkappa}a_{i2}+\ldots+l_{n\varkappa}a_{in}$, natenczas, otrzymujemy powyższ wzór, w postaci: $b_{i\varkappa}=l_{i1}A_{1\varkappa}+l_{i2}A_{2\varkappa}+\ldots+l_{in}A_{n\varkappa}$. Wobec tego, wyróżnik form przekształconej przedstawia się, w postaci:

$$B=|b_{i\varkappa}|=|l_{i1}A_{1\varkappa}+l_{i2}A_{2\varkappa}+\ldots+l_{in}a_{n\varkappa}|,\quad i,\varkappa=1,2,\ldots,n,$$

a więc, na podstawie prawidła mnożenia wyznaczników, w postaci:

$$B=|l_{i\varkappa}|.|A_{i\varkappa}|,$$

a że, na podstawie tego samego prawidła:

$$|A_{i\varkappa}|=|l_{1\varkappa}a_{i1}+l_{2\varkappa}a_{i2}+\ldots+l_{n\varkappa}a_{in}|=|l_{i\varkappa}|.|a_{i\varkappa}|,$$

przeto, otrzymujemy: $B=|b_{i\varkappa}|=|l_{i\varkappa}|^2.|a_{i\varkappa}|$, czyli: $B=L^2.A$. (18)

To znaczy: *Wyróżnik formy kwadratowej, liniowo przekształconej, jest rów wyróżnikowi pierwotnej formy kwadratowej, pomnożonemu przez kwadrat odnośne modułu przekształcenia.*

W szczególności, gdy przekształcenie liniowe jest ortogonalne, mamy $|l_{i\varkappa}|^2=1$, zatem: $B=A$.

To znaczy: *Wyróżnik formy kwadratowej nie zmienia, wskutek ortogonalne przekształcenia, ani swej wartości, ani jej znaku.*

13. Zastosowanie przekształceń ortogonalnych do form kwadratowyc ilukolwiek zmiennych. Niech będzie daną forma kwadratowa n zmiennyc niezależnych: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, w postaci:

$$u=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\ldots+a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+\ldots+2a_{n-1\,n}x_{n-1}x_n. \quad (19)$$

Zastosujmy do niej przekształcenie ortogonalne, określone równaniam

$$\begin{aligned} x_1&=l_{11}y_1+l_{12}y_2+\ldots+l_{1n}y_n\\ x_2&=l_{21}y_1+l_{22}y_2+\ldots+l_{2n}y_n\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_n&=l_{n1}y_1+l_{n2}y_2+\ldots+l_{nn}y_n, \end{aligned} \quad (20)$$

któremu odpowiada przekształcenie odwrotne, ortogonalne:

$$\begin{aligned} y_1&=l_{11}x_1+l_{21}x_2+\ldots+l_{n1}x_n\\ y_2&=l_{12}x_1+l_{22}x_2+\ldots+l_{n2}x_n\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n&=l_{1n}x_1+l_{2n}x_2+\ldots+l_{nn}x_n, \end{aligned} \quad (21)$$

mające ten sam moduł: $L=|l_{i\varkappa}|$, $i,\varkappa=1,2,\ldots,n$.

Między n^2 spółczynnikami $l_{i\varkappa}$, przekształcenia ortogonalnego, musi, z p wodu warunku ortogonalności: $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2$, zachodz $\frac{1}{2}n(n+1)$ relacyj, kształtu:

$$l_{1i}l_{1\varkappa}+l_{2i}l_{2\varkappa}+\ldots+l_{ni}l_{n\varkappa}\begin{matrix}=1, \text{ dla } i=\varkappa,\\ =0, \text{ dla } i\gtrless\varkappa.\end{matrix} \quad (22)$$

możemy zatem dobrać jeszcze dowolnie: $n^2-\frac{1}{2}n(n+1)$, czyli: $\frac{1}{2}n(n-1)$ r lacyj, aby mieć pewne szczególne przekształcenie ortogonalne.

Wskutek przekształcenia, określonego wzorami (20), dana forma (1 zamieni się na formę kwadratową n zmiennych: $y_1, y_2, \ldots, y_n$, kształtu:

$$u=b_{11}y_1^2+b_{22}y_2^2+\ldots+b_{nn}y_n^2+2b_{12}y_1y_2+\ldots+2b_{n-1\,n}y_{n-1}y_n,$$

któr[illegible]niki $b_{i\varkappa}$ mamy wyznaczyć za pomocą spółczynników $l_{i\varkappa}$.

14. Mając w przekształceniu ortogonalnem dobrać jeszcze $\binom{n}{2}$ warunków, t. j. tyle, ile jest spółczynników $b_{i\varkappa}$ przy iloczynach $y_i y_\varkappa$, gdy $i \gtrless \varkappa$, dołączmy $\binom{n}{2}$ warunków następujących: $b_{12}=0$, $b_{13}=0$, ..., $b_{n-1\,n}=0$, ogólnie $b_{i\varkappa}=0$, gdy $i \gtrless \varkappa$, i połóżmy: $b_{11}=s_1$, $b_{22}=s_2$, ..., $b_{nn}=s_n$.

Dana forma sprowadzi się, przy tak dobranem przekształceniu ortogonalnem, do postaci:

$$u=s_1 y_1^2+s_2 y_2^2+\ldots+s_n y_n^2, \tag{23}$$

którą nazywamy **postacią kanoniczną** form kwadratowych. Z postaci tej musielibyśmy, za pomocą przekształcenia odwrotnego, określonego wzorami (21), dojść napowrót do formy pierwotnej. Wskutek tego przekształcenia, sprowadza się jednak forma (23) do następującej:

$$u = s_1(l_{11}x_1 + l_{21}x_2+\ldots+l_{n1}x_n)^2 + s_2(l_{12}x_1 + l_{22}x_2+\ldots+l_{n2}x_n)^2 + \\ +\ldots+s_n(l_{1n}x_1+l_{2n}x_2+\ldots+l_{nn}x_n)^2,$$

czyli:

$$u = \sum_{r=1}^{r=n} s_r(l_{1r}x_1 + l_{2r}x_2+\ldots+l_{nr}x_n)^2,$$

która, porównana z formą pierwotną (19), prowadzi do relacyj:

$$a_{i\varkappa} = \sum_{r=1}^{r=n} s_r l_{ir} l_{\varkappa r}, \quad i, \varkappa = 1, 2, \ldots, n,$$

czyli, dla $\varkappa=1, 2, \ldots, n$, do równań:

$$\begin{aligned} a_{i1} &= s_1 l_{i1} l_{11}+s_2 l_{i2} l_{12}+\ldots+s_n l_{in} l_{1n} \\ a_{i2} &= s_1 l_{i1} l_{21}+s_2 l_{i2} l_{22}+\ldots+s_n l_{in} l_{2n} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{in} &= s_1 l_{i1} l_{n1}+s_2 l_{i2} l_{n2}+\ldots+s_n l_{in} l_{nn}. \end{aligned}$$

Uważajmy w tych n równaniach iloczyny: $s_1 l_{i1}$, $s_2 l_{i2}$, ..., $s_n l_{in}$, jako niewiadome, to, oznaczając minor elementu $l_{i\varkappa}$, wyznacznika $L=|l_{i\varkappa}|$, przez $\lambda_{i\varkappa}$, $i, \varkappa=1, 2, \ldots, n$, otrzymamy, na wyznaczenie niewiadomych, kształtu: $s_\varkappa l_{i\varkappa}$, wzór ogólny:

$$s_\varkappa l_{i\varkappa}=\frac{a_{i1}\lambda_{1\varkappa}+a_{i2}\lambda_{2\varkappa}+\ldots+a_{in}\lambda_{n\varkappa}}{|l_{i\varkappa}|}, \quad (\varkappa=1, 2, \ldots, n),$$

a że, w przekształceniu ortogonalnem, którego moduł: $L=|l_{i\varkappa}|$, zachodzą relacye:

$$\frac{\lambda_{1\varkappa}}{L}=l_{1\varkappa}, \quad \frac{\lambda_{2\varkappa}}{L}=l_{2\varkappa}, \quad \ldots, \quad \frac{\lambda_{n\varkappa}}{L}=l_{n\varkappa},$$

zatem, przedstawia się ten wzór w postaci: $s_\varkappa l_{i\varkappa}=a_{i1}l_{1\varkappa}+a_{i2}l_{2\varkappa}+\ldots+a_{in}l_{n\varkappa}$.

Kładąc w nim kolejno: $i=1, 2, 3, \ldots, n$, otrzymujemy układ n równań liniowych:

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-s_\varkappa) l_{1\varkappa}+a_{12} l_{2\varkappa}+\ldots+a_{1n} l_{n\varkappa} &= 0 \\ a_{21} l_{1\varkappa}+(a_{22}-s_\varkappa) l_{2\varkappa}+\ldots+a_{2n} l_{n\varkappa} &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} l_{1\varkappa}+a_{n2} l_{2\varkappa}+\ldots+(a_{nn}-s_\varkappa) l_{n\varkappa} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

jednorodnych, o n niewiadomych: $l_{1\varkappa}$, $l_{2\varkappa}$, ..., $l_{n\varkappa}$. Ażeby istniały takie wartości na niewiadome: $l_{1\varkappa}$, $l_{2\varkappa}$, ..., $l_{n\varkappa}$, któreby były różne od zera, a tym równaniom jednorodnym uczyniły zadość, musiałby wyznacznik tego układu równań być równym zeru. Oznaczając niewiadomą $s_\varkappa$ przez s, otrzymujemy więc, na jej wyznaczenie, równanie:

$$D(s)=\begin{vmatrix} a_{11}-s, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}-s, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn}-s \end{vmatrix}=0, \tag{25}$$

a więc, ze względu na $(-s)$, równanie n-go stopnia, kształtu:

$$(-s)^n+D_1(-s)^{n-1}+D_2(-s)^{n-2}+\ldots+D_{n-2}(-s)^2+D_{n-1}(-s)+D_n=0\,, \quad (26)$$

w którem wyraz wolny D_n jest wyznacznikiem symetrycznym n-go rzędu $D=|a_{i\varkappa}|$ $(i, \varkappa=1, 2, \ldots, n)$, spółczynnik D_r $(r=1, 2, \ldots, n-1)$, przedstawia sumę wszystkich minorów r-go rzędu, odpowiadających elementom a_{ii}, głównej przekątni wyznacznika D.

Spółczynniki $s_1, s_2, \ldots, s_n$: formy kwadratowej: $s_1y_1^2+s_2y_2^2+\ldots+s_ny_n^2$ są, zatem, pierwiastkami równania: $D(s)=0$, które powstaje z wyznacznika $D=|a_{i\varkappa}|$, danej formy kwadratowej:

$$u=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\ldots+a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+\ldots+2a_{n-1\,n}x_{n-1}x_n\,,$$

jeżeli w nim elementy przekątni głównej a_{ii}, zastąpimy przez $a_{ii}-s$.

15. Możemy wykazać, że pierwiastki równania: $D(s)=0$ są rzeczywiste Utwórzmy, bowiem, równanie: $D(-s)=0$, natenczas, otrzymamy, ze względu na to, że wyznacznik D jest, z powodu $a_{i\varkappa}=a_{\varkappa i}$, wyznacznikiem symetrycznym równanie: $D(s).D(-s)=0$, w postaci:

$$\begin{vmatrix} c_{11}-s^2, & c_{12}, & \ldots, & c_{1n} \\ c_{21}, & c_{22}-s^2, & \ldots, & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1}, & c_{n2}, & \ldots, & c_{nn}-s^2 \end{vmatrix}=0,$$

gdzie:

$$c_{i\varkappa}=a_{i1}a_{\varkappa 1}+a_{i2}a_{\varkappa 2}+\ldots+(a_{ii}-s)a_{\varkappa i}+\ldots+a_{i\varkappa}(a_{\varkappa\varkappa}+s)+\ldots+a_{in}a_{\varkappa n}\,,$$

czyli:

$$c_{i\varkappa}=a_{i1}a_{\varkappa 1}+a_{i2}a_{\varkappa 2}+\ldots+a_{ii}a_{\varkappa i}+\ldots+a_{i\varkappa}a_{\varkappa\varkappa}+\ldots+a_{in}a_{\varkappa n}\,,\ \text{dla } i \gtrless \varkappa\,,$$

zaś:

$$c_{ii}-s^2=a_{i1}^2+\ldots+(a_{ii}-s)(a_{ii}+s)+\ldots+a_{in}^2\,,$$

zatem:

$$c_{ii}=a_{i1}^2+a_{i2}^2+\ldots+a_{ii}^2+\ldots+a_{in}^2.$$

Otrzymane równanie, możemy przedstawić w postaci:

$$(-s^2)^n+C_1(-s^2)^{n-1}+C_2(-s^2)^{n-2}+\ldots+C_{n-1}(-s^2)+C_n=0,$$

w której spółczynniki: $C_1, C_2, \ldots, C_n$, są wszystkie dodatnie.

Równanie to, nie może dawać na s^2 pierwiastków ujemnych, gdyż suma liczb dodatnich, nie może być równą zeru.

Pierwiastki równania: $D(s)=0$, nie mogą więc być kształtu: $\beta\sqrt{-1}$, a że, jak łatwo dowieść, nie mogą być także kształtu: $\alpha+\beta i$, są zatem wszystkie rzeczywiste.

Wszelka forma kwadratowa, kształtu:

$$u=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\ldots+a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+\ldots+2a_{n-1\,n}x_{n-1}x_n\,,$$

której wyznacznik: $D=|a_{i\varkappa}|$, jest różny od zera, da się, za pomocą przekształcenia ortogonalnego, sprowadzić do postaci kanonicznej:

$$u=s_1y_1^2+s_2y_2^2+\ldots+s_ny_n^2,$$

o spółczynnikach rzeczywistych: $s_1, s_2, \ldots, s_n$, które są pierwiastkami równania: $D(s)=0$. Dotyczące przekształcenie ortogonalne, jest określone wzorami (20), w których spółczynniki $l_{i\varkappa}$, za pomocą równań (23) się wyznaczają.

16. Uwaga. Że pierwiastki równania: $D(s)=0$ nie mogą być kształtu: $s=\alpha+\beta i$, możemy, między innemi, dowieść w sposób następujący:

Przypuśćmy, że równanie: $D(s)=0$ ma jeden pierwiastek kształtu: $s_\varkappa=\alpha+\beta i$, tedy musiałoby ono mieć, także, drugi pierwiastek, kształtu: $s_\lambda=\alpha-\beta i$.

Z równań (24), wyznaczających odpowiednie spółczynniki $l_{i\varkappa}$, przekształcenia (20), jako liniowych, ze względu na te spółczynniki, otrzymalibyśmy tedy wartości tych spółczynników odpowiadające pierwiastkom: $s_\varkappa$ i s_λ, także, w postaci liczb zespolonych, sprzę-

żonych. Jeżeli, mianowicie, spółczynniki: $l_{i\varkappa}$, odpowiadające pierwiastkowi: $s_\varkappa$, miałyby kształt: $l_{1\varkappa}=\alpha_1+\beta_1 i$, $l_{2\varkappa}=\alpha_2+\beta_2 i$, ..., $l_{n\varkappa}=\alpha_n+\beta_n i$, natenczas, spółczynniki $l_{i\lambda}$, odpowiadające pierwiastkowi: s_λ, przedstawiałyby się w postaci: $l_{1\lambda}=\alpha_1-\beta_1 i$, $l_{2\lambda}=\alpha_2-\beta_2 i$, ..., $l_{n\lambda}=\alpha_n-\beta_n i$, a że, na mocy wzoru (22):

$$l_{1\varkappa}l_{1\lambda}+l_{2\varkappa}l_{2\lambda}+\ldots+l_{n\varkappa}l_{n\lambda}=0,\ \text{dla}\ \lambda \gtrless \varkappa,$$

przeto, otrzymujemy stąd warunek: $\alpha_1^2+\beta_1^2+\alpha_2^2+\beta_2^2+\ldots+\alpha_n^2+\beta_n^2=0$, który jest niedopuszczalny. Musiałoby, bowiem, wówczas być: $\alpha_1=\beta_1=\ldots=\alpha_n=\beta_n=0$; byłyby więc także spółczynniki: $l_{1\varkappa}=l_{2\varkappa}=\ldots=l_{n\varkappa}=0$, co jest niemożliwem, gdyż, na mocy wzoru (22), ma być: $l_{1\varkappa}^2+l_{2\varkappa}^2+\ldots+l_{n\varkappa}^2=1$. Pierwiastki równania: $D(s)=0$ nie mogą być, więc, zespolone.

17. Sprowadzenie formy kwadratowej do postaci kanonicznej za pomocą przekształceń jednomodułowych. Mając formę kwadratową:

$$u=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\ldots+a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+\ldots+2a_{n-1\,n}x_{n-1}x_n,$$

sprowadzić do postaci kanonicznej: $u=s_1y_1^2+s_2y_2^2+\ldots+s_ny_n^2$, za pomocą pewnego przekształcenia liniowego, określonego wzorami:

$$\begin{aligned} x_1&=l_{11}y_1+l_{12}y_2+\ldots+l_{1n}y_n\\ x_2&=l_{21}y_1+l_{22}y_2+\ldots+l_{2n}y_n\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_n&=l_{n1}y_1+l_{n2}y_2+\ldots+l_{nn}y_n, \end{aligned}$$

możemy to uskutecznić na nieskończenie wiele sposobów, gdyż, między n^2 spółczynnikami $l_{i\varkappa}$, niewiadomego przekształcenia, zachodzić musi tylko $\binom{n}{2}$ warunków. Możemy więc: $n^2-\binom{n}{2}$, t. j. $\frac{n(n+1)}{2}$ warunków, przyjąć dowolnie.

Przyjmijmy, w tym celu, spółczynniki, kształtu: $l_{ii}=1$, a nadto, spółczynniki: $l_{i1}=l_{i2}=\ldots=l_{i,i-1}=0$, $i=1,2,\ldots,n$, i zastosujmy do danej formy kwadratowej przekształcenie, kształtu:

$$\begin{aligned} x_1&=y_1+l_{12}y_2+l_{13}y_3+\ldots+l_{1n}y_n\\ x_2&=\quad\ \ y_2+l_{23}y_3+\ldots+l_{2n}y_n\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_n&=\qquad\qquad\qquad\qquad y_n, \end{aligned}\tag{27}$$

w którem mamy właśnie $\binom{n}{2}$ niewiadomych spółczynników. Moduł L, tego przekształcenia, jest równy 1, przekształcenie samo, jest więc przekształceniem jednomodułowem, a jego przekształcenie odwrotne określa się wzorami:

$$\begin{aligned} y_1&=x_1+\lambda_{12}x_2+\lambda_{13}x_3+\ldots+\lambda_{1n}x_n\\ y_2&=\quad\ \ x_2+\lambda_{23}x_3+\ldots+\lambda_{2n}x_n\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n&=\qquad\qquad\qquad\qquad x_n. \end{aligned}\tag{28}$$

Jeżeli to przekształcenie, sprowadza formę kwadratową, n zmiennych, do postaci kanonicznej: $u=s_1y_1^2+s_2y_2^2+\ldots+s_ny_n^2$, to sprowadza ją także przy r zmiennych, gdzie $r<n$, do postaci: $u=s_1y_1^2+s_2y_2^2+\ldots+s_ry_r^2$, gdyż, dla $x_{r+1}=x_{r+2}=\ldots=x_n=0$, jest także: $y_{r+1}=y_{r+2}=\ldots=y_n=0$.

Wyróżnik formy pierwotnej, kształtu:

$$u_n^2=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\ldots+a_{rr}x_r^2+2a_{12}x_1x_2+\ldots+2a_{r-1\,r}x_{r-1}x_r,$$

w postaci:

$$D_r=\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1r}\\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2r}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{r1}, & a_{r2}, & \ldots, & a_{rr} \end{vmatrix}=|a_{i\varkappa}|,\ (i,\varkappa=1,2,\ldots,r),$$

[illegible]

$$[\text{illegible}] > 0.$$

19. Prawo bezwładności form kwadratowych. Forma kwadratowa, o n zmiennych, da się sprowadzić do postaci kanonicznych nieskończenie wielu sposobami; nieskończoność ta jest rzędu: $\frac{1}{2}n(n+1)$-go, możemy, bowiem, w odpowiednich wzorach przekształceń, przyjąć dowolnie $\frac{1}{2}n(n+1)$ spółczynników. Danej formie kwadratowej, n zmiennych, odpowiada, zatem: $\infty^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ postaci kanonicznych. Postacie te mają ważną własność wspólną.

Weźmy pod uwagę dowolne dwie postacie kanoniczne jednej i tej samej formy kwadratowej, i oznaczmy przez $s_1, s_2, \ldots, s_n$, spółczynniki jednej, a przez $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, spółczynniki drugiej postaci kanonicznej, tejże formy, natenczas, oznaczając odnośne zmienne, w pierwszej postaci przez: $y_1, y_2, \ldots, y_n$, w drugiej przez: $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, otrzymujemy, dla tej samej formy kwadratowej: $\Sigma a_{i\varkappa} x_i x_\varkappa$, tożsamość:

$$s_1 y_1^2 + s_2 y_2^2 + \ldots + s_n y_n^2 = \sigma_1 \eta_1^2 + \sigma_2 \eta_2^2 + \ldots + \sigma_n \eta_n^2, \tag{30}$$

gdzie zmienne η wyznaczają się, liniowo, przez zmienne y, w postaci:

$$\eta_i = \lambda_{1i} y_1 + \lambda_{2i} y_2 + \ldots + \lambda_{ni} y_n.$$

Obie postacie kanoniczne, tej samej formy kwadratowej, muszą mieć jednakową ilość spółczynników s i σ tego samego znaku.

Przypuśćmy, bowiem, że, po lewej stronie tożsamości (30), istnieje α spółczynników s dodatnich, a po prawej β spółczynników σ dodatnich, przytem $\alpha < \beta$, natenczas, moglibyśmy α zmiennym y, posiadającym spółczynniki s dodatnie, nadać wartości równe zeru, a pozostałoby jeszcze $n-\alpha$ zmiennych y, mających spółczynniki ujemne, którym to zmiennym moglibyśmy nadać takie wartości, aby, po prawej stronie, znikły wszystkie $n-\beta$, zmienne η, które mają spółczynniki σ ujemne. Wobec $n-\beta < n-\alpha$, dałoby się to, widocznie, uskutecznić nieskończenie wielu sposobami. Wskutek tego otrzymalibyśmy, po lewej stronie tożsamości (30), wyrazy wyłącznie ujemne, po prawej stronie tożsamości, wyrazy wyłącznie dodatnie; założona tożsamość nie mogłaby więc, w przypadku: $\alpha < \beta$, być spełnioną, tak samo, nie mogłaby być spełnioną w przypadku: $\alpha > \beta$. Musi być więc $\alpha = \beta$. A zatem: *We wszystkich postaciach kanonicznych, kształtu:* $s_1 y_1^2 + s_2 y_2^2 + \ldots + s_n y_n^2$, *jednej i tej samej formy kwadratowej, ilość kwadratów, opatrzonych tym samym znakiem, jest stale jednakową.*

Prawo to, podane przez Sylwestra, nazywamy prawem bezwładności form kwadratowych.

Chcąc, więc, poznać znaki w postaciach kanonicznych danej formy kwadratowej, dość jest poznać je w jednej postaci kanonicznej. Z postaci: (29) widoczna, że spółczynnik s_r będzie miał znak $+$, lub -1, stosownie do tego, czy wyznaczniki D_{r-1} i D_r mają te same, czy też przeciwne, znaki.

A zatem: *Ilość wyrazów ujemnych, w każdej postaci kanonicznej, danej formy kwadratowej:* $\Sigma a_{i\varkappa} x_i x_\varkappa$, *jest równą ilości zmiany znaków w szeregu wartości:*

$$1, D_1, D_2, D_3, \ldots, D_{n-1}, D_n,$$

gdzie: $D_r = |a_{i\varkappa}|$, $i, \varkappa = 1, 2, \ldots, r$.

20. Zastosowanie przekształceń liniowych do dowolnej funkcyi ilukolwiek zmiennych, niezależnych. Niech będzie daną dowolna funkcya n zmiennych, niezależnych: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, w postaci: $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Zastosujmy do niej przekształcenie liniowe, określone wzorami:

$$x_i = l_{i1} y_1 + l_{i2} y_2 + \ldots + l_{in} y_n, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{31}$$

o module: $|l_{i\varkappa}|=L$, różnym od zera, a otrzymamy, jako funkcyę zmiennych: $y_1, y_2, \ldots, y_n$, funkcyę przekształconą, w postaci: $u=F(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, przyczem, dla wartości: $y_1, y_2, \ldots, y_n$, związanych ze zmiennymi: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, równaniami (31), zachodzi równość: $F(y_1, y_2, \ldots, y_n)=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Z równości tej otrzymujemy:

$$\frac{\partial F}{\partial y_\varkappa}=F_\varkappa=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_\varkappa}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_\varkappa}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_\varkappa},$$

a że, na mocy (31): $\frac{\partial x_1}{\partial y_\varkappa}=l_{1\varkappa}$, $\frac{\partial x_2}{\partial y_\varkappa}=l_{2\varkappa}$, ..., $\frac{\partial x_n}{\partial y_\varkappa}=l_{n\varkappa}$, przeto, dostajemy:

$$\frac{\partial F}{\partial y_\varkappa}=l_{1\varkappa}\frac{\partial f}{\partial x_1}+l_{2\varkappa}\frac{\partial f}{\partial x_2}+\ldots+l_{n\varkappa}\frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Kładąc: $\frac{\partial f}{\partial x_1}=f_1$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}=f_2$, ..., $\frac{\partial f}{\partial x_n}=f_n$, otrzymujemy wzór:

$$F_\varkappa=l_{1\varkappa}f_1+l_{2\varkappa}f_2+\ldots+l_{n\varkappa}f_n, \tag{32}$$

wyrażający liniowo pochodne cząstkowe funkcyi przekształconej, przez pochodne cząstkowe funkcyi pierwotnej i przez spółczynniki liniowego przekształcenia.

Wyznaczmy teraz drugie pochodne funkcyi przekształconej. W tym celu, otrzymamy z (32):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_\varkappa}=l_{1\varkappa}\frac{\partial f_1}{\partial y_i}+l_{2\varkappa}\frac{\partial f_2}{\partial y_i}+\ldots+l_{n\varkappa}\frac{\partial f_n}{\partial y_i}.$$

Kładąc: $\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_\varkappa}=F_{i\varkappa}$, a zarazem: $\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_\varkappa}=f_{i\varkappa}$, i uwzględniając, że:

$$\frac{\partial f_\varkappa}{\partial y_i}=\frac{\partial f_\varkappa}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_i}+\frac{\partial f_\varkappa}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_i}+\ldots+\frac{\partial f_\varkappa}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_i},$$

otrzymujemy wzór ogólny:

$$\begin{aligned}F_{i\varkappa}=l_{1\varkappa}(l_{1i}f_{11}+l_{2i}f_{12}+\ldots+l_{ni}f_{1n})+l_{2\varkappa}(l_{1i}f_{21}+l_{2i}f_{22}+\ldots+l_{ni}f_{2n})+\\+\ldots+l_{n\varkappa}(l_{1i}f_{n1}+l_{2i}f_{n2}+\ldots+l_{ni}f_{nn}),\end{aligned} \tag{33}$$

wyrażający drugie pochodne cząstkowe funkcyi przekształconej przez drugie pochodne funkcyi pierwotnej i przez spółczynniki przekształcenia.

21. Drugie pochodne cząstkowe danej funkcyi n zmiennych, niezależnych: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dadzą się ustawić w wyznacznik n-go rzędu:

$$\begin{vmatrix} f_{11}, f_{12}, \ldots, f_{1n} \\ f_{21}, f_{22}, \ldots, f_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_{n1}, f_{n2}, \ldots, f_{nn} \end{vmatrix} = |f_{i\varkappa}|,\ (i, \varkappa=1, 2, \ldots, n),$$

który jest, z powodu, że $f_{i\varkappa}=f_{\varkappa i}$, wyznacznikiem symetrycznym, a zarazem wyróżnikiem formy kwadratowej, przedstawiającej drugą różniczkę zupełną funkcyi: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kształtu:

$$d^2f=l_{11}\,dx_1{}^2+l_{22}\,dx_2{}^2+\ldots+l_{nn}\,dx_n{}^2+2\,l_{12}\,dx_1\,dx_2+\ldots+2\,l_{n-1,n}\,dx_{n-1}\,dx_n.$$

Wyznacznik ten nazywa się zwykle w y z n a c z n i k i e m H e s s e'go, albo, krócej, H e s s y a n e m f u n k c y i: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, i oznacza się symbolem: $H(f)$.

Mając wyznaczony hessyan danej funkcyi: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, w postaci:

$$H(f)=\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_\varkappa}\right|=|f_{i\varkappa}|,\ (i, \varkappa=1, 2, \ldots, n),$$

wyznaczmy hessyan $H(F)$ funkcyi przekształconej: $F(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

W tym celu, połóżmy: $l_{1i}f_{x1}+l_{2i}f_{x2}+\dots+l_{ni}f_{xn}=A_{ix}$, a otrzymamy z wzoru (32): $F_{ix}=l_{1x}A_{i1}+l_{2x}A_{i2}+\dots+l_{nx}A_{in}$, a stąd wyznacznik:

$$|F_{ix}|=|l_{1x}A_{i1}+l_{2x}A_{i2}+\dots+l_{nx}A_{in}|=|l_{ix}|.|A_{ix}|,$$

a że: $|A_{ix}|=|l_{1i}f_{x1}+l_{2i}f_{x2}+\dots+l_{ni}f_{xn}|=|l_{ix}|.|f_{ix}|$, przeto, otrzymujemy!

$$|F_{ix}|=|l_{ix}|^2.|f_{ix}|, \text{ czyli: } H(F)=L^2.H(f).$$

To znaczy: *Hessyan funkcyi, liniowo przekształconej, jest równy hessyanowi funkcyi pierwotnej, pomnożonemu przez kwadrat modułu odnośnego przekształcenia liniowego.*

Jeżeli zastosowane przekształcenie jest przekształceniem ortogonalnem, natenczas: $|l_{ix}|^2=L^2=1$, a zatem: $H(F)=H(f)$.

To znaczy: *Hessyan danej funkcyi ilukolwiek zmiennych nie zmienia swej postaci, wskutek przekształcenia ortogonalnego tejże funkcyi.*

22. Wnioski. Jeżeli dana funkcya jest funkcyą jednorodną n zmiennych, m-go stopnia, natenczas, jej pochodne cząstkowe drugiego rzędu, są funkcyami jednorodnemi $(m-2)$-go stopnia; hessyan formy m-go stopnia, o n zmiennych, jest zatem funkcyą jednorodną $n(m-2)$-go stopnia tychże zmiennych, hessyan formy kwadratowej jest funkcyą zerowego stopnia, i zarazem wyróżnikiem tej formy.

23. Zastosowanie przekształceń liniowych do układu funkcyj ilukolwiek zmiennych, niezależnych. Niech będzie dany układ n funkcyj n zmiennych, niezależnych, kształtu: $u_i=f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(i=1, 2, \dots, n)$. Zastosujmy do tego układu przekształcenie liniowe, określone wzorami:

$$x_i=l_{i1}y_1+l_{i2}y_2+\dots+l_{in}y_n, \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

o module $|l_{ix}|=L$, różnym od zera, a otrzymamy układ przekształcony, w postaci: $u_i=F_i(y_1, y_2, \dots, y_n)$, $(i=1, 2, \dots, n)$, przyczem, dla wszystkich wartości zmiennych y_i, związanych ze zmiennemi x_i równaniami przekształceń jest:

$$F_i(y_1, y_2, \dots, y_n)=f_i(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Z równości tej, otrzymujemy, pierwsze pochodne cząstkowe poszczególnych funkcyj układu przekształconego, w postaci:

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_x}=\frac{\partial f_i}{\partial x_1}.\frac{\partial x_1}{\partial y_x}+\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_x}+\dots+\frac{\partial f_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_x},$$

a że: $\frac{\partial x_1}{\partial y_x}=l_{1x}$, $\frac{\partial x_2}{\partial y_x}=l_{2x}$, ..., $\frac{\partial x_n}{\partial y_x}=l_{nx}$, zatem, otrzymujemy:

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_x}=l_{1x}\frac{\partial f_i}{\partial x_1}+l_{2x}\frac{\partial f_i}{\partial x_2}+\dots+l_{nx}\frac{\partial f_i}{\partial x_n}.$$

Pierwsze pochodne cząstkowe poszczególnych funkcyj, układu przekształconego, są, więc, liniowemi funkcyami pochodnych cząstkowych odnośnych funkcyj układu pierwotnego.

Pochodne cząstkowe układu n funkcyj, o n zmiennych, kształtu:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

dadzą się zestawić w wyznacznik funkcyjny n-go rzędu, w postaci:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}=\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_x}\right|, \quad (i, x=1, 2, \dots, n),$$

który nazywamy **wyznacznikiem Jakobi'ego**, albo krócej, **Jakobianem układu funkcyj**, i oznaczmy symbolem:

$$J(f_1, f_2, \dots, f_n), \text{ albo: } \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}.$$

Utwórzmy Jakobian układu przekształconego, a otrzymamy:

$$J(F_1, F_2, \dots, F_n) = \frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)} = \left|\frac{\partial F_i}{\partial y_\varkappa}\right|, \quad (i, \varkappa = 1, 2, \dots, n),$$

a że:

$$\left|\frac{\partial F_i}{\partial y_\varkappa}\right| = \left| l_{1\varkappa}\frac{\partial f_i}{\partial x_1} + l_{2\varkappa}\frac{\partial f_i}{\partial x_2} + \dots + l_{n\varkappa}\frac{\partial f_i}{\partial x_n}\right| = |l_{i\varkappa}| . \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_\varkappa}\right|,$$

zatem, otrzymujemy:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}, & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}, & \dots, & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}, & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}, & \dots, & \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \\ . & . & . & . \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1}, & \frac{\partial F_n}{\partial y_2}, & \dots, & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_{11}, & l_{12}, & \dots, & l_{1n} \\ l_{21}, & l_{22}, & \dots, & l_{2n} \\ . & . & . & . \\ l_{n1}, & l_{n2}, & \dots, & l_{nn} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ . & . & . & . \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

czyli: $J(F_1, F_2, \dots, F_n) = L . J(f_1, f_2, \dots, f_n)$.

To znaczy: *Jakobian układu liniowo przekształconego, n funkcyj, o n zmiennych, niezależnych, jest równy Jakobianowi układu pierwotnego, pomnożonemu przez moduł odnośnego przekształcenia.*

24. Uwaga. Jakobian układu form m-go stopnia o n zmiennych, niezależnych, jest funkcyą $n(m-1)$-go stopnia tychże n zmiennych i jest, więc, funkcyą zerowego stopnia, czyli, liczbą stałą tylko dla układu form liniowych, tworząc, w tym razie, wyznacznik, utworzony ze spółczynników tychże form, czyli, t. z. wyznacznik układu form liniowych.

Ćwiczenia XXII.

Wyznaczyć moduły następujących przekształceń liniowych i wyprowadzić odnośne przekształcenia odwrotne:

1) $x_1 = 2y_1 + 7y_2$, $x_2 = y_1 + 5y_2$. 2) $x = ax' + by'$, $y = a'x' + b'y'$. 3) $x = a\xi + b\eta$, $y = b\xi + a\eta$.

4) $x_1 = 4y_1 + 9y_2 + 2y_3$, $x_2 = 3y_1 + 5y_2 + 7y_3$, $x_3 = 8y_1 + y_2 + 6y_3$. 5) $x = ax' + by' + cz'$, $y = a'x' + b'y' + c'z'$, $z = a''x' + b''y' + c''z'$.

6) $x_1 = 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4$, $x_2 = y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4$, $x_3 = y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4$, $x_4 = y_1 + y_2 + y_3 + 2y_4$. 7) $x_1 = 5y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 6y_4$, $x_2 = 6y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 8y_4$, $x_3 = 7y_1 + 5y_2 + 3y_3 + 8y_4$, $x_4 = 4y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 5y_4$.

8) $x_1 = y_1 \sin\alpha + y_2 \sin 2\alpha + \dots + y_n \sin n\alpha$
$x_2 = y_1 \sin 3\alpha + y_2 \sin 6\alpha + \dots + y_n \sin 3n\alpha$
. . . .
$x_n = y_1 \sin(2n-1)\alpha + y_2 \sin 2(2n-1)\alpha + \dots + y_n \sin n(2n-1)\alpha$.

Wyprowadzić warunki, pod którymi, niżej podane przekształcenia, będą przekształceniami ortogonalnemi:

9) $x = x'\cos\lambda_1 + y'\cos\lambda_2$, $y = x'\sin\lambda_1 + y'\sin\lambda_2$. 10) $x = a_1x' + a_2y'$, $y = b_1x' + b_2y'$.

11) $x = x'\cos\lambda_1 + y'\cos\lambda_2 + z'\cos\lambda_3$
$y = x'\cos\mu_1 + y'\cos\mu_2 + z'\cos\mu_3$
$z = x'\cos\nu_1 + y'\cos\nu_2 + z'\cos\nu_3$.

12) $x = a_1x' + a_2y' + a_3z'$
$y = b_1x' + b_2y' + b_3z'$
$z = c_1x' + c_2y' + c_3z'$.

13) Wykazać, że przekształcenie, określone wzorami:

$$x = x'\cos\alpha - z'\sin\alpha, \quad y = y', \quad z = x'\sin\alpha + z'\cos\alpha$$

jest przekształceniem ortogonalnem i wyprowadzić odnośne przekształcenie odwrotne.

14) Wykazać, że wyznacznik n^2 elementów, od siebie niezależnych: $D = |a_{i\varkappa}|$ możemy przedstawić, w postaci:

$$D = a_{i1}\frac{\partial D}{\partial a_{i1}} + a_{i2}\frac{\partial D}{\partial a_{i2}} + \ldots + a_{in}\frac{\partial D}{\partial a_{in}}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

albo:

$$D = a_{1\varkappa}\frac{\partial D}{\partial a_{1\varkappa}} + a_{2\varkappa}\frac{\partial D}{\partial a_{2\varkappa}} + \ldots + a_{n\varkappa}\frac{\partial D}{\partial a_{n\varkappa}}, \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$$

Jeżeli: $D = |a_{i\varkappa}|$, $(i, \varkappa = 1, 2, \ldots, n)$, wykazać, że, przy $i \gtrless k$:

15) $$a_{i1}\frac{\partial D}{\partial a_{\varkappa 1}} + a_{i2}\frac{\partial D}{\partial a_{\varkappa 2}} + \ldots + a_{in}\frac{\partial D}{\partial a_{\varkappa n}} = 0, \quad a_{1i}\frac{\partial D}{\partial a_{1\varkappa}} + a_{2i}\frac{\partial D}{\partial a_{2\varkappa}} + \ldots + a_{ni}\frac{\partial D}{\partial a_{n\varkappa}} = 0.$$

16) $$\frac{\partial D}{\partial a_{i1}} = a_{\varkappa 1}\frac{\partial^2 D}{\partial a_{i1}\,\partial a_{\varkappa 1}} + a_{\varkappa 2}\frac{\partial^2 D}{\partial a_{i1}\,\partial a_{\varkappa 2}} + \ldots + a_{\varkappa n}\frac{\partial^2 D}{\partial a_{i1}\,\partial a_{\varkappa n}}$$

$$\frac{\partial D}{\partial a_{in}} = a_{\varkappa 1}\frac{\partial^2 D}{\partial a_{in}\,\partial a_{\varkappa 1}} + a_{\varkappa 2}\frac{\partial^2 D}{\partial a_{in}\,\partial a_{\varkappa 2}} + \ldots + a_{\varkappa n}\frac{\partial^2 D}{\partial a_{in}\,\partial a_{\varkappa n}}.$$

17) $$D = \begin{vmatrix} a_{i1}, & a_{i2} \\ a_{\varkappa 1}, & a_{\varkappa 2} \end{vmatrix} \frac{\partial^2 D}{\partial a_{i1}\,\partial a_{\varkappa 2}} + \begin{vmatrix} a_{i2}, & a_{i3} \\ a_{\varkappa 2}, & a_{\varkappa 3} \end{vmatrix} \frac{\partial^2 D}{\partial a_{i2}\,\partial a_{\varkappa 3}} + \ldots + \begin{vmatrix} a_{i,\,n-1}, & a_{in} \\ a_{\varkappa,\,n-1}, & a_{\varkappa n} \end{vmatrix} \frac{\partial^2 D}{\partial a_{i,\,n-1}\,\partial a_{\varkappa n}}.$$

18) Wykazać, że w wyznaczniku symetrycznym: $D = |a_{i\varkappa}|$, przyczem: $a_{i\varkappa} = a_{\varkappa i}$, mamy: $\frac{\partial D}{\partial a_{i\varkappa}} = 2\alpha_{i\varkappa}$, gdy: $i \gtrless \varkappa$, zaś: $\frac{\partial D}{\partial a_{ii}} = \alpha_{ii}$, gdzie $\alpha_{i\varkappa}$ jest minorem elementu $a_{i\varkappa}$.

19) Wykazać, że kwadrat jakiegokolwiek wyznacznika, jest zawsze wyznacznikiem symetrycznym.

20) Wykazać, że kwadrat wyznacznika ortogonalnego jest zawsze równy 1.

Wyznaczyć przekształcenia liniowe, któreby sprowadziły następujące formy liniowe do, obok podanych, postaci:

21) $u_2' = ax + by$, do postaci: $X + Y$;

22) $u_3' = ax + by + cz$, do postaci: $X + Y + Z$;

23) $u_4' = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4$, do postaci: $X_1 + X_2 + X_3 + X_4$;

24) $u_n' = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$, do postaci: $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

25) Układ form liniowych, dwójkowych, kształtu: $f_1 = 2x + 4y$, $f_2 = x + 11y$, przekształcić, za pomocą podstawienia: $x = 5x' - 7y'$, $y = 4x' + 3y'$, i obrachować wyznacznik układu przekształconego.

26) Układ form liniowych, trójkowych:

$$f_1 = x + 4y + 5z, \quad f_2 = 4x + 2y + 6z, \quad f_3 = 5x + 6y + 3z,$$

przekształcić, za pomocą wzorów: $x = x'$, $y = 2x' + y'$, $z = 3x' + y' + z'$, i obrachować wyznacznik układu form tak przekształconych.

27) Układ form liniowych, czwórkowych:

$$f_1 = 4x_1 + 9x_2 + 13x_3 + 17x_4, \quad f_2 = 8x_1 + 18x_2 + 23x_3 + 33x_4,$$
$$f_3 = 13x_1 + 30x_2 + 40x_3 + 54x_4 \quad f_4 = 11x_1 + 24x_2 + 37x_3 + 46x_4,$$

przekształcić, za pomocą podstawienia:

$$x_1 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4, \quad x_2 = y_1 - y_2 - y_3 + y_4,$$
$$x_3 = y_1 - y_2 + y_3 - y_4, \quad x_4 = y_1 + y_2 - y_3 - y_4$$

i obrachować wyznacznik układu form przekształconych.

28) Formę kwadratową, dwójkową $u_2^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2$ przekształcić, za pomocą wzorów: $x = \alpha\xi + \beta\eta$, $y = \gamma\xi + \delta\eta$, na formę: $u_2^2 = A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2$, i wykazać, że:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}.$$

29) Zastosować przekształcenie liniowe: $x = \alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta$, $y = \alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2\zeta$, $z = \alpha_3\xi + \beta_3\eta + \gamma_3\zeta$, do formy kwadratowej, trójkowej:

$$u_3^2 = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2exz + 2fxy$$

i znaleść wyróżnik formy przekształconej.

30) Formę kwadratową, czwórkową:

$$u_4{}^2 = a_{11}x_1{}^2 + a_{22}x_2{}^2 + a_{33}x_3{}^2 + a_{44}x_4{}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 + \\ + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4,$$

przekształcić, na podstawie wzorów:

$$x_1 = l_{11}y_1 + l_{12}y_2 + l_{13}y_3 + l_{14}y_4, \quad x_2 = l_{21}y_1 + l_{22}y_2 + l_{23}y_3 + l_{24}y_4,$$
$$x_3 = l_{31}x_1 + l_{32}y_2 + l_{33}y_3 + l_{34}y_4, \quad x_4 = l_{41}y_1 + l_{42}y_2 + l_{43}y_3 + l_{44}y_4,$$

i obrachować wyróżnik formy przekształconej.

31) Dowieść, że, przekształciwszy formę: $u_n{}^2 = \sum\limits_{i,x}^{n} a_{ix}x_ix_x$, gdzie $a_{ix} = a_{xi}$, za pomocą wzorów: $x_i = \sum\limits_{i=1}^{i=n} b_iy_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, na formę: $u_n{}^2 = \sum\limits_{i,x}^{n} b_{ix}x_ix_x$, otrzymujemy wyróżnik formy przekształconej, w postaci: $|b_{ix}| = |l_{ix}|^2 . |a_{ix}|$.

32) Wyznaczyć przekształcenia liniowe, sprowadzające formę kwadratową, dwójkową: $u_2{}^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2$, do postaci kanonicznej: $u_n{}^2 = s_1X^2 + s_2Y^2$.

33) Dowieść, że równanie drugiego stopnia, kształtu: $\begin{vmatrix} a-s, & b \\ b, & c-s \end{vmatrix} = 0$, ma zawsze rzeczywiste pierwiastki, i zbadać, kiedy te pierwiastki będą tego samego znaku, a kiedy przeciwnego.

34) Podać warunki, pod którymi forma kwadratowa, dwójkowa: $u_2{}^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2$ da się przekształcić na jedną z następujących postaci kanonicznych:

$$\alpha)\ X^2 + Y^2, \quad \beta)\ X^2 - Y^2, \quad \gamma)\ -X^2 + Y^2, \quad \delta)\ -X^2 - Y^2.$$

35) Wykazać, że forma dwójkowa: $u_2{}^2 = 15x^2 + 5y^2 + 16xy$ da się założyć na sumę kwadratów, kształtu: $(ax + by)^2 + (a'x + b'y)^2$.

36) Wykazać, że forma dwójkowa: $u_2{}^2 = 5x^2 + 3y^2 + 8xy$ da się rozłożyć na różnicę kwadratów, kształtu: $(lx + my)^2 - (l'x + m'y)^2$.

37) Wyznaczyć przekształcenia liniowe, które sprowadzają formę kwadratową, trójkową: $u_3{}^2 = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$, do postaci kanonicznej: $u_3{}^2 = s_1X^2 + s_2Y^2 + s_3Z^2$.

38) Wykazać, że kwadratowa forma, trójkowa:

$$u_3{}^2 = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz,$$

da się sprowadzić do postaci:

$$u_3{}^2 = a_{11}\left(x + \frac{a_{12}}{a_{11}}y + \frac{a_{13}}{a_{11}}z\right)^2 + \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2}{a_{11}}\left(y - \frac{a_{11}a_{23} - a_{13}a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2}z\right)^2 + \\ + \frac{a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{23}{}^2 - a_{22}a_{13}{}^2 - a_{33}a_{12}{}^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2}z^2.$$

Następujące kwadratowe formy trójkowe sprowadzić do postaci kanonicznych:

39) $x^2 + y^2 - 3z^2 + xy + 2xz + 3yz$;

40) $x^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 2yz$;

41) $5x^2 + 13y^2 + 2z^2 + 16xy + 4xz + 6yz$;

42) $3x^2 + 5y^2 - 2z^2 + 3xy + 6xz + 3yz$;

43) $5x^2 + 13y^2 + z^2 + 16xy + 10xz + 16yz$.

Wykazać możliwość następujących przekształceń form trójkowych:

44) $3x^2 + 12y^2 + 27z^2 + 4xy + 6xz - 12yz = X^2 + Y^2 + Z^2$;

45) $5x^2 + y^2 - 5z^2 - 3xy - 3xz + 2yz = X^2 + Y^2 - Z^2$;

46) $4x^2 - y^2 + 3z^2 + 2xy + 6xz + 2yz = X^2 - Y^2 - Z^2$.

47) Sprowadzić kwadratową formę trójkową, kształtu: $u_3{}^2 = xy + xz + yz$, do postaci: $u_3{}^2 = \frac{1}{3}(x + y + z)^2 - \frac{1}{4}(x - y)^2 - \frac{1}{12}(x + y - 2z)^2$.

Sprowadzić do postaci kanonicznych następujące formy czwórkowe:

48) $x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + x_4{}^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - 7x_1x_4 + 3x_2x_3 - 14x_2x_4 - 25x_3x_4$,

49) $-x_1{}^2 - x_2{}^2 + 3x_3{}^2 - x_4{}^2 + 4x_1x_3$;

50) $x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 - x_4{}^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$;

51) $x_4{}^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_3x_4$.

Wyznaczyć hessyany następujących form dwójkowych:

52) $u_2{}^2 = a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2$;

53) $u_3{}^3 = a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3$;

54) $u_2^4 = a_0x^4 + 4a_1x^3y + 6a_2x^2y^2 + 4a_3xy^3 + a_4y^4$;

55) $u_2^n = a_0x^n + \binom{n}{1}a_1x^{n-1}y + \binom{n}{2}a_2x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n$.

Znaleść hessyany następujących form trójkowych:

56) $u_3^2 = a_0x^2 + a_1y^2 + a_2z^2 + 2a_3xy + 2a_4xz + 2a_5yz$;

57) $u_3^3 = a_0x^3 + a_1y^3 + a_2z^3 + 3a_3x^2y + 3a_4xy^2 + 3a_5x^2z + 3a_6xz^2 + 3a_7y^2z +$
$+ 3a_8yz^2 + 6a_9xyz$.

Znaleść hessyany następujących form czwórkowych:

58) $u_4^2 = a_0x_1^2 + a_1x_2^2 + a_2x_3^2 + a_3x_4^2 + 2a_4x_1x_2 + 2a_5x_1x_3 + 2a_6x_1x_4 + 2a_7x_2x_3 +$
$+ 2a_8x_2x_4 + 2a_9x_3x_4$;

59) $u_4^3 = a_0x_1^3 + a_1x_2^3 + a_2x_3^3 + a_3x_4^3 + 3a_4x_1^2x_2 + 3a_5x_1x_2^2 + 3a_6x_1^2x_3 + 3a_7x_1x_3^2 +$
$+ 3a_8x_1^2x_4 + 3a_9x_1x_4^2 + 3a_{10}x_2^2x_3 + 3a_{11}x_2x_3^2 + 3a_{12}x_2^2x_4 + 3a_{13}x_2x_4^2 + 3a_{14}x_3^2x_4 +$
$+ 3a_{15}x_3x_4^2 + 6a_{16}x_1x_2x_3 + 6a_{17}x_1x_2x_4 + 6a_{18}x_1x_3x_4 + 6a_{19}x_2x_3x_4$.

60) Znaleść hessyan formy m-go stopnia o n zmiennych, kształtu:

$$u_n^m = (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n)^m.$$

Jak się przedstawiają hessyany następujących funkcyj dwu zmiennych, niezależnych:

61) $x^3 - 3xy + y^3$; 62) $y^2 - x^2(2a - x)$; 63) $xy^2 + yx^2$; 64) $(y-x)^2(x^2 - a^2)$;

65) $\sqrt{x^2+y^2}$; 66) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$; 67) $\log(x+y)$; 68) e^{x+y}; 69) $(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$;

70) $\sin\frac{x}{y}$; 71) $\arcsin\frac{x}{y}$; 72) $\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{y}$; 73) $\arcsin\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$.

Wyznaczyć hessyany następujących funkcyj trzech zmiennych, niezależnych:

74) $a^2x^2 + 2by^2 + z^4$; 75) $y(x^2+z^2) - x^3$; 76) $x^4 - 3x^2yz - xy^2z + y^2z^2$;

77) $x^4 - 2y^3z - 3y^2z^2 - 2x^2z^2 + z^4$; 78) $x^4 + y^4 - xy^2z$; 79) $\frac{xy}{x+z}$; 80) $xy - z^2\log\frac{x}{z}$;

81) $x^2\cos y - z^2\sin xy$; 82) $x^2\cos y - z^2\sin^3 y$.

Wyznaczyć Jakobiany następujących układów funkcyj:

83) $u = \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, $v = \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$; 84) $u = \cos x$, $v = \sin x\cos y$;

85) $u = x + y$, $v = x - z$, $w = xy + xz - yz - z^2$.

Rozwiązania XXII. 1) Moduł $= 3$. 4) 460. 6) 1. 7) 1. 12) $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$, $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1$, $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$, $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$, $a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 = 0$, $a_3a_1 + b_3b_1 + c_3c_1 = 0$. 25) 18. 48. 26) 1. 112. 27) 15. 16. 41) $++-$. 42) $+--$. 43) $---$. 47) $+++-$. 48) $++--$. 49) $++--$. 50) $--++$. 54) $----$. 83) $\frac{1}{(1-x^2-y^2)^2}$. 84) $\sin^2 x\sin y$. 85) 0.

Literatura. Ernesto Cesàro. Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung mit zahlreichen Übungsbeispielen, deutsch herausgegeben von Dr. Gerhard Kowalewski. Leipzig 1904. George Salmon. Vorlesungen zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen, deutsch bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler.

Tematy do rozprawek naukowych.

1. Teorya wyznaczników ortogonalnych.
2. Liniowe przekształcenia form kwadratowych.
3. Liniowe przekształcenia form dwójkowych.

Wykład XXIII.

Niezmienniki i współzmienniki form algebraicznych ilukolwiek zmiennych.

1. Określenie niezmienników danych form. Jeżeli dana forma m-go stopnia, n zmiennych: $x_1, x_2, ..., x_n$, kształtu: $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, mająca $\binom{n+m-1}{m}$, spółczynników: $a, b, c, ...$, wskutek przekształcenia liniowego:

$$x_i = l_{i1} y_1 + l_{i2} y_2 + ... + l_{in} y_n, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

o module: $L = |l_{i\varkappa}|$, $i, \varkappa = 1, 2, ..., n$, przejdzie na nową formę m-go stopnia, n zmiennych: $y_1, y_2, ..., y_n$, kształtu: $F(y_1 y_2, .., y_n)$, mającą analogicznie $\binom{n+m-1}{m}$ spółczynników: $A, B, C, ...$, a przytem, między pewnem wyrażeniem: $\varphi(a, b, c, ...)$, utworzonem ze spółczynników: $a, b, c, ...$, pierwotnej formy a wyrażeniem: $\varphi(A, B, C, ...)$, utworzonem, w taki sam sposób, z odpowiednich spółczynników: $A, B, C, ...$, formy przekształconej, zachodzi związek:

$$\varphi(A, B, C, ...) = L^{\lambda} \varphi(a, b, c, ...), \tag{1}$$

natenczas, nazywamy wyrażenie φ niezmiennikiem (inwaryantem) danej formy f, ze względu na przyjęte przekształcenie o module L, a wykładnik λ nazywa się wskaźnikiem odnośnego niezmiennika.

Jeżeli $\lambda = 0$, natenczas, zachodzi między spółczynnikami nowej, a odpowiednimi spółczynnikami pierwotnej formy, związek, niezależny od przyjętego przekształcenia, w postaci:

$$\varphi(A, B, C, ...) = \varphi(a, b, c, ...), \tag{2}$$

a wyrażenie $\varphi(a, b, c, ...)$, nazywamy wtedy: niezmiennikiem bezwzględnym danej formy.

Jeżeli funkcya $\varphi(a, b, c, ...)$, utworzona ze spółczynników kilku form, czyni zadość równaniu (1), natenczas nazywamy funkcyę $\varphi(a, b, c)$, wspólnym niezmiennikiem danych form.

Według powyższego określenia, jest n. p. wyróżnik $D = |a_{i\varkappa}|$ danej formy kwadratowej: $u_n{}^2 = \Sigma a_{i\varkappa} x_i x_\varkappa$ niezmiennikiem tej formy ze wskaźnikiem $\lambda = 2$, a wyznacznik układu form liniowych, niezmiennikiem tego układu ze wskaźnikiem $\lambda = 1$.

2. Określenie współzmienników danych form. Jeżeli funkcya: $\varphi(a, b, c, ...)$, prócz spółczynników: $a, b, c, ...$ danej formy: $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, zawiera jeszcze zmienne; $x_1, x_2, ..., x_n$ tej formy, a więc, jest kształtu: $\varphi(a, b, c, ..., x_1, x_2, ..., x_n)$,

kutek liniowego przekształcenia danej formy na formę: $F(y_1, y_2, ..., y_n)$, podstawie wzorów: $x_i = l_{i1} y_1 + l_{i2} y_2 + ... + l_{in} y_n$, o module $|l_{i\varkappa}| = L$, dostaje związek:

$$\varphi(a, b, c, ..., x_1, x_2, ..., x_n) = L^\lambda . \varphi(A, B, C, ..., y_1, y_2, ..., y_n), \quad (3)$$

wczas funkcyę: $\varphi(a, b, c, ..., x_1, x_2, ..., x_n)$, nazywamy **współzmiennikiem** (**kowaryantem**) danej formy: $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, a wykładnik λ nazywamy **wskaźnikiem współzmiennika**.

Według tego określenia, będzie hessyan danej formy m-go stopnia, przypadku, gdy $m > 2$, współzmiennikiem tej formy, o wskaźniku $\lambda = 2$, Jakobian układu form, ich wspólnym współzmiennikiem, o wskaźniku $\lambda = 1$.

3. Ilość niezmienników bezwzględnych danej formy. Zastanówmy się pierw nad tem, czy istnieją formy, któreby nie miały niezmienników bezwzględnych, a względnie, ile niezmienników bezwzględnych posiada dana forma.

Za pomocą przekształcenia liniowego: $x_i = l_{1i} y_1 + l_{2i} y_2 + l_{3i} y_3 + ... + l_{ni} y_n$, mającego n^2 spółczynników: $l_{i\varkappa}$ $(i, \varkappa = 1, 2, ..., n)$, moglibyśmy daną formę m-go stopnia, o n zmiennych, mającą spółczynniki: $a, b, c, ...$, przekształcić w inną formę m-go stopnia, któraby miała spółczynniki: $A, B, C, ...$, o pewnej, z góry podanej, wartości, skoroby ilość tych spółczynników formy była mniejszą, a najwyżej, równą ilości spółczynników przekształcenia, t. j., gdyby było: $\binom{n+m-1}{m} \leq n^2$. Musiałoby, więc, wtedy być:

$$\frac{(n+m-1)(n+m-2)...(n+1).n}{1 \;.\; 2 \;.\; ...(m-1).m} \leq n^2,$$

t. j.:

$$\frac{(n+1).(n+2)...(n+m-2)(n+m-1)}{2 \;.\; 3 \;...\; (m-1) \;.\; m} \leq n. \quad (4)$$

Uwzględniając, że ilość zmiennych n jest liczbą całkowitą, znajdziemy, iloczyn pierwszych dwóch czynników, po lewej stronie nierówności (4):

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2.3} = \frac{n^2+3n+2}{6} = \frac{6n+n^2-3n+2}{6} = n + \frac{1}{6}(n-1)(n-2)$$

jest większy od n, a co najmniej równy n, co nastąpi dla $n = 1, 2$.

Ponieważ następne czynniki, jak: $\frac{n+3}{4}, ..., \frac{n+m-1}{m}$, są, wobec $n > 1$, liczbami większemi od 1, skoro $m > 3$, przeto widzimy, że nierówność (4) mogłaby się utrzymać tylko przy $m = 2$, a dowolnem n, albo, przy $m = 3$, dla $n = 2$. W innych przypadkach jest stale: $\binom{n+m-1}{m} > n^2$; moglibyśmy, więc, pośród $\binom{n+m-1}{m}$ spółczynników formy, najwyżej tylko n^2 spółczynnikom $A, B, C, ...$ formy przekształconej nadać pewne, z góry oznaczone, wartości, pozostałoby, więc, jeszcze $\binom{n+m-1}{m} - n^2$ związków możliwych, niezależnych od przekształcenia, które mogłyby się okazać niezmiennikami. A stąd, wnioski:

1) *Formy kwadratowe ilukolwiek zmiennych i formy sześcienne dwójkowe, nie posiadają niezmienników bezwzględnych.*

2) *Forma algebraiczna m-go stopnia, o n zmiennych, może posiadać najwyżej* $\binom{n+m-1}{m} - n^2$ *niezależnych od siebie niezmienników bezwzględnych.*

4. Uwaga. Na podstawie powyższych twierdzeń, możemy sobie wyrobić przegląd ilości niezależnych od siebie niezmienników bezwzględnych w poszczególnych formach. Z form dwójkowych formy liniowe: $u_2^1 = ax + by$, kwadratowe: $u_2^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2$ lub sześcienne: $u_2^3 = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$, nie mogą mieć wcale żadnych niezmienników bezwzględnych; formy dwukwadratowe:

$$u_2^4 = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4,$$

mogą mieć tylko jeden niezmiennik bezwzględny, a w ogólności formy dwójkowe m-go stopnia:

$$u_2^m = a_0x^m + \binom{m}{1} a_1 x^{m-1} y + \binom{m}{2} a_2 x^{m-2} y^2 + \ldots + \binom{m}{m-1} a_{m-1} xy^{m-1} + a_m y^m,$$

gdzie $m > 3$, mogą mieć najwyżej $m-3$ niezależnych niezmienników bezwzględnych.

Z form trójkowych: liniowe: $u_3^1 = ax + by + cz$ i kwadratowe:

$$u_3^2 = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz,$$

nie mają wcale niezmienników bezwględnych, formy trójkowe, sześcienne:

$$u_3^3 = ax^3 + by^3 + cz^3 + 3dx^2y + 3exy^2 + 3fx^2z + 3gxz^2 + 3hy^2z + 3kyz^2 + 6lxyz,$$

mogą mieć tylko jeden niezmiennik bezwzględny, a w ogólności, formy trójkowe m-go stopnia, $(m > 2)$, mogą mieć: $\binom{m+2}{2} - 9$ niezmienników bezwzględnych.

Z form czwórkowych formy liniowe: $u_4^1 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4$ i kwadratowe

$$u_{11}^2 = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 + \\ + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4,$$

nie mają wcale żadnych niezmienników bezwzględnych; formy czwórkowe, sześcienne:

$$u_4^3 = (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_4 + a_4x_4)^3,$$

mogą mieć cztery niezmienniki bezwzględne, w ogólności formy czwórkowe m-go stopnia mogą mieć $\binom{m+3}{3} - 16$ niezmienników bezwzględnych.

Wogóle, z form o n zmiennych, formy liniowe: $u_n^1 = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ i kwadratowe:

$$u_n^2 = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n,$$

nie mogą mieć wcale niezmienników bezwzględnych, formy sześcienne mają ich $\binom{n+2}{3} - n^2$, formy dwukwadratowe: $\binom{n+3}{4} - n^2$, a formy m-go stopnia $(m > 2)$, mają najwyżej $\binom{n+m-1}{m} - n^2$ niezmienników bezwzględnych, od siebie niezależnych.

5. Formy, nie mające niezmienników bezwzględnych, do których, jak poznaliśmy, należą formy liniowe i kwadratowe ilukolwiek zmiennych, tudzież formy sześcienne, dwójkowe, mogą mieć tylko jeden niezmiennik, ze względu na przekształcenia liniowe. Gdyby bowiem forma taka u miała dwa niezmienniki φ i ψ o tej własności, żeby było:

$$\varphi(a', b', c' \ldots) = L^r . \varphi(a, b, c, \ldots),$$

a zarazem:

$$\psi(a', b', c', \ldots) = L^p . \psi(a, b, c, \ldots),$$

gdzie L jest modułem przekształcenia liniowego, natenczas, byłoby:

$$[\varphi(a', b', c', \ldots)]^p . [\psi(a', b', c', \ldots)]^{-r} = [L^r . \varphi(a, b, c, \ldots)]^p . [L^p . \psi(a, b, c, \ldots)]^{-r},$$

zatem: $[\varphi(a', b', c', \ldots)]^p . [\psi(a', b', c', \ldots)]^{-r} = [\varphi(a, b, c, \ldots)]^p . [\psi(a, b, c, \ldots)]^{-r}$,

a więc dana forma miałaby wtedy jeden niezmiennik bezwzględny, kształtu

$$[\varphi(a, b, c, \ldots)]^p . [\psi(a, b, c, \ldots)]^{-r},$$

co się sprzeciwia założeniu.

A więc: *Formy, które nie posiadają żadnego niezmiennika bezwzględnego mogą mieć tylko jeden zwykły niezmiennik względny, a nie więcej.*

6. Jedyny niezmiennik formy kwadratowej. Forma kwadratowa:

$$u_n^2 = \sum_{i,k}^{n} a_{ik} x_i x_k,$$

wyróżniku: $|a_{ik}| = A$, sprowadza się wskutek przekształcenia liniowego:

$$x_i = l_{i1} y_1 + l_{i2} y_2 + \ldots + l_{in} y_n, \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

do formy kwadratowej:

$$u_n^2 = \sum_{i,k}^{n} b_{ik} y_i y_k,$$

której wyróżnik, jak wiemy z art. 12. str. 356. przedstawia się w postaci: $|b_{ik}| = |l_{ik}|^2 . |a_{ik}|$.

Wyróżnik danej formy kwadratowej jest więc niezmiennikiem tej formy, ze względu na przyjęte przekształcenie. Formy kwadratowe należą, jak wiemy z art. 3. do form, które nie mają żadnych niezmienników bezwzględnych, a jako takie, na mocy art. 5., nie mogą mieć więcej, jak jeden niezmiennik względny. Z tego wynika twierdzenie:

Wyróżnik formy kwadratowej, jest jedynym jej niezmiennikiem, ze względu na przekształcenia liniowe.

7. Wspólne niezmienniki dwu form kwadratowych. Weźmy pod uwagę dwie formy kwadratowe:

$$u_n^2 = \sum a_{i\varkappa} x_i x_\varkappa, \quad U_n^2 = \sum A_{i\varkappa} x_i x_\varkappa,$$

zastosujmy do nich przekształcenie liniowe, określone wzorami:

$$x_i = \sum_{r=1}^{r=n} l_{ir} y_r \text{ o module } |l_{i\varkappa}| = L \gtrless 0,$$

wtenczas, otrzymamy formy przekształcone w postaci:

$$u_n^2 = \sum a'_{i\varkappa} y_i y_\varkappa, \quad U_n^2 = \sum A'_{i\varkappa} y_i y_\varkappa.$$

Łatwo poznać, że to samo przekształcenie zamieni formę:

$$\sum (a_{i\varkappa} - s A_{i\varkappa}) x_i x_\varkappa \text{ na formę: } \sum (a'_{i\varkappa} - s A'_{i\varkappa}) y_i y_\varkappa,$$

dla wszelkiej wartości spółczynnika s. Między wyróżnikami tych form zachodzić musi, jak wiadomo z art. 12., str. 355. i 356., związek:

$$|a'_{i\varkappa} - s A'_{i\varkappa}| = L^2 |a_{i\varkappa} - s A_{i\varkappa}|, \quad (i, \varkappa = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Każdy z tych wyróżników da się, jednak, przedstawić w postaci wielomianu n-go stopnia ze względu na spółczynnik s.

Niech będzie tedy:

$$|a_{i\varkappa} - s A_{i\varkappa}| = D_0 - D_1 s + D_2 s^2 - D_3 s^3 + \ldots + (-1)^n D_n s^n,$$
$$|a'_{i\varkappa} - s A'_{i\varkappa}| = D'_0 - D'_1 s + D'_2 s^2 - D'_3 s^3 + \ldots + (-1)^n D'_n s^n,$$

wtenczas, otrzymujemy wzór (6), w postaci:

$$D'_0 - D'_1 s + D'_2 s^2 - \ldots + (-1)^n D'_n s^n = L^2 (D_0 - D_1 s + D_2 s^2 - \ldots + (-1)^n D_n s^n).$$

Skoro równość ta musi się utrzymać dla wszelkiego s, musi być, zatem:

$$D'_r = L^2 . D_r, \quad (r = 0, 1, 2, \ldots n). \tag{7}$$

Spółczynniki: $D_0, D_1, D_2, \ldots, D_n$, są więc wspólnymi niezmiennikami tego układu form kwadratowych: $u_n^2 = \sum a_{i\varkappa} x_i x_\varkappa$ i $U_n^2 = \sum A_{i\varkappa} x_i x_\varkappa$.

Z tych $(n+1)$ spółczynników pierwszy D_0 i ostatni D_n są wyróżnikami tych form, mianowicie: $D_0 = |a_{i\varkappa}|$, $D_n = |A_{i\varkappa}|$, pozostałe spółczynniki: $D_1, \ldots, D_{n-1}$ są właściwymi wspólnymi niezmiennikami form: u_n^2 i U_n^2, utworzonymi ze spółczynników: $a_{i\varkappa}$ i $A_{i\varkappa}$ tych form. Przedstawiają się one

*

jako sumy wyznaczników n-go rzędu, utworzonych z wyznacznika: gdy w nim jedną, dwie, ..., względnie $(n-1)$ kolumn zastąpimy przez powiednie kolumny wyznacznika: $|A_{ik}|$.

I tak:

$$D_1 = \begin{vmatrix} A_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n} \\ A_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n} \\ \cdots \\ A_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}, A_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n} \\ a_{21}, A_{22}, a_{23}, \ldots, a_{2n} \\ \cdots \\ a_{n1}, A_{n2}, a_{n3}, \ldots, a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots, A_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, A_{2n} \\ \cdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \ldots, A_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} A_{11}, A_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n} \\ A_{21}, A_{22}, a_{23}, \ldots, a_{2n} \\ \cdots \\ A_{n1}, A_{n2}, a_{n3}, \ldots, a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots, A_{1\,n-1}, A_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, A_{2\,n-1}, A_{2n} \\ \cdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \ldots, A_{n\,n-1}, A_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1\,n-1}, a_{1n} \\ A_{21}, A_{22}, \ldots, A_{2\,n-1}, a_{2n} \\ \cdots \\ A_{n1}, A_{n2}, \ldots, A_{n\,n-1}, a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} a_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1n} \\ a_{21}, A_{22}, \ldots, A_{2n} \\ \cdots \\ a_{n1}, A_{n2}, \ldots, A_{nn} \end{vmatrix}.$$

8. Przykłady. 1) Dwie formy kwadratowe, dwójkowe:

$$ax^2 + by^2 + 2cxy \text{ i } Ax^2 + By^2 + 2Cxy,$$

mają, oprócz swych wyróżników:

$$\begin{vmatrix} a & c \\ c & b \end{vmatrix} = ab - c^2 \text{ i } \begin{vmatrix} A & C \\ C & B \end{vmatrix} = AB - C^2,$$

jeszcze wspólny niezmiennik:

$$\begin{vmatrix} A & c \\ C & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & C \\ c & B \end{vmatrix} = Ab + aB - 2Cc.$$

2) Dwie formy kwadratowe, trójkowe:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2exz + 2fxy$$
$$\text{i } Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy,$$

mają, oprócz swych wyróżników:

$$\begin{vmatrix} a & f & e \\ f & b & d \\ e & d & c \end{vmatrix} = abc + 2def - ad^2 - be^2 - cf^2,$$

$$\begin{vmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{vmatrix} = ABC + 2DEF - AD^2 - BE^2 - CF^2,$$

jeszcze niezmienniki wspólne:

$$1) \begin{vmatrix} A & f & e \\ F & b & d \\ E & d & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & F & e \\ f & B & d \\ e & D & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & f & E \\ f & b & D \\ e & d & C \end{vmatrix} =$$

$$= Abc + Bac + Cab - (Ad^2 + Be^2 + Cf^2) + 2(Def + Edf + Fde) - 2(Dad + Ebe + Fcf)$$

$$2) \begin{vmatrix} a & F & E \\ f & B & D \\ e & D & C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & f & E \\ F & b & D \\ E & d & C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & F & e \\ F & B & d \\ E & D & c \end{vmatrix} =$$

$$= aBC + bAC + cAB - (aD^2 + bE^2 + cF^2) + 2(dEF + eDF + fDE) - 2(dAD + eBE + fC$$

9. Niezmienniki ortogonalne formy kwadratowej n zmiennych. funkcya spółczynników danej formy, kształtu: $\varphi(a, b, c, \ldots)$ nie zmienia postaci, przy przekształceniach ortogonalnych, a nie jest przytem ni nikiem, przy wszelkich możliwych przekształceniach liniowych, na nazywamy taką funkcyę spółczynników danej formy niezmienn

ortogonalnym. Zastanówmy się nad tem, czy forma kwadratowa n zmiennych:

$$u_n^2 = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{n-1\,n}x_{n-1}x_n,$$

posiada, oprócz swego wyróżnika: $D = |a_{ik}|$, jako niezmiennika przy wszelkich przekształceniach liniowych, jeszcze także pewne niezmienniki ortogonalne.

Niezmiennik ortogonalny formy u_n^2, musiałby widocznie być także niezmiennikiem formy: $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$.

Z wyróżnika formy kwadratowej:

$$(a_{11}x_1^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{n-1\,n}x_{n-1}x_n) - s(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2),$$

przedstawiającego się w postaci:

$$D(s) = \begin{vmatrix} a_{11}-s, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}-s, & \ldots, & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn}-s \end{vmatrix},$$

gdzie s może mieć jakąkolwiek wartość, otrzymamy, tedy, wszystkie niezmienniki ortogonalne formy u_n^2, jako spółczynniki w rozwinięciu wyróżnika $D(s)$, podług potęg spółczynnika s, w postaci:

$$D(s) = D_0 - D_1 s + D_2 s^2 - D_3 s^3 + \ldots + (-1)^n D_n s^n. \qquad (8)$$

Jest tu: $D_0 = |a_{ik}|$, $D_n = 1$, $D_{n-1} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}, \ldots$, $D_1 = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$, w ogóle D_r jest sumą wszystkich głównych minorów $(n-r)$-go rzędu, (patrz T. I. str. 370.) wyznacznika: $|a_{ik}|$.

Mamy, zatem, twierdzenie:

Forma kwadratowa n zmiennych posiada, oprócz swego wyróżnika, jeszcze (n − 1) niezmienników ortogonalnych, a mianowicie: suma wszelkich minorów głównych jednakowego rzędu w wyróżniku formy kwadratowej jest niezmiennikiem ortogonalnym tej formy.

10. Przykłady. 1) Forma kwadratowa, dwójkowa: $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy$ ma niezmiennik ogólny:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2,$$

a nadto niezmiennik ortogonalny: $a_{11} + a_{22}$.

2) Forma kwadratowa, trójkowa:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz,$$

ma niezmiennik ogólny:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2,$$

a nadto dwa niezmienniki ortogonalne:

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} \text{ i } a_{11} + a_{22} + a_{33} = a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{11}a_{33} - a_{23}^2 - a_{13}^2 - a_{12}^2,$$

11. Ogólne własności niezmienników danej formy m-go stopnia. Niech będzie daną forma algebraiczna m-go stopnia o n zmiennych: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, w postaci:

$$u_n^m = \Sigma a_{\alpha,\beta,\ldots\nu}\, x_1^\alpha x_2^\beta \ldots x_n^\nu, \qquad (9)$$

gdzie $\alpha + \beta + \ldots + \nu = m$.

Zastosujmy do tej formy przekształcenie liniowe, określone wzorami:

$$x_1 = ly_1,\ x_2 = ly_2, \ldots, x_n = ly_n,$$

o module $L = l^n$, to dostaniemy formę przekształconą w postaci:

$$u_n^m = \Sigma A_{\alpha,\beta,\dots\nu}\, y^{\alpha}_1\, y_2^{\beta} \dots y_n^{\nu}, \tag{10}$$

o spółczynnikach: $A_{\alpha,\beta,\dots\nu} = l^n a_{\alpha,\beta,\dots\nu}$.

Przypuśćmy, że dana forma posiada niezmiennik w postaci funkcyi całkowitej, ze względu na spółczynniki $a_{\alpha,\beta,\dots\nu}$ formy pierwotnej, które oznaczmy kolejno przez $a_0, a_1, a_2, \dots, a_r$, a więc niezmiennik kształtu:

$$\varphi(a) = C_{\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_r} \,.\, a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \dots a_r^{\alpha_r}, \tag{11}$$

natenczas, funkcya ta spółczynników przedstawi się, dla formy przekształconej, w postaci:

$$\varphi(A) = C_{\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_r} \,.\, A_0^{\alpha_0} A_1^{\alpha_1} \dots A_r^{\alpha_r}, \tag{12}$$

a że: $A_r = l^m a_r$, zatem, będzie kształtu:

$$\varphi(A) = C_{\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_r}\, l^{m(\alpha_0+\alpha_1+\dots+\alpha_r)}\, a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \dots a_r^{\alpha_r}. \tag{13}$$

Jeżeli tedy $\varphi(a)$ ma być niezmiennikiem formy u_n^m, ze względu na przyjęte przekształcenie, to musi być:

$$\varphi(A) = L^{\lambda} \,.\, \varphi(a) = l^{n\lambda} \,.\, \varphi(a),$$

zatem:

$$l^{m(\alpha_0+\alpha_1+\dots+\alpha_r)} = l^{n\lambda}$$

a więc:

$$m(\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_r) = n\lambda, \tag{14}$$

czyli:

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_r = \frac{n\lambda}{m}.$$

Suma wykładników w każdym wyrazie niezmiennika $\varphi(a)$ musi być zatem ilością stałą, a więc:

Niezmiennik danej formy algebraicznej jest zawsze funkcyą jednorodną spółczynników tej formy.

Stałą sumę wykładników: $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_r = \alpha$, nazywamy **stopniem** niezmiennika.

Wzór: $m\alpha = n\lambda$, przedstawia więc związek między stopniem m danej formy, ilością n zmiennych tej formy, stopniem α niezmiennika i jego wskaźnikiem λ.

12. Ogólne własności współzmienników danej formy m-go stopnia. Niech będzie daną forma algebraiczna m-go stopnia w postaci:

$$u_n^m = \Sigma a_r x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \dots x_n^{\nu},$$

gdzie: $\alpha+\beta+\dots+\nu = m$. Przypuśćmy, że forma ta posiada współzmiennik w postaci funkcyi całkowitej, wymiernej, tak, ze względu na spółczynniki a, jak ze względu na zmienne x tej formy, a więc, w postaci:

$$\varphi(a, x) = \Sigma C_{\alpha,\dots,\nu} \,.\, a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \dots x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \dots x_n^{\nu_n}, \tag{15}$$

o wskaźniku λ, tak, że dla każdego przekształcenia liniowego, otrzymujemy:

$$\varphi(A, y) = L^{\lambda} \,.\, \varphi(a, x).$$

Zastosujmy do danej formy przekształcenie liniowe, określone wzorami:

$$x_1 = ly_1,\ x_2 = ly_2, \dots, x_n = ly_n,$$

o module $L = l^n$, natenczas, spółczynniki A formy przekształconej, będą miały kształt: $A = l^m a$.

Funkcya $\varphi(A, y)$, sprowadza się tedy do postaci:

$$\varphi(A, y) = \Sigma C_{\alpha,\dots\nu}\, l^{m(\alpha_0+\alpha_1+\dots)} a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \dots y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2} \dots y_n^{\nu_n},$$

a że:

$$y_r = l^{-1} x_r,$$

przeto, otrzymujemy:

$$\varphi(A,\ y)=\Sigma\, C_{\alpha,\dots\nu}\, l^{m(\alpha_0+\alpha_1+\dots)-(\nu_1+\nu_2+\dots)} \dots a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \dots x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \dots$$

Jeżeli atoli $\varphi(a,\ x)$ ma być współzmiennikiem danej formy, to musi być:

$$\varphi(A,\ y)=L^{\lambda}.\varphi(a,\ x),$$

a przy danem przekształceniu:

$$\varphi(A,\ y)=l^{n\lambda}.\varphi(a,\ x),$$

przeto, musi być:

$$l^{m(\alpha_0+\alpha_1+\dots)-(\nu_1+\nu_2+\dots)}=l^{n\lambda},$$

zatem, we wszystkich wyrazach współzmiennika $\varphi(a,\ x)$, musi być:

$$m(\alpha_0+\alpha_1+\dots)-(\nu_1+\nu_2+\dots)=n\lambda, \tag{16}$$

a więc, mamy twierdzenie:

Każdy współzmiennik $\varphi(a,\ x)$ danej formy algebraicznej jest funkcyą jednorodną, tak ze względu na spółczynniki, jak ze względu na zmienne tej formy.

13. Niezmienniki form dwójkowych m-go stopnia. Niech będzie daną forma dwójkowa m-go stopnia w postaci:

$$u_2^m=a_0x^m+\binom{m}{1}a_1x^{m-1}y+\binom{m}{2}a_2x^{m-2}y^2+\dots+a_my^m.$$

Oznaczmy jej niezmiennik o wskaźniku λ przez $\varphi(a)$ i połóżmy:

$$\varphi(a)=\Sigma\, C_\alpha\, a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \dots a_m^{\alpha_m}. \tag{17}$$

Stosując do danej formy przekształcenie liniowe, określone wzorami:

$$x=\xi,\ y=l\eta, \text{ o module: } L=l,$$

otrzymujemy:

$$u_2^m=A_0\xi^m+\binom{m}{1}A_1\xi^{m-1}\eta+\binom{m}{2}A_2\xi^{m-2}\eta^2+\dots+A_m\eta^m,$$

gdzie: $A_r=l^r a_r$, $r=0,\ 1,\ 2,\dots\ m$.

Wobec tego, przyjęty niezmiennik $\varphi(a)$, przedstawia się, dla formy przekształconej, w postaci:

$$\varphi(A)=\Sigma\, C_\alpha\, l^{0.\alpha_0+1.\alpha_1+\dots+m.\alpha_m}.\, a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \dots a_m^{\alpha_m},$$

a że ma być:

$$\varphi(A)=l^{\lambda}.\varphi(a),$$

zatem, otrzymujemy warunek:

$$0.\alpha_0+1.\alpha_1+2.\alpha_2+\dots+m.\alpha_m=\lambda \tag{18}$$

Sumę: $0.\alpha_0+1.\alpha_1+\dots+m.\alpha_m$, nazywamy w a g ą wyrazu: $a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \dots a_m^{\alpha_m}$. Wszystkie wyrazy niezmiennika $\varphi(a)$ danej formy dwójkowej m-go stopnia muszą więc mieć jednakową wagę, równą wskaźnikowi tego niezmiennika.

Funkcyę spółczynników a_r, mającą tę własność, że jej wszystkie wyrazy są jednakowej wagi, nazywamy f u n k c y ą i z o b a r y c z n ą ze względu na te spółczyniki. Mamy zatem twierdzenie:

Wszelki niezmiennik formy dwójkowej jest jednorodną i izobaryczną funkcyą jej spółczynników, a jej waga jest równa wskaźnikowi tegoż niezmiennika.

14. Równania różniczkowe niezmienników formy dwójkowej. Zastosujmy do formy dwójkowej:

$$u_2^m=a_0x^m+\binom{m}{1}a_1x^{m-1}y+\dots+a_my^m, \tag{19}$$

przekształcenie liniowe, określone wzorami:

$$x=\xi+b\eta,\ y=\eta,\ \text{o module } L=1,$$

a otrzymamy formę przekształconą w postaci:

$$u_2^m = A_0\,\xi^m + \binom{m}{1} A_1 \xi^{m-1}\eta + \ldots + A_m\,\eta^m,$$

gdzie:

$$A_r = a_r + \binom{r}{1} a_{r-1}\,b + \binom{r}{2} a_{r-2}\,b^2 + \ldots + a_m\,b^m.$$
$$(r=1,\ 2, \ldots,\ m).$$

Oznaczmy niezmiennik danej formy dwójkowej przez $\varphi(a)$, nate otrzymamy, przy zastosowaniu przekształcenia, z powodu, że moduł równość:

$$\varphi(A) = \varphi(a),$$

a że, na mocy wzoru (20):

$$\varphi(A) = \varphi(a) + C_1 b + C_2 b^2 + \ldots$$

muszą się zatem, wobec dowolnego b, spełniać warunki: $C_1 = C_2 = \ldots = 0$

Spółczynniki C_1, $C_2, \ldots$ są zależne wyłącznie od spółczynników: a_0, danej formy.

Chcąc wyznaczyć spółczynnik C_1, musimy w funkcyi:

$$\varphi(A) = \varphi(A_0,\ A_1, \ldots,\ A_m),$$

zastąpić A_r przez $a_r + \binom{r}{1} a_{r-1}\,b$ i wyznaczyć w rozwinięciu funkcyi:

$$\varphi(a_0,\ a_1 + a_0 b,\ a_2 + 2a_1 b, \ldots,\ a_m + m a_{m-1}\,b),$$

spółczynnik przy b^1, a będzie nim właśnie C_1.

Tym sposobem otrzymamy:

$$C_1 = a_0 \frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial\varphi}{\partial a_3} + \ldots + m\,a_{m-1} \frac{\partial\varphi}{\partial a_m}.$$

Mamy zatem twierdzenie:

Wszelki niezmiennik $\varphi(a)$ formy dwójkowej m-go stopnia, kształtu:

$$u_2^m = a_0 + \binom{m}{1} a_1 x^{m-1} y + \ldots + a_m y^m,$$

musi czynić zadość równaniu różniczkowemu, cząstkowemu, kształtu:

$$a_0 \frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial\varphi}{\partial a_3} + \ldots + m\,a_{m-1} \frac{\partial\varphi}{\partial a_m} = 0.$$

15. Rozwinięcie funkcyi:

$$\varphi(a_0,\ a_1 + a_0 b,\ a_2 + 2a_1 b,\ \ldots,\ a_m + m a_{m-1}\,b),$$

podług potęg b, na szereg Maclaurina, przedstawia się w postaci:

$$\varphi(A_0,\ A_1, \ldots,\ A_m) = \varphi(a) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial b}\right)_0 . \, b + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial b^2}\right)_0 . \, b^2 + \ldots$$

Porównawszy to rozwinięcie z wzorem (21), otrzymujemy:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial b}\right)_0 = C_1,\ \ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial b^2}\right)_0 = C_2, \ldots$$

Użyjmy symbolu:

$$a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + \ldots + m\,a_{m-1} \frac{\partial}{\partial a_m} = D,$$

a więc połóżmy:

$$C_1 = D\varphi,$$

to otrzymamy: $C_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial b^2}\right)_0 = \frac{1}{2\,!}\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial b}\right)_0 = \frac{1}{2\,!} D \,.\, D\varphi = \frac{1}{2\,!} D^2\varphi,$

analogicznie:

$$C_3 = \frac{1}{3\,!} D^3\varphi.$$

Jeżeli $C_1=0$, to w następstwie tego musi być także $C_2=0$, $C_3=0, \ldots$ a zatem:

Niezmiennik formy dwójkowej m-go stopnia, czyniąc zadość równaniu różniczkowemu:

$$D\varphi = a_0 \frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + \ldots + m\, a_{m-1} \frac{\partial\varphi}{\partial a_m} = 0,$$

spełnia tem samem równania różniczkowe: $D^2\varphi=0$, $D^3\varphi=0, \ldots D^m\varphi=0$.

16. Tworzenie niezmienników danego stopnia dla danych form dwójkowych. Na podstawie twierdzeń powyżej poznanych, możemy przystąpić do wyszukiwania niezmienników danej formy dwójkowej. W tym celu, przyjmujemy najpierw stopień α funkcyi jednorodnej, mającej wyobrażać niezmiennik danej formy, i wyznaczamy wskaźnik λ tegoż niezmiennika, na podstawie wzoru (14) str. 374., który dla formy dwójkowej m-go stopnia daje:

$$\lambda = \frac{m\alpha}{2}.$$

Wskaźnik ten będzie zarazem, według art. 13. wzór (18), wagą poszczególnych wyrazów szukanego niezmiennika. Należy, zatem, łączyć wskazówki 0, 1, 2,..., m spółczynników a danej formy, tak, aby poszczególne wyrazy niezmiennika były α-tego stopnia, a zarazem miały wagę równą wskaźnikowi λ. Wyrazom tym nadajemy spółczynniki, których wartości liczebne wyznaczamy następnie zapomocą równań różniczkowych, jakim każdy niezmiennik musi uczynić zadość.

17. Przykłady. 1. Wyznaczyć niezmiennik dwójkowej formy kwadratowej:

$$u_2{}^2 = a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2.$$

Forma kwadratowa ma tylko jeden niezmiennik. Jest on wyróżnikiem tej formy, a więc, ze względu na spółczynniki a_0, a_1, a_2, funkcyą jednorodną drugiego stopnia. Przyjmijmy, zatem: $\alpha=2$, a otrzymamy, wobec: $m=2$, wskaźnik: $\lambda = {}^1/_2\, m\alpha = 2$. Kładąc więc:

$$\varphi(a) = \Sigma\, C\alpha\, a_0{}^{\alpha_0} a_1{}^{\alpha_1} a_2{}^{\alpha_2},$$

otrzymujemy, na wyznaczenie wykładników: α_0, α_1, α_2, warunki:

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 2,$$
$$0.\alpha_0 + 1.\alpha_1 + 2.\alpha_2 = 2.$$

Pierwszemu warunkowi czyni zadość następujących sześć układów:

	1	2	3	4	5	6
$\alpha_0 =$	2,	0,	0,	1,	1,	0
$\alpha_1 =$	0,	2,	0,	1,	0,	1
$\alpha_2 =$	0,	0,	2,	0,	1,	1
$\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2 =$	2,	2,	2,	2,	2,	2

Z tych czynią zadość drugiemu warunkowi: $0.\alpha_0+1.\alpha_1+2.\alpha_2=2$, tylko drugi i piąty układ wartości, t. j.:

$$\alpha_0=0,\ \alpha_1=2,\ \alpha_2=0 \text{ i } \alpha_0=1,\ \alpha_1=0,\ \alpha_2=1.$$

Szukany niezmiennik formy dwójkowej: $u_2{}^2 = a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2$ przedstawia się, zatem, w postaci:

$$\varphi(\alpha) = C_1a_1{}^2 + C_2a_0a_2,$$

której spółczynniki C_1 i C_2 mają pewne wartości liczebne.

Aby je wyznaczyć, weźmy do pomocy równanie różniczkowe, któremu każdy niezmiennik musi uczynić zadość, kształtu:

$$a_0\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + 2a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_2} = 0,$$

a otrzymamy:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} = 2C_1a_1,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial a_2} = C_2a_0,$$

zatem, równanie warunkowe: $a_0 . 2\,C_1a_1 + 2a_1 . C_2a_0 = 0$,

czyli: $(C_1+C_2)\,a_0a_1 = 0$, a stąd warunek: $C_1+C_2=0$.

Jednemu z tych spółczynników możemy nadać dowolną wartość, bo niezmiennik można zawsze pomnożyć przez jakąkolwiek liczbę szczególną.

Połóżmy: $C_2=1$, a otrzymamy: $C_1=-1$, zatem, szukany niezmiennik dwój
formy kwadratowej: $u_2^2=a_0x^2+2a_1xy+a_2y^2$, w postaci:

$$\varphi(a)=a_0a_2-a_1^2.$$

2. Wyznaczyć niezmiennik dwójkowej formy sześciennej:

$$u_2^3=a_0x^3+3a_1x^2y+3a_2xy^2+a_3y^3.$$

Niezmiennik ten może być tylko stopnia czwartego, mamy, zatem: $n=2$,
$\alpha=4$, a stąd: $\lambda=\frac{1}{2}m\alpha=6$. Mamy więc utworzyć funkcyę jednorodną czwartego st
której wszystkie wyrazy miałyby wagę równą 6.

Połóżmy więc:

$$\varphi(a)=\Sigma\, C_\alpha . a_0^{\alpha_0} . a_1^{\alpha_1} . a_2^{\alpha_2} . a_3^{\alpha_3},$$

a otrzymamy na wyznaczenie wykładników: α_0, α_1, α_2, α_3, następujące warunki:

$$\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=4$$
$$0.\alpha_0+1.\alpha_1+2.\alpha_2+3.\alpha_3=6.$$

Tym warunkom czyni zadość pięć układów wartości, a mianowicie:

	1	2	3	4	5
$\alpha_0=$	2,	1,	1,	0,	0
$\alpha_1=$	0,	0,	1,	2,	3
$\alpha_2=$	0,	3,	1,	2,	0
$\alpha_3=$	2,	0,	1,	0,	1,

z czego wynika, że szukany wyróżnik będzie kształtu:

$$\varphi(a)=C_1a_0^2a_3^2+C_2a_0a_2^3+C_3a_0a_1a_2a_3+C_4a_1^2a_2^2+C_5a_1^3a_3,$$

w którym wyznaczyć mamy pięć spółczynników liczebnych: C_1, C_2, C_3, C_4, C_5.

W tym celu, zastosujemy równanie różniczkowe:

$$a_0\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}+3a_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_3}=0,$$

z którego, ze względu na to, że: $\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}=C_3a_0a_2a_3+2\,C_4a_1a_2^2+3\,C_5a_1^2a_3$,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}=3\,C_2a_0a_2^2+C_3\,a_0a_1a_3+2\,C_4a_1^2a_2,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial a_3}=2\,C_1a_0^2a_3+C_3\,a_0a_1a_2+C_5\,a_1^3,$$

otrzymujemy równanie warunkowe:

$$a_0(C_3a_0a_2a_3+2C_4a_1a_2^2+3C_5a_1^2a_3)+2a_1(3C_2a_0a_2^2+C_3a_0a_1a_3+2\,C_4a_1^2a_2)+$$
$$+3a_2(2C_1a_0^2a_3+C_3a_0a_1a_2+C_5a_1^3)=0,$$

czyli:

$$a_0^2a_2a_3(C_3+6C_1)+a_0a_1a_2^2(2C_4+6C_2+3C_3)+a_0a_1^2a_3(3C_5+2\,C_3)+a_1^3a_2(4C_4+3C_5)=$$

Wobec tego otrzymujemy, na wyznaczenie spółczynników: C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, równania:

$$6C_1+C_3=0,\ 6C_2+3\,C_3+2\,C_4=0,\ 2C_3+3C_5=0,\ 4\,C_4+3\,C_5=0,$$

z których, kładąc $C_1=1$, dostajemy: $C_3=-6$, $C_5=4$, $C_4=-3$, $C_2=4$.

Wyróżnik dwójkowej formy sześciennej:

$$u_2^3=a_0x^3+3a_1x^2y+3a_2xy^2+a_3y^3,$$

ma zatem postać:

$$\varphi(a)=a_0^2a_3^2+4\,a_0a_2^3-6\,a_0a_1a_2a_3-3a_1^2a_2^2+4a_1^3a_3.$$

3. Wyznaczyć niezmienniki dwójkowej formy dwu-kwadratowej:

$$u_2^4=a_0x^4+4a_1x^3y+6a_2x^2y^2+4a_3xy^3+a_4y^4.$$

Mamy tu: $n=2$, $m=4$.

1) Przyjmując $\alpha=2$, otrzymamy: $\lambda=\frac{1}{2}m\alpha=4$. Niezmiennik drugiego stopnia m
zatem, wskaźnik równy 4. Wykładniki wyrazów funkcyi:

$$\varphi(a)=\Sigma\, C_\alpha a_0^{\alpha_0}a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}a_3^{\alpha_3}a_4^{\alpha_4},$$

musiałyby zatem spełniać relacye:

$$\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=2,$$
$$0.\alpha_0+1.\alpha_1+2.\alpha_2+3.\alpha_3+4.\alpha_4=4,$$

którym czynią zadość następujące trzy układy wartości:

	α_0,	α_1,	α_2,	α_3,	α_4
1)	1,	0,	0,	0,	1
2)	0,	1,	0,	1,	0
3)	0,	0,	2,	0,	0.

Szukany wyróżnik drugiego stopnia, ze względu na spółczynniki danej formy, przed-
iłby się zatem w postaci:

$$\varphi(a) = C_1 a_0 a_4 + C_2 a_1 a_3 + C_3 a_2^2.$$

Z równania różniczkowego:

$$a_0 \frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial\varphi}{\partial a_3} + 4a_3 \frac{\partial\varphi}{\partial a_4} = 0,$$

tórem:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} = C_2 a_3, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial a_2} = 2 C_3 a_2, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial a_3} = C_2 a_1, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial a_4} = C_1 a_0,$$

mujemy równanie warunkowe:

$$a_0 \,.\, C_2 a_3 + 2a_1 \,.\, 2C_3 a_2 + 3a_2 \,.\, C_2 a_1 + 4a_3 \,.\, C_1 a_0 = 0,$$

:

$$a_0 a_3 (C_2 + 4C_1) + a_1 a_2 (4C_3 + 3C_2) = 0,$$

d relacye:

$$4C_1 + C_2 = 0, \quad 3C_2 + 4C_3 = 0,$$

rych, przyjmując $C_1 = 1$, otrzymujemy: $C_2 = -4$, $C_3 = 3$.

Niezmiennik drugiego stopnia formy dwukwadratowej ma, zatem, postać:

$$\varphi(a) = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2.$$

2) Przyjmując $\alpha = 3$, otrzymujemy: $\lambda = {}^1/_2\, m\alpha = 6$, niezmiennik trzeciego stopnia miałby
m wskaźnik równy 6. Wykładniki wyrazów funkcyi:

$$\varphi(a) = \Sigma\, C\alpha\, a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3} a_4^{\alpha_4},$$

iałyby zatem, spełniać relacye:

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 3,$$

$$0 \,.\, \alpha_0 + 1 \,.\, \alpha_1 + 2 \,.\, \alpha_2 + 3 \,.\, \alpha_3 + 4 \,.\, \alpha_4 = 6,$$

ym czyni zadość pięć układów wartości:

	α_0,	α_1,	α_2,	α_3,	α_4
1)	1,	0,	1,	0,	1
2)	1,	0,	0,	2,	0
3)	0,	2,	0,	0,	1
4)	0,	1,	1,	1,	0
5)	0,	0,	3,	0,	0.

Szukany niezmiennik trzeciego stopnia przedstawiłby się, zatem, dla formy dwukwa-
wej, w postaci:

$$\varphi(a) = C_1 a_0 a_2 a_4 + C_2 a_0 a_3^2 + C_3 a_1^2 a_4 + C_4 a_1 a_2 a_3 + C_5 a_2^3.$$

Równanie różniczkowe:

$$a_0 \frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial\varphi}{\partial a_3} + 4a_3 \frac{\partial\varphi}{\partial a_4} = 0,$$

którem:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} = 2 C_3 a_1 a_4 + C_4 a_2 a_3, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial a_2} = C_1 a_0 a_4 + C_4 a_1 a_3 + 3 C_5 a_2^2,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_3} = 2 C_2 a_0 a_3 + C_4 a_1 a_2, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial a_4} = C_1 a_0 a_2 + C_3 a_1^2,$$

wadzi do tożsamości:

$$a_0 . (2C_3 a_1 a_4 + C_4 a_2 a_3) + 2a_1 . (C_1 a_0 a_4 + C_4 a_1 a_3 + 3 C_5 a_2^2) + 3a_2 . (2C_2 a_0 a_3 + C_4 a_1 a_2) +$$
$$+ 4 a_3 . (C_1 a_0 a_2 + C_3 a_1^2) = 0,$$

d:

$$a_0 a_1 a_4 (2C_3 + 2 C_1) + a_0 a_2 a_3 (C_4 + 6C_2 + 4C_1) + a_1^2 a_3 (2C_4 + 4C_3) + a_1 a_2^2 (6C_5 + 3 C_4) = 0,$$

órej dostajemy warunki:

$$2C_1 + 2C_3 = 0, \; 4C_1 + 6 C_2 + C_4 = 0, \; 4C_3 + 2 C_4 = 0, \; 3C_4 + 6C_5 = 0.$$

Przyjmując $C_1 = 1$, otrzymujemy stąd:

$$C_3 = -1, \quad C_4 = 2, \quad C_5 = -1, \quad C_2 = -1.$$

Szukany niezmiennik trzeciego stopnia, ma, zatem, postać:

$$\varphi(a) = a_0 a_2 a_4 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3.$$

Z otrzymanych dwu niezmienników formy dwukwadratowej, z których jeden ma $\lambda=4$, drugi $\lambda=9$, otrzymamy jedyny niezmiennik bezwzględny tej formy w postaci:

$$\Phi(a)=\frac{(a_0 a_4-4 a_1 a_3+3a_2^2)^3}{(a_0a_2a_4-a_0a_3^2-a_1^2a_4+2a_1a_2a_3-a_2^3)^2}.$$

18. Współzmienniki danej formy dwójkowej m-go stopnia. Niech będzie daną forma dwójkowa m-go stopnia dwu zmiennych x_1 i x_2, w postaci:

$$u_2^m=\sum_{r=0}^{r=m}\binom{m}{r}a_r x_1^{m-r}x_2^r,$$

która, wskutek przekształcenia liniowego, określonego wzorami:

$$x_1=l_{11}y_1+l_{12}y_2,\quad x_2=l_{21}y_1+l_{22}y_2,$$

o module $L\gtrless 0$, przejdzie na formę:

$$u_2^m=\sum_{r=0}^{r=m}\binom{m}{r}A_r y_1^{m-r}y_2^r.$$

Oznaczmy przez $\varphi(a, x)$ współzmiennik tej formy, który, w myśl art. 12. str. 374. jest funkcyą jednorodną, tak ze względu na spółczynniki: $a_0, a_1,\ldots, a_m$, jak ze względu na zmienne: x_1, x_2, tej formy. Niech będzie λ wskaźnikiem tego współzmiennika, to z określenia:

$$\varphi(A, y)=L^\lambda.\varphi(a, x), \tag{22}$$

znajdziemy, że spółczynnik przy $y_1^i y_2^k$ w funkcyi $\varphi(A, y)$ musi być równy spółczynnikowi przy $x_1^i x_2^k$ w funkcyi $\varphi(a, x)$, pomnożonemu przez L^λ.

Załóżmy, że α jest stopniem przyjętego współzmiennika $\varphi(a, x)$, ze względu na spółczynniki: a_r, $(r=0, 1,\ldots m)$, a ν jest stopniem tegoż współzmiennika, ze względu na zmienne x_1 i x_2, to zauważymy najpierw, że, zastępując w danej formie x_1 przez kx_1, a równocześnie a_r przez $k^r a_r$, wywołamy w każdym wyrazie formy spólny czynnik k^m, a natomiast, w każdym wyrazie: $a_r a_s\ldots x_1^i x_2^k$, współzmiennika, czynnik: $k^{r+s+\ldots+i}$.

Suma $r+s+\ldots+i$, t. j. suma wskazówek r, s,... w poszczególnych spółczynnikach każdego wyrazu współzmiennika $\varphi(a, x)$, powiększona o wykładnik i zmiennej x_1 musi być zatem stałą.

Ażeby wyznaczyć tę stałą sumę, zastosujmy do danej formy:

$$u_2^m=\sum_{r=0}^{r=m}\binom{m}{r}a_r x_1^{m-r}x_2^r,$$

przekształcenie, określone wzorami:

$$x_1=y_2,\quad x_2=y_1,$$

o module $L=-1$, wówczas spółczynniki a_r $(r=0, 1,\ldots m)$ przejdą na a_{m-r}, a potęga x_1^i przejdzie na $x_1^{\nu-i}$, musi być zatem:

$$r+s+\ldots+i=(m-r)+(m-s)+\ldots+(\nu-i),$$

a że stopień współzmiennika, ze względu na spółczynniki a, ma być równy α przeto otrzymamy stąd warunek:

$$2(r+s+\ldots+i)=m\alpha+\nu,$$

czyli:

$$r+s+\ldots+i=\frac{m\alpha+\nu}{2}.$$

A zatem:

Suma wskazówek w spółczynnikach każdego wyrazu współzmiennika, powiększona o wykładnik zmiennej x_1, jest stale równa $\frac{1}{2}(m\alpha+\nu)$.

Z wzoru tego otrzymujemy:

$$r+s+\ldots=\tfrac{1}{2}(ma+\nu)-i\,, \qquad (23)$$

skąd, uwzględniając to, że suma: $r+s+\ldots$ przedstawia wagę spółczynnika przy potędze $x_1^{\,i}$, otrzymujemy twierdzenie:

Waga spółczynnika przy $x_1^{\,i}$ w każdym współzmienniku a-go stopnia, ze względu na spółczynniki: a_r, zaś ν-go stopnia, ze względu na zmienne danej formy dwójkowej, m-go stopnia, jest równa $\frac{1}{2}(ma+\nu)-i$.

Na podstawie tego twierdzenia, możemy z łatwością zestawić wyrazy współzmiennika danej formy dwójkowej m-go stopnia, gdy dany jest stopień a tegoż współzmiennika ze względu na spółczynniki, tudzież jego stopień ν ze względu na zmienne danej formy, a pozostaną tylko do wyznaczenia spółczynniki liczebne w poszczególnych wyrazach przyjętego współzmiennika.

19. Równania różniczkowe współzmienników. Niech będzie:

$$\varphi(a_0,\, a_1,\ldots a_m,\, x_1,\, x_2),$$

współzmiennikiem formy dwójkowej:

$$u_2^{\,m}=\sum_{r=0}^{r=m}\binom{m}{r}a_r x_1^{\,m-r}x_2^{\,r}.$$

Przyjąwszy ν, jako stopień tegoż współzmiennika, ze względu na zmienne x_1, x_2, możemy położyć:

$$\varphi=C_0x_1^{\,\nu}+\binom{\nu}{1}C_1x_1^{\,\nu-1}x_2+\binom{\nu}{2}C_2x_1^{\,\nu-2}x_2^{\,2}+\ldots+C_\nu x_2^{\,\nu}, \qquad (24)$$

gdzie C_0, $C_1,\ldots C_\nu$, będą wyrażeniami a-go stopnia ze względu na spółczynniki a_r danej formy, przyczem wagę spółczynnika C_r wyznacza liczba:

$$\tfrac{1}{2}(ma+\nu)-(\nu-r)=\tfrac{1}{2}(ma-\nu)+r.$$

Według określenia współzmiennika, przy każdem przekształceniu liniowem formy: $\sum_{r=0}^{r=m}\binom{m}{r}a_r x_1^{\,m-r}x_2^{\,r}$, na formę: $\sum_{r=0}^{r=m}\binom{m}{r}A_r y_1^{\,m-r}y_2^{\,r}$, ma zachodzić tożsamość:

$$\varphi(A_0,\, A_1,\ldots,\, A_m,\, y_1,\, y_2)=L^\lambda\,.\,\varphi(a_0,\, a_1,\ldots a_m,\, x_1,\, x_2),$$

gdzie L jest modułem przekształcenia, a λ wskaźnikiem przyjętego współzmiennika. Stosując do danej formy przekształcenie:

$$x_1=y_1+l y_2,\quad x_2=y_2,$$

którego moduł $=1$, otrzymamy stąd:

$$\varphi(A_0,\, A_1,\ldots A_m,\, y_1,\, y_2)=\varphi(a_0,\, a_1,\ldots a_m,\, x_1,\, x_2),$$

czyli, tożsamość:

$$\varphi(A_0,\, A_1,\ldots A_m,\, x_1-l x_2,\, x_2)=\varphi(a_0,\, a_1,\ldots,\, a_m,\, x_1,\, x_2), \qquad (25)$$

przyczem:

$$A_0=a_0,\; A_1=a_1+la_0,\quad A_2=a_2+2a_1l+a_0l^2,\quad A_3=a_3+3a_2l+3a_1l^2+a_0l^3,\ldots$$

Z powyższej tożsamości wynika, że, rozwijając jej pierwszą stronę podług potęg czynnika l, musimy otrzymać spółczynniki, przy różnych potęgach czynnika l, równe zeru.

Spółczynnik przy pierwszej potędze czynnika l w tem rozwinięciu prowadzi więc do równania:

$$-x_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+a_0\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}+\ldots+ma_{m-1}\frac{\partial\varphi}{\partial a_m}=0,$$

czyli do równania różniczkowego:

$$x_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}=a_0\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}+\ldots+ma_{m-1}\frac{\partial\varphi}{\partial a_m}, \tag{26}$$

któremu każdy współzmiennik musi zadość uczynić.

Z tego równania, wskutek przemiany zmiennych x_1, x_2, nie wywołującej oczywiście zmiany w postaci współzmiennika, a zmieniającej tylko spółczynniki a_r na a_{m-r}, otrzymamy nowe równanie różniczkowe:

$$x_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}=a_m\frac{\partial\varphi}{\partial a_{m-1}}+2a_{m-1}\frac{\partial\varphi}{\partial a_{m-2}}+\ldots+ma_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_0}, \tag{27}$$

któremu także każdy współzmiennik musi uczynić zadość.

Przyjmując współzmiennik w postaci (24), otrzymujemy:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}=\nu C_0x_1^{\nu-1}+(\nu-1)\binom{\nu}{1}C_1x_1^{\nu-2}x_2+(\nu-2)\binom{\nu}{2}C_2x_1^{\nu-3}x_2^2+\ldots+\nu C_{\nu-1}x_2^{\nu-1},$$

zatem:

$$x_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}=\nu C_0x_1^{\nu-1}x_2+(\nu-1)\binom{\nu}{1}C_1x_1^{\nu-2}x_2^2+\ldots+\nu C_{\nu-1}x_2^{\nu}.$$

Zastosujmy teraz do tego współzmiennika działanie:

$$a_0\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}+\ldots+ma_{m-1}\frac{\partial\varphi}{\partial a_m},$$

wskazane po drugiej stronie równania (26), to uwzględniając, że spółczynniki $C_0, C_1, \ldots, C_\nu$ są funkcyami spółczynników: $a_0, a_1, \ldots, a_m$, i porównywając, na podstawie równania (24), spółczynniki przy równych potęgach zmiennych x_1 i x_2, otrzymujemy $(\nu+1)$ równań kształtu:

$$\begin{aligned} a_0\frac{\partial C_0}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial C_0}{\partial a_2}+\ldots+ma_{m-1}\frac{\partial C_0}{\partial a_m}&=0\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot&\\ a_0\frac{\partial C_\nu}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial C_\nu}{\partial a_2}+\ldots+ma_{m-1}\frac{\partial C_\nu}{\partial a_m}&=\nu C_{\nu-1}.\end{aligned} \tag{28}$$

Analogicznie otrzymamy, na podstawie tożsamości (27), $(\nu+1)$ równań warunkowych:

$$\begin{aligned} ma_1\frac{\partial C_\nu}{\partial a_0}+(m-1)a_2\frac{\partial C_\nu}{\partial a_1}+\ldots+a_m\frac{\partial C_\nu}{\partial a_{m-1}}&=0,\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot&\\ ma_1\frac{\partial C_0}{\partial a_0}+(m-1)a_2\frac{\partial C_0}{\partial a_1}+\ldots+a_m\frac{\partial C_0}{\partial a_{m-1}}&=\nu C_1.\end{aligned} \tag{29}$$

Oznaczając znakiem Δ działanie, określone symbolem:

$$ma_1\frac{\partial}{\partial a_0}+(m-1)a_2\frac{\partial}{\partial a_1}+\ldots+a_m\frac{\partial}{\partial a_{m-1}}=\Delta,$$

przedstawimy powyższe równania w postaci:

$$\Delta C_\nu=0,\ \Delta C_{\nu-1}=C_\nu,\ \Delta C_{\nu-2}=2C_{\nu-1},\ldots\ \Delta C_{\nu-r}=rC_{\nu-r+1},\ldots$$
$$\Delta C_1=(\nu-1)C_2,\ \Delta C_0=\nu C_1,$$

skąd dostajemy wzory:

$$C_1=\frac{1}{\nu}\Delta C_0,\ C_2=\frac{1}{\nu-1}\Delta C_1,\ldots,\ C_{\nu-1}=\frac{1}{2}\Delta C_{\nu-2},\ C_\nu=\Delta C_{\nu-1}, \tag{30}$$

na podstawie których, znając C_0, możemy wyznaczyć wszystkie inne spółczynniki współzmiennika φ.

20. Tworzenie współzmienników dla danych form dwójkowych. Na podstawie twierdzeń, powyżej podanych, możemy przystąpić do wyszukiwania współzmienników formy dwójkowej m-go stopnia. W tym celu, przyjmujemy, najpierw stopień ν współzmiennika ze względu na zmienne i stopień α ze względu na spółczynniki tej formy.

Przedstawiając szukany współzmiennik w postaci:

$$\varphi(a, x) = C_0 x_1^{\nu} + \binom{\nu}{1} C_1 x_1^{\nu-1} x_2 + \ldots + \binom{\nu}{r} C_r x_1^{\nu-r} x_2^{r} + \ldots + C_\nu x_2^{\nu},$$

znajdujemy wagę p poszczególnych spółczynników: $C_0, C_1, \ldots, C_\nu$, podług wzoru: $p_r = \frac{m\alpha + \nu}{2} - (\nu - r)$. Wyznaczywszy, następnie, postacie spółczynników: $C_r, (r = 0, 1, \ldots, \nu)$, jako funkcye α-go stopnia ze względu na spółczynniki danej formy, wyznaczamy ich spółczynniki liczebne przy pomocy równań różniczkowych, jakie każdy współzmiennik spełnia.

21. Przykłady. 1. Wyznaczyć współzmiennik dwójkowej formy sześciennej:

$$u_x^3 = a_0 x_1^3 + 3a_1 x_1^2 x_2 + 3a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3,$$

któryby był stopnia drugiego, tak ze względu na spółczynniki, jak ze względu na zmienne tej formy.

Mamy tu $m = 3$, $\alpha = 2$, $\nu = 2$, zatem: $\frac{1}{2}(m\alpha + \nu) = 4$.

Przedstawiając szukany współzmiennik $\varphi(a, x)$ w postaci:

$$\varphi(a, x) = C_0 x_1^2 + 2C_1 x_1 x_2 + C_2 x_2^2,$$

otrzymujemy, jako wagi spółczynników: C_0, C_1, C_2, liczby 2, 3, 4.

Możemy, zatem, położyć:

$$C_0 = Aa_0a_2 + Ba_1^2, \quad C_1 = Ca_0a_3 + Da_1a_2, \quad C_2 = Ea_1a_3 + Fa_2^2.$$

Warunek:
$$a_0 \frac{\partial C_0}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial C_0}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial C_0}{\partial a_3} = 0,$$

przedstawia się tu w postaci:

$$a_0 \cdot 2Ba_1 + 2a_1 \cdot Aa_0 = 0, \text{ czyli: } 2a_0a_1(A + B) = 0,$$

skąd, przyjmując $A = 1$, otrzymujemy: $B = -1$, zatem:

$$C_0 = a_0a_2 - a_1^2.$$

Z drugiego równania układu (28) otrzymujemy warunek:

$$a_0 \frac{\partial C_1}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial C_1}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial C_1}{\partial a_3} = a_0a_2 - a_1^2,$$

który, ze względu na to, że:

$$C_1 = Ca_0a_3 + Da_1a_2, \quad \frac{\partial C_1}{\partial a_1} = Da_2, \quad \frac{\partial C_1}{\partial a_2} = Da_1, \quad \frac{\partial C_1}{\partial a_3} = Ca_0,$$

sprowadza się do postaci:

$$a_0 . Da_2 + 2a_1 . Da_1 + 3a_2 . Ca_0 = a_0a_2 - a_1^2,$$

czyli:
$$a_0a_2(D + 3C - 1) + a_1^2(2D + 1) = 0.$$

Warunkowi temu stanie się zadość, gdy będzie:

$$D + 3C - 1 = 0, \quad 2D + 1 = 0,$$

a więc, dla:
$$D = -\frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{2},$$

zatem będzie:
$$C_1 = \frac{1}{2}(a_0a_3 - a_1a_2).$$

Na wyznaczenie C_2 otrzymujemy dalszy warunek:

$$a_0 \frac{\partial C_2}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial C_2}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial C_2}{\partial a_3} = a_0a_3 - a_1a_2,$$

który, wobec tego, że:

$$C_2 = Ea_1a_3 + Fa_2^2, \quad \frac{\partial C_2}{\partial a_1} = Ea_3, \quad \frac{\partial C_2}{\partial a_2} = 2Fa_2, \quad \frac{\partial C_2}{\partial a_3} = Ea_1,$$

sprowadza się do postaci:

$$a_0 . Ea_3 + 2a_1 . 2Fa_2 + 3a_2 . Ea_1 = a_0a_3 - a_1a_2,$$

czyli:
$$a_0a_3(E - 1) + a_1a_2(4F + 3E + 1) = 0,$$

a zatem, wymaga, aby było:

$$E - 1 = 0, \quad 4F + 3E + 1 = 0, \quad \text{a więc: } E = 1, \quad F = -1,$$

zatem:
$$C_2 = a_1a_3 - a_2^2.$$

Znając C_0, możemy zresztą korzystać ze wzorów (30), aby otrzymać wprost dalsze spółczynniki. Mianowicie, wiedząc, że $C_0 = a_0a_2 - a_1^2$ i używając znakowania:

$$\Delta = 3a_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + 2a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + a_3 \frac{\partial}{\partial a_2},$$

otrzymujemy:

$$C_1 = \frac{1}{2}\,\Delta C_0 = \frac{1}{2}[3a_1a_2 - 2a_2\,.\,2a_1 + a_3\,.\,a_0] = \frac{1}{2}(a_0a_3 - a_1a_2),$$

$$C_2 = \Delta C_1 = \frac{1}{2}(3a_1\,a_3 - 2a_2^2 - a_3a_1) = a_1a_3 - a_2^2, \text{ jak powyżej.}$$

Współzmiennik dwójkowej formy sześciennej $u_3{}^3$, któryby był stopnia drugieg ze względu na spółczynniki, jak ze względu na zmienne tej formy, przedstawia si w postaci: $\varphi = (a_0a_2 - a_1{}^2)x_1{}^2 + (a_0a_3 - a_1a_2)x_1x_2 + (a_1a_3 - a_2^2)x_2{}^2$.

2) Wyznaczyć dla dwójkowej formy sześciennej:

$$u_3{}^3 = a_0x_1{}^3 + 3a_1x_1{}^2x_2 + 3a_2x_1x_2{}^2 + a_3x_2{}^3,$$

współzmiennik stopnia trzeciego, ze względu na spółczynniki i ze względu na z tej formy.

Mamy tu: $m = 3$, $\alpha = 3$, $\nu = 3$, zatem: $\frac{1}{2}(m\alpha + \nu) = 6$.

Przyjmując zatem współzmiennik $\varphi(a, x)$ w postaci:

$$\varphi = C_0\,x_1{}^3 + 3C_1x_1{}^2x_2 + 3\,C_2x_1x_2{}^2 + C_3x_2{}^3,$$

zauważymy, że spółczynnik C_0, który ma być funkcyą jednorodną 3:go stopnia ze w na spółczynniki danej formy, będzie miał wyrazy o wadze $6-3=3$. Możemy, zate łożyć:

$$C_0 = Aa_0{}^2a_3 + B\,a_0a_1a_2 + Ca_1{}^3.$$

Z warunku:

$$a_0\frac{\partial C_0}{\partial a_1} + 2a_1\frac{\partial C_0}{\partial a_2} + 3\,a_2\frac{\partial C_0}{\partial a_3} = 0,$$

otrzymujemy:

$$a_0\left\{Ba_0a_2 + 3\,Ca_1{}^2\right\} + 2a_1\,.\,Ba_0a_1 + 3a_2\,.\,A\,a_0{}^2 = 0,$$

czyli:

$$a_0{}^2a_2(B + 3A) + a_0a_1{}^2(3\,C + 2B) = 0,$$

a stąd, warunki:

$$B + 3A = 0, \quad 3C + 2B = 0.$$

Przyjmując $A = 1$, dostajemy: $B = -3$, $C = 2$, zatem:

$$C_0 = a_0{}^2a_3 - 3\,a_0a_1a_2 + 2\,a_1{}^3,$$

skąd, używając znakowania: $\Delta = 3a_1\frac{\partial}{\partial a_0} + 2a_2\frac{\partial}{\partial a_1} + a_3\frac{\partial}{\partial a_2}$,

otrzymujemy:

$$C_1 = \frac{1}{3}\,\Delta\,C_0 = \frac{1}{3}\,[3a_1\,.\,(2a_0a_3 - 3a_1a_2) + 2a_2.(-3a_0a_2 + 6a_1{}^2) + a_3.(-3a_0a_1)],$$

a zatem:

$$C_1 = a_0\,a_1a_3 + a_1{}^2a_2 - 2\,a_0a_2{}^2.$$

Dalej znajdujemy:

$$C_2 = \frac{1}{2}\,\Delta C_1 = \frac{1}{2}\,[3a_1(a_1a_3 - 2a_2{}^2) + 2a_2\,(a_0a_3 + 2a_1a_2) + a_3\,(a_1{}^2 - 4a_0\,a_2)],$$

zatem:

$$C_2 = 2a_1{}^2a_3 - a_1\,a_2{}^2 - a_0\,a_2a_3,$$

wreszcie:

$$C_3 = \Delta\,C_2 = 3a_1\,(-a_2\,a_3) + 2a_2(4a_1a_3 - a_2{}^2) + a_3\,(+2a_1a_2 - a_0\,a_3),$$

zatem:

$$C_3 = 3a_1\,a_2a_3 - 2\,a_2{}^3 - a_0\,a_3{}^2.$$

Współzmiennik szukany ma, zatem, kształt:

$$\varphi = (a_0{}^2a_3 - 3a_0\,a_1a_2 + 2a_1{}^3)\,x_1{}^3 + 3\,(a_0\,a_1a_3 + a_1{}^2\,a_2 - 2a_0\,a_2{}^2)\,x_1{}^2x_2 +$$
$$+ 3\,(2a_1{}^2\,a_3 - a_1a_2{}^2 - a_0\,a_2a_3)\,x_1x_2{}^2 + (3a_1a_2a_3 - 2\,a_2{}^3 - a_0\,a_3{}^2)\,x_2{}^3.$$

Ćwiczenia XXIII.

1) Wyznaczyć ilość niezmienników bezwzględnych, jakie posiadać może forn braiczna m-go stopnia o n zmiennych.

2) Wykazać, że forma kwadratowa o n zmiennych, nie ma żadnego niezm bezwzględnego.

3) Wykazać, że forma kwadratowa ilukolwiek zmiennych ma tylko jeden niez względny, a tym jest jej wyróżnik.

4) Wykazać, że wyróżnik formy kwadratowej, otrzymanej wskutek liniowego przekształcenia danej formy kwadratowej, jest równy wyróżnikowi formy pierwotnej, pomnożonemu przez kwadrat modułu odnośnego przekształcenia.

5) Wykazać, że dwie formy kwadratowe n zmiennych mają, oprócz swych wyróżników, jeszcze $(n-1)$ wspólnych niezmienników względnych.

6) Wyznaczyć wspólne niezmienniki dwu form kwadratowych, dwójkowych:

$$u_2{}^2 = a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2, \quad U_2{}^2 = A_0x^2 + 2A_1xy + A_2y^2.$$

7) Wyznaczyć wspólne niezmienniki dwu form kwadratowych, trójkowych:

$$u_3{}^2 = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz,$$
$$U_3{}^2 = A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz + 2A_{23}yz.$$

8) Wykazać, że forma kwadratowa n zmiennych posiada, oprócz swego wyróżnika, jako jedynego niezmiennika względnego, jeszcze $(n-1)$ niezmienników ortogonalnych.

9) Wyprowadzić niezmienniki ortogonalne formy kwadratowej, dwójkowej:

$$ax^2 + by^2 + 2cxy.$$

10) Wyprowadzić niezmienniki ortogonalne formy kwadratowej, trójkowej:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2exz + 2fxy.$$

11) Jeżeli w formie kwadratowej n zmiennych: $u_n{}^2 = \Sigma a_{ik} x_i x_k$, $(a_{ik} = a_{ki})$, zastąpimy spółczynniki a_{ik} przez ich minory α_{ik} w wyznaczniku $|a_{ik}|$, natenczas otrzymamy formę: $v_n{}^2 = \Sigma \alpha_{ik} x_i x_k$, $(\alpha_{ik} = \alpha_{ki})$, zwaną formą dołączoną do danej formy kwadratowej. Dowieść, że wyróżnik formy dołączonej jest równy $(n-1)$-szej potędze wyróżnika danej formy.

12) Podać formę dołączoną (ćw. 11.) do formy kwadratowej, trójkowej:

$$u_3{}^2 = a_{11}x_1{}^2 + a_{22}x_2{}^2 + a_{33}x_3{}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

i wyznaczyć jej wyróżnik.

13) Wykazać, że forma kwadratowa n zmiennych, da się przedstawić, jako suma kwadratów n form liniowych, od siebie niezależnych.

14) Wykazać, że warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby dana forma kwadratowa n zmiennych, dała się przedstawić, jako suma n kwadratów, jest ten, aby jej wyróżnik był różny od zera. Skoro wyróżnik ten jest równy zeru, ilość kwadratów będzie mniejszą od ilości zmiennych.

15) Wykazać, że w przypadku, gdy wyróżnik danej formy kwadratowej jest zerem, forma dołączona do tej formy (ćw. 11.) jest zupełnym kwadratem formy liniowej.

16) Wykazać, że w przypadku, gdy wyznacznik układu n form liniowych o n zmiennych jest równy zeru, a nie wszystkie minory elementów tego wyznacznika są zerami, natenczas istnieje między temi formami jeden i to tylko jeden związek liniowy, tożsamościowy.

17) Dowieść, że w przypadku, gdy wyznacznik układu n form liniowych, o n zmiennych, jest równy zeru, a nadto wszystkie jego podwyznaczniki, aż do $(n-r-1)$-go rzędu włącznie, są zerami, podczas gdy przynajmniej jeden z jego podwyznaczników $(n-r)$-go rzędu, jest różny od zera, natenczas istnieje między temi formami liniowemi r oddzielnych związków liniowych, tożsamościowych.

18) Wykazać, że wyznacznik układu n form liniowych o n zmiennych jest wspólnym niezmiennikiem tych form.

19) Wykazać, że niezmiennik względny danej formy algebraicznej jest zawsze jednorodną funkcyą spółczynników tej formy.

20) Wykazać, że każdy współzmiennik danej formy algebraicznej jest funkcyą jednorodną, tak ze względu na spółczynniki, jak ze względu na zmienne tej formy.

21) Wykazać, że forma dwójkowa m-go stopnia posiada najwyżej $m-3$ niezmienników bezwzględnych.

22) Wykazać, że formy dwójkowe sześcienne nie mają żadnego niezmiennika bezwzględnego.

23) Wykazać, że wszelki niezmiennik formy dwójkowej m-go stopnia jest funkcyą jednorodną i izobaryczną jej spółczynników.

24) Wykazać, że niezmiennik formy dwójkowej m-go stopnia:

$$u_2{}^m = a_0x^m + \binom{m}{1} a_1x^{m-1}y + \binom{m}{2} a_2x^{m-2}y^2 + \dots + \binom{m}{m-1} a_{m-1}xy^{m-1} + a_my^m,$$

zachowuje tę samą postać, jeżeli przemienimy spółczynniki a_r i a_{m-r}, równoodległe od końców tej formy.

25) Wykazać, że waga niezmiennika α-go stopnia danej formy dwójkowej m-go stopnia jest równa $\frac{1}{2} m\alpha$.

26) Wykazać, że forma dwójkowa nieparzystego stopnia, może posiadać niezmienniki tylko stopnia parzystego.

27) Wykazać, że wszelki niezmiennik $\varphi(a_0, a_1, \ldots, a_m)$ danej formy dwójkowej $u_2^m = \sum_{r=0}^{r=m} \binom{m}{r} a_r x^r y^{m-r}$, czyni zadość równaniu różniczkowemu, cząstkowemu:

$$a_0 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + 2 a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + 3 a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_3} + \ldots + m a_{m-1} \frac{\partial \varphi}{\partial a_m} = 0.$$

28) Jeżeli u_2^m i U_2^m są dwie formy dwójkowe m-go stopnia, pierwsza o spółczynnikach: $a_0, a_1, \ldots, a_m$, druga o spółczynnikach: $A_0, A_1, \ldots, A_m$, a $\varphi(a_0, a_1, \ldots, a_m)$ jest niezmiennikiem pierwszej formy, wykazać, że wyrażenie:

$$A_0 \frac{\partial \varphi}{\partial a_0} + A_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + A_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \ldots + A_m \frac{\partial \varphi}{\partial a_m},$$

jest wspólnym niezmiennikiem tych form.

29) Wykazać, że forma dwójkowa: $u_2^2 = a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y^2$ ma jedyny niezmiennik drugiego stopnia: $\varphi(a) = a_0 a_2 - a_1^2$.

30) Wykazać, że forma dwójkowa, sześcienna: $u_2^3 = a_0 x^3 + 3a_1 x^2 y + 3a_2 xy^2 + a_3 y^3$, ma jedyny niezmiennik czwartego stopnia: $\varphi(a) = a_0^2 a_3^2 + 4a_0 a_2^3 - 6a_0 a_1 a_2 a_3 + 4a_1^3 a_3 - 3a_1^2 a_2^2$.

31) Wykazać, że forma dwójkowa czwartego stopnia:

$$u_2^4 = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 y + 6a_2 x^2 y^2 + 4a_3 xy^3 + a_4 y^4,$$

ma 1) niezmiennik drugiego stopnia $\varphi_1(a) = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2$, o wskaźniku $\lambda = 4$,
2) niezmiennik trzeciego stopnia: $\varphi_2(a) = a_0 a_2 a_4 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3$, o wskaźniku $\lambda=6$.

32) Wykazać, że forma czwartego stopnia:

$$u_2^4 = a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 y + 6a_2 x^2 y^2 + 4a_3 xy^3 + a_4 y^4,$$

ma niezmiennik bezwzględny w postaci:

$$\varphi(a) = \frac{(a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2)^3}{(a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4)^2}.$$

33) Wykazać, że forma: $x^4 + y^4 + 6\lambda x^2 y^2$, ma dwa niezmienniki: $\varphi_1 = 1 + 3\lambda^2$, $\varphi_2 = \lambda - \lambda^3$ i niezmiennik bezwzględny: $\varphi = \frac{(1 + 3\lambda^2)^3}{(\lambda - \lambda^3)^2}$.

34) Wykazać, że suma spółczynników w niezmienniku formy dwójkowej, kształtu: $u_2^m = \sum \binom{m}{r} a_r x^{m-r} y^r$, jest zawsze równą zeru.

35) Wykazać, że wszelki współzmiennik φ formy dwójkowej:

$$u_2^m = \sum_{r=0}^{r=m} \binom{m}{r} a_r x_1^{m-r} x_2^r,$$

sprawdza równania różniczkowe:

$$x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = a_0 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + 2 a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + 3 a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_3} + \ldots + m a_{m-1} \frac{\partial \varphi}{\partial a_m},$$

$$x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = a_m \frac{\partial \varphi}{\partial a_{m-1}} + 2 a_{m-1} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{m-2}} + \ldots + m a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_0}.$$

36) Wykazać, że wszelki współzmiennik:

$$\varphi = \sum_{r=0}^{r=1} \binom{\nu}{r} C_r x_1^{\nu-r} x_2^r \text{ formy dwójkowej: } u_2^m = \sum \binom{m}{r} a_r x_1^{m-r} x_2^r,$$

ma spółczynniki $C_r (r = 0, 1, \ldots, \nu)$ jednorodne α-go stopnia ze względu na spółczynniki formy, o wadze równej: $\frac{1}{2}(m\alpha - \nu) + r$.

37) Wyznaczyć współzmiennik drugiego stopnia, ze względu na spółczynniki i zmienne formy dwójkowej: $u_2^3 = a_0 x^3 + 3a_1 x^2 y + 3a_2 xy^2 + a_3 y^3$.

38) Wyznaczyć dla formy dwójkowej, sześciennej, współzmiennik trzeciego stopnia w spółczynnikach i zmiennych tej formy.

39) Wykazać, że współzmiennik formy:

$$u_2^4 = a_0 x_1^4 + 4a_1 x_1^3 x_2 + 6 a_2 x_1^2 x_2^2 + 4 a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4,$$

a drugiego, ze względu na spółczynniki, a czwartego, ze względu na zmienne, stawia się w postaci:

$$(a_0 a_2 - a_1^2) x_1^4 + 2(a_0 a_3 - a_1 a_2) x_1^3 x_2 + (2 a_1 a_3 + a_0 a_4 - 3 a_2^2) x_1^2 x_2^2 +$$
$$+ 2(a_1 a_4 - a_2 a_3) x_1 x_2^3 + (a_2 a_4 - a_3^2) x_2^4.$$

40) Wykazać, że współzmiennik φ formy u_2^6, kształtu:

$$\varphi = C_0 x_1^6 + \binom{6}{1} C_1 x_1^5 x_2 + \binom{6}{2} C_2 x_1^4 x_2^2 + \binom{6}{3} C_3 x_1^3 x_2^3 +$$
$$+ \binom{6}{4} C_4 x_1^2 x_2^4 + \binom{6}{5} C_5 x_1 x_2^5 + C_6 x_2^6,$$

ółczynniki:

$$C_0 = a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3, \quad C_1 = \tfrac{1}{6}(2a_0 a_1 a_3 + 6a_1^2 a_2 - 9 a_0 a_2^2 + a_0^2 a_4),$$
$$\tfrac{1}{2}(a_0 a_1 a_4 - 3a_0 a_2 a_3 + 2a_1^2 a_3), \quad C_3 = \tfrac{1}{2}(a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2), \quad C_4 = \tfrac{1}{3}(-a_0 a_3 a_4 + 3a_1 a_2 a_4 - 2a_1 a_3^2),$$
$$C_5 = \tfrac{1}{6}(-2a_1 a_3 a_4 - 6a_3^2 a_2 + 9 a_4 a_2^2 - a_4^2 a_0), \quad C_6 = 3a_2 a_3 a_4 - a_1 a_4^2 - 2a_3^3.$$

41) Jeżeli funkcya spółczynników $(a_0, a_1, \dots, a_m)$ danej formy u_2^m czyni zadość wszyst- arunkom niezmiennika, a tylko nie spełnia warunku jednego co do swej wagi: , natenczas nazywamy taką funkcyę spółczynników półzmiennikiem (semi- ntem) tej formy. Wykazać, że spółczynnik C_0 (str. 382), z którego wszystkie inne niki współzmiennika φ danej formy u_2^m wyprowadzić możemy, zwany także em współzmiennika, jest sam półzmiennikiem tej formy.

42) Wykazać, że dwójkowa forma sześcienna, nie ma współzmiennika liniowego.

43) Wykazać, że forma 5-go stopnia:

$$u_2^5 = a_0 x_1^5 + 5a_1 x_1^4 x_2 + 10a_2 x_1^3 x_2^2 + 10a_3 x_1^2 x_2^3 + 5a_4 x_1 x_2^4 + a_4 x_2^5,$$

spółzmiennik drugiego stopnia, kształtu:

$$(a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2) x_1^2 + (a_0 a_5 - 3a_1 a_4 + 2a_2 a_3) x_1 x_2 + (a_1 a_5 - 4a_2 a_4 + 3a_3^2) x_2^2.$$

44) Wykazać, że każda forma dwójkowa, rzędu nieparzystego, posiada współzmiennik drugiego, tak ze względu na spółczynniki, jak ze względu na zmienne tej formy.

5) Wykazać, że forma dwójkowa, kwadratowa: $u_2^2 = a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2$, nie żadnego współzmiennika.

46) Wykazać, że hessyan formy dwójkowej sześciennej:

$$u_2^3 = a_0 x_1^3 + 3 a_1 x_1^2 x_2 + 3a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3,$$

j współzmiennikiem.

47) Wykazać, że dla dowolnej funkcyi: $F(x, y, z)$, suma: $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2$ nie się wskutek przekształcenia ortogonalnego tej funkcyi.

48) Wykazać, że przekształcenie ortogonalne funkcyi $F(x, y, z)$, nie zmienia takie $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$.

Rozwiązania XXIII. Wskazówki zawarte są w wykładzie.

Literatura. Josef Carnoy. Cours d'algèbre superieure. Louvain et Paris 1900. Dr. f Kniaź Puzyna. Teorya funkcyj analitycznych. Tom I. Rozdział XI. Z teoryi Lwów, 1898.

Tematy do rozprawek naukowych.

Określenie i własności niezmienników, ich sposoby wyznaczania.
Określenie i własności współzmienników, ich sposoby wyznaczania i zastosowania.
Niezmienniki i współzmienniki form dwójkowych.

Wykład XXIV.

Przekształcanie pochodnych i różniczek funkcyj jednej i dwu zmiennych.

1. Zamiana zmiennej niezależnej w funkcyi jednej zmiennej. Zamia[n] zmiennej niezależnej x w funkcyi: $y=f(x)$ na zmienną niezależną t, na mo[cy] przekształcenia: $x=\varphi(t)$, wywołuje potrzebę przekształcenia pochodny[ch] funkcyi $y=f(x)$ względem x, jako to: $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, na pochodne tej funkc[yi] względem t, t. j.: $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$,...

Związek między nową pierwszą pochodną: $\frac{dy}{dt}$ a pierwotną: $\frac{dy}{dx}$ okreś[la] się równością:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}, \qquad (1)$$

z której otrzymujemy wzór:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \text{ czyli: } y_x'=\frac{y'}{x'}, \qquad (2)$$

wyrażający pierwotną pochodną: $\frac{dy}{dx}=y_x'$ przez nową: $\frac{dy}{dt}=y'$ i przez pocho[dną] $\frac{dx}{dt}=x'$, a więc przez pierwsze pochodne zmiennych x i y względem no[wej] zmiennej niezależnej t.

Stosując do powyższego wzoru prawidła różniczkowania, otrzymuje[my] dalej:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left\{\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right\}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x'}\frac{d}{dt}\left\{\frac{y'}{x'}\right\}=\frac{1}{x'}\frac{x'y''-y'x''}{x'^2},$$

a więc wzór:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}, \text{ czyli } y_x''=\frac{x'y''-y'x''}{x'^3} \qquad (3)$$

...ający drugą pochodną: $\frac{d^2y}{dx^2}=y''_x$ przez pochodne zmiennych x i y ...lędem t, t. j. przez: $\frac{dx}{dt}=x'$, $\frac{d^2x}{dt^2}=x''$, $\frac{dy}{dt}=y'$, $\frac{d^2y}{dt^2}=y''$.

Podobnie, otrzymamy, na mocy równości:

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dt}\left\{\frac{x'y''-y'x''}{x'^3}\right\}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x'}\frac{d}{dt}\left\{\frac{x'y''-y'x''}{x'^3}\right\},$$

...li:

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{x'(x'y'''-y'x''')-(x'y''-y'x'').3x''}{x'^5},$$

...ir:

$$y_x'''=\frac{x'^2.y'''-3x'x''.y''+[3x''^2-x'x''']y'}{x'^5},\tag{4}$$

...li:

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\cdot\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+\left[3\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2-\frac{dx}{dt}\frac{d^3x}{dt^3}\right]\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^5}\tag{4'}$$

...ający trzecią pochodną: $\frac{d^3y}{dx^3}=y_x'''$ przez pochodne zmiennych x i y ...lędem zmiennej t.

Postępując w ten sposób dalej, otrzymamy analogiczne wzory dla po...dnych wyższych rzędów.

2. Przykład. Wyznaczyć pochodne $\frac{dy}{dx}$ i $\frac{d^2y}{dx^2}$, jeżeli $x=\sin t$.

Mamy tu: $\frac{dx}{dt}=\cos t$, $\frac{d^2x}{dt^2}=-\sin t$, przeto:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos t}\cdot\frac{dy}{dt},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\cos t}\cdot\frac{\cos t\frac{d^2y}{dt^2}+\sin t\frac{dy}{dt}}{\cos^2 t}=\frac{\cos t\frac{d^2y}{dt^2}+\sin t\frac{dy}{dt}}{\cos^3 t},$$

...ięc:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos t}\cdot\frac{dy}{dt},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\cos^2 t}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\sin t}{\cos^3 t}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

3. Wzory w art. 1. podane, możemy otrzymać także na mocy prawideł ...iczkowania ilorazu: $\frac{dy}{dx}$, uważając obie różniczki dy i dx, jako różniczki ...ienne. W ten sposób, otrzymamy wzory:

$$y'_x=\frac{dy}{dx},\quad y_x''=\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx^3},\tag{5}$$

$$y_x'''=\frac{dx(dx\,d^3y-dy\,d^3x)-3d^2x(dx\,d^2y-dy\,d^2x)}{dx^5}, \text{ i t. d.,}$$

...których wynikają wzory w art. 1. podane, jeżeli liczniki i mianowniki ...rzymanych wyrażeń różniczkowych podzielimy przez odpowiednie potęgi ...óżniczki dt nowej zmiennej, niezależnej t.

Zazwyczaj używa się wzorów, podanych w postaci (5), jeżeli obie ...ienne x i y podane są, jako funkcye pewnej zmiennej niezależnej t, ...chodzi o wyznaczenie pochodnych: $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ...

4. Przykład. Wyznaczyć pochodne: $\frac{dy}{dx}$ i $\frac{d^2y}{dx^2}$, skoro: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ gdzie t jest nową zmienną niezależną.

Otrzymujemy tu:

$$dx=a(1-\cos t)\,dt,\quad dy=a\sin t\,dt,\quad d^2x=a\sin t\,.dt^2,\quad d^2y=a\cos t\,dt^2,$$

zatem:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin t}{1-\cos t},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\cos t}{a(1-\cos t)^2}.$$

5. Różniczkowanie funkcyi określonej równaniem: $F(x, y)=0$, za pośrednictwem nowej zmiennej t. Wprowadzenie nowej zmiennej niezależnej za pomocą podstawienia $x=\varphi(t)$. sprawia, że funkcya y zmiennej niezależnej x, określona, bądź to w formie wyraźnej w postaci: $y=f(x)$, bądź to w formie uwikłanej w postaci równania między zmiennemi x i y kształtu: $F(x, y)=0$ zostaje przedstawioną za pomocą dwu równań między zmiennemi x, y i nową zmienną t w postaci wyraźnej:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),$$

lub w postaci uwikłanej:

$$\Phi(x, t)=0,\quad \Psi(y, t)=0.$$

Ten sposób przedstawiania zależności między dwiema zmiennemi x i y za pośrednictwem trzeciej zmiennej t, upraszcza niekiedy rachunek, mając na celu wyznaczanie pochodnych: $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$, przedstawiając je także jako funkcye nowej zmiennej t.

Dla funkcyi wyraźnej: $y=f(x)$, kładąc $x=\varphi(t)$ i otrzymując wskutek tego $y=\psi(t)$, dostajemy, w miejsce wzorów:

$$\frac{dy}{dx}=f'(x),\quad \frac{d^2y}{dx^2}=f''(x),\quad \frac{d^3y}{dx^3}=f'''(x),\ldots,$$

następujące:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\varphi'(t)\psi''(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{[\varphi'(t)]^2\psi'''(t)-3\varphi'(t)\varphi''(t)\psi''(t)+\{3[\varphi''(t)]^2-\varphi'(t)\varphi'''(t)\}\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^5}.$$

Mając wyznaczyć pochodne funkcyi y, określonej równaniem: $F(x,y)=0$ korzystamy, w myśl wskazówek, podanych w wykładzie XLVIII. Tom I str. 370. i nast. z równań:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0,\quad \frac{\partial^2F}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2F}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2F}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial F}{\partial x}d^2x+\frac{\partial F}{\partial y}d^2y=0,$$

z których, na podstawie prawideł różniczkowania, po przyjęciu x za zmienną niezależną, wyrazy $d^2x, d^3x,\ldots$ wypadają.

Z równań tych otrzymujemy wzory:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2F}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial^2F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3}.$$

Kładąc natomiast $x=\varphi(t)$, a otrzymując, na podstawie równania $F(x, y)=0$, odpowiednio $y=\psi(t)$, otrzymujemy pochodne funkcyi y względem x wyrażone przez zmienną t, według takich samych wzorów, jakie z zastąpienia funkcyi wyraźnej $y=f(x)$ przez dwa równania: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ wypływają.

6. Uważając w równaniu $F(x, y)=0$, zmienne x i y, jako funkcye zmiennej niezależnej t, otrzymujemy, na podstawie prawideł różniczkowania równania: $F(x, y)=0$, kolejno następujące wzory:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial F}{\partial x}d^2x+\frac{\partial F}{\partial y}d^2y=0,$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 F}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 F}{\partial x\,\partial y^2}dx\,dy^2+\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}dy^3+3\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx\,d^2x+$$

$$+3\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}(dx\,d^2y+dy\,d^2x)+3\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy\,d^2y+\frac{\partial F}{\partial x}d^3x+\frac{\partial F}{\partial y}d^3y=0.$$

Z wzorów tych możemy wyznaczyć pochodne funkcyi y względem x pod różnemi możliwemi założeniami. W przypadku, gdy x jest zmienną niezależną, należy przyjąć $d^2x=0$, a wtedy wszystkie różniczki zmiennej x rzędów wyższych nad pierwszy będą równe zeru.

W przypadku, gdy zmienna x, a tem samem zmienna y, zostały przyjęte, jako funkcye innej zmiennej t, należy powyższe równania podzielić przez odpowiednie potęgi różniczki dt, a otrzymuje się kolejno pochodne zmiennych x i y względem zmiennej niezależnej t, a na tej podstawie pochodne zmiennej y względem x.

7. **Przykłady.** 1. Mając n. p. wyznaczyć pochodnę funkcyi y względem x z równania:

$$x+\sqrt{2ay-y^2}-a\,.\,\mathrm{arc}\cos\frac{a-y}{a}=0,$$

otrzymujemy za pomocą różniczkowania:

$$dx-\frac{y\,dy}{\sqrt{2ay-y^2}}=0,\ \text{a więc}\ \frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{2ay-y^2}}{y}.$$

Następne różniczkowanie daje drugą pochodną w postaci:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y\,.\,\frac{1}{2}(2ay-y^2)^{-\frac{1}{2}}(2a-2y)-\sqrt{2ay-y^2}}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

czyli:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{a(a-y)}{y^3}.$$

Używając podstawienia: $\frac{a-y}{a}=\cos t$, czyli: $y=a(1-\cos t)$, otrzymujemy z danego równania: $x=a(t-\sin t)$, a więc:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin t}{1-\cos t}=\frac{\sqrt{2ay-y^2}}{y},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\cos t}{a(1-\cos t)^3}=\frac{a(a-y)}{y^3}.$$

2) Wyznaczyć pochodne funkcyi, określonej równaniem: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, za pomocą podstawienia $x=a\cos\varphi$, gdzie φ jest nową zmienną, niezależną.

Kładąc $x=a\cos\varphi$, otrzymujemy z równania: $y=b\sin\varphi$,

a więc: $dx=-a\sin\varphi\,d\varphi$,

$$dy=b\cos\varphi\,d\varphi,\quad \text{zatem:}\ \frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a}\operatorname{cotg}\varphi,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{b}{a\sin^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx}=-\frac{b}{a^2\sin^3\varphi},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{3b}{a^2}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin^4\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx}=-\frac{3b}{a^3}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin^5\varphi}.$$

Różniczkując zaś wprost dane równanie, otrzymujemy:

$$\frac{x\,dx}{a^2}+\frac{y\,dy}{b^2}=0,\ \text{zatem:}\ \frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2}{a^2y}+\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y^2}\frac{dy}{dx}=-\frac{b^4}{a^2y^3},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{3b^4}{a^2y^4}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{3b^4}{a^2a^4}\cdot-\frac{b^2x}{a^2y}=-\frac{3b^6x}{a^4y^5},$$

zatem:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}=-\frac{b}{a}\operatorname{cotg}\varphi,\ \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^4}{a^2y^3}=-\frac{b}{a^2\sin^3\varphi},\ \frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{3b^6}{a^4y^5}x=-\frac{3b\,c}{a^3\,\mathrm{si}}$$

8. Zamiana zmiennej niezależnej na zależną i odwrotnie. Jeż wzorach art. 1. położymy $t=y$, to otrzymamy: $\frac{dy}{dt}=1$, $\frac{d^2y}{dt^2}=0,\ldots,$ wzory, wyrażające pochodne zmiennej y względem x, przez pochodne zm x względem y, przedstawiają się w postaci:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3},\quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2-\frac{dx}{dy}\,\frac{d^3x}{dy^3}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5},$$

czyli, gdy położymy: $\frac{dx}{dy}=x'$, $\frac{d^2x}{dy^2}=x''$, $\frac{d^3x}{dy^3}=x'''$ w postaci:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x'},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{x'^3}.x'',\quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{3x''^2-x'x'''}{x'^5}.$$

Powyższe wzory możemy otrzymać także bezpośrednio z wzoru:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}},$$

stosując prawidła różniczkowania; otrzymujemy tedy:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\cdot\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left\{-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}\right\}=\frac{d}{dy}\left\{-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}\right\}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2-\frac{dx}{dy}\,\frac{d^3x}{dy^3}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5}.$$

Z wzorów tych wypadnie korzystać, gdy mamy wyrażenie, podane chodnych zmiennej y, przekształcić na wyrażenie w pochodnych zmier

9. Przykład. Przekształcić wzór: $\rho=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$, uważając y za zmien zależną.

Mamy tu: $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}\cdot\frac{d^2x}{dy^2}$, $1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]$, zat

$$\rho=-\frac{\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2x}{dy^2}}.$$

10. Zamiana obu zmiennych zależnej i niezależnej w funkcyi zmiennej. Jeżeli do funkcyi $y=f(x)$, zastosujemy podstawienia:

$$x=\varphi(u,\ v),\quad y=\psi(u,\ v),$$

nateneczas otrzymamy:

$$dx=\frac{\partial\varphi}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv,\quad dy=\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv,$$

przeto:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv}. \tag{7}$$

Uważając u jako zmienną niezależną, a v jako zmienną zależną, otrzymamy pierwszą pochodną $\frac{dy}{dx}$, w postaci:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{\partial\psi}{\partial u}+\frac{\partial\psi}{\partial v}\cdot\frac{dv}{du}}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{dv}{du}}, \tag{7'}$$

skąd otrzymujemy drugą pochodną na podstawie wzoru:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{du}\left\{\frac{\frac{\partial\psi}{\partial u}+\frac{\partial\psi}{\partial v}\cdot\frac{dv}{du}}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{dv}{du}}\right\}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{d\varphi}{dv}\cdot\frac{dv}{du}}\cdot\frac{d}{du}\left\{\frac{\frac{\partial\psi}{\partial u}+\frac{\partial\psi}{\partial v}\cdot\frac{dv}{du}}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{dv}{du}}\right\}, \tag{8}$$

a podobnież postępując i dalsze pochodne.

11. **Przykład.** Przekształcić pochodne $\frac{dy}{dx}$ i $\frac{d^2y}{dx^2}$ za pomocą podstawienia: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, uważając φ jako nową zmienną, niezależną:

Otrzymujemy tu:

$$dx=-r\sin\varphi\,d\varphi+\cos\varphi\,dr,\quad dy=r\cos\varphi\,d\varphi+\sin\varphi\,dr,$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\varphi\,dr+r\cos\varphi\,d\varphi}{\cos\varphi\,dr-r\sin\varphi\,d\varphi}=\frac{\sin\varphi\,.\,\frac{dr}{d\varphi}+r\cos\varphi}{\cos\varphi\,.\,\frac{dr}{d\varphi}-r\sin\varphi},$$

a stąd:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{d\varphi}\left\{\frac{\sin\varphi\frac{dr}{d\varphi}+r\cos\varphi}{\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi}-r\sin\varphi}\right\}\cdot\frac{d\varphi}{dx}=\frac{r^2+2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}{\left(\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi}-r\sin\varphi\right)^3}.$$

12. **Zamiana zmiennych niezależnych w funkcyi dwu zmiennych.** Niech będzie daną funkcya z dwu zmiennych niezależnych x i y, w postaci: $z=f(x, y)$. Zastąpmy zmienne x i y przez nowe zmienne u i v za pomocą podstawień: $x=\varphi(u, v)$, $y=\psi(u, v)$, natenczas należy także wyrazić pochodne cząstkowe: $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, i t. p., przez zmienne u i v i przez pochodne cząstkowe: $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ i t. p.

Według założenia jest zmienna z funkcyą dwu zmiennych x i y, które są funkcyami nowych zmiennych niezależnych u i v, zmienna z staje się wobec tego funkcyą złożoną tych dwu nowych zmiennych u i v.

Uważając zmienną z jako funkcyę dwu zmiennych x i y, otrzymujemy różniczkę jej zupełną:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}.dx+\frac{\partial z}{\partial y}.dy,$$

a że zmienne x i y są funkcyami zmiennych u i v, przeto będą one miały także swoje różniczki zupełne kształtu:

$$dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv,\ dy=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv.$$

Wobec tego przedstawi się różniczka zupełna zmiennej z w postaci:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right),$$

czyli:

$$dz=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv, \tag{9}$$

Uważając jednak zmienną z wprost, jako funkcyę zmiennych u i v, dostajemy odnośną różniczkę zupełną w postaci:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv. \tag{10}$$

Z porównania tego wzoru z poprzedzającym wypływają przeto wzory:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}, \tag{11}$$

określające prawidła tworzenia pochodnych cząstkowych funkcyi złożonej, które możemy w ten sposób wysłowić:

Pochodną cząstkową funkcyi: $z=f(x,y)$, ze względu na pewną zmienną, niezależną u, otrzymujemy, dodając iloczyny pochodnych cząstkowych tej funkcyi względem zmiennych x i y, przez pochodne cząstkowe tychże zmiennych względem zmiennej niezależnej u.

Na tej podstawie otrzymamy drugie pochodne cząstkowe zmiennej z, ze względu na zmienne u i v, w postaci:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2},$$

czyli:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}&=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2},\\ \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}&=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v},\\ \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}&=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}.\end{aligned} \tag{12}$$

W podobny sposób możemy obrachować wszystkie pochodne cząstkowe trzeciego i wyższych rzędów danej funkcyi z, odniesione do nowych zmiennych u i v.

Za pośrednictwem równań (11), które są stopnia pierwszego ze względu na pochodne $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ możemy wyrazić pochodne $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ przez pochodne $\frac{\partial z}{\partial u}$ i $\frac{\partial z}{\partial v}$, znając pochodne cząstkowe zmiennych x i y, jako funkcye nowych zmiennych u i v.

Wprowadziwszy następnie wartości na $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ otrzymane, w równania 12), możemy, za pośrednictwem tych równań, wyrazić drugie pochodne cząstkowe: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ przez pochodne: $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$.

Podobnie postąpić wypadnie przy pochodnych cząstkowych wyższego rzędu.

13. **Przykład.** Przekształcić pochodne cząstkowe funkcyi $z = f(x, y)$, za pomocą podstawienia: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, uważając r i φ, jako zmienne niezależne.

Mamy tu:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi},$$

że:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi; \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\cos\varphi,$$

tem otrzymujemy:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \cos\varphi\frac{\partial z}{\partial x} + \sin\varphi\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi\frac{\partial z}{\partial x} + r\cos\varphi\frac{\partial z}{\partial y}, \tag{a}$$

ąd, ze względu na to, że:

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi, & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi, & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r, \text{ dostajemy: } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial r}, & \sin\varphi \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi}, & r\cos\varphi \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \cos\varphi, & \frac{\partial z}{\partial r} \\ -r\sin\varphi, & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix},$$

czyli:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\varphi\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial z}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \sin\varphi\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial z}{\partial \varphi}. \tag{b}$$

Z równań (a) otrzymujemy drugie pochodne cząstkowe w postaci:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \left(\cos\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \sin\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \left(\cos\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \sin\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\frac{\partial y}{\partial r},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \varphi} = \left(\cos\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \sin\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \left(\cos\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \sin\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \sin\varphi\frac{\partial z}{\partial x} + \cos\varphi\frac{\partial z}{\partial y} =$$

$$= \left(-r\sin\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + r\cos\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \left(-r\sin\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + r\cos\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\frac{\partial y}{\partial r} -$$

$$- \sin\varphi\frac{\partial z}{\partial x} + \cos\varphi\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} = \left(-r\sin\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + r\cos\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \left(-r\sin\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + r\cos\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\frac{\partial y}{\partial \varphi} -$$

$$- r\cos\varphi\frac{\partial z}{\partial x} - r\sin\varphi\frac{\partial z}{\partial y},$$

li wzory:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \cos^2\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \sin^2\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \varphi} = -r\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + r\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + r\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} -$$

$$- \sin\varphi\frac{\partial z}{\partial x} + \cos\varphi\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} = r^2\sin^2\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2r^2\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + r^2\cos^2\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - r\cos\varphi\frac{\partial z}{\partial x} - r\sin\varphi\frac{\partial z}{\partial y},$$

ażające pochodne cząstkowe funkcyi z względem zmiennych r i φ przez pochodne lędem zmiennych x i y.

Korzystając z wzorów (b), dostajemy:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \cos^2\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \sin^2\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial\varphi} = -r\sin\varphi\cos\varphi\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + r(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + r\sin\varphi\cos\varphi\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial z}{\partial\varphi},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2} = r^2\sin^2\varphi\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2r^2\sin\varphi\cos\varphi\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + r^2\cos^2\varphi\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - r\,\frac{\partial z}{\partial r},$$

skąd, ze względu na to, że:

$$\begin{vmatrix} \cos^2\varphi, & 2\sin\varphi\cos\varphi, & \sin^2\varphi \\ -r\sin\varphi\cos\varphi, & r(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi), & r\sin\varphi\cos\varphi \\ r^2\sin^2\varphi, & -2r^2\sin\varphi\cos\varphi, & r^2\cos^2\varphi \end{vmatrix} = r^3 \begin{vmatrix} \cos^2\varphi, & 2\sin\varphi\cos\varphi & 1 \\ -\sin\varphi\cos\varphi, & \cos^2\varphi - \sin^2\varphi, & 0 \\ \sin^2\varphi, & -2\sin\varphi\cos\varphi, & 1 \end{vmatrix} =$$

otrzymujemy:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{r^3} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial r^2}, & 2\sin\varphi\cos\varphi, & \sin^2\varphi \\ \frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial\varphi} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial z}{\partial\varphi}, & r(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi), & r\sin\varphi\cos\varphi \\ \frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2} + r\,\frac{\partial z}{\partial r}, & -2r^2\sin\varphi\cos\varphi, & r^2\cos^2\varphi \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{1}{r^3} \begin{vmatrix} \cos^2\varphi, & \frac{\partial^2 z}{\partial r^2}, & \sin^2\varphi \\ -r\sin\varphi\cos\varphi, & \frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial\varphi} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial z}{\partial\varphi}, & r\sin\varphi\cos\varphi \\ r^2\sin^2\varphi, & \frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2} + r\,\frac{\partial z}{\partial r}, & r^2\cos^2\varphi \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{r^3} \begin{vmatrix} \cos^2\varphi, & 2\sin\varphi\cos\varphi, & \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \\ -r\sin\varphi\cos\varphi, & r(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi), & \frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial\varphi} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial z}{\partial\varphi} \\ r^2\sin^2\varphi, & -2r^2\sin\varphi\cos\varphi, & \frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2} + r\,\frac{\partial z}{\partial r} \end{vmatrix},$$

czyli:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \cos^2\varphi\,\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} - \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r}\,\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2} + \frac{\sin^2\varphi}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}\,\frac{\partial z}{\partial\varphi},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \sin\varphi\cos\varphi\,\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}{r}\,\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial\varphi} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2} -$$

$$- \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}\,\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}{r^2}\,\frac{\partial z}{\partial\varphi},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \sin^2\varphi\,\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r}\,\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{r^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2} + \frac{\cos^2\varphi}{r}\,\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}\,\frac{\partial z}{\partial\varphi}$$

a więc wzory, które wyrażają drugie pochodne cząstkowe funkcyi z względem zmien x i y przez pochodne tej funkcyi względem r i φ.

Do otrzymanych wyników, możemy dojść wprost z równań b). Otrzymujemy w

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \cos\varphi\left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}\,\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial\varphi}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) - \frac{\sin\varphi}{r}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial\varphi}\,\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) - \sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial r} -$$

$$-\frac{1}{r^2}\left(r\cos\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \sin\varphi\,\frac{\partial r}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \cos\varphi\left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}\,\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial\varphi}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) - \frac{\sin\varphi}{r}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial\varphi}\,\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) - \sin\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\frac{\partial z}{\partial r} -$$

$$-\frac{1}{r^2}\left(r\cos\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \sin\varphi\,\frac{\partial r}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \sin\varphi\left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}\,\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial\varphi}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\cos\varphi}{r}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial\varphi}\,\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \cos\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\frac{\partial z}{\partial r} +$$

$$+\frac{1}{r^2}\left(-r\sin\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \cos\varphi\,\frac{\partial r}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial\varphi},$$

...d, ze względu na to, że: $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, a więc: $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}=\cos\varphi$, $\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}=$ $\sin\varphi$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{\sin\varphi}{r}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\cos\varphi}{r}$, otrzymujemy wzory powyżej wyprowadzone, wyrażające ...gie pochodne cząstkowe: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, przez pochodne: $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\varphi}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}$ i $\frac{\partial z}{\partial r}$, $\frac{\partial z}{\partial\varphi}$.

14. Różniczkowanie funkcyi, określonej równaniem: $F(x, y, z)=0$. ...óżniczkując dane równanie podług wszystkich trzech zmiennych x, y, z, ...trzymujemy różniczkę zupełną:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0. \tag{13}$$

Dwie zmienne możemy tu obrać, jako zmienne niezależne, a trzecią, jako ...mienną zależną, będącą ich funkcyą. Uważając z, jako funkcyę zmiennych x i y, mieć będziemy:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Z równania (13) wypływa atoli:

$$dz=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}dx-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}dy,$$

stąd wynikają pochodne cząstkowe: $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$, w postaci:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \tag{14}$$

Do tych wzorów dochodzimy z równania danego także w ten sposób, że różniczkujemy równanie cząstkowo raz podług x, drugi raz podług y, otrzymujemy tedy dwa równania następujące:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0, \tag{15}$$

z których otrzymujemy pochodne cząstkowe: $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ w formie (14).

Różniczkując równania (15) cząstkowo podług x, lub y, otrzymujemy trzy równania w postaci:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right]\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,\\
&\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right]\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,\\
&\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial y}\right]\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,
\end{aligned} \tag{16}$$

z których możemy wyznaczyć trzy pochodne cząstkowe drugiego rzędu: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, zmiennej z, uważanej za funkcyę zmiennych niezależnych x i y, określoną równaniem: $F(x, y, z)=0$.

Z dalszego różniczkowania równań (16) wypływają równania na wyznaczenie pochodnych cząstkowych trzeciego, a następnie wyższych rzędów.

15. Zastępując w równaniu: $F(x, y, z)=0$, zmienne niezależne x i y przez nowe zmienne u i v za pomocą podstawień: $x=f(u, v)$, $y=\varphi(u, v)$, otrzymujemy, z danego równania: $z=\psi(u, v)$, a więc trzy równania:

$$x=f(u, v), \quad y=\varphi(u, v), \quad z=\psi(u, v),$$

zastępujące równanie: $F(x, y, z)=0$.

Na podstawie tych równań otrzymujemy pochodne cząstkowe funkcyi z względem x i y, jak następuje.

Przedewszystkiem otrzymujemy:

$$dx=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv, \quad dy=\frac{\partial \varphi}{\partial u}du+\frac{\partial \varphi}{\partial v}dv, \quad dz=\frac{\partial \psi}{\partial u}du+\frac{\partial \psi}{\partial v}dv,$$

a że:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}\partial y,$$

zatem spełniać się musi równanie:

$$\frac{\partial \psi}{\partial u}du+\frac{\partial \psi}{\partial v}dv=\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}du+\frac{\partial \varphi}{\partial v}dv\right),$$

czyli:

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right]du+\left[\frac{\partial \psi}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right]dv=0,$$

z którego, wobec tego, że zmienne u i v są niezależne, zatem du i dv dowolne, wypływają dwa równania w postaci:

$$\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial \psi}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial \psi}{\partial v}. \tag{17}$$

Z równań tych otrzymujemy pochodne cząstkowe $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ w postaci:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial \psi}{\partial u}, & \frac{\partial \varphi}{\partial u}\\ \frac{\partial \psi}{\partial v}, & \frac{\partial \varphi}{\partial v}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial u}, & \frac{\partial \varphi}{\partial u}\\ \frac{\partial f}{\partial v}, & \frac{\partial \varphi}{\partial v}\end{vmatrix}}=\frac{\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}-\frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}-\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial u}, & \frac{\partial \psi}{\partial u}\\ \frac{\partial f}{\partial v}, & \frac{\partial \psi}{\partial v}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial u}, & \frac{\partial \varphi}{\partial u}\\ \frac{\partial f}{\partial v}, & \frac{\partial \varphi}{\partial v}\end{vmatrix}}=\frac{\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v}-\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u}}{\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}-\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}}.$$

Różniczkując równania (17) cząstkowo podług u i v możemy podobnie otrzymać dalsze pochodne funkcyi z względem x i y, wyrażone przez u i v.

16. Przykład. Wyznaczyć pochodne cząstkowe funkcyi z, określonej równaniem:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Mamy tu:

$$\frac{x}{a^2}dx+\frac{y}{b^2}dy+\frac{z}{c^2}dz=0,$$

zatem pierwsze pochodne cząstkowe zmiennej z względem x i y w postaci:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c^2x}{a^2z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c^2y}{b^2z}.$$

Stąd znajdujemy drugie pochodne cząstkowe w postaci:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{c^2}{a^2z}\left\{1+\frac{c^2x^2}{a^2z^2}\right\}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{c^2}{b^2z}\left\{1+\frac{c^2y^2}{b^2z^2}\right\}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3} \text{ i t. d.}$$

Dane równenie możemy w najrozmaitszy sposób zastąpić trzema równaniami kształtu: $x=f(u,v)$, $y=\varphi(u,v)$, $z=\psi(u,v)$.

Kładąc n. p. $x=a\cos u$, $y=b\cos v$, otrzymujemy z danego równania:

$$z=c\sqrt{1-\cos^2 u-\cos^2 v},$$

więc trzy równania:

$$x=a\cos u,\quad y=b\cos v,\quad z=c\sqrt{1-\cos^2 u-\cos^2 v},$$

dwu zmiennych niezależnych u i v, zastępujące dane równanie o dwu zmiennych niezależnych x i y. Możemy teraz wyznaczyć pochodne cząstkowe: $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ przez zmienne u i v. W tym celu otrzymujemy przedewszystkiem:

$$\frac{\partial x}{\partial u}=-a\sin u,\quad \frac{\partial x}{\partial v}=0,\quad \frac{\partial y}{\partial u}=0,\quad \frac{\partial y}{\partial v}=-b\sin v,$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{c.\cos u\sin u}{\sqrt{1-\cos^2 u-\cos^2 v}},\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{c.\cos v\sin v}{\sqrt{1-\cos^2 u-\cos^2 v}},$$

zatem:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c.\cos u}{a\sqrt{1-\cos^2 u-\cos^2 v}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c.\cos v}{b\sqrt{1-\cos^2 u-\cos^2 v}}.$$

Różniczkując otrzymane pochodne pierwszego rzędu cząstkowo podług u i v, otrzymujemy:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{c\sin u(1-\cos^2 v)}{a(1-\cos^2 u-\cos^2 v)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{c\cos u\cos v\sin v}{a(1-\cos^2 u-\cos^2 v)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{c\sin v(1-\cos^2 u)}{b(1-\cos^2 u-\cos^2 v)^{3/2}},$$

i stąd pochodne cząstkowe drugiego rzędu zmiennej z względem x i y, wyrażą się przez zmienne u i v w postaci wzorów:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{c}{a^2}\frac{1-\cos^2 v}{(1-\cos^2 u-\cos^2 v)^{3/2}},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{c}{ab}\frac{c\cos u\cos v}{(1-\cos^2 u-\cos^2 v)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{c}{b^2}\frac{1-\cos^2 u}{(1-\cos^2 u-\cos^2 v)^{3/2}},$$

które przez wprowadzenie zmiennych x, y i z w miejsce zmiennych u i v przybierają postacie powyżej podane.

17. Zamiana wszystkich zmiennych w funkcyi dwu zmiennych niezależnych. Niech będzie daną funkcya z zmiennych x i y, podana w formie wyraźnej, lub określona równaniem kształtu: $F(x,y,z)=0$.

Połóżmy $x=f(u,v,w)$, $y=\varphi(u,v,w)$, $z=\psi(u,v,w)$, uważając dwie zmienne u, v, jako nowe zmienne niezależne, a cztery pozostałe zmienne x, y, z, w, jako ich funkcye, natenczas pierwsze pochodne cząstkowe zmiennej z, będącej funkcyą zmiennych x i y, odniesione do nowych zmiennych niezależnych u i v, będą określone wzorami:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u};\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{18}$$

Na podstawie tych wzorów, otrzymamy drugie pochodne cząstkowe funkcyi z względem zmiennych u i v w postaci:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}. \tag{19}$$

W równania te należy wstawić wartości pochodnych cząstkowych zmiennych x, y, z, odniesione do nowych zmiennych u, v, jako to:

a) pierwsze pochodne cząstkowe:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial \varphi}{\partial u}+\frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial \psi}{\partial u}+\frac{\partial \psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u},\\
&\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}, \quad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial \varphi}{\partial v}+\frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial \psi}{\partial v}+\frac{\partial \psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v},
\end{aligned} \tag{20}$$

b) drugie pochodne cząstkowe:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2},\\
&\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^2}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2},\\
&\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 \psi}{\partial u\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial w^2}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\frac{\partial \psi}{\partial w}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2},\\
&\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}=\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v},\\
&\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^2}\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v},\\
&\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{\partial^2 \psi}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial v\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial u\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial w^2}\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{\partial \psi}{\partial w}\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v},\\
&\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2},\\
&\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}+2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^2}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2+\frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2},\\
&\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}+2\frac{\partial^2 \psi}{\partial v\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial w^2}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2+\frac{\partial \psi}{\partial w}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2},
\end{aligned} \tag{21}$$

a otrzymamy równania, z których możemy wyznaczyć pochodne cząstkowe zmiennej z względem zmiennych x i y t. j. $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ldots$, za pomocą pochodnych nowej zmiennej w względem zmiennych u i v, t. j. za pomocą:

$$\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}, \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}, \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\ldots$$

W szczególności, wstawiając wartości (20) w równania (18), otrzymujemy następujące dwa równania:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)\frac{\partial z}{\partial x}+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}+\frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial \psi}{\partial u}+\frac{\partial \psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u},\\
&\left(\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial z}{\partial x}+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}+\frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial \psi}{\partial v}+\frac{\partial \psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v},
\end{aligned} \tag{22}$$

z których dostajemy:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}-\frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)+\left(\frac{\partial \psi}{\partial w}\frac{\partial \varphi}{\partial v}-\frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right)\frac{\partial w}{\partial u}+\left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial w}-\frac{\partial \psi}{\partial w}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial w}{\partial v}}{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}-\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial \varphi}{\partial v}-\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right)\frac{\partial w}{\partial u}+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial w}-\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial w}{\partial v}}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v}-\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial \psi}{\partial v}-\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial w}\right)\frac{\partial w}{\partial u}+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial w}-\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)\frac{\partial w}{\partial v}}{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}-\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial \varphi}{\partial v}-\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right)\frac{\partial w}{\partial u}+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial w}-\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial w}{\partial v}},$$

…ry, wyrażające pochodne cząstkowe: $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ przez nowe: $\frac{\partial w}{\partial u}$ i $\frac{\partial w}{\partial v}$.

Podobnie, podstawiając wartości (21) w równania (19), dostajemy trzy …mania, z których otrzymujemy wzory, wyrażające pochodne cząstkowe …giego rzędu: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, przez nowe: $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}$, , $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$.

18. **Przykład.** Wyrazić pochodne cząstkowe: $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ funkcyi: $z=f(x, y)$, na mocy …stawienia:

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi\sin\psi,\quad z=r\sin\varphi\cos\psi,$$

…pomocą pochodnych cząstkowych: $\frac{\partial r}{\partial \varphi}$ i $\frac{\partial r}{\partial \psi}$, uważając r, jako funkcyę zmiennych nieza…nych φ i ψ.

Mamy tu:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi}=\cos\varphi\frac{\partial r}{\partial \varphi}-r\sin\varphi,\qquad \frac{\partial x}{\partial \psi}=\cos\varphi\frac{\partial r}{\partial \psi},$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi}=\left(\sin\varphi\frac{\partial r}{\partial \varphi}+r\cos\varphi\right)\sin\psi,\quad \frac{\partial y}{\partial \psi}=\left(\sin\psi\frac{\partial r}{\partial \psi}+r\cos\psi\right)\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi}=\left(\sin\varphi\frac{\partial r}{\partial \varphi}+r\cos\varphi\right)\cos\psi,\quad \frac{\partial z}{\partial \psi}=\left(\cos\psi\frac{\partial r}{\partial \psi}-r\sin\psi\right)\sin\varphi.$$

Na wyznaczenie związku między pochodnemi cząstkowemi: $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$, a nowemi po…nemi cząstkowemi: $\frac{\partial r}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial r}{\partial \psi}$, otrzymujemy zatem, na podstawie równań:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi}=\frac{\partial z}{\partial \varphi},\quad \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \psi}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \psi}=\frac{\partial z}{\partial \psi},$$

…równania następujące:

$$\left(\cos\varphi\frac{\partial r}{\partial \varphi}-r\sin\varphi\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\left(\sin\varphi\frac{\partial r}{\partial \varphi}+r\cos\varphi\right)\sin\psi\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\sin\varphi\frac{\partial r}{\partial \varphi}+r\cos\varphi\right)\cos\psi$$

$$\cos\varphi\frac{\partial r}{\partial \psi}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\left(\sin\psi\frac{\partial r}{\partial \psi}+r\cos\psi\right)\sin\varphi\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\cos\psi\frac{\partial r}{\partial \varphi}-r\sin\psi\right)\sin\varphi,$$

…rych dostajemy:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\sin^2\varphi\frac{\partial r}{\partial \varphi}+r\sin\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi\cos\psi\cos\psi\frac{\partial r}{\partial \varphi}-\sin\psi\frac{\partial r}{\partial \psi}-r\sin^2\varphi\cos\psi},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\frac{\partial r}{\partial \varphi}-\cos\psi\frac{\partial r}{\partial \psi}+r\sin^2\varphi\sin\psi}{\sin\varphi\cos\varphi\cos\psi\frac{\partial r}{\partial \varphi}-\sin\psi\frac{\partial r}{\partial \psi}-r\sin^2\varphi\cos\psi},$$

…i:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\sin\varphi\frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial \varphi}}{\sin\varphi\cos\psi\frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial \varphi}-\sin\psi\frac{\partial r}{\partial \psi}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\sin\varphi\sin\psi\frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial \varphi}+\cos\psi\frac{\partial r}{\partial \psi}}{\sin\varphi\cos\psi\frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial \varphi}-\sin\psi\frac{\partial r}{\partial \psi}}.$$

19. Przekształcanie całek podwójnych. Jeżeli w całce podwójnej, kształtu $\iint f(x, y)\,dx\,dy$, chcemy wprowadzić nowe zmienne u, v, na mocy podstawienia: $x=\varphi(u, v)$, $y=\psi(u, v)$,
wówczas nie możemy różniczek dx i dy pierwotnych zmiennych, niezależnych x i y, zastąpić wprost przez różniczki nowych zmiennych, niezależnych u, v, na podstawie wzorów:

$$dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv,\quad dy=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv.$$

Skoro bowiem zmienne x i y są niezależne, to wartość różniczki jednej zmiennej, n. p. dx, nie może być zależną od wartości różniczki drugiej zmiennej, t. j. dy, coby nastąpiło, gdyby się wprost korzystało z powyższych dwu równań.

Zmienna niezależna x zmienia się także, gdy druga zmienna niezależna pozostaje stałą. Musimy zatem, chcąc dx wyrazić przez du, przyjąć $dy=0$, a nawzajem, chcąc wyrazić dy przez dv, musimy przyjąć $dx=0$. Otrzymujemy zatem, na wyznaczenie dx dwa równania następujące:

$$dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv,\quad 0=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv,$$

a stąd dostajemy:

$$\frac{\partial y}{\partial v}dv=-\frac{\partial y}{\partial u}du,$$

zatem:

$$\frac{\partial y}{\partial v}dx=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du.$$

Z wzoru tego wynika, że, gdy $dx=0$, wówczas jest także: $du=0$, zatem $dy=\frac{\partial y}{\partial v}dv$.

Wobec tego iloczyn $dx\,dy$ przedstawia się w postaci:

$$dx\,dy=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du\,dv,$$

zatem dana całka podwójna otrzymuje kształt:

$$\iint f(x, y)\,dx\,dy=\iint f(x, y)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du\,dv,$$

czyli:

$$\iint f(x, y)\,dx\,dy=\iint f(\varphi, \psi)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v}-\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)du\,dv. \tag{24}$$

20. Przykłady. 1) Przekształcić całkę podwójną, kształtu: $\iint x^m y^n\,dx\,dy$, za pomocą podstawienia: $x=u(1-v)$, $y=uv$.

Otrzymujemy tu:

$$dx=(1-v)\,du-u\,dv,\quad dy=v\,du+u\,dv,$$

zatem, na wyznaczenie dx, równania:

$$dx=(1-v)\,du-u\,dv,\quad 0=v\,du+u\,dv,$$

z których otrzymujemy:

$$dx=(1-v)\,du+v\,du=du,$$

czyli: $dx=du$, a więc: $dy=u\,dv$, zatem: $dx\,dy=u\,du\,dv$,

Dana całka podwójna sprowadza się zatem do postaci:

$$\iint x^m y^n\,dx\,dy=\iint u^m(1-v)^m u^n v^n \,.\, u\,du\,dv,$$

czyli:

$$\iint x^m y^n\,dx\,dy=\iint u^{m+n+1}(1-v)^m v^n\,du\,dv.$$

2) Jaką postać otrzymuje całka podwójna: $\iint f(x, y)\,dx\,dy$, gdy w niej podstawimy: $=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, uważając r i φ, jako nowe zmienne niezależne.

Mamy tu: $dx=\cos\varphi\,dr-r\sin\varphi\,d\varphi$, $dy=\sin\varphi\,dr+r\cos\varphi\,d\varphi$, zatem, gdy zmienne x i y stępują w danej całce podwójnej, jako zmienne niezależne, otrzymujemy, na wyznaczenie , równania:

$$dx=\cos\varphi\,dr-r\sin\varphi\,d\varphi,\quad 0=\sin\varphi\,dr+r\cos\varphi\,d\varphi,$$

stąd:
$$d\varphi=-\frac{\sin\varphi}{r\cos\varphi}\,dr,$$

więc:
$$dx=\cos\varphi\,dr+\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\,dr=\frac{1}{\cos\varphi}\,dr,\quad dy=r\cos\varphi\,d\varphi,$$

item:
$$dx\,dy=r\,dr\,d\varphi,$$

obec czego:
$$\iint f(x, y)\,dx\,dy=\iint f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$$

Ćwiczenia XXIV.

1) Jeżeli związek między zmiennemi x i y, określony jest za pomocą równań $=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, gdzie t jest zmienną niezależną, wykazać, że wówczas:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)};\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\varphi'(t).\psi''(t)-\varphi''(t).\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{[\varphi'(t)]^2.\psi'''(t)-3\varphi'(t).\varphi''(t)\psi''(t)+3[\varphi''(t)]^2-\varphi'(t)\varphi'''(t)]\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^5}.$$

Wykazać, że:

2) gdy $x=\frac{1}{t}$, natenczas: $x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}=t^3\frac{d^2y}{dt^2}$.

3) „ $x=e^t$, „ $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+ax\frac{dy}{dx}=\frac{d^2y}{dt^2}+(a-1)\frac{dy}{dt}$, ($a$ dowolne).

4) „ $x=\sin t$, „ $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=\frac{d^2y}{dt^2}$.

5) „ $x=\cos t$, „ $\left[\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{x}{1-x^2}\frac{dy}{dx}\right].\frac{1-x^2}{y}=\frac{1}{y}.\frac{d^2y}{dt^2}$.

6) „ $x=\frac{1}{2}a(e^t-e^{-t})$, natenczas: $(a^2+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}=\frac{d^2y}{dt^2}$.

7) „ $a+x=e^t$, natenczas: $(a+x)^3\frac{d^3y}{dx^3}+3(a+x)^2\frac{d^2y}{dx^2}+(a+x)\frac{dy}{dx}=\frac{d^3y}{dt^3}$.

8) „ $x+\sqrt{1+x^2}=e^t$, natenczas: $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{\sqrt{1+x^2}}=\left(\frac{dy}{dt}+y\right):\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})$.

9) „ $x=a\sin t$, natenczas: $(a^2-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=\frac{d^2y}{dt^2}$.

Przekształcić następujące równania różniczkowe:

10) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+Ax\frac{dy}{dx}+By=0$, za pomocą podstawienia $x=e^t$.

11) $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+n^2y=0$, za pomocą podstawienia $x=\cos t$.

12) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}+\frac{a^2}{x^2}y=0$, z. p. p. $x=\frac{1}{t}$.

13) $x^3\frac{d^3y}{dx^3}+3x^2\frac{d^2y}{dx^2}+(a+1)x\frac{dy}{dx}-y=0$, z. p. p. $x=e^t$.

14) $x\frac{dy}{dx}-ay=0$; $x=e^t$. 15) $2x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=0$, $x=\frac{1}{2}t^2$.

16) $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+y=0$, $x^2=4t$.

17) $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x(1-x^2)\frac{dy}{dx} + \frac{2a}{1-x}y = 0, \ x = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}.$

18) Wykazać, że wzór: $\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$, wskutek podstawienia $x = \varphi(t)$ sp

się do postaci: $\rho = \frac{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}.$

19) Wykazać, że równanie różniczkowe: $x\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{dy}{dx} = 0$, wskutek pr

zmiennej zależnej y na zmienną niezależną, sprowadza się do postaci:

$$x\frac{d^2x}{dy^2} + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 - 1 = 0.$$

Wyprowadzić postacie, jakie, wskutek zmiany zmiennej zależnej y na zmie

zależną, otrzymują następujące równania różniczkowe:

20) $\frac{d^2y}{dx^2} - x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + e^y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0.$ 21) $\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}\frac{dy}{dx} + (y-a)\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$

22) Przekształcić równanie różniczkowe:

$$(x+y-6)\frac{dy}{dx} + (x+y+6) = 0, \text{ kładąc } x = u+t, \ y = u-t.$$

23) Jaką postać otrzymuje wzór: $p = \frac{x\frac{dy}{dx} - y}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2}}$, gdy położymy:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

24) Wykazać, że wzór: $k = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$, wskutek wprowadzenia zmienn

leżnej s, określonej wzorem: $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, sprowadza się do postaci:

$$k = \frac{d^2y}{ds^2}\frac{dx}{ds} - \frac{d^2x}{ds^2}\frac{dy}{ds}.$$

25) Wyznaczyć: $\frac{d^3y}{dx^3}$, skoro: $x = \sin t$, $y = e^{-t}$.

26) Wyznaczyć: $\frac{dy}{dx}$ i $\frac{d^2y}{dx^2}$, gdy $x = \operatorname{cotg} t$, $y = \sin^2 t$.

27) Wykazać, że, gdy $x = a(\omega - \sin\omega)$, $y = a(1-\cos\omega)$:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{\omega}{2}}.$$

Znaleźć: $\frac{dy}{dx}$ i $\frac{d^2y}{dx^2}$, gdy:

28) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, a podstawimy: $x = \frac{2at}{1+t^2}$. 29) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x = \frac{a(t^2+1)}{2t}$.

30) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x = a\cos\varphi$. 31) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x = a\sec^2\varphi$.

32) $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$, $x = a\cos^3\varphi$. 33) $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos$

34) Wykazać, że wzór: $u=\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{x+y\frac{dy}{dx}}$, wskutek podstawienia $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ adza się do postaci: $u=r\frac{d\varphi}{dr}$.

35) Wykazać, że przy podstawieniu: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, zachodzi tożsamość:

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=\frac{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{3/2}}{r^2+2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}.$$

36) Wykazać, że, kładąc: $x=uv$, $y=(1-u)v$, otrzymujemy:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(1-u)\frac{dv}{du}-v}{u\frac{dv}{du}+v};\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{u\frac{d^2v}{du^2}-2\left(\frac{dv}{du}\right)^2}{\left(u\frac{dv}{du}+v\right)^3}.$$

37) Wykazać, że pierwsze pochodne cząstkowe funkcyi z dwu zmiennych x i y, ek podstawienia $x=\varphi(r,\alpha)$, $y=\psi(r,\alpha)$, przedstawiają się w postaci:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial\alpha}-\frac{\partial z}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial r}}{\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial\alpha}-\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial r}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial\alpha}-\frac{\partial z}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial r}}{\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial\alpha}-\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial\alpha}}.$$

38) Jaki kształt otrzymują pochodne cząstkowe funkcyi z dwu zmiennych x i y, gdy wimy: $r=\varphi(x,y)$, $\alpha=\psi(x,y)$.

Wykazać, że, kładąc: $x=r\cos\alpha$, $y=r\sin\alpha$ i uważając r i α za nowe zmienne, mujemy następujące tożsamości:

39) $x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial\alpha}$. 34) $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=r\frac{\partial z}{\partial r}$.

40) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}$.

41) Jaką postać otrzymuje wyrażenie: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, gdy położymy: $x^2+y^2=r^2$ ać będziemy r za zmienną niezależną.

Wyznaczyć pierwszą i drugą różniczkę zupełną, tudzież pierwsze i drugie pochodne owe funkcyj z dwu zmiennych niezależnych x i y, określonych następującemi niami:

42) $z^2-xe^y+e^z=0$. 43) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$. 44) $x^2+y^2+z^2-1=0$.

45) $\frac{y^2}{2p}-\frac{z^2}{2q}-x=0$. 46) $x-y\,\mathrm{tang}\,az=0$. 47) $z^3-3xyz+3a\log(x^2+y^2)=0$.

48) Wykazać, że wyrażenie różniczkowe: $(l-x)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial z}{\partial x}$, wskutek zamiany ych x, y, z, na zmienne u, v, w, na mocy podstawienia:

$$u=\sqrt{l+x}+{}^1\!/\!_2\,y,\quad v=\sqrt{l-x}-{}^1\!/\!_2\,y,\quad w=z\sqrt{l-x},$$

muje kształt: $\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}=\frac{w}{u(u+v)}$.

49) Jeżeli $u=f(x,y)$, $v=\varphi(x,y)$, a uważamy u i v, jako zmienne niezależne, zaś x i y, ich funkcye, wykazać, że:

$$\frac{dx}{du}=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}},\quad \frac{dx}{dv}=\frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}},$$

$$\frac{dy}{du}=\frac{-\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}},\quad \frac{dy}{dv}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}}.$$

50) W równaniu: $z=f(x, y)$, chcemy uważać x, jako funkcyę zmiennych niezależnyc y i z, wykazać, że, kładąc:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=q, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=t,$$

otrzymujemy pochodne cząstkowe, w postaci:

$$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{q}{p}, \quad \frac{\partial x}{\partial z}=\frac{1}{p}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial y^2}=\frac{2pqs-p^2t-q^2r}{p^3}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z}=\frac{qr-ps}{p^3}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}=-\frac{r}{p^3}$$

51) Dowieść, że całka podwójna: $\iint z\,dx\,dy$, gdzie $z=f(x, y)$, wskutek podstawieni $x=\varphi(u, v)$, $y=\psi(u, v)$, sprowadza się do postaci: $\iint z\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du\,dv.$

52) Przekształcić całkę podwójną: $\iint x^m y^n\,dx\,dy$, za pomocą podstawienia: $x=u(1-$ $y=uv$, gdzie u i v, są nowe zmienne niezależne.

53) Przekształcić całkę podwójną: $\iint e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$, za pomocą podstawienia:

$$x=r\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi.$$

54) Wykazać, że całka podwójna: $\iint z\,dx\,dy$, wskutek podstawienia: $x=r\cos$ $y=r\sin\varphi$, gdzie r i φ są nowe zmienne niezależne, sprowadza się do postaci: $\iint z r\,dr\,d$

Rozwiązania XXIV. 1)—9) wskazówki zawarte w wykładzie. 10) $\frac{d^2y}{dt^2}$ - $+(A-1)\frac{dy}{dt}+Bt=0$. 11) $\frac{d^2y}{dt^2}+n^2t=0$. 12) $\frac{d^2y}{dx^2}+a^2y=0$. 13) $\frac{d^3y}{dt^3}+a\frac{dy}{dt}-y=0$. 1 $\frac{dy}{dt}-ay=0$. 15) $\frac{d^2y}{dt^2}=0$. 16) $t\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+y=0$. 17) $\frac{d^2y}{dt^2}+a(e^{2t}+1)y=0$. 20) $\frac{d^2x}{dy^2}+x-$ $-e^y=0$. 21) $1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2-(y-a)\frac{d^2x}{dy^2}=0$. 22) $u\frac{du}{dt}+3=0$. 23) $p=\frac{r^2}{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$

25) $\frac{e^{-t}}{\cos^5 t}(3\sin t\cos t-\sin^2 t-2)$. 26) $y'=-3\sin^4 t\cos t$, $y''=3\sin^3 t(4-5\sin^2 t)$. 28) $-\frac{2bt}{a(1-t^2}$ $-\frac{b}{a^2}\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)^3$. 29) $\frac{b}{a}\frac{t^2+1}{t^2-1}$, $-\frac{b}{a^2}\left(\frac{2t}{t^2-1}\right)^3$. 30) $-\frac{b}{2}\cot\varphi$, $-\frac{b}{a^2\sin^3\varphi}$. 31) $\frac{b}{a}$ cosec $-\frac{b}{a^2}\operatorname{cotg}^3\varphi$. 32) $-\frac{b}{a}\operatorname{tang}\varphi$, $\frac{b}{3a^2}\sec^4\varphi\operatorname{cosec}\varphi$. 33) $\operatorname{tang} t$, $\frac{1}{a t\cos^3 t}$. 38) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial}{\partial}$ $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y}$. 41) $\frac{d^2z}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dz}{dr}$. 42) $dz=\frac{e^y}{2z-e^s}dx+\frac{xe^y}{2z-e^y}dy$. 43) $dz=-\frac{c^2x}{a^2z}dx-$ $\frac{c^2y}{b^2z}dy$. 44) $dz=\frac{qy}{pz}dy-\frac{q}{z}dx$. 45) $dz=\frac{\cos^2 az}{ay}\left(dx-\frac{x}{y}dy\right)$. 53) $\iint e^{-r^2}r\,dr\,d\varphi$.

Literatura. Dr. F. Gregory. Examples of the processes of the differential and in tegral calculus. Cambridge. 1841. Dr. Oskar Schlömilch. Übungsbuch zum Studiun der höheren Analysis. Erster Theil. Aufgaben aus der Differentialrechnung, V-te Auflag Leipzig 1888. William Benjamin Smith. Infinitesimal Analysis. London 1898.

Tematy do rozprawek naukowych:

1. Wpływ zmiany zmiennej niezależnej na różniczki rzędów wyższych.
2. Różniczki i pochodne funkcyj, określonych równaniami.
3. Przekształcanie całek podwójnych za pomocą zmiany obu zmiennych, niezależnych

---

Wykład XXV.

Przekształcanie pochodnych i różniczek funkcyj ilukolwiek zmiennych i wyznaczniki funkcyjne.

1. Różniczki zupełne i pochodne cząstkowe funkcyi uwikłanej n zmiennych. Funkcya n zmiennych niezależnych: $x_1, x_2, \dots, x_n$ może być podaną w formie wyraźnej:

$$z=f(x_1, x_2, \dots, x_n), \tag{1}$$

lub w formie uwikłanej, t. j. określoną równaniem nierozwiązanem, kształtu:

$$F(z, x_1, x_2, \dots, x_n)=0. \tag{2}$$

W pierwszym przypadku, otrzymujemy różniczkę zupełną funkcyi z w postaci:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial z}{\partial x_2}dx_2+\dots+\frac{\partial z}{\partial x_n}dx_n, \tag{3}$$

która podaje zarazem n pochodnych cząstkowych: $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$ tej funkcyi. Mianowicie jest:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial z}{\partial x_2}=\frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}=\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

W drugim przypadku, związek między różniczką zupełną dz funkcyi z, a różniczkami: $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ zmiennych, niezależnych: $x_1, x_2, \dots, x_n$, na podstawie równania 2), jest określony równaniem:

$$\frac{\partial F}{\partial z}dz+\frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2+\dots+\frac{\partial F}{\partial x_n}dx_n=0, \tag{4}$$

z którego otrzymujemy różniczkę zupełną dz w postaci:

$$dz=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial z}}dx_1-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{\frac{\partial F}{\partial z}}dx_2-\dots-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\frac{\partial F}{\partial z}}dx_n, \tag{5}$$

skąd, z porównania z wzorem (3), wypływają pochodne cząstkowe funkcyi z w postaci:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial x_2}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \tag{6}$$

Pochodne te wynikają także z równania (2) wprost, jeżeli to równanie zróżniczkujemy kolejno podług jednej tylko zmiennej niezależnej, uważając inne, jako stałe. Otrzymujemy tedy n równań, kształtu:

$$\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}+\frac{\partial F}{\partial x_1}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_2}+\frac{\partial F}{\partial x_2}=0,\ldots,\quad \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_n}+\frac{\partial F}{\partial x_n}=0, \tag{7}$$

z których wypływają wzory, pod (6) podane.

Pomnóżmy równania (7) kolejno przez $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ i dodajmy wyniki, a otrzymamy:

$$\frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial z}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial z}{\partial x_n}dx_n\right)+\frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial F}{\partial x_n}dx_n=0.$$

Wyrażenie, objęte nawiasem, wyobraża zupełną różniczkę dz funkcyi z. Otrzymujemy zatem stąd naodwrót równanie (4), z którego wyznaczamy różniczkę zupełną dz, jak w (5).

Z wzoru (4), względnie (5), wyznaczającego pierwszą różniczkę zupełną dz funkcyi z, określonej równaniem: $F(z, x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$, za pomocą różniczkowania podług wszystkich zmiennych, pod założeniem, że różniczki: dx_1, $dx_2, \ldots, dx_n$, są stałe, a więc $d^2x_1=0, \ldots, d^2x_n=0$, otrzymamy drugą różniczkę zupełną d^2z, a następnie z niej różniczki zupełne wyższych rzędów d^rz, przyczem musimy mieć na uwadze, że każda pochodna cząstkowa funkcyi: $F(z, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, jest wogóle nową funkcyą $(n+1)$ zmiennych: $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$, ma więc swoją różniczkę zupełną, jako sumę $(n+1)$ różniczek cząstkowych, a więc, że:

$$d\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}dz+\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial x_1}dx_1+\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial x_n}dx_n,$$

$$d\frac{\partial F}{\partial x_i}=\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial z}dz+\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_1}dx_1+\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_n}dx_n,$$

$$(i=1, 2, \ldots n).$$

Podobnie otrzymamy z wzorów (6), względnie (7), wyznaczających pierwsze pochodne cząstkowe zmiennej z, na podstawie różniczkowania cząstkowego, drugie pochodne cząstkowe, a stąd pochodne cząstkowe wyższych rzędów, mając na uwadze, że wszelka pochodna cząstkowa funkcyi: $F(z, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, jest funkcyą nietylko n zmiennych niezależnych: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ale także funkcyą zmiennej z, zależnej od zmiennych: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

2. Zamiana zmiennych niezależnych w funkcyi n zmiennych. Przyjmijmy, że dla funkcyi z o n zmiennych niezależnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, wyznaczone zostały jej różniczki zupełne i pochodne cząstkowe.

Zastąpmy teraz zmienne $x_1, x_2, \ldots, x_n$ przez inne: $y_1, y_2, \ldots, y_n$, na mocy podstawienia:

$$\begin{aligned} x_1&=f_1(y_1, y_2, \ldots, y_n),\\ x_2&=f_2(y_1, y_2, \ldots, y_n),\\ &\ldots\ldots\\ x_n&=f_n(y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{aligned} \tag{8}$$

natenczas dana funkcya z, przekształci się na funkcyę nowych zmiennych: $y_1, y_2, \ldots, y_n$, należy teraz różniczki zupełne tej funkcyi i jej pochodne cząstkowe względem zmiennych: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, wyrazić przez nowe zmienne $y_1, y_2, \ldots, y_n$ i przez jej pochodne cząstkowe, odniesione do tych zmiennych.

W tym celu otrzymujemy pierwsze różniczki zupełne pierwotnych zmiennych w postaci:

$$dx_1 = \frac{\partial f_1}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} dy_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} dy_n,$$

$$dx_2 = \frac{\partial f_2}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y_2} dy_2 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial y_n} dy_n,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$dx_n = \frac{\partial f_n}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial f_n}{\partial y_2} dy_2 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial y_n} dy_n,$$

ogólnie r-te różniczki zupełne tych zmiennych w postaci symbolicznej:

$$d^r x_i = \left(\frac{\partial}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial}{\partial y_2} dy_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial y_n} dy_n\right)^{(r)} f_i, \qquad (9)$$

$$(i=1, 2, \dots n).$$

Wartości te należy wstawić we wzory na różniczki zupełne funkcyi z, przyczem należy mieć na uwadze, że pierwsza różniczka zupełna:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n,$$

ma jednakowy kształt, bez względu na to, czy zmienne: $x_1, x_2, \dots, x_n$, są niezależne, czy też są funkcyami innych zmiennych niezależnych: $y_1, y_2, \dots, y_n$ a natomiast różniczki zupełne wyższych rzędów zmieniają swe kształty, gdyż różniczki zmiennych: $x_1, x_2, \dots, x_n$, rzędu wyższego nad pierwszy: $d^r x_1, d^r x_2, \dots, d^r x_n$, $r > 2$, jako zależne od nowych zmiennych: $y_1, y_2, \dots, y_n$, nie są zerami.

Mianowicie otrzymujemy w tym przypadku wzór na drugą różniczkę zupełną, w postaci symbolicznej:

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n\right)^{(2)} z + \frac{\partial z}{\partial x_1} d^2 x_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} d^2 x_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} d^2 x_n, \qquad (10)$$

z której, na podstawie różniczkowania, ze względu na wszystkie zmienne, wypływają analogiczne wzory dla różniczek wyższych rzędów.

Z zupełnych różniczek, możemy już otrzymać pochodne cząstkowe.

Mając wprost wyrazić pochodne cząstkowe funkcyi z, odniesione do nowych zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$, przez pochodne cząstkowe tej funkcyi, odniesione do nowych zmiennych $y_1, y_2, \dots, y_n$, na podstawie wzorów przekształcenia: $x_i = f_i(y_1, y_2, \dots, y_n)$, $(i=1, 2, \dots, n)$,

możemy korzystać z równań:

$$\frac{\partial z}{\partial y_i} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_i} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_i} + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_i}, \qquad (11)$$

$$(i=1, 2, \dots, n),$$

z których, jako liniowych, ze względu na pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n},$$

wyznaczymy te pochodne, jeżeli Jakobian układu funkcyj: $x_1, x_2, \dots, x_n$, względem zmiennych: $y_1, y_2, \dots, y_n$, przedstawiający się w postaci wyznacznika:

$$J(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1}, & \frac{\partial x_2}{\partial y_1}, \dots, & \frac{\partial x_n}{\partial y_1} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_n}, & \frac{\partial x_2}{\partial y_n}, \dots, & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \left| \frac{\partial x_i}{\partial y_k} \right|, \ (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

będzie różny od zera.

3. Zasadnicze własności Jakobianu n funkcyj. Niech będzie dany układ n funkcyj: $y_1, y_2, \dots, y_n$, o n zmiennych niezależnych: $x_1, x_2, \dots, x_n$, w postaci:

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 &= \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n &= \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{12}$$

Załóżmy, że między temi n funkcyami: $y_1, y_2, \dots, y_n$, istnieje pewien związek w postaci:

$$F(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \tag{13}$$

wówczas, różniczkując to równanie, cząstkowo ze względu na każdą zmienną niezależną x_i, otrzymujemy n równań:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_2} &= 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad & \cdot \\ \frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_n} + \frac{\partial F}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_n} &= 0 \end{aligned} \tag{13'}$$

Ponieważ pochodne: $\frac{\partial F}{\partial y_1}, \frac{\partial F}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial y_n}$, nie mogą być równocześnie wszystkie zerami, gdyż w tym razie założone równanie: $F(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$, byłoby tożsamością, przeto równaniom powyższym, może się tylko wówczas stać zadość, gdy wyznacznik utworzony ze spółczynników przy tychże pochodnych: $\frac{\partial F}{\partial y_1}, \frac{\partial F}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial y_n}$, będzie zerem. Wyznacznikiem tym jest Jakobian układu funkcyj $y_1, y_2, \dots, y_n$, oznaczany symbolami:

$$J(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \left| \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \right| \ (i, \ k = 1, \ 2, \dots, \ n).$$

Mamy zatem twierdzenie:

Jeżeli między n funkcyami: $y_1, y_2, \dots, y_n$, n zmiennych niezależnych: $x_1, x_2, \dots, x_n$, istnieje jakikolwiek związek, nie zawierający zmiennych niezależnych, kształtu: $F(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$, wówczas Jakobian układu tych funkcyj względem zmiennych niezależnych jest tożsamościowo równy zeru.

Gdyby Jakobian danego układu funkcyj: $\left| \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \right| (i, k = 1, \ 2, \dots, \ n)$, nie był tożsamościowo równy zeru, a mimo to istniał warunek: $F(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$, wówczas, ze względu na to. że na podstawie danego układu równań:

$$y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \ (i = 1, \ 2, \dots, n),$$

otrzymujemy n różniczek zupełnych, kształtu:

$$dy_i=\frac{\partial y_i}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial y_i}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial y_i}{\partial x_n}dx_n,\ (i=1,\ 2,\ldots,\ n),$$

niemoglibyśmy otrzymać między różniczkami zupełnemi: $dy_i\ (i=1,\ 2,\ldots,\ n)$, żadnego związku, kształtu:

$$\lambda_1 dy_1+\lambda_2 dy_2+\ldots+\lambda_n dy_n=0,$$

jak tego wymaga równanie: $F(y_1, y_2, .., y_n)=0$, chyba, gdyby było równocześnie: $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$, co byłoby niemożebnem, gdyby Jakobian: $J(y_1,\ y_2,\ ..,\ y_n)$, był różnym od zera.

Otrzymany warunek jest zatem nie tylko konieczny, ale zarazem wystarczający.

4. Przypuśćmy teraz, że Jakobian danego układu funkcyj:

$$y_i=\varphi_i(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n),\ i=1,\ 2,\ldots,\ n,$$

jest tożsamościowo równy zeru, że zatem:

$$J(y_1, y_2,\ldots, y_n)=\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial y_n}{\partial x_1} \\ . & . & . & . \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n}, & \frac{\partial y_2}{\partial x_n}, & \ldots, & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}=0. \tag{14}$$

Wyobraźmy sobie, żeśmy, na podstawie pierwszych $(n-1)$ równań układu (12), wyrazili wartości zmiennych: $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_{n-1}$, jako funkcye zmiennych: $y_1,\ y_2,\ldots,\ y_{n-1}$, i zmiennej x_n, i podstawili te wyrażenia w n-te równanie:

$$y_n=\varphi_n(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n),$$

wówczas otrzymalibyśmy zmienną y_n, jako funkcyę zmiennych: $y_1,\ y_2,\ldots,\ y_{n-1}$ i zmiennej x_n, w postaci:

$$y_n=\Phi(y_1,\ y_2,\ldots,\ y_{n-1},\ x_n).$$

Możemy obecnie wykazać, że pod założeniem: $J(y_1,\ y_2,\ldots,\ y_n)=0$, funkcya ta nie może zawierać zmiennej x_n, czyli, że: $\frac{\partial \Phi}{\partial x_n}=0$.

Przedewszystkiem mamy, na podstawie danego układu (12):

$$dy_i=\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n}dx_n,\quad (i=1,\ 2,\ldots,\ n). \tag{15}$$

Weźmy pod uwagę wyznacznik:

$$D=\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{n-1}}, & dy_1 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{n-1}}, & dy_2 \\ . & . & . & . & . \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{n-1}}, & dy_n \end{vmatrix}, \tag{16}$$

zastąpmy w tym wyznaczniku różniczki: $dy_1,\ dy_2,\ldots,\ dy_n$ przez wyrażenia, określone wzorami (15), i rozwińmy go podług różniczek: $dx_1,\ dx_2,\ldots,\ dx_n$, natenczas zauważymy, że spółczynniki przy tych różniczkach będą wszystkie zerami, spółczynniki przy pierwszych $(n-1)$ różniczkach: $dx_1,\ dx_2,\ldots,\ dx_{n-1}$,

będą bowiem wyznacznikami, które mają po dwie kolumny jednakowe, spółczynnik przy dx_n będzie zaś Jakobianem układu funkcyj, mającym według założenia wartość zera. Wyznacznik D ma więc wartość zera.

Rozwinąwszy go podług elementów ostatniej kolumny, otrzymujemy:

$$D=P_1 dy_1+P_2 dy_2+\dots+P_n dy_n=0. \qquad (16')$$

Załóżmy, że spółczynnik: $P_n=\left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}\right|$, $(i, k=1, 2, \dots, n-1)$, jako minor elementu: $\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}$ w Jakobianie $J(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, t. j. w wyznaczniku funkcyjnym $\left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}\right|$, $(i, k=1, 2, \dots, n)$, równym zeru, jest różny od zera, wówczas otrzymamy:

$$dy_n=A_1 dy_1+A_2 dy_2+\dots+A_{n-1} dy_{n-1}.$$

W wyrażeniu tem, uporządkowanem na podstawie równań (15), podług różniczek: $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$, przedstawia spółczynnik przy dx_n, pochodną cząstkową: $\frac{\partial y_n}{\partial x_n}=\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}$, ale spółczynnik ten, wobec założenia, że Jakobian układu funkcyj jest zerem, będzie według (16') także zerem, jest więc: $\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}=0$, a więc funkcya $y_n=\Phi(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, x_n)$, nie zawiera w sobie zmiennej x_n, czyli:

$$y_n=\Phi(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}). \qquad (17)$$

Mamy więc nowe twierdzenie:

Jeżeli Jakobian: $J(y_1, y_2, \dots, y_n)=\left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}\right|$, $(i, k=1, 2, \dots, n)$, *układu n funkcyj $y_1, y_2, \dots, y_n$, zmiennych: $x_1, x_2, \dots, x_n$ jest zerem, wówczas zachodzi między temi funkcyami związek niezależny od zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$.*

5. Związek: $F(y_1, y_2, \dots, y_n)=0$, otrzymamy na podstawie układu równań:

$$y_i=\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

którego Jakobian jest zerem, za pomocą rugowania zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$, a w takim razie wyrugowanie $(n-1)$ z tych ze zmiennych, wywołuje już także wyrugowanie n-tej zmiennej, prowadząc do relacyi: $y_n=\Phi(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ względnie do równania: $F(y_1, y_2, \dots, y_n)=0$.

Związek taki jest tylko jeden, gdyby bowiem obok związku:

$$y_n=\Phi(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}),$$

istniał także drugi, od niego różny, kształtu: $y_n=\Psi(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$, mielibyśmy nową relacyę już między $(n-1)$ funkcyami: $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$, w postaci:

$$F_1(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})=0.$$

Wówczas musiałby także Jakobian układu dowolnie wybranych $(n-1)$ funkcyj, z pośród danych n funkcyj, sprowadzać się tożsamościowe do zera, czyli innemi słowy, wszystkie minory pierwszego rzędu w wyznaczniku $\left|\frac{dy_i}{\partial x_k}\right|$, $(i, k=1, 2, \dots, n)$, musiałyby być zerami, co się sprzeciwia założeniu.

6. Przypuśćmy teraz, że nietylko Jakobian danego układu n funkcyj: $J(y_1, y_2, \dots, y_n)$, jest tożsamościowo równy zeru, ale także wszystkie jego minory pierwszego rzędu, które są kształtu:

$$J(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})=\left|\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right|, \quad (i, k=1, 2, \dots, n-1),$$

są tożsamościowo równe zeru i załóżmy, że co najmniej jeden minor drugiego rzędu, n. p.:

$$J(y_1, y_2, \ldots, y_{n-2}) = \left|\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right|, \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n-2),$$

jest różny od zera.

W tym przypadku możemy, na podstawie pierwszych $(n-2)$ równań: $y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, y_{n-2} = \varphi_{n-2}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, wyrazić $(n-2)$ zmienne: $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$, jako funkcye zmiennych: $y_1, y_2, \ldots, y_{n-2}$; dwa ostatnie równania danego układu, prowadzą tedy do równań:

$$y_{n-1} = \Phi_1(y_1, y_2, \ldots, y_{n-2}, x_{n-1}, x_n), \quad y_n = \Phi_2(y_1, y_2, \ldots, y_{n-2}, x_{n-1}, x_n).$$

Biorąc najpierw pod uwagę wyznacznik:

$$D_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}, \ldots, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{n-2}}, & dy_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_2}, \ldots, & \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_{n-2}}, & dy_{n-1} \end{vmatrix},$$

i zastępując w nim: $dy_1, \ldots, dy_{n-1}$, przez $dx_1, \ldots, dx_{n-1}$, zauważymy, jak powyżej, przy wyznaczniku D, że on jest także tożsamościowo równy zeru, rozwijając go zatem podług elementów ostatniej kolumny, dochodzimy do relacyi, kształtu:

$$dy_{n-1} = P_1 dy_1 + P_2 dy_2 + \ldots + P_{n-2}\, dy_{n-2},$$

z której wynika, że zarówno $\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_{n-1}} = 0$, jakoteż $\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} = 0$. Podobnie wykażemy, że także: $\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_{n-1}} = 0$ i $\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_n} = 0$.

Istnieją zatem, przy powyższych założeniach, dwa różne od siebie związki między n funkcyami: $y_1, y_2, \ldots, y_n$, w postaci:

$$y_{n-1} = \Phi_1(y_1, y_2, \ldots, y_{n-2}), \quad y_n = \Phi_2(y_1, y_2, \ldots, y_{n-2}), \tag{18}$$

a oprócz nich, nie ma innych od nich niezależnych, gdyż w takim przypadku, musiałby już Jakobian $(n-2)$ funkcyj być tożsamościowo równy zeru, co się sprzeciwia założeniu.

Podobnie rozumując, dochodzimy do twierdzenia:

Jeżeli Jakobian n funkcyj $y_1, y_2, \ldots, y_n$, o n zmiennych niezależnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jest tożsamościowo zerem, a zarazem wszystkie minory jego, aż do minorów $(r-1)$-go rzędu, t. j. do podwyznaczników $(n-r+1)$ rzędu, włącznie, są tożsamościowo zerami, a przynajmniej jeden z minorów r-go rzędu, czyli z podwyznaczników $(n-r)$-go rzędu, jest różny od zera, wówczas istnieje r oddzielnych związków między temi n funkcyami, a więc r z tych funkcyj da się wyrazić za pomocą $(n-r)$ pozostałych funkcyj, które są od siebie niezależne.

7. **Przykład.** Wykazać i wyznaczyć zależność funkcyj: u, v, w, określonych równaniami: $u = x + y + z$, $v = x^2 + y^2 + z^2$, $w = xy + yz + xz$.

Mamy tu:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \ \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \ \frac{\partial u}{\partial z} = 1, \ \frac{\partial v}{\partial x} = 2x, \ \frac{\partial v}{\partial y} = 2y, \ \frac{\partial v}{\partial z} = 2z, \ \frac{\partial w}{\partial x} = y + z, \ \frac{\partial w}{\partial y} = z + x, \ \frac{\partial w}{\partial z} = x + y.$$

Jakobian układu tych trzech funkcyj, przedstawia się w postaci:

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 2x, & 2y, & 2z, \\ y+z, & z+x, & x+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 2x, & 2(y-x), & 2(z-y) \\ y+z, & x-y, & y-z \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} y-x, & z-y \\ x-y, & y-z \end{vmatrix} = 0.$$

jest więc tożsamościowo równy zeru. Dane trzy funkcye: u, v, w, są zatem od siebie zależne, a że minory elementów ich Jakobianu nie są zerami, przeto zależność ta jest jedyną. Celem jej wyznaczenia, mamy: $u^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$, zatem otrzymujemy szukaną relacyę w postaci: $u^2 = v + 2w$, czyli: $u^2 - v - 2w = 0$.

8. Jakobian układu n funkcyj, złożonych z funkcyj n zmiennych niezależnych. Niech będzie dany układ n funkcyi: $z_1, z_2, \ldots, z_n$, zmiennych $y_1, y_2, \ldots, y_n$, a te zmienne niech będą same funkcyami n zmiennych niezależnych: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tak, że:

$$z_1 = f_1(y_1, y_2, \ldots, y_n),\ z_2 = f_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, z_n = f_n(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

a zarazem:

$$y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ y_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, y_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

wówczas otrzymamy Jakobian układu n funkcyj: $z_1, z_2, \ldots, z_n$, jako funkcyj zmiennych: $y_1, y_2, \ldots, y_n$, w postaci:

$$J_1 = \frac{D(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \left|\frac{\partial z_i}{\partial y_k}\right| = \left|\frac{\partial f_i}{\partial y_k}\right| \quad (i, k = 1, 2, n),$$

a natomiast Jakobian układu n funkcyj: $y_1, y_2, \ldots, y_n$, jako funkcyj zmiennych: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, w postaci:

$$J_2 = \frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \left|\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right| = \left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}\right| \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Iloczyn obu tych Jakobianów, przedstawia się w postaci:

$$J_1 J_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1}, & \frac{\partial z_1}{\partial y_2}, & \ldots, & \frac{\partial z_1}{\partial y_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial z_n}{\partial y_1}, & \frac{\partial z_n}{\partial y_2}, & \ldots, & \frac{\partial z_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_n}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Stosując do tego iloczynu prawidła mnożenia wyznaczników, otrzymujemy nowy wyznacznik w postaci:

$$J_1 J_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial z_1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial z_1}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial z_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_n} + \frac{\partial z_1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_n} + \ldots + \frac{\partial z_1}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial z_n}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial z_n}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial z_n}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial z_n}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_n} + \frac{\partial z_n}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_n} + \ldots + \frac{\partial z_n}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

a że:

$$\frac{\partial z_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial z_1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial z_1}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_1} = \frac{\partial z_1}{\partial x_1},$$

ogólnie:

$$\frac{\partial z_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \frac{\partial z_i}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial z_i}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_k} = \frac{\partial z_i}{\partial x_k}, \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

przeto otrzymujemy:

$$J_1 J_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial z_1}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial z_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial z_n}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial z_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \left|\frac{\partial z_i}{\partial x_k}\right|, \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

zatem:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial z_1}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ . & . & . & . \\ \frac{\partial z_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial z_n}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial z_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1}, & \frac{\partial z_1}{\partial y_2}, & \ldots, & \frac{\partial z_1}{\partial y_n} \\ . & . & . & . \\ \frac{\partial z_n}{\partial y_1}, & \frac{\partial z_n}{\partial y_2}, & \ldots, & \frac{\partial z_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ . & . & . & . \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_n}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

czyli:

$$\frac{D(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{D(x_1, x_2, \ldots x_n)} = \frac{D(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \cdot \frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}. \tag{19}$$

To znaczy: *Jakobian układu n funkcyj funkcyj n zmiennych niezależnych, obliczony ze względu na te zmienne niezależne, jest równy Jakobianowi układu n funkcyj nowych n funkcyj, obliczonemu ze względu na te funkcye, pomnożonemu przez Jakobian tychże nowych funkcyj, obliczony ze względu na zmienne niezależne.*

Twierdzenie to jest uogólnieniem twierdzenia o pochodnej funkcyi funkcyi jednej zmiennej niezależnej, przedstawiającego się w postaci wzoru:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}, \text{ czyli: } \frac{df[\varphi(x)]}{dx} = \frac{df[\varphi(x)]}{d\varphi(x)} \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx}. \tag{19'}$$

9. Jakobian układu funkcyj odwrotnych. Danemu układowi n funkcyj $y_1, y_2, \ldots, y_n$, o n zmiennych: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kształtu:

$$y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \; (i=1, 2, \ldots, n), \tag{20}$$

którego Jakobian: $J(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = \frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$, nie jest tożsamościowo równy zeru, odpowiada układ n funkcyi: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, jako funkcyj n zmiennych: $y_1, y_2, \ldots, y_n$, w postaci: $x_i = \psi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Funkcye $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, nazywamy f u n k c y a m i o d w r o t n e m i względem funkcyj: $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, a ich istotne wyznaczanie nazywamy o d w r a c a n i e m, czyli i n w e r s y ą f u n k c y j.

Ażeby wyznaczyć pochodne cząstkowe funkcyj odwrotnych, otrzymujemy z równań (20) n relacyj:

$$dy_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} dx_n, \; (i=1, 2, \ldots, n),$$

z których dostajemy różniczki zupełne funkcyj odwrotnych, w postaci:

$$dx_i = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{i-1}}, & dy_1, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{i+1}}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{i-1}}, & dy_n, & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{i+1}}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}}{J(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}, \; (i=1, 2, \ldots, n), \tag{21}$$

a stąd pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_k} = \frac{(-1)^{i+k}}{J(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{i-1}}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{i+1}}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ . & . & . & . & . & . \\ \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial x_{i-1}}, & \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial x_{i+1}}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_{k+1}}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi_{k+1}}{\partial x_{i-1}}, & \frac{\partial \varphi_{k+1}}{\partial x_{i+1}}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi_{k+1}}{\partial x_n} \\ . & . & . & . & . & . \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{i-1}}, & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{i+1}}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}, \; (i, k=1, 2, \ldots, n) \tag{22}$$

Jakobian funkcyj odwrotnych, przedstawi się wobec tego (patrz T. I. str. 348. art. 17.) w postaci:

$$J(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = \left|\frac{\partial \psi_i}{\partial y_k}\right| = \frac{\left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}\right|^{n-1}}{[J(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)]^n} = \frac{1}{\left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}\right|}.$$

Jest zatem:

$$J(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = \frac{1}{J(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)},$$

$$\text{czyli: } \frac{D(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)} = \frac{1}{\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}}, \text{ czyli: } \left|\frac{\partial x_i}{\partial y_k}\right| = \frac{1}{\left|\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right|}. \tag{23}$$

To znaczy: *Jakobian układu funkcyj odwrotnych jest równy odwrotności Jakobianu funkcyj pierwotnych.*

Twierdzenie to jest uogólnieniem twierdzenia o pochodnej funkcyi odwrotnej $x=\psi(y)$, względem funkcyi $y=\varphi(x)$, określonego wzorem:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}, \text{ czyli: } \frac{d\psi(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{d\varphi(x)}{dx}}. \tag{23'}$$

10. Hessyan funkcyi n zmiennych niezależnych. Funkcya z n zmiennych niezależnych: $x_1, x_2, \dots, x_n$, ma n pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu: $\frac{\partial z}{\partial x_i}$, $(i=1, 2, \dots, n)$, które tworzą układ n funkcyj n zmiennych niezależnych: $x_1, x_2, \dots, x_n$. Utworzywszy Jakobian tego układu funkcyj:

$$J\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = \frac{D\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \left|\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)\right|, \ (i, k=1, 2, \dots, n),$$

zauważymy, że przedstawia on wyznacznik symetryczny, n-go rzędu, którego elementa są pochodnemi cząstkowemi drugiego rzędu danej funkcyi n zmiennych. Wyznacznik taki, (por. art. 21., str. 362.), nazywamy Hessyanem tej funkcyi i oznaczamy wzorem:

$$H(z) = \left|\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k}\right|, \ (i, k=1, 2, \dots, n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n}, & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_n}, & \dots, & \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}. \tag{24}$$

Hessyan danej funkcyi n zmiennych niezależnych, możemy zatem uważać, jako Jakobian układu n pierwszych pochodnych cząstkowych tej funkcyi. Własności Jakobianu układu n funkcyj, dają się zatem przenieść na Hessyan funkcyi n zmiennych niezależnych.

Jakobian układu n funkcyj n zmiennych niezależnych posiada własności, które tworzą niejako uogólnienie własności, jakie posiada pochodna pierwszego rzędu funkcyi jednej zmiennej niezależnej.

Hessyan odgrywa znowu w funkcyi n zmiennych niezależnych podobną rolę, jaką ma w funkcyi jednej zmiennej niezależnej pochodna rzędu drugiego.

11. Różniczkowanie wyznaczników funkcyjnych. Wyznaczniki, których elementa są funkcyami jednej, lub kilku zmiennych, nazywamy w ogólności w y z n a c z n i k a m i f u n k c y j n e m i.

Weźmy pod uwagę wyznacznik:

$$u=\begin{vmatrix} f_{11}, f_{12}, \ldots, f_{1n} \\ f_{21}, f_{22}, \ldots, f_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_{n1}, f_{n2}, \ldots, f_{nn} \end{vmatrix},$$

rego elementa f_{ik} są wogóle zmienne.

Rozwijając go podług elementów i-go wiersza, dostajemy:

$$u=f_{i1}\varphi_{i1}+f_{i2}\varphi_{i2}+\ldots+f_{ik}\varphi_{ik}+\ldots+f_{in}\varphi_{in}, \tag{25}$$

ie φ_{ik} jest minorem elementu: f_{ik} tegoż wyznacznika

Ponieważ element f_{ik} znajduje się tylko w jednym wyrazie tego rozwinia, t. j. w wyrazie $f_{ik}\varphi_{ik}$, przeto pochodna cząstkowa funkcyi u, względem jednego z elementów wyznacznika, jest równą minorowi tego elementu, ntem:

$$\frac{\partial u}{\partial f_{ik}}=\varphi_{ik}, \quad (i, k=1, 2, .., n). \tag{26}$$

Jeżeli elementa wyznacznika są funkcyami n zmiennych niezależnych: $x_1, \ldots, x_n$, natenczas wyznacznik przedstawia pewną funkcyę u tychże ennych. Pochodne cząstkowe tej funkcyi, względem pewnej zmiennej niezalżnej x_r, przedstawiają się tedy, na podstawie rozwinięcia (25), w postaci:

$$\frac{\partial u}{\partial x_r}=f_{i1}\frac{\partial\varphi_{i1}}{\partial x_r}+\ldots+f_{in}\frac{\partial\varphi_{in}}{\partial x_r}+\varphi_{i1}\frac{\partial f_{i1}}{\partial x_r}+\ldots+\varphi_{in}\frac{\partial f_{in}}{\partial x_r},$$

rej, ze względu na równania (26), możemy nadać kształt:

$$\frac{\partial u}{\partial x_r}=\begin{vmatrix} \frac{\partial f_{11}}{\partial x_r}, f_{12}, \ldots, f_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\partial f_{n1}}{\partial x_r}, f_{n2}, \ldots, f_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f_{11}, \frac{\partial f_{12}}{\partial x_r}, \ldots, f_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_{n1}, \frac{\partial f_{n2}}{\partial x_r}, \ldots, f_{nn} \end{vmatrix}+\ldots+\begin{vmatrix} f_{11}, f_{12}, \ldots, \frac{\partial f_{1n}}{\partial x_r} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_{n1}, f_{n2}, \ldots, \frac{\partial f_{nn}}{\partial x_r} \end{vmatrix}, \tag{27}$$

którego wynika prawidło:

Pochodna cząstkowa danej funkcyi, określonej wyznacznikiem, którego elementa funkcyami n zmiennych niezależnych, odniesiona do pewnej zmiennej niezależnej, równa sumie n wyznaczników, powstałych z danego wyznacznika w ten sposób, poszczególne jego kolumny zastąpimy kolejno przez pochodne cząstkowe elementów kolumny, odniesione do tejże zmiennej niezależnej.

Jeżeli poszczególne elementa danego wyznacznika są funkcyami jednej zmiennej niezależnej x, natenczas odnośne pochodne cząstkowe sprowadzają do zwyczajnych pochodnych, a używając znakowania: $\frac{df}{dx}=f'$, otrzymuy odnośny wzór w postaci:

$$\frac{du}{dx}=u'=\begin{vmatrix} f_{11}', f_{12}, \ldots, f_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_{n1}', f_{n2}, \ldots, f_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f_{11}, f_{12}', \ldots, f_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_{n1}, f_{n2}', \ldots, f_{nn} \end{vmatrix}+\ldots+\begin{vmatrix} f_{11}, f_{12}, \ldots, f_{1n}' \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_{n1}, f_{n2}, \ldots, f_{nn}' \end{vmatrix}. \tag{28}$$

12. Wyznaczniki funkcyjne Wrońskiego. Szczególny rodzaj wyznaczników funkcyjnych wy wyznacznik n-go rzędu, w którym elementami pierwszej kolumny są dane funkcye, elementami następnych kolumn są kolejne pochodne tych funkcyj rzędów drugiego, ciego, aż do $(n-1)$-go rzędu włącznie. Wyznacznik taki nazywamy wyznacznim Wrońskiego, albo krótko Wrońskianem danego układu n funkcyj: $y_1, y_2, \ldots, y_n$ kreślamy go wzorem:

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1, \frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2y_1}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} \\ y_2, \frac{dy_2}{dx}, \frac{d^2y_2}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n, \frac{dy_n}{dx}, \frac{d^2y_n}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)} \\ y_2, y_2', y_2'', \dots, y_2^{(n-1)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n, y_n', y_n'', \dots, y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \qquad (29)$$

Na podstawie wzoru (28), możemy z łatwością obliczyć pierwszą pochodną Wrońskianu. Otrzymujemy tu $(n-1)$ wyznaczników równych zeru, bo mają po dwie jednakowe kolumny, przeto:

$$\frac{dW(y_1, y_2, \dots, y_n)}{dx} = \begin{vmatrix} y_1, y_1' \dots, y_1^{(n-2)}, y_1^{(n)} \\ y_2, y_2' \dots, y_2^{(n-2)}, y_2^{(n)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n, y_n' \dots, y_n^{(n-2)}, y_n^{(n)} \end{vmatrix}, \qquad (30)$$

a zatem:

Pochodna Wrońskianu jest nowym wyznacznikiem n-go rzędu, który powstaje z wyznacznika pierwotnego, jeżeli w nim zastąpimy $(n-1)$-sze pochodne poszczególnych funkcyj przez n-te pochodne tych funkcyj.

13. Zasadnicze własności Wrońskianu. Zastąpmy w danym Wrońskianie: $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ funkcye: $y_1, y_2, \dots, y_n$, przez iloczyny $ty_1, ty_2, \dots, ty_n$, gdzie t jest nową funkcyą, wówczas otrzymamy nowy Wrońskian, w postaci wyznacznika:

$$W(ty_1, ty_2, \dots, ty_n) = \begin{vmatrix} ty_1, ty_1' + t'y_1, \dots, (t+y_1)^{(n-1)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ ty_n, ty_n' + t'y_n, \dots, (t+y_n)^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Rozkładając ten wyznacznik na dodajniki, zauważymy, że wyrazy, zawierające pochodne t', lub pochodne wyższego rzędu funkcyi t, możemy opuścić, gdyż będą one proporcyonalne do elementów pierwszej kolumny, lub następnych. Otrzymujemy zatem:

$$W(ty_1, ty_2, \dots, ty_n) = t^n \begin{vmatrix} y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n, y_n', \dots, y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

czyli wzór:
$$W(ty_1, ty_2, \dots, ty_n) = t^n W(y_1, y_2, \dots, y_n), \qquad (31)$$
który stanowi analogię do własności charakterystycznej funkcyj jednorodnych (str. 328.)

14. Przyjmijmy, że funkcye: $y_1, y_2, \dots, y_n$, pozostają między sobą w zależności liniowej:
$$a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_ny_n = 0, \qquad (32)$$
w której spółczynniki $a_1, a_2, \dots, a_n$ są liczbami stałemi, wówczas otrzymujemy, na podstawie powyższego równania tożsamościowego, także następujące tożsamości:

$$\begin{aligned} a_1y_1' + a_2y_2' + \dots + a_ny_n' &= 0 \\ a_1y_1'' + a_2y_2'' + \dots + a_ny_n'' &= 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ a_1y_1^{(n-1)} + a_2y_2^{(n-1)} + \dots + a_ny_n^{(n-1)} &= 0, \end{aligned} \qquad (33)$$

które mogą się z tożsamością (32) tylko wówczas ostać, gdy wyznacznik, utworzony ze spółczynników przy niewiadomych stałych: $a_1, a_2, \dots, a_n$, będzie równy zeru, a że wyznacznik ten jest Wrońskianem funkcyj: $y_1, y_2, \dots, y_n$, zatem pod tym warunkiem, będzie:
$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0. \qquad (34)$$

Mamy zatem twierdzenie:

Jeżeli między n funkcyami jednej zmiennej niezależnej zachodzi związek liniowy, to Wrońskian tych funkcyj jest tożsamościowo równy zeru.

15. Naodwrót możemy wykazać, że skoro Wrońskian danych n funkcyj: $y_1, y_2, \dots, y_n$, jest tożsamościowo równy zeru, funkcye te są od siebie liniowo zależne, według relacyi:
$$a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_ny_n = 0.$$

Twierdzenie to jest wprost widoczne dla $n = 1$. Mamy bowiem wówczas z warunku: $W(y) = 0$, daną funkcyę w postaci: $y = 0$, zatem spełnia się relacya: $a_1y = 0$.

Przypuśćmy, że to twierdzenie prawdziwe jest dla $(n-1)$ funkcyj, że zatem w przy-
n: $W(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) = 0$, zachodzi relacya: $a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_{n-1} y_{n-1} = 0$.

Załóżmy teraz, że Wrońskian n funkcyj: $W(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$, a przytem dane
ye: $y_1, y_2, \dots, y_n$, a przynajmniej jedna z nich n. p. y_1, nie są tożsamościowo równe
wówczas możemy tożsamość: $W(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$, na podstawie wzoru (31) przedstawić
staci:

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = y_1^n . W\left(1, \frac{y_2}{y_1}, \dots, \frac{y_n}{y_1}\right) = 0.$$

$$W\left(1, \frac{y_2}{y_1}, \dots, \frac{y_n}{y_1}\right) = W\left[\left(\frac{y_2}{y_1}\right)', \left(\frac{y_3}{y_1}\right)', \dots, \left(\frac{y_n}{y_1}\right)'\right],$$

otrzymujemy:

$$W\left[\left(\frac{y_2}{y_1}\right)', \dots, \left(\frac{y_n}{y_1}\right)'\right] = 0.$$

Wrońskian $(n-1)$ funkcyj: $\left(\frac{y_2}{y_1}\right)', \dots, \left(\frac{y_n}{y_1}\right)'$, będzie więc tedy także tożsamościowo
zeru, zatem między temi funkcyami zachodzi, według założenia, relacya kształtu:

$$a_2 \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' + a_3 \left(\frac{y_3}{y_1}\right)' + \dots + a_n \left(\frac{y_n}{y_1}\right)' = 0,$$

$a_2, a_3, \dots, a_n$ są pewnemi liczbami stałemi.

Z relacyi tej wypływa związek:

$$a_2 \frac{y_2}{y_1} + a_3 \frac{y_3}{y_1} + \dots + a_n \frac{y_n}{y_1} = C,$$

C jest stałą dowolną. Oznaczmy ją przez $-a_1$, to otrzymujemy stąd szukaną re-
kształtu: $a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n = 0$.

Skoro więc założone twierdzenie prawdziwe jest dla Wrońskianu $(n-1)$ funkcyj, to
musi być prawdziwe dla Wrońskianu n funkcyj, a że okazało się prawdziwe dla Wroń-
jednej funkcyi, zatem jest ogólnie prawdziwe. A zatem:

Funkcye, których Wrońskian jest tożsamościowo równy zeru, są od siebie liniowo zależne.

16. Funkcye, określone układem równań. Niech będzie dany układ m
ń o $m+n$ zmiennych, w postaci:

$$\begin{aligned} F_1(z_1, z_2, \dots, z_m, x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ F_2(z_1, z_2, \dots, z_m, x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ F_m(z_1, z_2, \dots, z_m, x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{35}$$

Załóżmy, że Jakobian tego układu m równań:

$$J(F_1, F_2, \dots, F_m) = \frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(z_1, z_2, \dots, z_m)} = \left|\frac{\partial F_i}{\partial z_k}\right|, \quad (i, k = 1, 2, \dots, m),$$

różny od zera, że więc równania nie są od siebie zależne. Pod tem
niem możemy, na podstawie tych równań, m zmiennych: $z_1, z_2, \dots, z_m$
ć, jako funkcye pozostałych n zmiennych: $x_1, x_2, \dots, x_n$, przyjętych za
ne niezależne. Układ m równań, od siebie niezależnych o $(m+n)$
nych, określa w ogólności m funkcyj od siebie niezależnych o n
nych. Jeżeli $n=1$, to funkcye te są wszystkie funkcyami jednej
nej niezależnej (w przypadku $n=0$, mamy do czynienia tylko z po-
ólnemi wartościami m niewiadomych); jeżeli $m=1$, wówczas mamy
tylko funkcyę uwikłaną n zmiennych niezależnych

Chcąc wyznaczyć pierwsze pochodne cząstkowe m funkcyj, określonych
emi równaniami, różniczkujemy te równania cząstkowo kolejno ze
lu na każdą zmienną, przyjętą za zmienną niezależną.

Różniczkując te równania cząstkowo podług x_i, dostajemy m równań:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_i}+\frac{\partial F_1}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial x_i}+\frac{\partial F_1}{\partial z_2}\frac{\partial z_2}{\partial x_i}+\ldots+\frac{\partial F_1}{\partial z_m}\frac{\partial z_m}{\partial x_i}=0$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\frac{\partial F_m}{\partial x_i}+\frac{\partial F_m}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial x_i}+\frac{\partial F_m}{\partial z_2}\frac{\partial z_2}{\partial x_i}+\ldots+\frac{\partial F_m}{\partial z_m}\frac{\partial z_m}{\partial x_i}=0,$$

które są liniowe, ze względu na m pochodnych cząstkowych:

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_i},\ \frac{\partial z_2}{\partial x_i},\ldots,\ \frac{\partial z_m}{\partial x_i}.$$

Kładąc: $J(F_1, F_2,\ldots, F_m)=\dfrac{D(F_1, F_2,\ldots, F_m)}{D(z_1, z_2,\ldots, z_m)}=J$, otrzymujemy:

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_i}=-\frac{1}{J}\frac{D(F_1, F_2,\ldots, F_m)}{D(x_i, z_2,\ldots, z_m)},\quad \frac{\partial z_2}{\partial x_i}=-\frac{1}{J}\frac{D(F_1, F_2, F_3,\ldots, F_m)}{D(z_1, x_i, z_3,\ldots, z_m)}\ldots,$$

$$\frac{\partial z_m}{\partial x_i}=-\frac{1}{J}\frac{D(F_1, F_2,\ldots, F_{m-1}, F_m)}{D(z_1, z_2,\ldots, z_{m-1}, x_i)}, \tag{36}$$

wzory, podające pierwsze pochodne cząstkowe wszystkich m funkcyj, ze względu na zmienną niezależną: x_i.$(i=1, 2,\ldots, n)$.

17. Pochodne cząstkowe jakiegokolwiek rzędu, możemy dla funkcyj, określonych równaniami, wyznaczyć także na podstawie różniczek zupełnych odnośnego rzędu.

W tym celu otrzymujemy za pomocą różniczkowania danego układu równań, podług wszystkich zmiennych, na wyznaczenie m różniczek zupełnych pierwszego rzędu: $dz_1, dz_2,\ldots, dz_m$, m równań:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F_1}{\partial z_1}dz_1+\frac{\partial F_1}{\partial z_2}dz_2+\ldots+\frac{\partial F_1}{\partial z_m}dz_m+\frac{\partial F_1}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial F_1}{\partial x_n}dx_n=0,\\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ &\frac{\partial F_m}{\partial z_1}dz_1+\frac{\partial F_m}{\partial z_2}dz_2+\ldots+\frac{\partial F_m}{\partial z_m}dz_m+\frac{\partial F_m}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial F_m}{\partial x_n}dx_n=0.\end{aligned} \tag{37}$$

Na wyznaczenie różniczek zupełnych drugiego rzędu: d^2z_1, $d^2z_2,\ldots, d^2z_m$, otrzymujemy stąd równania symboliczne:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial z_1}dz_1+\ldots+\frac{\partial}{\partial z_m}dz_m+\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^{(2)}F_1+\frac{\partial F_1}{\partial z_1}d^2z_1+\ldots+\frac{\partial F_1}{\partial z_m}d^2z_m=0\\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ &\left(\frac{\partial}{\partial z_1}dz_1+\ldots+\frac{\partial}{\partial z_m}dz_m+\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^{(2)}F_m+\frac{\partial F_m}{\partial z_1}d^2z_1+\ldots+\frac{\partial F_m}{\partial z_m}d^2z_m=0,\end{aligned} \tag{38}$$

a następnie odpowiednio m równań na wyznaczenie różniczek zupełnych n-go rzędu.

Zauważymy przytem, że w równaniach, wyznaczających różniczki zupełne: $d^n z_1,\ldots, d^n z_m$, wyznacznikiem spółczynników przy tych różniczkach będzie zawsze Jakobian: $\dfrac{D(F_1, F_2,\ldots, F_m)}{D(z_1, z_2,\ldots, z_m)}$, który według założenia jest różny od zera.

18. Zmiana wszystkich zmiennych w funkcyi n zmiennych niezależnych. Na podstawie powyżej wyprowadzonych sposobów wyznaczania różniczek i pochodnych funkcyi, określonych równaniami, możemy postępowanie,

wskazane w art. 17. str. 399. dla funkcyi dwu zmiennych niezależnych, rozszerzyć do funkcyj ilukolwiek zmiennych.

Jeżeli mianowicie daną jest funkcya z zmiennych: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, określona równaniem:

$$F(z, x_1, x_2, \ldots, x_n)=0, \tag{39}$$

a zmieniamy wszystkie zmienne pierwotne $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$, na nowe zmienne $w, u_1, u_2, \ldots, u_n$, na podstawie $(n+1)$ równań:

$$\begin{array}{ll} z=f_0(w, u_1, u_2, \ldots, u_n), & F_0(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, w, u_1, u_2, \ldots, u_n)=0, \\ x_1=f_1(w, u_1, u_2, \ldots, u_n), \text{ względnie } & F_1(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, w, u_1, u_2, \ldots, u_n)=0, \quad (40) \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ x_n=f_n(w, u_1, u_2, \ldots, u_n), & F_n(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, w, u_1, u_2, \ldots, u_n)=0, \end{array}$$

uważając zmienne $u_1, u_2, \ldots, u_n$, jako niezależne, a zmienną w jako ich funkcyę, wówczas, otrzymujemy niejako w miejsce danego równania między zmiennemi: $z, x_1, \ldots, x_n$, nowe równanie między zmiennemi: $w, u_1, \ldots, u_n$. Należy tedy pochodne cząstkowe pierwotnej funkcyi: $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \ldots$, wyrazić przez nowe zmienne $w, u_1, u_2, \ldots, u_n$ i przez nowe pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial w}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial u_n}, \frac{\partial^2 w}{\partial u_1^2}, \ldots$$

W tym celu otrzymamy z równania (39) pochodne cząstkowe funkcyi z, odniesione do pierwotnych zmiennych: $x_1, \ldots, x_n$, a na podstawie równań (40) wyznaczymy pochodne cząstkowe pierwotnych zmiennych: $z, x_1, \ldots, x_n$, w odniesieniu do nowych zmiennych: $w, u_1, \ldots, u_n$, a że na podstawie danych $(n+1)$ równań, możemy zarówno zmienną w, jak zmienną z, uważać jako funkcyę nowych zmiennych niezależnych: $u_1, u_2, \ldots, u_n$, należy przeto otrzymane powyżej wyrażenia wstawić we wzory, określające pochodne cząstkowe funkcyi z względem nowych zmiennych: $u_1, u_2, \ldots, u_n$, a otrzymamy równania, podające związki między pierwotnemi pochodnemi cząstkowemi zmiennej z względem zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a pochodnemi cząstkowemi zmiennej w względem zmiennych: $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

19. Przekształcanie całek wielokrotnych. Mając w całce wielokrotnej:

$$J=\int\int\ldots\int z\,dx_1 dx_2 \ldots dx_n, \text{ gdzie } z=f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{41}$$

w miejsce zmiennych niezależnych: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, wprowadzić nowe zmienne niezależne: $u_1, u_2, \ldots, u_n$, na podstawie wzorów przekształcenia:

$$x_1=f_1(u_1, u_2, \ldots, u_n),\; x_2=f_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, x_n=f_n(u_1, u_2, \ldots, u_n), \tag{42}$$

musimy uwzględnić, że rozpoczynając wyznaczanie danej całki wielokrotnej od całkowania podług zmiennej x_n, uważamy wszystkie inne zmienne: $x_1, x_2 \ldots, x_{n-1}$, jako stałe, a więc ich różniczki równe zeru. Wobec tego otrzymujemy, na podstawie wzorów (42), równania:

$$\left.\begin{array}{l} 0=\frac{\partial f_1}{\partial u_1} du_1+\frac{\partial f_1}{\partial u_2} du_2+\ldots+\frac{\partial f_1}{\partial u_n} du_n, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ 0=\frac{\partial f_{n-1}}{\partial u_1} du_1+\frac{\partial f_{n-1}}{\partial u_2} du_2+\ldots+\frac{\partial f_{n-1}}{\partial u_n} du_n, \\ dx_n=\frac{\partial f_n}{\partial u_1} du_1+\frac{\partial f_n}{\partial u_2} du_2+\ldots+\frac{\partial f_n}{\partial u_n} du_n, \end{array}\right\} \tag{43}$$

z których, kładąc:

$$J_n=\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}, \quad J_{n-1}=\frac{\partial(f_1, \dots, f_{n-1})}{\partial(u_1, \dots, u_{n-1})},$$

otrzymujemy związek między różniczkami dx_n i du_n, określony równaniem $J_{n-1}\,dx_n=J_n\,du_n$, skąd dostajemy:

$$dx_n=\frac{J_n}{J_{n-1}}\,du_n. \tag{44}$$

Podstawiwszy tę wartość w daną całkę wielokrotną, otrzymujemy:

$$J=\int\int..\int z\,dx_1\,dx_2 \dots dx_n=\int\int\dots\int z\;\frac{J_n}{J_{n-1}}\,dx_1 \dots\dots dx_{n-1}\,du_n.$$

Całkując dalej według zmiennej x_{n-1}, a więc uważając pozostałe zmienne: $x_1, \dots, x_{n-2}, u_n$, jako stałe, otrzymujemy z równań:

$$0=\frac{\partial f_1}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial f_1}{\partial u_2}du_2+\dots+\frac{\partial f_1}{\partial u_{n-1}}du_{n-1}$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$0=\frac{\partial f_{n-2}}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial f_{n-2}}{\partial u_2}du_2+\dots+\frac{\partial f_{n-2}}{\partial u_{n-1}}du_{n-1}$$

$$dx_{n-1}=\frac{\partial f_{n-1}}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial f_{n-1}}{\partial u_2}du_2+\dots+\frac{\partial f_{n-1}}{\partial u_{n-1}}du_{n-1}$$

związek między różniczką dx_{n-1}, a różniczką du_{n-1}, w postaci równania:

$$J_{n-2}\,dx_{n-1}=J_{n-1}\,du_{n-1},$$

skąd wypływa:

$$dx_{n-1}=\frac{J_{n-1}}{J_{n-2}}\,du_{n-1},$$

zatem:

$$J=\int\int..\int z\;\frac{J_n}{J_{n-1}}\,dx_1 \dots dx_{n-1}\,du_n=\int\int..\int z\,.\,\frac{J_{n-1}}{J_{n-2}}\,.\,\frac{J_n}{J_{n-1}}\,dx_1 \dots\dots dx_{n-2}\,du_{n-1}\,du_n.$$

Postępując w ten sposób dalej i doszedłszy do całkowania podług zmiennej x_2, otrzymujemy, zastępując tę zmienną przez u_2, daną całkę wielokrotną w postaci:

$$J=\int\int..\int z\,.\,\frac{J_2}{J_1}\,.\,\frac{J_3}{J_2}\dots\frac{J_{n-1}}{J_{n-2}}\,.\,\frac{J_n}{J_{n-1}}\,.\,dx_1\,du_2 \dots du_{n-1}\,du_n.$$

W końcu, całkując podług x_1, musimy przyjąć $du_2=0, \dots, du_n=0, \dots$, zatem otrzymamy:

$$dx_1=\frac{\partial f_1}{\partial u_1}du_1, \text{ czyli } dx_1=J_1\,du_1,$$

a więc, po dokonaniu skróceń, daną całkę wielokrotną, ostatecznie w postaci:

$$J=\int\int..\int z\,.\,J_n\,du_1\,du_2 \dots du_n,$$

gdzie:

$$z=f(x_1, x_2, \dots, x_n)=f(f_1, f_2, \dots, f_n)=\varphi(u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Mamy zatem, na przekształcenie całki wielokrotnej, wzór:

$$\int\int..\int f(x_1 \dots x_n)\,dx_1\,dx_2 \dots dx_n=\int\int..\int\varphi(u_1, \dots, u_n)\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)}du_1\,du_2 \dots du_n, \tag{45}$$

czyli twierdzenie:

Mając całkę wielokrotną o n zmiennych: $x_1, x_2, \dots, x_n$ przekształcić na inną całkę wielokrotną o n zmiennych: $u_1, u_2, \dots, u_n$, połączonych z pierwotnemi zmiennemi za pomocą danych n równań, należy funkcyę, stojącą pod znakiem całkowania pomnożyć przez Jakobian pierwotnych zmiennych ze względu na nowe zmienne.

Twierdzenie to wypowiada uogólnienie sposobu przekształcania całek edyńczych, wywołanego pewnem podstawieniem, a określonego wzorem:

$$\int f(x) \,.\, dx = \int f[\varphi(u)] \,.\, \varphi'(u)\, du\,,$$

ług którego przekształcamy całkę pojedyńczą, mnożąc funkcyę, stojącą znakiem całkowania przez pochodną pierwotnej zmiennej ze względu nową zmienną.

Ćwiczenia XXV.

Wyznaczyć różniczki zupełne i pochodne cząstkowe funkcyi uwikłanej, określonej m z następujących równań:

1) $a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - a^2b^2 = 0$, ($z$ funkcyą x, y).

2) $u^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$, ($u$ funkcyą x, y, z).

3) $\text{arc tang}\, \dfrac{u+z-1}{u-z+1} - \text{arc cotg}\, \dfrac{y-x+1}{y+x-1} = c$ (u funkcyą x, y, z).

4) Wykazać, że pochodne cząstkowe czwartego rzędu funkcyi u, określonej równa-m: $u^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$, spełniają tożsamościowo relacyę:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + 2\,\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + 2\,\frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial z^2} + 2\,\frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial x^2} = 0,$$

5) Wykazać, że na podstawie równania: $f(x, y) = 0$, otrzymujemy:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3} \begin{vmatrix} 0\,, & \frac{\partial f}{\partial x}\,, & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x}\,, & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial y}\,, & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\,, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}.$$

6) Wykazać, że na podstawie równania: $f(x, y, z) = 0$, dostajemy:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x} = \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3} \begin{vmatrix} 0, & \frac{\partial f}{\partial x}\,, & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x}\,, & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z}\,, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\,, & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3} \begin{vmatrix} 0, & \frac{\partial f}{\partial y}\,, & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial y}\,, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,, & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z}\,, & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\,, & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3} \begin{vmatrix} 0, & \frac{\partial f}{\partial x}\,, & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial y}\,, & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\,, & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z}\,, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\,, & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix}.$$

7) Wykazać, że pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcyi z, określonej równaniem: $x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, przedstawiają się w postaci: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k} = \dfrac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3} \,.\, D_{ik}$, gdzie D_{ik} jest mino- elementu: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$ w wyznaczniku:

$$D = \begin{vmatrix} 0, & \frac{\partial f}{\partial x_1}\,, & \frac{\partial f}{\partial x_2}\,, \ldots, & \frac{\partial f}{\partial x_n} & , \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}\,, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\,, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\,, \ldots, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}\,, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial z} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\,, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}\,, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}\,, \ldots, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\,, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z}\,, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial z}\,, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial z}\,, \ldots, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial z}\,, & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix}.$$

8) Wykazać, że różniczki zupełne: dz, d^2z, d^3z, funkcyi: $z=f(x_1, x_2, ..., x_n)$, pod założeniem, że zmienne: $x_1, x_2, ..., x_n$, są funkcyami innych zmiennych niezależnych, określają się następującemi wzorami symbolicznemi:

$$dz=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+..+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)f,$$

$$d^2z=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+...+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^{(2)}f+\frac{\partial f}{\partial x_1}d^2x_1+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}d^2x_n,$$

$$d^3z=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+...+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^{(3)}f+3\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}dx_1d^2x_1+3\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(dx_1d^2x_2+dx_2d^2x_1)+...+$$

$$+...+3\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}dx_nd^2x_n+\frac{\partial f}{\partial x_1}d^3x_1+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}d^3x_n.$$

9) Jeżeli funkcye: $y_1, y_2, ..., y_n$, zmiennych niezależnych: $x_1, x_2, ..., x_n$, są związane równaniem: $F(y_1, y_2, ..., y_n)=0$, wykazać, że wówczas Jakobian tych funkcyj, który oznaczamy symbolami:

$$J(y_1, y_2, ..., y_n)=\frac{D(y_1, y_2, ..., y_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)}=\frac{\partial(y_1, y_2, ..., y_n)}{\partial(x_1, x_2, ..., x_n)}=\left|\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right|, (i, k=1, 2, ..., n),$$

jest tożsamościowo równy zeru.

10) Dowieść, nawzajem, że między funkcyami y_i zmiennych x_i $(i=1, 2, ..., n)$ zachodzi związek: $F(y_1, y_2, ..., y_n)=0$, jeżeli Jakobian: $J(y_1, y_2, ..., y_n)$, jest tożsamościowo równy zeru.

11) Jeżeli funkcye y_i zmiennych niezależnych: $x_i (i=1, 2, ..., n)$ są funkcyami ułamkowemi o wspólnym mianowniku: u, tak, że: $y_i=\frac{u_i}{u}$, wykazać, że wówczas ich Jakobian da się sprowadzić do postaci:

$$\frac{\partial(y_1, y_2, ..., y_n)}{\partial(x_1, x_2, ..., x_n)}=\frac{1}{u^{n+1}}\begin{vmatrix} u, & \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., & \frac{\partial u}{\partial x_n} \\ u_1, & \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, ..., & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ . & . . . . & . \\ u_n, & \frac{\partial u_n}{\partial x_1}, ..., & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

12) Jeżeli funkcye: $y_1, y_2, ..., y_n$, zmiennych: $x_1, x_2, ..., x_n$, są określone za pomocą n równań: $f_1(y_1, ..., y_n, x_1, ..., x_n)=0, ..., f_n(y_1, ..., y_n, x_1, ..., x_n)=0$, wykazać, że wówczas:

$$\frac{D(f_1, f_2, ..., f_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)}=(-1)^n\frac{D(f_1, f_2, ..., f_n)}{D(y_1, y_2, ..., y_n)}\cdot\frac{D(y_1, y_2, ..., y_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)}.$$

13) Jeżeli zmienne: $z_1, z_2, ..., z_n$, są funkcyami zmiennych: $y_1, y_2, ..., y_n$, a zmienne: $y_1, y_2, ..., y_n$, są nadto funkcyami zmiennych: $x_1, x_2, ..., x_n$, wykazać, że wówczas:

$$\frac{D(z_1, z_2, ..., z_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)}=\frac{D(z_1, z_2, ..., z_n)}{D(y_1, y_2, ..., y_n)}\cdot\frac{D(y_1, y_2, ..., y_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)}.$$

14) Jeżeli zmienne: $y_1, y_2, ..., y_n$, są funkcyami zmiennych: $x_1, x_2, ..., x_n$, a uważamy naodwrót zmienne: $x_1, x_2, ..., x_n$, jako funkcye zmiennych: $y_1, y_2, ..., y_n$, wykazać, że wówczas:

$$\frac{D(y_1, y_2, ..., y_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)}\cdot\frac{D(x_1, x_2, ..., x_n)}{D(y_1, y_2, ..., y_n)}=1.$$

15) Jeżeli y_i są funkcyami zmiennych x_i, a nadamy zmiennym x_i n różnych przyrostów: $\Delta_k x_i$, wywołujących odpowiednie przyrosty funkcyj: $\Delta_k y_i$, wykazać, że Jakobian funkcyj y_i, względem zmiennych x_i, tworzy granicę stosunku między wyznacznikiem: $|\Delta_k y_i|$, a wyznacznikiem: $|\Delta_k x_i|$, czyli, że:

$$\frac{D(y_1, y_2, ..., y_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)}=\lim_{\Delta_k x_i=0}\frac{|\Delta_k y_i|}{|\Delta_k x_i|}=\frac{|d_k y_i|}{|d_k x_i|}, (i, k=1, 2, ..., n).$$

16) Jeżeli: $y=a_1y_1+a_2y_2+...+a_ny_n$
$x=a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n$

wykazać, że wówczas:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n=\frac{D(y_1, y_2, ..., y_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)}.$$

17) Wyznaczyć pochodne zmiennych y i z, jako funkcyj jednej zmiennej niezależnej x, łonych następującemi dwoma równaniami:

$$x^2+y^2+z^2=r^2, \quad ax+by+cz=d.$$

Podobnie dla następujących układów dwu równań:

18) $x^3+y^3-3z+a=0,$ $z^2-2y^2-x+b=0.$

19) $x^3+y^3+z^3-3xyz=0,$ $x+y+z=a.$

20) $e^x+e^y+e^z=a,$ $\sin x+\log y+\operatorname{arctg} z=b.$

21) $\cos x+\cos y+\cos z=a,$ $x^3+y^3+z^3=b.$

22) $\sin(x+y)+z=a,$ $\sin(x-y)+z=b,$

23) $ax^l+by^m+cz^n=d,$ $\alpha x^\lambda+\beta y^\mu+\gamma z^\nu=\delta.$

24) Wyznaczyć pochodną $\frac{du}{dx}$ z trzech równań między czterema zmiennemi: x, y, z, u, ałtu:

$$x^2+y^2+z^2+u^2=a^2, \ \log(xy)+\frac{y}{x}=b^2, \ \log\frac{z}{x}+zx=c^2.$$

25) Podobnie z układu równań:

$$x+y+z+u=a, \quad x^2+y^2+z^2+u^2=b, \quad x^3+y^3+z^3+u^3=c.$$

26) Wyznaczyć pochodne cząstkowe funkcyj z i u, względem zmiennych niezależnych y, na podstawie układu dwu równań między czterema zmiennemi x, y, z, u, kształtu:

$$ax+by+cz+du=l, \quad a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+d^2u^2=m.$$

Podobnie, na podstawie układów:

27) $x+y+z+u=a,$ $\log(xyzu)=b.$

28) $xy+zu=a,$ $x+y=b(z+u).$

29) Jeżeli:

$$u_1=\frac{x_1}{x_n}, \ u_2=\frac{x_2}{x_n}, \ldots, \ u_{n-1}=\frac{x_{n-1}}{x_n},$$

przytem:

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2+x_n^2=1,$$

kazać, że:

$$\frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})}=\frac{1}{x_n^{n+1}}.$$

30) Jeżeli: u_1, u_2, u_3, są trzema funkcyami zmiennych x i y, a dla każdej pary funkcyj worzymy Jakobiany:

$$v_1=\frac{D(u_2, u_3)}{D(x, y)}, \quad v_2=\frac{D(u_3, u_1)}{D(x, y)}, \quad v_3=\frac{D(u_1, u_2)}{D(x, y)},$$

stąd znowu trzy Jakobiany:

$$w_1=\frac{D(v_2, v_3)}{D(x, y)}, \quad w_2=\frac{D(v_3, v_1)}{D(x, y)}, \quad w_3=\frac{D(v_1, v_2)}{D(x, y)},$$

kazać, że:

$$\frac{w_1}{u_1}=\frac{w_2}{u_2}=\frac{w_3}{u_3}.$$

Wykazać i wyznaczyć zależność dwu funkcyj u i v dwu zmiennych x i y, określonych następującemi dwoma równaniami:

31) $u=x-y$
$v=x^2+y^2-2xy-2x+2y-1.$

32) $u=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$
$v=\arcsin x+\arcsin y.$

33) $u=\dfrac{x+y}{1-xy}$
$v=\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg} y$

34) $u=\operatorname{arctg}(x+y)+\operatorname{arctg}(x-y)$
$v=\dfrac{y^2-x^2+1}{2x}.$

35) $u^2-2ux+y^2=0$
$v=\log(x+\sqrt{x^2-y^2}).$

36) $u=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}$
$v=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+y^2}}{x^2-y^2}.$

Wykazać i wyznaczyć zależność trzech funkcyj: u, v, w, określonych następującemi ema równaniami:

37) $u = x + 2y + z$
$v = x - 2y + 8z$
$w = 2xy - xz + 4yz - 2z^2.$

38) $u = 5x^2 + 2y^2 - 4z^2$
$v = x^2 + y^2 - z^2$
$w = 7x^2 + y^2 - 5z^2.$

39) $u = \frac{y}{z} - \frac{z}{y}, \quad v = \frac{z}{x} - \frac{x}{z}, \quad w = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}.$

40) $u = \frac{(y+z)^2}{yz}, \quad v = \frac{(z+x)^2}{zx}, \quad w = \frac{(x+y)^2}{xy}.$

41) Jeżeli cztery funkcye: u_1, u_2, u_3, u_4 związane są ze zmiennemi niezależnemi: x_1, x_2, x_3, x_4, za pomocą następujących czterech równań:

$$x_1 = u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4, \quad x_2 = u_1 x_1 + u_3 x_3 + u_4 x_4,$$
$$x_3 = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_4 x_4, \quad x_4 = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3,$$

dowieść, że między temi funkcyami zachodzi związek:

$$\frac{u_1}{1+u_1} + \frac{u_2}{1+u_2} + \frac{u_3}{1+u_3} + \frac{u_4}{1+u_4} = 1.$$

42) Jeżeli $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\psi$, $z = r\sin\varphi\cos\psi$, gdzie r, φ, ψ są zmienne niezależne, wykazać, że:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \psi} = -r^2 \frac{\partial z}{\partial r}.$$

43) Jeżeli:
$$\frac{\cos u}{a\cos\varphi} = \frac{\sin u \cos v}{b \sin\varphi \cos\psi} = \frac{\sin u \sin v}{c \sin\varphi \sin\psi},$$

wykazać, że:

$$\frac{D(u, v)}{D(\varphi, \psi)} = \frac{abc \sin\varphi}{\sin u (a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi\cos^2\psi + c^2\sin^2\varphi\sin^2\psi]^{3/2}}.$$

44) Wykazać, że hessyan funkcyi: $u = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$, da się przedstawić w postaci:

$$H(u) = 24\,[9x^2y^2z^2 - (x^2 + y^2 + z^2)\,u].$$

45) Wykazać, że stosując do funkcyi: $f(x, y)$ podstawienia: $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$, gdzie r i α są nowemi zmiennem niezależnemi otrzymujemy hessyan:

$$H(f) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}, & \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right) \\ \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right), & \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} \end{vmatrix}.$$

46) Wykazać, że t. z. **parametr różniczkowy pierwszego rzędu funkcyi**: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kształtu:

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2,$$

nie zmienia swej postaci wskutek przekształcenia ortogonalnego, określonego wzorami:

$$x_i = l_{i1} y_1 + l_{i2} y_2 + \ldots + l_{in} y_n. \; (i = 1, 2, \ldots, n),$$

gdzie $y_1, y_2, \ldots, y_n$, są nowemi zmiennemi niezależnemi.

47) Wykazać, że t. z. parametr różniczkowy drugiego rzędu funkcyi: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kształtu:

$$\Delta^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2},$$

nie zmienia swego kształtu wskutek przekształcenia ortogonalnego.

48) Wykazać, że, gdy we funkcyi $f(r)$ jednej zmiennej niezależnej r podstawimy: $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$, pochodne cząstkowe tej funkcyi względem zmiennych niezależnych: $x_1, \ldots, x_n$, przedstawiają się w postaci: $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}\frac{df}{dr}$, i wyznaczyć parametr różniczkowy pierwszego rzędu Δ funkcyi f (patrz ćw. 46.).

49) Wykazać, że w warunkach zag. (48) będzie:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{1}{r}\frac{df}{dr} + \frac{x_i^2}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{df}{dr}\right),$$

a zatem parametr różniczkowy drugiego rzędu funkcyi $f(r) = f(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2})$ (patrz str. 47.), przedstawia się w postaci:

$$\Delta^2 f = \frac{n}{r}\frac{df}{dr} + r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{df}{dr}\right).$$

50) Jeżeli $z=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, a przytem: $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=r^2$, wykazać, że wówczas: $x_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots+x_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=r\frac{\partial z}{\partial r}$.

51) Wykazać, że:

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix}\frac{du}{dx}, & \frac{dv}{dx}\\ \frac{d^2u}{dx^2}, & \frac{d^2v}{dx^2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{du}{dx}, & \frac{dv}{dx}\\ \frac{d^3u}{dx^3}, & \frac{d^3v}{dv^3}\end{vmatrix}.$$

54) Dowieść, że funkcye u i v jednej zmiennej niezależnej, których Wrońskian

$$W(u, v)=\begin{vmatrix}u, & v\\ v', & v'\end{vmatrix}=0,$$

są od siebie liniowo zależne.

Znaleźć Wrońskiany następujących funkcyj:

56) $u=1-\cos 2x$, $v=\frac{1}{\mathrm{tg}^2x+1}$. 57) $u=\mathrm{tg}^2x$, $v=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$

58) $u=e^x$, $v=\sin x$, $w=\cos x$. 59) $u=\log x$, $v=\arcsin x$, $w=\arccos x$.

60) Wyznaczyć pochodną wyznacznika funkcyjnego:

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n)=\begin{vmatrix}y_1, & y_2, & \ldots, & y_n\\ y_1', & y_2', & \ldots, & y_n\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ y_1^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)}, & \ldots, & y_n^{(n-1)}\end{vmatrix},$$

którego elementa są funkcyami jednej zmiennej niezależnej x, przyczem $y_i^{(r)}$ przedstawia r-tą pochodną funkcyi y_i ze względu na zmienną niezależną x.

61) Znaleźć pochodną wyznacznika funkcyjnego:

$$W(y_1^{(r+1)}, \ldots, y_n^{(r+1)})=\begin{vmatrix}y_1^{(r+1)}, & \ldots, & y_n^{(r+1)}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ y_1^{(r+n)}, & \ldots, & y_n^{(r+n)}\end{vmatrix},$$

w którym element $y_i^{(r+k)}$, $(k=1, 2, \ldots, n)$, przedstawia $(r+k)$-tą pochodną funkcyi: y_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ jednej zmiennej niezależnej x.

Rozwiązania XXV. 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{a^2x}{c^2z}, \ldots$ 3) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z-1}\,\frac{u^2+(z-1)^2}{y^2+(x-1)^2}$. 5) Wypływa z równań: $\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial f}{\partial y}d^2y=0$. 6) Wypływa z równań: $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0, \ldots, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$. 17) $\frac{dy}{dx}=\frac{az-cx}{cy-bz}$. 18) $\frac{dy}{dx}=\frac{3(1-2x^2z)}{4y(z-3)}$. 19) $\frac{dy}{dx}=\frac{z-x}{y-x}$. 21) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2\sin z-z^2\sin x}{z^2\sin y-y^2\sin z}$. 22) $\frac{dy}{dx}=\mathrm{tang}\,x\,\mathrm{tang}\,y$. 23) $\frac{dy}{dx}=-\frac{l\,\alpha\nu\gamma x^{l-1}z^{\nu-1}-\lambda a n c x^{\lambda-1}z^{n-1}}{m b\nu\gamma y^{m-1}z^{\nu-1}-\mu\beta n c x^{\mu-1}z^{n-1}}$. 24) $\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\left[\frac{y^2(x-y)}{x(x+y)}+\frac{z^2(xz-1)}{x(xz-1)}-x\right]$. 25) $\frac{du}{dx}=-\frac{(z-x)(y-x)}{(z-u)(y-u)}$. 26) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{a(ax-du)}{c(du-cz)}$, $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{a(cz-ax)}{d(du-cz)}$. 31) $v-u^2=2u-1$. 32) $u=\sin v$. 33) $u=\mathrm{tg}\,v$. 34) $v=\mathrm{cotg}\,u$. 35) $v=\log u$. 36) $v=\frac{1}{u}$. 37) $4w-u^2+v^2=0$. 38) $w=2u-3v$. 39) $u^4+v^4+w^4-2(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2)-u^2v^2w^2=0$. 40) $(u+v+w)^2-uvw=0$. 48) $\Delta f=\left(\frac{df}{dr}\right)^2$.

Literatura. Edouard Goursat. Cours d'analyse mathématique. Tome I. Paris 1902. Ernesto Pascal. Die Determinanten. Deutsche Ausgabe von Dr. Hermann Leitzmann. Leipzig 1900. S. Dickstein. Własności i niektóre zastosowania Wrońskianów. Prace matematyczno-fizyczne. Warszawa 1888.

Tematy do rozprawek naukowych:

1. Różniczkowanie wyznaczników funkcyjnych.
2. Teorya i zastosowanie Jakobianów.
3. Teorya i własności Wrońskianów.

Wykład XXVI.

Rozwijanie funkcyj uwikłanych ilukolwiek zmiennych na szeregi potęgowe.

1. Rozwijanie funkcyi uwikłanej, określonej jednem równaniem. Niech będzie daną funkcya z zmiennych niezależnych: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, określona równaniem:

$$F(z, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \tag{1}$$

zie: $F(z, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest funkcyą $(n+1)$ zmiennych: $z, x_1, \ldots, x_n$, o której zypuszczamy, że da się rozwinąć w szereg potęgowy tychże zmiennych.

Na podstawie wzoru Maclaurina (str. 337.), otrzymujemy tedy:

$$F(z, x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_0 + DF_0 + \frac{1}{2!} D^2 F_0 + \ldots + \frac{1}{r!} D^r F_0 + \ldots \tag{2}$$

gdzie F_0 przedstawia wartość funkcyi: $F(z, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ w miejscu:

$$z=0,\ x_1=0,\ x_2=0, \ldots, x_n=0, \text{ a } DF_0,\ D^2F_0, \ldots, D^rF_0,$$

są jednorodnemi funkcyami 1-go, 2-go, ..., r-go stopnia, ze względu na zmienne $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$, w postaci:

$$DF_0 = z\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 + x_1\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_0 + x_2\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_0 + \ldots + x_n\left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)_0,$$

$$D^2F_0 = z^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)_0 + x_1^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}\right)_0 + \ldots + x_n^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2}\right)_0 + 2zx_1\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial x_1}\right)_0 + \ldots +$$
$$+ \ldots + 2x_{n-1}x_n\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_{n-1}\,\partial x_n}\right)_0,$$

ogólnie D^rF_0 przedstawia się w postaci symbolicznej:

$$D^rF_0 = \left(z\frac{\partial}{\partial z} + x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{(r)} F(0, 0, \ldots, 0).$$

Uporządkowawszy powyższe wyrażenia podług potęg zmiennej zależnej z, otrzymamy:

$$DF_0 = \varphi_1^{(1)}(x_i) + \varphi_0^{(1)}(x_i) \cdot z,$$
$$D^2F_0 = \varphi_2^{(2)}(x_i) + 2\varphi_1^{(2)}(x_i) \cdot z + \varphi_0(x_i) \cdot z^2, \tag{3}$$

ogólnie:

$$D^rF_0 = \varphi_r^{(r)}(x_i) + \binom{r}{1}\varphi_{r-1}^{(r)}(x_i) \cdot z + \ldots + \varphi_0^{(r)}(x_i) \cdot z^r,$$

gdzie $\varphi_r^{(s)}(x_i)$ są jednorodnemi funkcyami r-go stopnia, ze względu na zmienne niezależne: $x_i\ (i=1, 2, \ldots, n)$.

Równanie (1) określa zmienną z, jako funkcyę jednowartościową, lub ko funkcyę wielowartościową zmiennych niezależnych: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Niech dzie: $z=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, jedną z tych funkcyj, która, rozwinięta według eregu Maclaurina, przedstawia się w postaci:

$$z=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=z_0+(dz)_0+\frac{1}{2!}(d^2z)_0+\ldots+\frac{1}{r!}(d^rz)_0+\ldots \qquad (4)$$

dzie z_0 przedstawia wartość tej funkcyi w miejscu $x_1=0$, $x_2=0, \ldots, x_n=0$, (dz_0), $(d^2z)_0, \ldots, (d^rz)_0$ są jednorodnemi funkcyami 1-go, 2-go, ..., r-go stopnia e względu na zmienne niezależne: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kształtu:

$$(dz)=x_1\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)_0+x_2\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)_0+\ldots+x_n\left(\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)_0,$$

$$(d^2z)_0=x_1^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}\right)_0+\ldots+x_n^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2}\right)_0+2x_1x_2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2}\right)_0+\ldots+2x_{n-1}x_n\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_{n-1}\partial x_n}\right)_0,$$

gólnie $(d^rz)_0$ przedstawia się w postaci symbolicznej:

$$(d^rz)_0=\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots+x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{(r)}z_0. \qquad (5)$$

Funkcya przyjęta: $z=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, określona szeregiem potęgowym (4) musi oczywiście posiadać tę własność, że podstawiona w równanie (2) prowadza je tożsamościowo do zera.

Uporządkowawszy wyrażenie: $F[f(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n]$, podług potęg miennych: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, musimy zatem otrzymać spółczynniki przy wszystkich potęgach: $x_1^r, \ldots, x_n^r$, równe zeru, skąd otrzymamy relacye na wyznaenie funkcyj całkowitych 1-go, 2-go, ..., r-go stopnia ze względu na mienne $x_1, \ldots, x_n$, oznaczonych symbolami dz, $d^2z, \ldots, d^rz$, a tem samem żąne rozwinięcie.

2. Przyjąwszy z góry rozwinięcie funkcyi z, określonej równaniem: $F(z, x_1, \ldots, x_n)=0$, bądźto w postaci szeregu Taylora w otoczeniu miejsca $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, kształtu:

$$z=f(x_1, \ldots, x_n)=f(a_1, \ldots, a_n)+(x_1-a_1)\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_a+(x_2-a_2)\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_a+\ldots+(x_n-a_n)\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_a+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[(x_1-a_1)^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right)_a+\ldots+(x_n-a_n)^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\right)_a+\ldots+2(x_{n-1}-a_{n-1})(x_n-a_n)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1}\partial x_n}\right)_a\right]+$$

$$+\ldots+\frac{1}{r!}\left[(x_1-a_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+(x_n-a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^{(r)}f(a_1, \ldots, a_n)+\ldots \qquad (6)$$

bądź to w postaci szeregu Maclaurin'a, w otoczeniu miejsca (0, 0, ..., 0), kształtu:

$$z=f(x_1, \ldots, x_n)=f(0, 0, \ldots, 0)+x_1\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0+x_2\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0+\ldots+x_n\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[x_1^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right)_0+\ldots+x_n^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\right)_0+\ldots+2x_{n-1}x_n\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1}\partial x_n}\right)_0\right]+\ldots$$

$$+\frac{1}{r!}\left[x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots+x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^{(r)}f(0, 0, \ldots, 0)+\ldots \qquad (7)$$

musimy przedewszystkiem, na podstawie równania (1) wyznaczyć jakąkolek wartość funkcyi z w przyjętem miejscu: $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, względnie: (0, 0, ..., 0), t. j. $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, względnie $f(0, 0, \ldots, 0)$.

Wyznaczywszy następnie, na podstawie wykładu XXV. art. 1., str. 407—408, pochodne cząstkowe tej funkcyi: $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \ldots$, należy obrachować wartości tych pochodnych w przyjętem miejscu: $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, względnie $(0, 0, \ldots, 0)$, z uwzględnieniem wyznaczonej wartości: $f(a_1, a_2, \ldots a_n)$ względnie $f(0, 0, \ldots, 0)$, danej funkcyi.

Otrzymujemy tedy dla danej funkcyi, określonej równaniem:

$$F(z, x_1, x_2, \ldots, x_n)=0,$$

formalnie tyle szeregów potęgowych, ile wartości, na podstawie danego równania, przynależy funkcyi z w przyjętem miejscu: $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, względnie: $(0, 0, \ldots, 0)$.

3. **Maxima i minima funkcyi uwikłanej, określonej równaniem: $F(z, x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$.** Metody wyznaczania maximów i minimów funkcyj wyraźnych ilukolwiek zmiennych, wyprowadzone z szeregów Taylora, str. 338—348, stosują się analogicznie do funkcyj uwikłanych, prowadząc do następującej reguły:

Aby wyznaczyć maxima i minima funkcyi z, określonej równaniem: $F(z, x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$, należy wyznaczyć wartości: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ z równań:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}=0, \quad \frac{\partial z}{\partial x_2}=0, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}=0, \tag{8}$$

które sprowadzają się tu do postaci:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=0, \quad \frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=0, \ldots, \frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=0,$$

a więc w przypadku: $\frac{\partial F}{\partial z} \gtrless 0$, do równań:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2}=0, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}=0. \tag{9}$$

Równania te wyznaczają te układy wartości, które wywołać mogą maxima lub minima, funkcyi z, określonej danem równaniem:

$$F(z, x_1, x_2, \ldots, x_n)=0.$$

Wszelka wartość z, przynależna, na podstawie danego równania, układowi wartości $x_1, x_2, \ldots, x_n$, wyznaczona z równań (9), staje się w tem miejscu minimum, skoro wszystkie wyznaczniki, utworzone z pochodnych cząstkowych drugiego rzędu, kształtu:

$$D_i = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_i} \\ . & . & . & . \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_1}, & \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2} \end{vmatrix}, \text{ gdzie } i=1, 2, \ldots, n,$$

mają w tem miejscu wartości dodatnie, staje się zaś maximum, gdy te wyznaczniki są, przy parzystem i, dodatnie, a przy nieparzystem i, ujemne, a nie jest wreszcie, ani wartością maxymalną, ani minimalną, gdy powyższe warunki nie spełniają się, a przytem wyznacznik: $D_n = \left| \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k} \right|$ jest różny od zera.

4. **Przykład.** Wyznaczyć maxima i minima funkcyi uwikłanej z dwu zmiennych niezależnych x i y, określonej równaniem:

$$z^3+xyz-xy^2-x^3=0.$$

Kładąc $F=z^3+xyz-xy^2-x^3$, mamy tu równania:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=yz-y^2-3x^2=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=xz-2xy=0,$$

których, w połączeniu z danem równaniem, otrzymujemy trzy układy wartości zmiennych niezależnych:

$$1)\ \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix},\qquad 2)\ \begin{matrix} x=-6 \\ y=6\sqrt{3} \end{matrix},\qquad 3)\ \begin{matrix} x=-6 \\ y=-6\sqrt{3} \end{matrix},$$

odpowiadające trzy wartości funkcyi:

$$1)\ z=0,\quad 2)\ z=12\sqrt{3},\quad 3)\ z=-12\sqrt{3},$$

które mogą być maxima lub minima.

Celem rozstrzygnięnia tej sprawy, wyznaczmy drugie pochodne cząstkowe danej funkcyi. W tym celu otrzymamy z wzoru na pierwsze pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{yz-y^2-3x^2}{2z+xy},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{xz-2xy}{2z+xy},$$

odpowiednie wzory na pochodne cząstkowe drugiego rzędu, kształtu:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-2\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}-\frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}\right)+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-2\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^3},$$

przy warunkach: $\frac{\partial F}{\partial x}=0$, $\frac{\partial F}{\partial y}=0$, sprowadzają się do postaci:

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=-\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}},\quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)=-\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}},\quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=-\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

a mamy tu:

$$\frac{\partial F}{\partial z}=2z+xy,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-6x,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=z-2y,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=-2x,$$

zatem otrzymamy, dla miejsc powyżej wyznaczonych:

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{6x}{2z+xy},\quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)=-\frac{z-2y}{2z+xy},\quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=\frac{2x}{2z+xy}.$$

Wartość $z=0$, odpowiadająca wartościom $x=0$, $y=0$, nie jest widocznie ani maximum, ani minimum funkcyi.

Dla układu drugiego: $x=-6$, $y=6\sqrt{3}$, $z=12\sqrt{3}$, otrzymujemy:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\sqrt{3},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\text{zatem: } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}>0,\ \text{a zarazem: } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=1>0,$$

Wyznaczywszy następnie, na podstawie wykładu 407—408, pochodne cząstkowe tej funkcyi: $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$, chować wartości tych pochodnych w przyjętem miej względnie (0, 0,..., 0), z uwzględnieniem wyznaczonej war względnie $f(0, 0, \ldots, 0)$, danej funkcyi.

Otrzymujemy tedy dla danej funkcyi, określonej rów

$$F(z, x_1, x_2, \ldots, x_n)=0,$$

formalnie tyle szeregów potęgowych, ile wartości, na] równania, przynależy funkcyi z w przyjętem miejscu: (a_1, dnie: (0, 0, ..., 0).

8. Maxima i minima funkcyi uwikłanej, określo $F(z, x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$. Metody wyznaczania maximów i r wyraźnych ilukolwiek zmiennych, wyprowadzone z szereg 338—348, stosują się analogicznie do funkcyj uwikłanych następującej reguły:

Aby wyznaczyć maxima i minima funkcyi z, określo $F(z, x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$, należy wyznaczyć wartości: $x_1, x_2, \ldots$,

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}=0, \quad \frac{\partial z}{\partial x_2}=0, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}=0,$$

które sprowadzają się tu do postaci:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=0, \quad \frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=0, \ldots, \frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=0,$$

a więc w przypadku: $\frac{\partial F}{\partial z} \gtrless 0$, do równań:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2}=0, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}=0.$$

Równania te wyznaczają te układy wartości, które wy maxima lub minima, funkcyi z, określonej danem równaniem:

$$F(z, x_1, x_2, \ldots, x_n)=0.$$

Wszelka wartość z, przynależna, na podstawie danego równ dowi wartości $x_1, x_2, \ldots, x_n$, wyznaczona z równań (9), staje miejscu minimum, skoro wszystkie wyznaczniki, utworzone z] cząstkowych drugiego rzędu, kształtu:

$$D_i=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_i} \\ . & . & . & . \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_1}, & \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2} \end{vmatrix}, \text{ gdzie } i=1, 2, \ldots, n,$$

mają w tem miejscu wartości dodatnie, staje się zaś maximum wyznaczniki są, przy parzystem i, dodatnie, a przy nieparzystem i, a nie jest wreszcie, ani wartością maximalną, ani minimalną, gdy] warunki nie spełniają się, a przytem wyznacznik: $D_n=\left|\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k}\right|$ jest od zera.

Załóżmy, że rozwinięcie funkcyi y w miejscu $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, przedstawia w postaci:

$$-\eta = a_1(x_1 - \xi_1) + a_2(x_2 - \xi_2) + \ldots + a_n(x_n - \xi_n) + a_{11}(x_1 - \xi_1)^2 + \ldots + a_{nn}(x_n - \xi_n)^2 +$$
$$+ 2a_{12}(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2) + \ldots + 2a_{n-1,n}(x_{n-1} - \xi_{n-1})(x_n - \xi_n) + \ldots$$

rozwinięcie to musiałoby sprawdzać tożsamościowo równanie (12). Uporządkowawszy to równanie podług potęg różnic: $x_1 - \xi_1, \ldots, x_n - \xi_n$ i kładąc spółczynniki przy poszczególnych potęgach różnic: $x_i - \xi_i$, równemi zeru, otrzymujemy równania warunkowe na wyznaczenie spółczynników: $a_1, a_2, \ldots a_n, a_{11}, \ldots, a_{nn}, \ldots$, przyjętego rozwinięcia, dochodzimy przytem do następujących wyników:

Jeżeli pochodna cząstkowa: $\frac{\partial F}{\partial y}$ jest w miejscu: $(\eta, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ różną od zera, wówczas istnieje tylko jeden szereg potęgowy, uporządkowany według potęg różnic $x_i - \xi_i$, który, wstawiony w równanie (12), spełnia je tożsamościowo. Szereg ten zaczyna się od potęgi: $(x_i - \xi_i)^{p_i}$, jeżeli p_i jest najmniejszym wykładnikiem, w którym różnica: $(x_i - \xi_i)$ występuje w równaniu (12).

Jeżeli miejsce: $(\eta, \xi_1, \ldots, \xi_n)$, jest miejscem p-krotnem, wówczas równanie (12) sprowadza się do postaci:

$$\frac{1}{p!} d^p F(\eta, \xi_1, \ldots, \xi_n) + \frac{1}{(p+1)!} d^{p+1} F(\eta, \xi_1, \ldots, \xi_n) + \ldots = 0, \tag{13}$$

wówczas istnieje p takich szeregów potęgowych, kształtu:

$$y - \eta = a_1(x_1 - \xi_1) + \ldots + a_n(x_n - \xi_n) + a_{11}(x_1 - \xi_1)^2 + \ldots$$

które, wstawione, w równanie (13) sprowadzają to równanie do tożsamości. Szczegółowe wyznaczanie tych szeregów stanowi przedmiot osobnego działu analizy wyższej, mianowicie teoryi funkcyj algebraicznych.

Zajmiemy się tu tylko jeszcze niektóremi ciekawemi rozwinięciami funkcyj ze względu na jedną z jej zmiennych niezależnych.

6. Szeregi Lagrange'a. Niech będzie zmienna z funkcyą zmiennych y i x, określoną równaniem:

$$z = y + x\,\varphi(z),$$

gdzie $\varphi(z)$ jest jakąkolwiek funkcyą zmiennej z. Załóżmy, że nowa zmienna u jest pewną funkcyą zmiennej z, kształtu:

$$u = f(z),$$

postawmy sobie za zadanie rozwinąć funkcyę $\varphi(z)$ podług potęg zmiennej x.

Na podstawie szeregu Maclaurina, otrzymujemy tu:

$$u = u_0 + x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + \frac{x^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 + \ldots + \frac{x^n}{n!}\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)_0 + \ldots \tag{14}$$

gdzie: $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0, \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)_0$, przedstawiają wartości, jakie otrzymują pochodne zmiennej u względem zmiennej x, gdy w nich położymy $x=0$.

Celem wyznaczenia tych pochodnych, otrzymujemy przedewszystkiem:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}. \tag{15}$$

Z równania: $z = y + x\varphi(z)$, dostajemy jednak:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(z) + x\varphi'(z)\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 1 + x\varphi'(z)\frac{\partial z}{\partial y},$$

a stąd: $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\varphi(z)}{1-x\varphi'(z)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1-x\varphi'(z)},$$

a więc: $$\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial y}.$$

wobec tego otrzymujemy z (15):
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z}\,\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial y},\ \text{czyli:}\ \frac{\partial u}{\partial x}=\varphi(z)\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

a więc pierwszą pochodną: $\frac{\partial u}{\partial x}$, w postaci:
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi(z)\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{16}$$

Na tej podstawie, otrzymujemy dalsze pochodne; w szczególności otrzymujemy:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi(z)\frac{\partial u}{\partial y}\right], \tag{17}$$

a że: $$\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi(z)\frac{\partial u}{\partial y}\right]=\varphi'(z)\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+\varphi(z)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right],$$

a wobec $u=f(z)$, jest: $\frac{\partial u}{\partial x}=f'(z)\frac{\partial z}{\partial x}$, przeto równanie (17) sprowadza się do postaci:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi(z).f'(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left[\{\varphi(z)\}^2 f'(z)\frac{\partial z}{\partial y}\right],$$

skąd, ze względu na to, że: $\frac{\partial u}{\partial y}=f'(z)\frac{\partial z}{\partial y}$, otrzymujemy drugą pochodną:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\{\varphi(z)\}^2.\frac{\partial u}{\partial y}\right]. \tag{18}$$

Załóżmy, że (n—1)-sza pochodna przedstawia się w postaci wzoru:
$$\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^{n-1}}=\frac{\partial^{n-2}}{\partial y^{n-2}}\left[\{\varphi(z)\}^{n-1}.\frac{\partial u}{\partial y}\right],$$

to otrzymujemy stąd n-tą pochodną w postaci:
$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-2}\partial x}\left[\{\varphi(z)\}^{n-1}\frac{\partial u}{\partial y}\right]=\frac{\partial^{n-2}}{\partial y^{n-2}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\{\varphi(z)\}^{n-1}\frac{\partial u}{\partial y}\right],$$

a że: $$\frac{\partial}{\partial x}\left[\{\varphi(z)\}^{n-1}\frac{\partial u}{\partial y}\right]=(n-1)\{\varphi(z)\}^{n-2}\varphi'(z)\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+\{\varphi(z)\}^{n-1}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\{\varphi(z)\}^{n-1}\frac{\partial u}{\partial x}\right]=(n-1)\{\varphi(z)\}^{n-2}\varphi'(z)\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+\{\varphi(z)\}^{n-1}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$

a więc: $$\frac{\partial}{\partial x}\left[\{\varphi(z)\}^{n-1}\frac{\partial u}{\partial y}\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left[\{\varphi(z)\}^{n-1}\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left[\{\varphi(z)\}^{n-1}.\varphi(z)\frac{\partial u}{\partial y}\right],$$

przeto otrzymujemy:
$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}=\frac{\partial^{n-2}}{\partial y^{n-2}}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left[\{\varphi(z)\}^n\frac{\partial u}{\partial y}\right],$$

czyli wzór:
$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}}\left[\{\varphi(z)\}^n\frac{\partial u}{\partial y}\right], \tag{19}$$

zgodny z przyjętym, a więc, wobec prawdziwości wzoru (18), ogólnie prawdziwy dla wszelkiego całkowitego n.

Dla $x=0$, mamy $z=y$, $\frac{\partial z}{\partial y}=1$, a że: $u=f(z)$, zatem: $u_0=f(y)$; ponieważ: $=f'(z).\frac{\partial z}{\partial y}$, więc: $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0=f'(y)$ Wobec tego otrzymujemy z wzoru (19):

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)_0=\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}\left[\{\varphi(y)\}^n f'(y)\right].$$

Szereg (14) sprowadza się zatem do szeregu:

$$(z)=f(y)+x\varphi(y)f'(y)+\frac{x^2}{2!}\frac{d}{dy}\left[\{\varphi(y)\}^2 f'(y)\right]+\ldots+\frac{x^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}\left[\{\varphi(y)\}^n f'(y)\right]+\ldots \quad (20)$$

óry nazywamy **ogólnym szeregiem Lagrange'a.**

Jeżeli funkcya $f(z)$ sprowadza się do z, wówczas mamy: $f(y)=y$, $f'(y)=1$. a podstawie powyższego wzoru, otrzymujemy, na rozwinięcie samej funkcyi określonej równaniem: $z=y+x\varphi(z)$, szczególny szereg Lagrange'a w postaci:

$$z=y+x\varphi(y)+\frac{x^2}{2!}\frac{d[\varphi(y)^2]}{dy}+\frac{x^3}{3!}\frac{d^2[\varphi(y)^3]}{dy^2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\frac{d^{n-1}[\varphi(y)^n]}{dy^{n-1}}+\ldots \quad (21)$$

7. **Przykład.** Rozwinąć funkcyę z, określoną równaniem: $z=y+\frac{x}{2}(z^2-1)$, tudzież potęgę z^r podług potęg zmiennej x.

Mamy tu: $\varphi(z)=\frac{1}{2}(z^2-1)$. Na podstawie wzoru (21) otrzymujemy tedy rozwinięcie:

$$=y+x.\frac{y^2-1}{2}+x^2.\frac{1}{2!2^2}.\frac{d(y^2-1)^2}{dy}+x^3.\frac{1}{3!\,2^3}\frac{d^2(y^2-1)^3}{dy^2}+\ldots+x^n.\frac{1}{n!2^n}\frac{d^{n-1}(y^2-1)^n}{dy^{n-1}}+\ldots$$

Funkcyę z możemy w tym przypadku przedstawić w postaci wyraźnej. Otrzymamy wiem, na podstawie danego równania:

$$z^2-\frac{2}{x}z+\frac{2y}{x}-1=0,\ z=\frac{1\pm\sqrt{1-2yx+x^2}}{x}.$$

Dla $x=0$, otrzymujemy na z jedną wartość nieskończenie wielką, odpowiadającą akowi + pierwiastka, drugą równą y, odpowiadającą znakowi — pierwiastka.

Powyższe rozwinięcie odpowiada przeto funkcyi wyraźnej: $z=\frac{1-\sqrt{1-2yx+x^2}}{x}$ prowadzi do szeregu:

$$z=\frac{1-\sqrt{1-2yx+x^2}}{x}=y+\frac{x}{2}.(y^2-1)+\frac{x^2}{2!\,2^2}.\frac{d(y^2-1)^2}{dy}+\frac{x^3}{3!2^3}.\frac{d^2(y^2-1)^3}{dy^2}+\ldots+$$
$$+\ldots+\frac{x^n}{n!\,2^n}\frac{d^{n-1}(y^2-1)^n}{dy^{n-1}}+\ldots$$

Zróżniczkowawszy ten szereg podług y, otrzymujemy szereg:

$$\frac{dz}{dy}=(1-2yx+x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{x}{2}\frac{d(y^2-1)}{dy}+\frac{x^2}{2!\,2^2}.\frac{d^2(y^2-1)^2}{dy^2}+\frac{x^3}{3!\,2^3}.\frac{d^3(y^2-1)^3}{dy^3}+\ldots+$$
$$+\ldots+\frac{x^n}{n!\,2^n}.\frac{d^n(y^2-1)^n}{dy^n}+\ldots$$

to ciekawe rozwinięcie funkcyi $(1-2yx+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ podług potęg zmiennej x. Spółczynniki go rozwinięcia, przedstawiające się w postaci:

$$Y_n=\frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n(y^2-1)^n}{dy^n},$$

orzą funkcye zmiennej y, zwane **funkcyami Legendre'a.**

Mając rozwinąć r-tą potęgę funkcyi z, określonej równaniem: $z=y+\frac{x}{2}(z^2-1)$, dług potęg x, zastosujemy ogólny szereg Lagrange'a wz. (20). W tym celu podstaamy: $f(z)=z^r$, zatem: $f(y)=y^r$, $f'(y)=ry^{r-1}$, żądany szereg przedstawi się więc postaci:

$$z^r = y^r + \frac{x}{2}(y^2-1).ry^{r-1} + \frac{x^2}{2!\,2^2}.r\frac{d[(y^2-1)^2y^{r-1}]}{dy} + \frac{x^3}{3!\,2^3}r.\frac{d^2[(y^2-1)^3y^{r-1}]}{dy^2} + \ldots +$$
$$+ \ldots + \frac{x^n}{n!\,2^n}.r\frac{d^{n-1}[(y^2-1)^n y^{r-1}]}{dy^{n-1}} + \ldots$$

2) Rozwinąć funkcyę z zmiennych x i y, określoną równaniem: $z = y + x\sin z$, tudzież funkcyę $\sin z$, podług potęg zmiennéj x.

Dla $x=0$, mamy tu $z=y$, a że: $\varphi(z) = \sin z$, więc $\varphi(y) = \sin y$.

Szereg (21) Lagrange'a prowadzi więc do rozwinięcia:

$$z = y + \frac{x}{1!}\sin y + \frac{x^2}{2!}\cdot\frac{d[\sin^2 y]}{dy} + \frac{x^3}{3!}\frac{d^2[\sin^3 y]}{dy^2} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\frac{d^{n-1}[\sin^n y]}{dy^{n-1}} + \ldots$$

a natomiast szereg (20) do rozwinięcia:

$$\sin z = \sin y + \frac{x}{1!}\sin y\cos y + \frac{x^2}{2!}\frac{d(\sin^2 y\cos y)}{dy} + \frac{x^3}{3!}\frac{d^2(\sin^3 y\cos y)}{dy^2} + \ldots +$$
$$+ \ldots + \frac{x^n}{n!}\frac{d^{n-1}(\sin^n y\cos y)}{dy^{n-1}} + \ldots$$

8. Zastosowanie szeregów Lagrange'a do rozwiązywania równań. Szeregów Lagrange'a możemy użyć z korzyścią do rozwijania pierwiastków danych równań według potęg zależnych od ich spółczynników.

α) Niech będzie dane równanie drugiego stopnia kształtu:

$$ax^2 - bx + c = 0,$$

to, pisząc je w postaci:

$$x = \frac{c}{b} + \frac{ax^2}{b},$$

dochodzimy do równania typu: $z=y+x\varphi(z)$, w którem wyrazy z, y, x zastąpione zostały przez wyrazy $x, \frac{c}{b}, a$, a wobec tego, na podstawie szeregu (21) Lagrange'a, do rozwinięcia według potęg spółczynnika a, w postaci:

$$x = \frac{c}{b} + \frac{c^2}{b^3}a + \frac{4c^3}{2!\,b^5}a^2 + \frac{5.6c^4}{3!\,b^7}a^3 + \ldots$$

której użyć możemy do wyznaczenia przybliżonej wartości pierwiastka: $x = \frac{b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ pod warunkiem: $4|ac| < |b|^2$.

Stosując n. p. to rozwinięcie do równania: $x^2 - 4x + 2 = 0$, mamy: $a=1$, $b=4$, $c=2$, zatem:

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{5.6}{3!\,2^{10}} + \ldots$$

jako szereg wyobrażający wartość: $x = 2 - \sqrt{2} = 0{\cdot}5858\ldots$

β) Weźmy pod uwagę równanie trójwyrazowe m-go stopnia kształtu:

$$x^m + ax - b = 0.$$

Przedstawiwszy je w postaci:

$$x = \frac{b}{a} - \frac{1}{a}x^m,$$

możemy doń zastosować szereg (21) Lagrange'a. Podstawiając we wzorze (21) wyrazy: $x, \frac{b}{a}, \frac{1}{a}$, zamiast: z, y, x, otrzymujemy tu rozwinięcie zmiennej x podług potęg wyrazu $\frac{1}{a}$, w postaci:

$$x = y - \frac{1}{a}y^m + \frac{1}{2!}\frac{1}{a^2}\frac{d(y^{2m})}{dy} - \frac{1}{3!}\frac{1}{a^3}\frac{d^2(y^{3m})}{dy^2} + \ldots + (-1)^n\frac{1}{n!}\frac{1}{a^n}\frac{d^{n-1}(y^{nm})}{dy^{n-1}} + \ldots$$

Wykonawszy wskazane działania i zastępując y przez $\frac{b}{a}$, otrzymujemy powyższe rozwinięcie w postaci:

$$x=\frac{b}{a}-\frac{b^m}{a^{m+1}}+\frac{2m}{2\,!}\frac{b^{2m-1}}{a^{2m+1}}-\frac{(3m-1).3m}{3\,!}\frac{b^{3m-2}}{a^{3m+1}}+\ldots$$

zbieżne, dopóki $m^m|b|^{m-1}<(m-1)^{m-1}|a|^m$.

Korzystając z szeregu (20) Lagrange'a, otrzymujemy rozwinięcie jakiejkolwiek funkcyi tego pierwiastka.

Tak n. p. otrzymamy:

$$\log x=\log y-\frac{1}{a}y^{m-1}+\frac{1}{2\,!}\frac{1}{a^2}\frac{d[y^{2m-1}]}{dy}-\frac{1}{3\,!}\frac{1}{a^3}\frac{d^2(y^{3m-1})}{dy^2}+\ldots$$

czyli:

$$\log x=\log\frac{b}{a}-\frac{b^{m-1}}{a^m}+\frac{2m-1}{2!}\frac{b^{2m-2}}{a^{2m}}-\frac{(3m-1)(3m-2)}{3!}\frac{b^{3m-3}}{a^{3m}}+\ldots$$

γ) Weźmy pod uwagę ogólne równanie n-go stopnia, kształtu:

$$a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x-a_0=0,$$

tedy, kładąc:

$$a_1+a_2x+\ldots+a_nx^{n-1}=\frac{1}{\varphi(x)},$$

przedstawimy to równanie w postaci:

$$\frac{x}{\varphi(x)}-a_0=0,$$

czyli:

$$x=a_0\,\varphi(x).$$

Stosując do niej szereg Lagrange'a, możemy x rozwinąć według potęg spółczynnika a_0. Otrzymamy tedy rozwinięcie w postaci:

$$x=a_0\varphi(x)+\frac{a_0^{\,2}}{2\,!}\left[\frac{d[\varphi(x)]^2}{dx}\right]_0+\frac{a_0^{\,3}}{3\,!}\left[\frac{d^2[\varphi(x)]^3}{dx^2}\right]_0+\ldots+\frac{a_0^{\,n}}{n\,!}\left[\frac{d^{n-1}[\varphi(x)]^n}{dx^{n-1}}\right]_0+\ldots$$

gdzie spółczynnik przy $\frac{a_0^{\,n}}{n\,!}$, przedstawiony w postaci: $\left[\frac{d^{n-1}[\varphi(x)]^n}{dx^{n-1}}\right]_0$ wyobraża wartość $(n-1)$-szej pochodnej funkcyi: $\varphi(x)=\frac{1}{a_1+a_2x+\ldots+a_nx^{n-1}}$ w miejscu: $x=0$.

δ) Weźmy ogólne równanie przestępne, kształtu:

$$a_0=a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

w którem szereg: $a_1x+a_2x^2+\ldots$ jest szeregiem zbieżnym w kole o promieniu ρ, przyczem spółczynnik a_1 jest różny od zera.

Możemy tedy pierwiastek x, który wraz z a_0 dąży równocześnie do zera, t. j. najmniejszy pierwiastek tego równania, na podstawie szeregu Lagrange'a, rozwinąć według potęg liczby a_0.

W tym celu połóżmy:

$$a_1+a_2x+a_3x^2+\ldots+a_nx^{n-1}+\ldots=\psi(x),$$

a otrzymamy dane równanie w postaci:

$$a_0=x.\psi(x),\ \text{czyli}\ \ x=a_0.\frac{1}{\psi(x)},$$

skąd, na podstawie szeregu Lagrange'a, otrzymamy rozwinięcie:

$$x = a_0 \frac{1}{\psi(0)} + \frac{a_0^2}{2!}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\psi(x)}\right)^2\right]_0 + \frac{a_0^3}{3!}\left[\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{\psi(x)}\right)^3\right]_0 + \ldots +$$
$$+ \ldots + \frac{a_0^n}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{1}{\psi(x)}\right)^n\right]_0 + \ldots$$

gdzie znak 0 ma wskazywać, że wyznaczywszy wskazane pochodne funkcyi $\left(\frac{1}{\psi(x)}\right)^r$ względem x, mamy podstawić 0 za x.

9. Odwracanie szeregów potęgowych. Rozwijanie zmiennej x według potęg zmiennej y, określonej szeregiem potęgowym:

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

zbieżnym w zakresie $|x| < \varrho$, na szereg potęgowy:

$$x = b_1 y + b_2 y^2 + \ldots + b_n y^n + \ldots$$

nazywamy odwracaniem, albo inwersyą danego szeregu.

Na podstawie szeregu Lagrange'a, otrzymujemy, według poprzedzającego ustępu, spółczynniki b_n, żądanego rozwinięcia w postaci:

$$b_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{1}{\psi(x)}\right)^n\right]_0,$$

gdzie: $$\psi(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_n x^{n-1} + \ldots$$

zatem:

$$x = y \cdot \frac{1}{\psi(0)} + \frac{y^2}{2!}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\psi(x)}\right)^2\right]_0 + \ldots + \frac{y^n}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{1}{\psi(x)}\right)^n\right]_0 + \ldots \quad (22)$$

Żądane odwrócenie możemy wyznaczyć stopniowo także w ten sposób że, przyjmując szukane rozwinięcie w postaci:

$$x = b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \ldots + b_n y^n + \ldots,$$

zastąpimy w danym szeregu:

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

zmienną x przez przyjęty szereg potęgowy. Otrzymujemy tedy tożsamość:

$$x = b_1(a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots) + b_2(a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots)^2 + b_3(a_1 x + a_2 x^2 + \ldots +$$
$$+ \ldots + a_n x^n + \ldots)^3 + \ldots + b_n (a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots)^n + \ldots$$

z których wypływają kolejne wartości spółczynników b_r, w postaci:

$$b_1 = \frac{1}{a_1}, \quad b_2 = -\frac{a_2}{a_1^3}, \quad b_3 = \frac{2a_2 - a_1 a_3}{a_1^5}, \ldots$$

10. Metoda wskazana, znana pod nazwą metody porównania współczynników, pozwala wyznaczyć także odwrócenie szeregu potęgowego, kształtu:

$$y = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \ldots$$

Rozchodzi się jedynie o postać szeregu potęgowego, przedstawiającego tę wartość zmiennej x, która wraz z y maleje do zera.

W tym celu, piszemy:

$$y = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n+1}}{a_n} x + \frac{a_{n+2}}{a_n} x^2 + \ldots\right)$$

i wyciągamy obustronnie pierwiastek n-go stopnia.

Stosując wzór:

$$(1+u)^\mu = 1 + \frac{\mu}{1} u + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} u^2 + \ldots$$

otrzymamy, w danym wypadku, wzór:

$$y^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a_n}\, x \left[1 + \frac{\frac{1}{n}}{1}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} x + \frac{a_{n+2}}{a_n} x^2 + \ldots\right) + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right)}{1.2}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} x + \frac{a_{n+2}}{a_n} x^2 + \ldots\right)^2 + \ldots\right]$$

Rozwijając według potęg x, otrzymamy:

$$y^{\frac{1}{n}} = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots$$

przyczem:

$$A_1 = \sqrt[n]{a_n}, \quad A_2 = \frac{a_{n+1}}{n} \sqrt[n]{a_n^{\,n-1}}, \dots$$

i sprowadzamy rzecz do odwrócenia szeregu:

$$y^{\frac{1}{n}} = A_1 x + A_1 x^2 + A_3 x^3 + \dots$$

w poprzednim art. wskazanego, z tą tylko różnicą, że miejsce zmiennej y, zajęła zmienna $y^{\frac{1}{n}}$, otrzymujemy więc:

$$x = b_1 y^{\frac{1}{n}} + b_2 y^{\frac{2}{n}} + b_3 y^{\frac{3}{n}} + \dots$$

Odwrócenie szeregu:

$$y = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots$$

ma zatem postać:

$$x = b_1 y^{\frac{1}{n}} + b_2 y^{\frac{2}{n}} + b_3 y^{\frac{3}{n}} + \dots$$

Współczynniki $b_1, b_2, b_3, \dots$ wyznaczamy, podstawiając rozwinięcie:

$$x = b_1 y^{\frac{1}{n}} + b_2 y^{\frac{2}{n}} + b_3 y^{\frac{3}{n}} + \dots$$

we wzór:

$$y = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots$$

otrzymujemy tedy:

$$y = a_n (b_1 y^{\frac{1}{n}} + b_2 y^{\frac{2}{n}} + b_3 y^{\frac{3}{n}} + \dots)^n + a_{n+1} (b_1 y^{\frac{1}{n}} + b_2 y^{\frac{2}{n}} + b_3 y^{\frac{3}{n}} + \dots)^{n+1} + \dots$$

skąd wynikają równania:

$$a_n b_1^n = 1, \quad n a_n b_1^{n-1} b_2 + a_{n+1} b_1^{n+1} = 0, \dots$$

dając:

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}, \quad b_2 = -\frac{b_1^{\,2} a_{n+1}}{n a_n}, \dots$$

Rozwinięcie powyższe możemy przedstawić w postaci szeregu Lagrange'a, rozwiniętego jednak według potęg zmiennej $y^{1/n}$. Pisząc, bowiem:

$$y = x^n (a_n + a_{n+1} x + a_{n+2} x^2 + \dots)$$

a więc:

$$y^{\frac{1}{n}} = x (a_n + a_{n+1} x + a_{n+2} x^2 + \dots)^{\frac{1}{n}}$$

i podstawiając:

$$\psi(x) = a_n + a_{n+1} x + a_{n+2} x^2 + \dots$$

otrzymamy:

$$y^{\frac{1}{n}} = x . [\psi(x)]^{\frac{1}{n}}, \quad \text{czyli: } x = y^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{\psi(x)}\right)^{\frac{1}{n}},$$

a stąd:

$$x = y^{\frac{1}{n}} . \left(\frac{1}{\psi(0)}\right)^{\frac{1}{n}} + \frac{y^{\frac{2}{n}}}{2!} \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\psi(x)}\right)^{\frac{2}{n}}\right]_0 + \frac{y^{\frac{3}{n}}}{3!} \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{\psi(x)}\right)^{\frac{3}{n}}\right]_0 + \dots \qquad (23)$$

11. Rozwijanie układu funkcyj uwikłanych, na szeregi potęgowe. Niech będzie danych m funkcyj: $y_1, y_2, \dots, y_m$, o n zmiennych niezależnych: $x_1, x_2, \dots, x_n$, zapomocą m równań o $m+n$ zmiennych: $y_1, y_2, \dots, y_m, x_1, x_2, \dots, \dots, x_n$, w postaci:

$$F_i(y_1, y_2, \dots, y_m, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \qquad (24)$$

Rozwińmy prawą stronę każdego z tych m równań, uważaną, jako funkcyę $m+n$ zmiennych, na podstawie szeregu Maclaurin'a, na szereg potęgowy, a otrzymamy rozwinięcia kształtu:

$$F_i(y_1, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_i(0) + dF_i(0) + \frac{1}{2!} d^2F_i(0) + \ldots +$$
$$+ \ldots + \frac{1}{n!} d^n F_i(0) + \ldots \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{25}$$

gdzie $F_i(o)$ jest wartością funkcyi: $F_i(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n)$ w miejscu: $y_1 = 0, \ldots, y_m = 0$, $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$, a $dF_i(o)$, $d^2F_i(o), \ldots, d^r F_i(o)$, są jednorodnemi funkcyami zmiennych: $y_1, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n$, pierwszego, drugiego, ..., r-go stopnia, kształtu:

$$dF_i(o) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_1}\right)_0 y_1 + \ldots + \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_m}\right)_0 y_m + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1}\right)_0 x_1 + \ldots + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_n}\right)_0 x_n,$$

ogólnie: $$d^r F_i(o) = \left(\frac{\partial}{\partial y_1} y_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial y_m} y_m + \frac{\partial}{\partial x_1} x_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} x_n\right)^{(r)} F_i(o, \ldots, o, o, \ldots, o).$$

Przyjmując rozwinięcia m funkcyj: $y_1, y_2, \ldots, y_m$, według potęg zmiennych niezależnych: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, w postaci:

$$y_r = f_r(x_1, x_2, \ldots x_n) = f_r(o) + df_r(o) + \frac{1}{2!} d^2 f_r(o) + \ldots + \frac{1}{n!} d^n f_r(o) + \ldots \quad (r = 1, 2, \ldots, m),$$

gdzie $f_r(o)$ jest wartością funkcyi uwikłanej y_r zmiennych niezależnych: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, w miejscu: $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$, to rozwinięcia tak przyjęte, wstawione w równanie (24) muszą je sprawdzać tożsamościowo, tak że będzie:

$$F_i(f_1, f_2, \ldots, f_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Uporządkowawszy tę tożsamość, na mocy równań (25), według potęg zmiennych niezależnych: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, musimy otrzymać spółczynniki, przy wszelkich potęgach x_i i ich iloczynach równe zeru. Tym sposobem otrzymujemy kolejne warunki na wyznaczenie spółczynników, przyjętych m rozwinięć funkcyj: $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

Ćwiczenia XXVI.

1) Jeżeli: (ξ, η), oznaczają układ wartości, sprawdzających równanie: $F(x, y) = 0$, dla którego pochodna cząstkowa $\frac{\partial F}{\partial y}$ nie staje się równą zeru, wykazać, że istnieje wówczas jeden szereg potęgowy y, rozwinięty według potęg $x - \xi$ z wolnym wyrazem η, który, wstawiony w równanie: $F(x, y) = 0$, sprawdza je tożsamościowo.

2) Jeżeli: (ξ, η) oznaczają parę wartości, sprawdzających równanie: $F(x, y) = 0$, dla którego: $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \ldots = \frac{\partial^{n-1} F}{\partial y^{n-1}} = 0$, ale: $\frac{\partial F}{\partial x}$, oraz $\frac{\partial^n F}{\partial y^n}$ nie stają się zerami, wykazać, że istnieje wówczas n szeregów potęgowych, rozwiniętych według całkowitych, dodatnych potęg wyrazu $(x-\xi)^{1/n}$, przyjmujących przy $x = \xi$, wartość η.

3) Dowieść, że jeżeli jedno z n rozwinięć (w Ćw. 2.) ma postać:

$$y_0 = \eta + A_1(x-\xi)^{1/n} + A_2(x-\xi)^{2/n} + \ldots$$

to pozostałe $(n-1)$ rozwinięć, możemy znaleźć w postaci:

$$y_\nu = \eta + A_1 \varepsilon^\nu (x-\xi)^{1/n} + A_2 \varepsilon^{2\nu} (x-\xi)^{2/n} + \ldots$$

przyczem $\varepsilon = 1_{\frac{2\pi}{n}} = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}$.

4) Dowieść następującego twierdzenia: Jeżeli $F(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest całkowitą funkcyą zmiennych $y, x_1, \ldots, x_n$ bez wyrazu wolnego od zmiennych, w której spółczynnik przy y równy jest -1, wówczas istnieje jeden tylko szereg potęgowy na y, uporządkowany

ług potęg zmiennych: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, bez wyrazu wolnego od zmiennych, posiadający własność, że wstawiony w równanie: $F(y, x_1, \ldots, x_m) = 0$, sprawdza je tożsamościowo.

5) Znaleźć maxima i minima funkcyi z, określonej równaniem:

$$ax^2 + cy^2 - z^2 + 2bxy - dx - ey = 0.$$

6) Wykazać, że funkcya z, określona równaniem:

$$a^2b^2x^2y^2 - a^2x^5y - b^2xy^5 - z^2 = 0,$$

ma maximum równe: $\frac{a^2 b^2}{3\sqrt{3}}$.

7) Wykazać, że funkcya z, określona równaniem:

$$x^3 y^3 - (x-a)(y-b) z = 0,$$

minimum równe: $({}^{27}/_4\, ab)^2$.

8) Wyznaczyć maxima i minima funkcyi z, określonej równaniem:

$$x^2yz + y^2xz + z^2xy - a(x^3 + y^3 + z^3) = 0.$$

9) Znaleźć na płaszczyźnie punkt, który miałby tę własność, że suma jego odległości od dwu danych prostych i od danego punktu byłaby minimum.

10) Wykazać, że ze wszystkich n-kątów, jakie możemy utworzyć z danych n boków, ten największą powierzchnię, który da się wpisać w koło.

11) Znaleźć osie krzywej drugiego rzędu: $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_{33} = 0$, uważając wierzchołki, jako punkta, których odległość od środka krzywej jest maximum, albo minimum.

Wyznaczyć szeregi potęgowe, określające zmienną y, na podstawie jednego z następujących równań:

12) $e^y - x - 1 = 0$. 13) $\cos y - x \sin y = 0$. 14) $\sin y - x = 0$.

15) Dowieść, że opierając się na wzorze:

$$x^{n+\alpha} = x^n \left\{1 + \alpha \log x + \frac{(\alpha \log x)^2}{2!} + \ldots + \frac{(\alpha \log x)^n}{n!} + \ldots\right\},$$

otrzymamy wzór:

$$\frac{1}{n!} \frac{d^n [(x \log x)^n]}{dx^n} = 1 + S_1 \log x + \frac{S_2}{2!}(\log x)^2 + \ldots + \frac{S_n}{n!}(\log x)^n,$$

gdzie S_1 jest sumą iloczynów po r liczb z zakresu liczb od 1 do n.

16) Wyprowadzić następujące rozwinięcie, zwane szeregiem Bordy:

$$\log(x+2) = 2\log(x+1) - 2\log(x-1) + \log(x-2) +$$
$$+ 2\left[\frac{2}{x^3 - 3x} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x^3 - 3x}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{x^3 - 3x}\right)^5 + \ldots\right].$$

17) Wyprowadzić następujące rozwinięcie, zwane szeregiem Stirlinga:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \ldots + \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} + \ldots$$

18) Wyprowadzić szereg Bernouille'go, kształtu:

$$f(x) = f(o) + xf'(x) - \frac{x^2}{2} f''(x) + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(x) + \ldots$$

19) Rozwinąć potęgę $(a+x)^n$ za pomocą szeregu Bernouillego (ćw. 18.) i porównać rozwinięcie z rozwinięciem Newtona.

20) Na podstawie szeregu Bernouille'go (ćw. 18.), wyprowadzić szereg:

$$(a+x)^{-n} = \frac{1}{a^n}\left[1 - \frac{nx}{a+x} + \binom{n}{2}\frac{x^2}{(a+x)^2} - \binom{n}{3}\frac{x^3}{(a+x)^3} + \ldots\right].$$

Przy pomocy szeregu (Ćw. 20.) wykazać, że:

21) $\sqrt{50} = 7\left(1 + \frac{1}{2.50} + \frac{1.3}{2.4.50^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6.50^3} + \ldots\right)$

22) $\sqrt[3]{24} = 3\left(1 - \frac{1.3}{3.24} + \frac{1.4.3^2}{3.6.24^2} - \frac{1.4.7}{3.6.9} \cdot \frac{3^3}{24^3} + \ldots\right)$

23) Jeżeli $z=y+x\varphi(z)$, wyprowadzić wzór:

$$f(z)=f(y)+x.\varphi(y).f'(y)+\frac{x^2}{2!}\frac{d[(\varphi(y))^2.f'(y)]}{dy}+\dots+\frac{x^n}{n!}\frac{d^{n-1}[[\varphi(y)]^n f'(y)]}{dy^{n-1}}+\dots$$

24) Jeżeli $z=F[y+x\varphi(z)]$, wykazać, że:

$$f(z)=f[F(y)]+x.\varphi[F(y)].\frac{df[F(y)]}{dy}+\frac{x^2}{2!}.\frac{d}{dy}\left[\{\varphi(F(y))\}^2.\frac{df[F(y)]}{dy}\right]+\dots$$

Na podstawie równania: $yx^2-bx+a=0$, wyprowadzić następujące rozwinięcia:

25) $x=\frac{a}{b}+\frac{a^2}{b^3}y+\frac{4a^3}{2b^5}.y^2+\frac{5.6.a^4}{2.3.b^7}y^3+\dots$

26) $\frac{x^2}{2}=\frac{a^2}{2b^2}+\frac{a^3}{b^4}y+\frac{5}{2}\frac{a^4}{b^6}y^2+\frac{7.6}{2.3}\frac{a^5}{b^8}y^3+\dots$

27) $\log x=\log\frac{a}{b}+\frac{a}{b^2}y+\frac{3a^2}{2b^4}y^2+\frac{5.4a^3}{2.3b^6}.y^3+\dots$

28) Na podstawie równania: $x^{m+1}+ax-y=0$, wyprowadzić rozwinięcie:

$$x=\frac{y}{a}-\frac{y^{m+1}}{a^{m+2}}+\frac{2m+2}{1.2}.\frac{y^{2m+1}}{a^{2m+3}}-\frac{(3m+2)(3m+3)}{1.2.3}.\frac{y^{3m+1}}{a^{3m+4}}+\dots$$

29) Wykazać, że najmniejszy pierwiastek równania piątego stopnia, kształtu $x^5+4x+2=0$, da się przedstawić w postaci:

$$x=-\frac{1}{2}+\frac{2^5}{4^6}-\frac{2^9}{4^{11}}.5+\frac{2^{13}}{4^{16}}.35-\dots$$

30) Wykazać, że najmniejszy pierwiastek równania drugiego stopnia: $x^2-ax+b=0$, da się przedstawić w postaci:

$$x=\frac{b}{a}\left\{1+\frac{b}{a^2}+\frac{4}{1.2}.\frac{b^2}{a^4}+\frac{5.6}{1.2.3}.\frac{b^3}{a^6}+\dots\right\}$$

31) Wykazać, że najmniejszy pierwiastek równania trzeciego stopnia: $x^3-ax+b=0$, da się przedstawić w postaci:

$$x=\frac{b}{a}\left\{1+\frac{b^2}{a^3}+3\frac{b^4}{a^6}+12\frac{b^6}{a^9}+55\frac{b^8}{a^{12}}+\dots\right\}.$$

32) Wyprowadzić rozwinięcie najmniejszego pierwiastka równania n-go stopnia kształtu: $ax^n-x+b=0$, według potęg spółczynnika a, w postaci:

$$x=b\left\{1+b^{n-1}.a+2nb^{2n-2}.\frac{a^2}{2!}+3n(3n-1)b^{3n-3}.\frac{a^3}{3!}+\dots\right\}.$$

33) Wykazać, że oba pierwiastki równania drugiego stopnia, kształtu: $ax^2-bx+c=0$ wyrażają się szeregiem:

$$x=\frac{b}{2a}+\sqrt{-\frac{c}{a}}\left[1-\frac{1}{2!}\frac{b^2}{2^2ac}-\frac{1.1.3}{4!}.\frac{b^4}{2^4a^2c^2}-\frac{1.1.3.3.5}{6!}\frac{b^6}{2^6a^3c^3}-\dots\right],$$

odpowiednio do dwu wartości pierwiastka $\sqrt{-\frac{c}{a}}$, jednej dodatniej, a drugiej ujemnej.

34) Wykazać, że wszystkie trzy pierwiastki równania trzeciego stopnia, kształtu $x^3-ax+b=0$, podaje szereg:

$$x=\sqrt[3]{-b}\left\{1+\frac{1}{3}.\frac{a}{(\sqrt[3]{-b})^2}-\frac{2.1}{3^2 2!}.\frac{a^2}{(\sqrt[3]{-b})^4}-\frac{2.1}{3^3.3!}.\frac{a^3}{(\sqrt[3]{-b})^6}+\right.$$
$$\left.+\frac{2.1.4}{3^4.4!}.\frac{a^4}{(\sqrt[3]{-b})^8}-\dots\right\},$$

odpowiednio do trzech wartości pierwiastka: $\sqrt[3]{-b}$, które przedstawiają się w postaci:

$$-\sqrt[3]{b},\ \sqrt[3]{b}.\frac{1+i\sqrt{3}}{2},\ \sqrt[3]{b}.\frac{1-i\sqrt{3}}{2}.$$

35) Wykazać, że wszystkie n pierwiastki równania n-go stopnia kształtu:

$$ax^n-bx+c=0,$$

dadzą się przedstawić w postaci szeregu:

$$x = \alpha\left[1 - \frac{1}{n}\frac{b\alpha}{c} + \frac{(3-n)}{2!\,n^2}\frac{b^2\alpha^2}{c^2} - \frac{(4-n)(4-2n)}{3!\,n^3}\frac{b^3\alpha^3}{c^3} + \dots\right],$$

ie: $\alpha = \sqrt[n]{-\frac{a}{c}}$ ma n wartości kształtu:

$$a \cdot 1_{\frac{2k\pi}{n}} = \alpha\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right), \ (k = 0, 2, \dots, n-1).$$

36) Z równania przestępnego: $a\log x + b - x = 0$, wyprowadzić szereg:

$$x = b + \frac{a}{1} + \frac{2}{b}\cdot\frac{a^2}{2!} + \frac{3}{b^2}\frac{a^3}{3!} + \frac{4}{b^3}\frac{a^4}{4!} + \dots$$

37) Na podstawie równania: $y^2 - 2y + 1 = 0$, wyprowadzić szereg:

$$\log y = \log\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2!\,2^4} + \frac{4.5}{3!\,2^6} + \dots$$

38) Wykazać, że równanie różniczkowe Legendre'a, w postaci:

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dF}{dx}\right\} + n(n+1)F = 0,$$

utek podstawienia: $x = \cos\Theta$, sprowadza się do postaci:

$$\frac{d}{d\Theta}\left(\sin\Theta\frac{dF}{d\Theta}\right) + n(n+1)\sin\Theta . F = 0.$$

Wyprowadzić następujące szeregi:

40) $\dfrac{\log(1+x)}{1+x} = a_1x - a_2x^2 + a_3x^3 - a_4x^4 + \dots$, gdzie: $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dots + \dfrac{1}{n}$.

41) $(1+x)^x = 1 + x^2 - \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{5}{6}x^4 - \dfrac{3}{4}x^5 + \dots$

42) Wykazać, że maxima i minima funkcyi:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \text{ gdy } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \text{ a zarazem: } \alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

macza równanie:

$$\frac{a^2\alpha^2}{r^2 - a^2} + \frac{b^2\beta^2}{r^2 - b^2} + \frac{c^2\gamma^2}{r^2 - c^2} = 0.$$

43) Jeżeli równanie m-go stopnia o dwu zmiennych x i y przedstawimy w postaci:

$$F(x, y) = x^m f\left(\frac{x}{y}\right) + x^{m-1}f_1\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m-2}f_2\left(\frac{y}{x}\right) + \dots = 0$$

położymy:
$$\frac{y}{x} = a + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \dots$$

kazać, że na wyznaczenie spółczynników: $a, a_1, a_2, \dots$, otrzymujemy następujące równanie:

$$f(a) = 0, \ a_1\frac{\partial f}{\partial a} + f_1(a) = 0, \ a_2\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{a_1^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} + a_1\frac{\partial f_1}{\partial a} + f_2(a) = 0, \text{ i t. d.}$$

45) Jeżeli trzy zmienne x, y, z, związane są dwoma równaniami, kształtu:

$$F(x, y, z) = x^m f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + x^{m-1}f_1\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + x^{m-2}f_2\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + \dots = 0,$$

$$\Phi(x, y, z) = x^m\varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + x^{m-1}\varphi_1\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + x^{n-2}\varphi_2\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + \dots = 0,$$

ołożymy:

$$\frac{y}{x} = a + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \dots, \quad \frac{z}{x} = b + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \frac{b_3}{x^3} + \dots = 0,$$

kazać, że na wyznaczenie spółczynników $a, a_1, a_2, \dots$ i $b, b_1, b_2, \dots$ otrzymujemy równania:

$$f(a, b) = 0, \ \varphi(a, b) = 0, \ a_1\frac{\partial f}{\partial a} + b_1\frac{\partial f}{\partial b} + f_1(a, b) = 0, \ a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a} + b_1\frac{\partial\varphi}{\partial b} + \varphi_1(a, b) = 0, \dots$$

46) Jak przekształci się równanie różniczkowe:

$$x^2\frac{\partial u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+yz\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}+zx\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}+xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=0,$$

jeżeli zmienne niezależne: x, y, z, zastąpimy przez nowe zmienne: ξ, η, ζ, na podstawie wzorów przekształcenia: $x=\eta\zeta$, $y=\zeta\xi$, $z=\xi\eta$.

47) Przekształcić całkę podwójną kształtu: $J=\int\int\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$, gdzie: $z=\arcsin\left[{}^1/_4(e^x+e^{-x})(e^y+e^{-y})\right]$, skoro wprowadzimy nowe zmienne ξ, η, na podstawie wzorów: $\xi={}^1/_2(e^x+e^{-x})$, $\eta={}^1/_2(e^y+e^{-y})$.

Jeżeli $u=f(z)$, a $z=y+x\varphi(z)$, dowieść, że:

48) $\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi(z)\frac{\partial u}{\partial y}\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right]$. 49) $\frac{\partial}{\partial x}\left[\{\varphi(z)\}^n\frac{\partial u}{\partial y}\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left[\{\varphi(z)\}^n\frac{\partial u}{\partial x}\right]$.

50) Wyprowadzić rozwinięcie funkcyi $F(x)$ podług potęg funkcyi $\varphi(x)$, gdzie $\varphi(a)=0$, w postaci szeregu, zwanego szeregiem Bürmanna:

$$F(x)=F(a)+\frac{F'(a)}{\varphi'(a)}\cdot\frac{\varphi(x)}{1!}+\left[\frac{d\left\{\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^2F'(x)\right\}}{dx}\right]_a\frac{[\varphi(x)]^2}{2!}+$$
$$+\left(\frac{d^2\left\{\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^3F'(x)\right\}}{dx^2}\right)_a\frac{[\varphi(x)]^3}{3!}+\dots$$

51) Wykazać, że:

$$F(x)=F(0)+F'(0)\cdot\frac{\sin x}{1!}+\left(\frac{d\left\{\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2F'(x)\right\}}{dx}\right)_0\frac{\sin^2 x}{2!}+\dots$$

Rozwiązania XXVI. 1)—28) Wskazówki zawarte w wykładzie. 29) $x=0{,}4928$ 33) Położyć $x^2=y$ i wyprowadzić rozwinięcie $\sqrt{y}$ według potęg ilorazu $\frac{b}{a}$. 34) Położyć $x^3=y$ i rozwinąć $\sqrt[3]{y}$ podług potęg spółczynnika a. 39) Położyć $x^n=y$ i rozwinąć $\sqrt[n]{y}$ według potęg ilorazu $\frac{b}{a}$. 41) $1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^2(x^2-x)}{2!}+\frac{x^2(x^2-x)(x^2-2x)}{3!}+\frac{x^2(x^2-x)(x^2-2x)(x^2-3x)}{4!}+\dots$ 46) $\xi^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\eta^2\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\zeta^2\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}=0$. 47) $\int\int\frac{d\xi\,d\eta}{\sqrt{1+\xi^2\eta^2}}$.

Literatura. J. Bertrand. Traité de calcul différentiel et de calcul intégral. Paris 1864. M. Ed. Brahy. Exercices méthodiques de calcul différentiél. Paris 1898. Dr. Józef Kniaź Puzyna. Teorya funkcyj analitycznych. Tom II. Lwów, 1900. Dr. Otto Stolz Grundzüge der Differential und Integralrechnung. Leipzig 1893.

Tematy do rozpraw naukowych.

1. Szeregi Lagrange'a i ich zastosowania.
2. Własności funkcyj Legendre'a, określonych wzorem:

$$X_n=\frac{1}{n!\,2^n}\cdot\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

3. Rozwiązywanie równań algebraicznych i przestępnych za pomocą szeregów.

Wykład XXVII.

Zasady teoryi iloczynów nieskończonych i rozwijanie funkcyj na iloczyny.

1. Zasadnicze pojęcia. Iloczyn, złożony ze skończonej ilości liczb, jest zawsze pewną liczbą skończoną, różną od zera, jeżeli żaden z jego czynników nie jest liczbą nieskończenie wielką, lub zerem.

Weźmy teraz pod uwagę iloczyn, złożony z nieskończenie wielu liczb, zwany iloczynem nieskończonym. Chcąc zbadać wartość danego iloczynu nieskończonego, przyjmijmy, że jego czynniki postępują po sobie podług pewnego prawa. Utworzywszy tedy iloczyn z n czynników początkowych tego iloczynu, t. j.:

$$P_n = a_1 . a_2 . a_3 . \ldots\ldots a_n ,$$

możemy dochodzić granicy, do jakiej P_n dąży, gdy n rośnie do nieskończoności.

Jeżeli dla $n=\infty$, $\lim\limits_{n=\infty} P_n = P$ jest liczbą skończoną, oznaczoną i różną od zera, tedy nazywamy iloczyn nieskończony $a_1.a_2.a_3.\ldots$ zbieżnym, a granicę P nazywamy jego wartością. Jeżeli zaś $\lim\limits_{n=\infty} P_n=\infty$, lub $\lim\limits_{n=\infty} P_n=0$, tedy nazywamy iloczyn rozbieżnym, w pierwszym przypadku rozbieżnym do nieskończoności, w drugim rozbieżnym do zera; jeżeli iloczyn P_n nie dąży do żadnej granicy oznaczonej, lecz w miarę, jak n wzrasta, przeskakuje między liczbami od siebie odmiennemi, iloczyn nieskończony nazywamy w tym razie nieoznaczonym, albo oscylującym.

2. Warunki zbieżności iloczynów nieskończonych. Teoryę iloczynów nieskończonych możemy sprowadzić do teoryi szeregów nieskończonych. W tym celu, połóżmy ogólnie: $a_n = 1+u_n$, iloczyn nieskończony wówczas przedstawi się w postaci:

$$P=(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)\ldots(1+u_n)\ldots$$

Stosując prawidło tworzenia iloczynu do skończonej liczby takich czynników, otrzymamy:

$$P_n=(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n)=1+\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} u_\lambda + \sum_{\substack{\lambda,\mu=1\\ \lambda<\mu}}^{n} u_\lambda u_\mu + \sum_{\substack{\lambda,\mu,\nu=1\\ \lambda<\mu<\nu}}^{n} u_\lambda u_\mu u_\nu + \ldots \qquad (1)$$

a stąd, dla $n=\infty$, szereg:

$$P=1+\sum_{\lambda} u_\lambda + \sum_{\lambda<\mu} u_\lambda u_\mu + \ldots \qquad (2)$$

Otrzymany szereg ma tylko wtedy pewną skończoną wartość, jeżeli wszystkie szeregi, znajdujące się po prawej stronie równości będą miały pewne war-

tości skończone i skoro szereg tych wartości będzie szeregiem bezwarunkowo zbieżnym.

3. Warunek ogólny. Nieskończenie wiele warunków, którymby należało zadość uczynić, aby dany iloczyn nieskończony był zbieżny, sprowadza się do jednego warunku, na podstawie następującego twierdzenia: *„Iloczyn nieskończony $\prod_{\lambda=1}^{\infty}(1+u_\lambda)$ ma pewną oznaczoną wartość, jeżeli szereg: $\sum_{\lambda=1}^{\infty} u_\lambda = u_1+u_2+u_3+\ldots$ jest bezwarunkowo zbieżny".*

Ażeby to udowodnić, oznaczmy bezwzględną wartość liczby u_λ przez ϱ_λ, tedy będzie każdy wyraz szeregu: $1+\sum_\lambda u_\lambda+\sum_{\lambda,\mu} u_\lambda u_\mu+\ldots$ mniejszy, aniżeli odpowiedni wyraz szeregu: $1+\sum_\lambda \varrho_\lambda+\sum_{\lambda,\mu}\varrho_\lambda\varrho_\mu+\ldots$

Niech będzie teraz: $\sum\varrho_\lambda=\varrho$, tedy będzie widocznie:

$$\sum_{\substack{\lambda,\mu\\ \lambda<\mu}}\varrho_\lambda\varrho_\mu<\varrho^2,\qquad \sum_{\substack{\lambda\,\mu\,\nu\\ \lambda<\mu<\nu}}\varrho_\lambda\varrho_\mu\varrho_\nu<\varrho^3,$$

przeto będzie każdy wyraz danego szeregu mniejszy, aniżeli odpowiedni wyraz postępu geometrycznego: $1+\varrho+\varrho^2+\varrho^3+\varrho^4+\ldots$

Jeżeli przypuścimy, że: $\sum\varrho_\lambda=\varrho<1$, tedy otrzymamy, jako sumę postępu geometrycznego wartość skończoną: $\frac{1}{1-\varrho}$, przeto ma w tym razie dany szereg, a więc także dany iloczyn nieskończony wartość skończoną.

Jeżeli zaś warunek: $\sum|u_\lambda|=\sum\varrho_\lambda<1$, nie spełnia się, możemy przecież, skoro, według założenia szereg $\sum u_\lambda$ jest bezwarunkowo zbieżny, oddzielić zawsze skończoną liczbę jego wyrazów tak, aby suma bezwzględnych wartości wyrazów pozostałych była mniejszą od 1, t. j., żeby było:

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty}u_\lambda=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=p}u_\lambda+\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}u_{\lambda+p},\ \text{gdzie}\ \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}|u_{\lambda+p}|<1.$$

W tym razie, zgodnie z poprzednią uwagą, iloczyn:

$$\prod_{\lambda=1}^{\infty}(1+u_{\lambda+p})=1+\sum_\lambda u_{\lambda+p}+\sum_{\lambda,\mu}u_{\lambda+p}u_{\mu+p}+\ldots$$

ma pewną wartość skończoną, przeto musi mieć także iloczyn:

$$\prod_{\lambda=1}^{\infty}(1+u_\lambda)=(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_p)\prod_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}(1+u_{p+\lambda}),$$

wartość skończoną.

Tym sposobem udowodnionem zostało ogólne znamię zbieżności iloczynów nieskończonych, złożonych z liczb rzeczywistych, lub zespolonych.

4. Bezwarunkowa zbieżność iloczynu nieskończonego. Iloczyn nieskończony, pod powyższym warunkiem zbieżny, musi być także b e z w a r u n k o w o z b i e ż n y m, to znaczy, że wartość jego jest niezależną od porządku czynników. Ułożywszy bowiem czynniki takiego iloczynu nieskończonego $(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n)\ldots$ w jakikolwiek sposób w pewne grupy, otrzymamy po wykonaniu iloczynów, wskazanych w poszczególnych grupach, w miejsce danego iloczynu, następujący:

$$(1+U_1)(1+U_2)(1+U_3)\ldots=1+(U_1+U_2+\ldots)+(U_1U_2+U_1U_3+\ldots)\ldots+$$

Prawa strona tej równości zawiera wszystkie wyrazy szeregu

$$1+\Sigma u_\lambda+\Sigma u_\lambda u_\mu+\ldots$$

ewnem następstwie, powstałem ze sposobu, w jaki wyrazy U_1, U_2,... yrazów u_1, u_2,... są utworzone, a że wszystkie szeregi: Σu_λ, $\Sigma u_\lambda u_\mu$,... są warunkowo zbieżne, przeto wartość ich nie zależy od porządku dodajów, a tem samem jest:

$$(1+U_1)(1+U_2)(1+U_3)\ldots=1+\Sigma u_\lambda+\Sigma u_\lambda u_\mu+\ldots, \qquad \text{czyli:}$$

$$(1+U_1)(1+U_2)(1+U_3)\ldots=\prod_{\lambda=1}^{\infty}(1+u_\lambda), \qquad \text{to znaczy:}$$

Wartość iloczynu nieskończonego $\prod_{\lambda=1}^{\infty}(1+u_\lambda)$, *którego szereg* $\sum_{\lambda=1}^{\infty} u_\lambda$ *jest bezwakowo zbieżny, nie zmienia się za zmianą porządku czynników.*

5. **Przykład.** Iloczyn nieskończony:

$$\prod_{\lambda=1}^{\infty}\left(1+\frac{a_\lambda}{\lambda^\alpha}\right)=\left(1+\frac{a_1}{1^\alpha}\right)\left(1+\frac{a_2}{2^\alpha}\right)\ldots\left(1+\frac{a_n}{n^\alpha}\right)\ldots$$

t bezwarunkowo zbieżny, skoro szereg:

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{a_\lambda}{\lambda^\alpha}=\frac{a_1}{1^\alpha}+\frac{a_2}{2^\alpha}+\ldots+\frac{a_n}{n^\alpha}+\ldots$$

t bezwarunkowo zbieżny.

Przypuśćmy, że współczynniki $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, nie przekraczają, bezwzględnie biorąc ej skończonej wartości ρ, tedy będzie:

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty}\left|\frac{a_\lambda}{\lambda^\alpha}\right|=\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{|a_\lambda|}{\lambda^\alpha}<\rho\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^\alpha},$$

ymany szereg będzie więc bezwarunkowo zbieżny dla $\alpha>1$.

Dany iloczyn będzie więc bezwarunkowo zbieżny, skoro $\alpha>1$, a współczynniki $a_1,\ldots, a_n,\ldots$ nie przekraczają pewnej skończonej granicy ρ.

Bezwarunkowo zbieżnymi są tedy n. p. iloczyny nieskończone:

$$a)\ \left(1+\frac{a}{2^2}\right)\left(1+\frac{a}{3^2}\right)\left(1+\frac{a}{4^2}\right)\ldots \quad b)\ \left(1-\frac{a}{2^2}\right)\left(1-\frac{a}{3^2}\right)\left(1-\frac{a}{4^2}\right)\ldots$$

wszelkiej skończonej, wartości liczby a.

6. **Iloczyny nieskończone, warunkowo zbieżne.** Jeżeli w iloczynie:

$$\prod_{\lambda=1}^{\infty}(1+u_\lambda)=(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n)\ldots$$

reg: $\sum_{\lambda=1}^{\infty} u_\lambda=u_1+u_2+u_3+\ldots$ nie jest bezwarunkowo zbieżnym, nie może ć także iloczyn nieskończony: $\prod_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}(1+u_\lambda)$, z powodu równości:

$$\prod_{\lambda=1}^{\infty}(1+u_\lambda)=1+\Sigma u_\lambda+\Sigma u_\lambda u_\mu+\ldots$$

warunkowo zbieżnym. Iloczyn taki, jeżeli nie jest rozbieżnym, lub oscyjnym, może być warunkowo zbieżnym, o wartości zależnej od porządku nników, albo zerem. Ażeby pod tym względem mieć pewną wskazówkę, yjmijmy, że szereg $u_1+u_2+u_3+\ldots$ jest bezwzględnie biorąc, malejącym, , że $\lim_{n=\infty} u_n=0$ i że wyrazy u_1, u_2, u_3,... od samego początku są już, bezzględnie biorąc, mniejsze od jedności.

Biorąc z danego iloczynu Π logarytm naturalny, otrzymamy

$$\log \Pi = \log(1+u_1) + \log(1+u_2) + \log(1+u_3) + \ldots \qquad (3)$$

Zastępując tedy logarytmy naturalne przez odpowiadające im potęgowe szeregi, dostaniemy:

$$\log \Pi = \left(u_1 - \frac{u^2_1}{2} + \frac{u^3_1}{3} - \frac{u^4_1}{4} + \ldots\right) + \left(u_2 - \frac{u^2_2}{2} + \frac{u^3_2}{3} - \frac{u^4_2}{4} + \ldots\right) + \ldots =$$

$$= (u_1 + u_2 + \ldots) - u^2_1 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} u_1 + \frac{1}{4} u^2_1 - \ldots\right) - u^2_2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} u_2 + \frac{1}{4} u^2_2 - \ldots\right).$$

Zważywszy, że:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} u_\lambda + \frac{1}{4} u^2_\lambda - \ldots\right) < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} |u_\lambda| + \frac{1}{4} |u_\lambda|^2 + \ldots < \frac{1}{2} \left(1 + |u_\lambda| + |u_\lambda|^2 + \ldots\right)$$

otrzymamy, skoro założymy $|u_\lambda| < \frac{1}{2}$, co zawsze przyjąć można, przynajmniej od pewnego miejsca począwszy:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} u_\lambda + \frac{1}{4} u^2_\lambda - \ldots < \frac{1}{2} \left\{\frac{1}{1 - |u_\lambda|}\right\} < 1,$$

kładąc teraz $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} u_\lambda + \frac{1}{4} u_\lambda^2 - \ldots = a_\lambda$, otrzymamy:

$$\log \Pi = (u_1 + u_2 + \ldots) - (a_1 u^2_1 + a_2 u^2_2 + a_3 u^2_3 + \ldots) \qquad (4)$$

gdzie współczynniki $a_1, a_2, a_3 \ldots$ bezwzględnie biorąc, są mniejsze od 1, zmierzając do liczby $\frac{1}{2}$, jako do granicy. Wartość $\log \Pi$ zawisła tedy od wartości dwóch szeregów, mianowicie szeregu: $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$, jakoteż szeregu: $a_1 u^2_1 + a_2 u_2{}^2 + \ldots$

Ostatni szereg jest jednakże jednocześnie z szeregiem $u^2_1 + u^2_2 + u^2_3 + \ldots$ zbieżnym, lub rozbieżnym, przeto zależy wartość $\log \Pi$, a więc także wartość iloczynu $\Pi = e^{\log \Pi}$, od wartości szeregów:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \quad \text{i} \quad u^2_1 + u^2_2 + u^2_3 + \ldots$$

7. Zestawienie prawideł zbieżności iloczynów. Na podstawie powyższych wywodów, dochodzimy w zakresie rzeczywistych wartości $u_1, u_2, \ldots$, do następujących wniosków:

1. Jeżeli szereg $u_1 + u_2 + \ldots$ jest bezwarunkowo zbieżny, tedy musi być także szereg $u^2_1 + u^2_2 + u^2_3 + \ldots$ bezwarunkowo zbieżny, w tym razie ma $\log \Pi$, a więc także iloczyn $\Pi(1+u_\lambda)$, pewną wartość skończoną.

2. Jeżeli szereg $u_1 + u_2 + \ldots$ jest zbieżny, ale warunkowo zbieżny, a szereg $u^2_1 + u^2_2 + \ldots$ jest bezwarunkowo zbieżny, wówczas będzie $\log \Pi$, a więc, także iloczyn $\Pi(1+u_\lambda)$ warunkowo zbieżnym, dostarczając przy odmiennem uporządkowaniu odmiennych wartości.

3. Jeżeli szereg $u_1 + u_2 + \ldots$ jest warunkowo zbieżny, szereg $u^2_1 + u^2_2 + \ldots$ zaś rozbieżny, wówczas będzie: $\log \Pi = -\infty$, przeto iloczyn $\Pi(1+u_\lambda)$ będzie miał wartość równą zeru, czyli będzie rozbieżnym do zera.

4. Jeżeli szereg: $u_1 + u_2 + \ldots$ jest rozbieżnym, szereg: $u^2_1 + u^2_2 + \ldots$ zaś zbieżnym, wówczas będzie iloczyn nieskończony rozbieżnym do nieskończoności.

5. Jeżeli wreszcie oba szeregi: $u_1 + u_2 + \ldots$ i $u^2_1 + u^2_2 + \ldots$ są rozbieżne, wówczas przedstawi się $\log \Pi$ pod postacią $\infty - \infty$, iloczyn nieskończony: $\Pi(1+u_\lambda)$ może być tedy warunkowo zbieżnym, albo będzie na pewno rozbieżnym, skoro liczby $u_1, u_2, \ldots$ są dodatnie.

14. Iloczyny nieskończone, których czynniki są funkcyami jednej [zmi]ennej niezależnej. Niech będzie dany iloczyn nieskończony funkcyj: [$f_1(x)$]$, f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$, kształtu:

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} f_n(x) = f_1(x) . f_2(x) \ldots f_n(x) \ldots \tag{8}$$

pomijając czynnik stały, możemy ten iloczyn sprowadzić zawsze do [post]aci:

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + g_n(x)) = (1 + g_1(x))(1 + g_2(x)) \ldots (1 + g_n(x)) \ldots$$

[k]tórej przypuszczamy, że funkcye: $g_1(x)$, $g_2(x), \ldots, g_n(x), \ldots$, przedstawiają się [w p]ostaci szeregów potęgowych bez wyrazu wolnego, kształtu:

$$g_n(x) = a_{n1} x + a_{n2} x^2 + \ldots + a_{nr} x^r + \ldots \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

[zbież]nych w pewnym wspólnym zakresie: $|x| \leqq \varrho$.

Połóżmy: $|x| = \xi$, $|a_{nr}| = A_{nr}$,

$$G_n(\xi) = A_{n1} \xi + A_{n2} \xi^2 + \ldots + A_{nr} \xi^r + \ldots$$

[Pa]łóżmy, że szereg nieskończony:

$$G_1(\xi) + G_2(\xi) + \ldots + G_n(\xi) + \ldots$$

[jest] dla $\xi < \varrho$ także zbieżny, wówczas będzie iloczyn nieskończony:

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + g_n(x)),$$

[dla] wszelkich wartości x, których bezwzględna wartość jest mniejszą od ϱ, [zawsz]e zbieżny i to bezwarunkowo zbieżny.

Ponieważ bowiem dla wszelkiego n jest: $|g_n(x)| \leqq G_n(\xi)$, więc, wobec [zbież]ności szeregu: $\sum_{n=1}^{n=\infty} G_n(\xi)$, dla $\xi < \varrho$, będzie także zbieżnym szereg:

$$|g_1(x)| + |g_2(x)| + |g_3(x)| + \ldots + |g_n(x)| + \ldots$$

Wobec tego szereg:

$$g_1(x) + g_2(x) + g_3(x) + \ldots + g_n(x) + \ldots$$

[a ty]m samem także iloczyn:

$$(1 + g_1(x))(1 + g_2(x)) \ldots (1 + g_n(x)) \ldots$$

[będz]ie w zakresie $|x| < \varrho$ bezwarunkowo zbieżnym.

Iloczyn $\prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + g_n(x))$ przedstawia tedy w zakresie $|x| < \varrho$ pewną [funk]cyą $f(x)$, która da się także rozwinąć podług potęg x.

Jakoż możemy położyć:

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + g_n(x)) = 1 + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} g_\lambda(x) + \sum_{\lambda, \mu}^{1 \ldots \infty} g_\lambda(x) g_\mu(x) + \sum_{\lambda, \mu, \nu}^{1 \ldots \infty} g_\lambda(x) g_\mu(x) g_\nu(x) + \ldots \tag{10}$$

[Mo]żnę przedstawić iloczyn w postaci szeregu potęgowego, każda bowiem [z po]wyższych sum zawiera czynniki, złożone z szeregów bezwarunkowo [zbieżn]ych w zakresie $|x| < \varrho$, a więc da się przedstawić w postaci szeregu [potęg]owego, bezwarunkowo zbieżnego w tym zakresie.

Powyższy szereg nieskończony, równoważny z danym iloczynem nie[skończ]onym, da się więc sprowadzić do szeregu potęgowego, bezwarunkowo

*

danego szeregu, jak: $u_1=s_1$, $u_1+u_2=s_2$, $u_1+u_2+u_3=s_3, \ldots, u_1+u_2+\ldots+u_n=s_n$
Mamy bowiem tożsamość:

$$u_1+u_2+\ldots+u_n=\frac{u_1}{1}\cdot\frac{u_1+u_2}{u_1}\cdot\frac{u_1+u_2+u_3}{u_1+u_2}\cdots\frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}} \qquad (5)$$

która utrzymuje się dla dowolnie wielkiej liczby n.

11. Przykład. Niech będzie dany szereg:

$$1-\frac{\alpha^2}{1^2}-\frac{\alpha^2(1^2-\alpha^2)}{1^2.2^2}-\frac{\alpha^2(1^2-\alpha^2)(2^2-\alpha^2)}{1^2.2^2.3^2}-\ldots-\frac{\alpha^2(1^2-\alpha^2)(2^2-\alpha^2)\ldots(n^2-\alpha^2)}{1^2.2^2\ldots n^2.(n+1)^2}-\ldots$$

Mamy tu:

$$u_1=1,\ u_1+u_2=\frac{1^2-\alpha^2}{1^2},\ u_1+u_2+u_3=\frac{(1^2-\alpha^2)(2^2-\alpha^2)}{1^2.2^2},$$

$$u_1+u_2+\ldots+u_n=\frac{(1^2-\alpha^2)(2^2-\alpha^2)\ldots[(n-1)^2-\alpha^2]}{1^2.2^2\ldots(n-1)^2},\ \ldots$$

zatem: $\frac{u_1}{1}=1,\ \frac{u_1+u_2}{u_1}=\frac{1^2-\alpha^2}{1^2}=1-\frac{\alpha^2}{1^2},\ \frac{u_1+u_2+u_3}{u_1+u_2}=\frac{2^2-\alpha^2}{2^2}=1-\frac{\alpha^2}{2^2},\ldots,$

$$\frac{u_1+u_2+\ldots+u_{n+1}}{u_1+u_2+\ldots+u_n}=\frac{n^2-\alpha^2}{n^2}=1-\frac{\alpha^2}{n^2}.$$

Otrzymamy więc dany szereg w postaci iloczynu:

$$\frac{1^2-\alpha^2}{1^2}\cdot\frac{2^2-\alpha^2}{2^2}\cdot\frac{3^2-\alpha^2}{3^2}\cdots\frac{n^2-\alpha^2}{n^2}\ldots=\left(1-\frac{\alpha^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{\alpha^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha^2}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{\alpha^2}{n^2}\right)\ldots$$

12. Przekształcanie iloczynów nieskończonych na szeregi. Tożsamość

$$u_1+u_2+u_3+\ldots=\frac{u_1}{1}\cdot\frac{u_1+u_2}{u_1}\cdot\frac{u_1+u_2+u_3}{u_1+u_2}\ldots \qquad (5)$$

możemy także użyć do przekształcenia iloczynu nieskończonego: $a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$ na szereg: $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$

Kładąc bowiem:

$$\frac{u_1}{1}=a_1,\quad \frac{u_1+u_2}{u_1}=a_2,\quad \frac{u_1+u_2+u_3}{u_1+u_2}=a_3,\ldots,\quad \frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}}=a_n,\ldots$$

otrzymujemy poszczególne wyrazy szeregu w postaci:

$$u_1=a_1,\ u_2=a_1(a_2-1),\ u_3=a_1a_2(a_3-1),\ldots,\ u_n=a_1a_2\ldots a_{n-1}(a_n-1),\ldots,$$

dany iloczyn sprowadza się więc do szeregu w postaci:

$$a_1a_2a_3\ldots\, a_n\ldots=a_1+a_1(a_2-1)+a_1a_2(a_3-1)+\ldots+a_1a_2\ldots a_{n-1}(a_n-1)+\ldots \qquad (6)$$

13. Przykład. Przekształcić iloczyn nieskończony:

$$P=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\ldots$$

na szereg.

Mamy tu: $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\ldots=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{8}\cdots\frac{2^n+1}{2^n}\ldots$

czyli: $a_1=\frac{3}{2},\ a_2=\frac{5}{4},\ a_3=\frac{9}{8},\ldots,\ a_n=\frac{2^n+1}{2^n},\ldots$

zatem dostajemy:

$$u_1=\frac{3}{2},\ u_2=\frac{3}{2}\left(\frac{5}{4}-1\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4},\ u_3=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\left(\frac{9}{8}-1\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{8},$$

ogólnie:

$$u_n=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}}\left(\frac{2^n+1}{2^n}-1\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{3.5\ldots(2^{n-1}+1)}{2.4\ldots\ldots2^n}.$$

Dany iloczyn nieskończony sprowadza się więc do szeregu w postaci:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\ldots=\frac{3}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.8}+\ldots+\frac{1.3.5\ldots(2^{n-1}+1)}{2.4.8\ldots\ldots2^n}.$$

17. Powyższe rozwinięcia funkcyj $\sin x$ i $\cos x$ na iloczyny nieskończone ymamy pośrednio z wzorów na rozkładanie funkcyj $\sin nx$ i $\cos nx$ na mniki, wyprowadzonych w art. 11. i 12. Wykładu X. str. 160–166., ostaci:

$$\sin 2mx = 2^{2m-1}\sin x\cos x \prod_{r=1}^{r=m-1}\left(\sin^2\frac{r\pi}{2m}-\sin^2 x\right),$$

$$\sin(2m+1)x = 2^{2m}\sin x \prod_{r=1}^{r=m}\left(\sin^2\frac{r\pi}{2m+1}-\sin^2 x\right),$$

$$\cos 2mx = 2^{2m-1}\prod_{r=0}^{r=m-1}\left(\cos^2 x-\cos^2\frac{(2r+1)\pi}{4m}\right),$$

$$\cos(2m+1)x = 2^{2m}\cos x\prod_{r=0}^{r=m-1}\left(\cos^2 x-\cos^2\frac{(2r+1)\pi}{4m+2}\right),$$

rtych na wzorach:

$$\sin nx = \binom{n}{1}\cos^{n-1}x\sin x - \ldots + (-1)^r\binom{n}{2r+1}\cos^{n-2r+1}x\sin^{2r-1}x + \ldots \quad (13)$$

$$\cos nx = \cos^n x - \binom{n}{2}\cos^{n-2}x\sin^2 x + \ldots + (-1)^r\binom{n}{2r}\cos^{n-2r}x\sin^{2r}x + \ldots \quad (14)$$

Zastępując mianowicie we wzorze (13) $\cos^2 x$ przez $1-\sin^2 x$, a we wzorze $\sin^2 x$ przez $1-\cos^2 x$, wyrazimy $\sin nx$, przy nieparzystem n jako funkcyę witą, wymierną n-go stopnia, ze względu na $\sin x$, a przy parzystem n, funkcyę całkowitą, wymierną $(n-1)$-go stopnia, ze względu na $\sin x$, możoną przez $\cos x$, podczas gdy funkcya $\cos x$, wyrazi się dla wszel- całkowitego, dodatniego n, jako funkcya całkowita, wymierna n-go nia, ze względu na $\cos x$.

Przyjąwszy liczbę n, jako nieparzystą, możemy funkcyę $\sin nx$, która w tym przypadku funkcyą n-go stopnia, ze względu na $\sin x$, przed- ć pod postacią iloczynu wprost w następujący sposób. Funkcya $\sin nx$, się zerem dla n oddzielnych wartości zmiennej x, jako to:

$$0,\ \pm\frac{\pi}{n},\ \pm\frac{2\pi}{n},\ldots,\ \pm\frac{n-1}{2}\frac{\pi}{n},$$

m odpowiada tyleż wartości na $\sin x$, w postaci:

$$0,\ \pm\sin\frac{\pi}{n},\ \pm\sin\frac{2\pi}{n},\ldots,\ \pm\sin\frac{n-1}{2}\frac{\pi}{n}.$$

Możemy zatem położyć:

$$\sin nx = C.\sin x\left\{1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{\pi}{n}}\right\}\left\{1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{2\pi}{n}}\right\}\ldots\left\{1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{n-1}{2}\frac{\pi}{n}}\right\}, \quad (15)$$

C jest liczbą od x niezależną.

Dla nieskończenie małego x, możemy pierwszą stronę równania za- ć przez nx, drugą przez Cx, dostajemy zatem $C=n$, wzór powyższy muje więc postać:

$$\sin nx = n\sin x\left\{1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{\pi}{n}}\right\}\left\{1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{2\pi}{n}}\right\}\ldots\left\{1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{n-1}{2}\frac{\pi}{n}}\right\}. \quad (15')$$

astępując w niej nx przez x, a więc x przez $\frac{x}{n}$, otrzymujemy wzór:

zbieżnego w zakresie $|x|<\varrho$, który będzie w tym zakresie przedstawiał pewną funkcyę $f(x)$.

Mamy zatem twierdzenie:

Iloczyn nieskończony: $\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+g_n(x))$ *jest dla wszelkich wartości* x, *których bezwzględna wartość* $|x|=\xi$ *jest mniejszą od* ϱ, *bezwarunkowo zbieżnym i przedstawia pewną funkcyę* $f(x)$, *dającą się rozwinąć na szereg potęgowy, skoro tylko szereg nieskończony:* $g_1(x)+g_2(x)+\ldots+g_n(x)+\ldots$ *jest dla* $|x|<\varrho$, *bezwarunkowo zbieżnym.*

15. Uwaga. Iloczyn nieskończony, bezwarunkowo zbieżny:

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} f_n(x)=\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+g_n(x))=f(x),$$

w pewnym zakresie $|x|<\rho$, nazywamy jednostajnie zbieżnym w tym zakresie, jeżeli dla każdej dowolnie małej liczby ε, da się wyznaczyć taka liczba ν, żeby dla wszelkich wartości $n>\nu$ było:

$$|f_{n+1}(x)\cdot f_{n+2}(x)\ldots f_{n+r}(x)-1|<\varepsilon,\quad (r=1,2,\ldots),$$

niezależnie od szczególnych wartości zmiennej x, w zakresie $|x|<\rho$.

Do jednostajnej zbieżności iloczynu nieskończonego: $\Pi(1+g_n(x))$ w pewnym zakresie jest koniecznem i wystarcza, aby szereg nieskończony $\Sigma g_n(x)$ był w tym zakresie jednostajnie zbieżnym.

16. Przedstawianie funkcyj $\sin x$ i $\cos x$ w postaci iloczynów nieskończonych. Iloczyny nieskończone nadają się szczególnie do przedstawiania jednowartościowych funkcyj o nieskończenie wielu miejscach zerowych, do których należą naprzykład funkcye goniometryczne: $\sin x$, $\cos x$, i t. d.

Funkcya $\sin x$ staje się zerem w miejscach:

$$x=0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \pm 3\pi,\ \ldots,\pm n\pi,\ldots,$$

możemy zatem funkcyę $\sin x$, przedstawić w postaci iloczynu, który ma obok czynnika x, czynniki, kształtu:

$$\left(1-\frac{x}{\pi}\right),\ \left(1+\frac{x}{\pi}\right),\ldots,\ \left(1-\frac{x}{n\pi}\right),\ \left(1+\frac{x}{n\pi}\right),$$

a więc w postaci iloczynu nieskończonego:

$$\sin x=x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\ldots$$

czyli:

$$\sin x=x\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right), \tag{11}$$

bezwarunkowo zbieżnego dla wszelkiego x.

Funkcya $\cos x$ staje się zerem, dla:

$$x=\pm\frac{\pi}{2},\ \pm\frac{3\pi}{2},\ \pm\frac{5\pi}{2},\ldots,\pm\frac{(2n-1)\pi}{2},\ldots,$$

ma zatem czynniki, kształtu:

$$\left(1-\frac{2x}{\pi}\right),\ \left(1+\frac{2x}{\pi}\right),\ldots,\ \left(1-\frac{2x}{(2n-1)\pi}\right),\ \left(1+\frac{2x}{(2n-1)\pi}\right),\ldots,$$

możemy ją zatem przedstawić w postaci iloczynu nieskończonego:

$$\cos x=\left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\ldots\left(1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)\ldots$$

czyli:

$$\cos x=\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right), \tag{12}$$

również bezwarunkowo zbieżnego dla każdego x.

$$\cos x=\left\{1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{\pi}{2m}}\right\}\left\{1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{3\pi}{2m}}\right\}\cdots\left\{1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{(2m-1)\pi}{2m}}\right\},$$

którego, dla nieskończenie wielkiego m, dostajemy wzór, przedstawiający [fun]kcyę $\cos x$, w postaci iloczynu nieskończonego, kształtu:

$$\cos x=\left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{4x^2}{(2r+1)^2\pi^2}\right)\cdots \quad (18)$$

[l]i:

$$\cos x=\prod_{n=0}^{n=\infty}\left(1-\frac{4x^2}{(2n+1)^2\pi^2}\right). \quad (18')$$

18. Wzór na $\cos x$, możemy otrzymać wprost z wzoru: $\sin x$. Na pod[sta]wie relacyi:

$$\cos x=\frac{\sin 2x}{2\sin x}.$$

[otrz]ymujemy bowiem:

$$\cos x=\frac{2x\left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{4x^2}{n^2\pi^2}\right)\cdots}{2x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\cdots},$$

[ską]d, po opuszczeniu wspólnych czynników, dostajemy wzór:

$$\cos x=\left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{4x^2}{(2r+1)^2\pi^2}\right)\cdots$$

19. **Wzór Wallisa.** Jeżeli we wzorze:

$$\sin x=x\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)=x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\cdots$$

[prze]dstawiającym funkcyą $\sin x$, w postaci iloczynu nieskończonego, poło[ż]ymy: $x=\frac{\pi}{2}$, otrzymamy równanie:

$$1=\frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1-\frac{1}{2^2n^2}\right)=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2.4}\right)\left(1-\frac{1}{2^2.9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^2.n^2}\right)\cdots$$

Zastępując w każdym czynniku różnicę kwadratów dwu liczb przez [iloc]zyn sumy i różnicy tych liczb, a więc, kładąc:

$$1-\frac{1}{2^2n^2}=\left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n},$$

[otrz]ymamy powyższą równość w postaci:

$$1=\frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n}\cdots$$

[ską]d wzór, przedstawiający wartość: $\frac{\pi}{2}$ w postaci iloczynu nieskończo[neg]o, kształtu:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdots \quad (19)$$

[znan]y pod nazwą **wzoru Wallisa.**

20. Przedstawianie funkcyj goniometrycznych ilukolwiek zmiennych w postaci n czonych iloczynów. Za pośrednictwem wzorów, przedstawiających funkcye: $\sin x$ w postaci nieskończonych iloczynów, możemy rozmaite funkcye goniometryczne ilul zmiennych, dające się sprowadzić do iloczynów, lub ilorazów funkcyj sinus i cosin razić pod postacią nieskończonych iloczynów.

Weźmy n. p. funkcyę:

$$z = \frac{\cos x - \cos y}{1 - \cos y}.$$

Ponieważ tu: $\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2}$, $1 - \cos y = 2\sin^2\frac{y}{2}$, możem daną funkcyę przedstawić w postaci:

$$z = \frac{\sin\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{y-x}{2}}{\sin^2\frac{y}{2}}.$$

Wobec tego otrzymujemy jej rozwinięcie na iloczyn nieskończony kształtu:

$$z = \frac{\frac{x+y}{2} \cdot \frac{y-x}{2} \cdot \left(1 - \frac{(x+y)^2}{4\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{(y-x)^2}{4\pi^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{(x+y)^2}{4n^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{(y-x)^2}{4n^2\pi^2}\right) \ldots}{\frac{y^2}{4} \cdot \left(1 - \frac{y^2}{4\pi^2}\right)^2 \left(1 - \frac{y^2}{4.4\pi^2}\right)^2 \left(1 - \frac{y^2}{9.4\pi^2}\right)^2 \ldots \left(1 - \frac{y^2}{n^2.4\pi^2}\right) \ldots}$$

gdzie zachowany jest naturalny porządek czynników.

Pierwsze dwa czynniki dają iloczyn:

$$a_1 = \frac{\frac{x+y}{2} \cdot \frac{y-x}{2}}{\frac{y^2}{4}} = \frac{y^2 - x^2}{y^2} = 1 - \frac{x^2}{y^2},$$

następne zaś możemy co dwa sprowadzić do postaci:

$$a_n = \frac{\left(1 - \frac{(x+y)^2}{n^2.4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{(y-x)^2}{n^2.4\pi^2}\right)}{\left(1 - \frac{y^2}{n^2.4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{y^2}{n^2.4\pi^2}\right)} = \frac{4n^2\pi^2 - x^2 - y^2 - 2xy}{4n^2\pi^2 - y^2} \cdot \frac{4n^2\pi^2 - y^2 - x^2 + 2xy}{4n^2\pi^2 - y^2},$$

czyli:

$$a_n = \left(1 - \frac{x^2 + 2xy}{4n^2\pi^2 - y^2}\right)\left(1 - \frac{x^2 - 2xy}{4n^2\pi^2 - y^2}\right),$$

a że:

$$1 - \frac{x^2 + 2xy}{4n^2\pi^2 - y^2} = 1 - \frac{x^2 + 2xy}{(2n\pi - y)(2n\pi + y)} = \left(1 - \frac{x}{2n\pi - y}\right)\left(1 + \frac{x}{2n\pi + y}\right),$$

$$1 - \frac{x^2 - 2xy}{4n^2\pi^2 - y^2} = 1 - \frac{x^2 - 2xy}{(2n\pi - y)(2n\pi + y)} = \left(1 + \frac{x}{2n\pi - y}\right)\left(1 - \frac{x}{2n\pi + y}\right),$$

przeto otrzymujemy:

$$a_n = \left(1 - \frac{x}{2n\pi - y}\right)\left(1 + \frac{x}{2n\pi + y}\right)\left(1 + \frac{x}{2n\pi - y}\right)\left(1 - \frac{x}{2n\pi + y}\right) = \left(1 - \frac{x^2}{(2n\pi - y)^2}\right)\left(1 - \frac{}{(2n\pi}\right.$$

zatem, ostatecznie, szukane rozwinięcie w postaci iloczynu nieskończonego:

$$\frac{\cos x - \cos y}{1 - \cos y} = \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(2\pi - y)^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(2\pi + y)^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{x^2}{(2n\pi - y)^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(2n\pi +}\right.$$

21. Rozwijanie funkcyj hiperbolicznych na iloczyny nieskoń Iloczyny nieskończone, przedstawiające funkcye goniometryczne $\sin x$ i są bezwarunkowo zbieżne dla wszelkiego skończonego x, prowadzą przy urojonych wartościach zmiennej niezależnej x, do iloczynów ni czonych, przedstawiających funkcye hiperboliczne tej zmiennej.

$$\cos x = \left\{1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{m}}{\sin^2 \frac{\pi}{2m}}\right\}\left\{1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{m}}{\sin^2 \frac{3\pi}{2m}}\right\}\dots\left\{1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{m}}{\sin^2 \frac{(2m-1)\pi}{2m}}\right\},$$

z którego, dla nieskończenie wielkiego m, dostajemy wzór, przedstawiający funkcyę $\cos x$, w postaci iloczynu nieskończonego, kształtu:

$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\dots\left(1 - \frac{4x^2}{(2r+1)^2\pi^2}\right)\dots \quad (18)$$

czyli:

$$\cos x = \prod_{n=0}^{n=\infty}\left(1 - \frac{4x^2}{(2n+1)^2\pi^2}\right). \quad (18')$$

18. Wzór na $\cos x$, możemy otrzymać wprost z wzoru: $\sin x$. Na podstawie relacyi:

$$\cos x = \frac{\sin 2x}{2\sin x}.$$

otrzymujemy bowiem:

$$\cos x = \frac{2x\left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\dots\left(1 - \frac{4x^2}{n^2\pi^2}\right)\dots}{2x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\dots\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\dots},$$

a stąd, po opuszczeniu wspólnych czynników, dostajemy wzór:

$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\dots\left(1 - \frac{4x^2}{(2r+1)^2\pi^2}\right)\dots$$

19. **Wzór Wallisa.** Jeżeli we wzorze:

$$\sin x = x\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\dots\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\dots$$

przedstawiającym funkcyą $\sin x$, w postaci iloczynu nieskończonego, położymy: $x = \frac{\pi}{2}$, otrzymamy równanie:

$$1 = \frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1 - \frac{1}{2^2 n^2}\right) = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{2^2.4}\right)\left(1 - \frac{1}{2^2.9}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{2^2.n^2}\right)\dots$$

Zastępując w każdym czynniku różnicę kwadratów dwu liczb przez iloczyn sumy i różnicy tych liczb, a więc, kładąc:

$$1 - \frac{1}{2^2 n^2} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)\left(1 + \frac{1}{2n}\right) = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n},$$

otrzymamy powyższą równość w postaci:

$$1 = \frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \dots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n} \dots$$

a stąd wzór, przedstawiający wartość: $\frac{\pi}{2}$ w postaci iloczynu nieskończonego, kształtu:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \dots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \dots \quad (19)$$

znany pod nazwą wzoru Wallisa.

20. Przedstawianie funkcyj goniometrycznych ilukolwiek zmiennych w postaci nieskończonych iloczynów. Za pośrednictwem wzorów, przedstawiających funkcye: $\sin x$ i $\cos x$ w postaci nieskończonych iloczynów, możemy rozmaite funkcye goniometryczne ilukolwiek zmiennych, dające się sprowadzić do iloczynów, lub ilorazów funkcyj sinus i cosinus, wyrazić pod postacią nieskończonych iloczynów.

Weźmy n. p. funkcyę:

$$z=\frac{\cos x-\cos y}{1-\cos y}.$$

Ponieważ tu: $\cos x-\cos y=2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2}$, $1-\cos y=2\sin^2\frac{y}{2}$, możemy więc daną funkcyę przedstawić w postaci:

$$z=\frac{\sin\frac{x+y}{2}.\sin\frac{y-x}{2}}{\sin^2\frac{y}{2}}.$$

Wobec tego otrzymujemy jej rozwinięcie na iloczyn nieskończony kształtu:

$$z=\frac{\frac{x+y}{2}.\frac{y-x}{2}.\left(1-\frac{(x+y)^2}{4\pi^2}\right).\left(1-\frac{(y-x)^2}{4\pi^2}\right)...\left(1-\frac{(x+y)^2}{4n^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{(y-x)^2}{4n^2\pi^2}\right)...}{\frac{y^2}{4}.\left(1-\frac{y^2}{4\pi^2}\right)^2\left(1-\frac{y^2}{4.4\pi^2}\right)^2\left(1-\frac{y^2}{9.4\pi^2}\right)^2...\left(1-\frac{y^2}{n^2.4\pi^2}\right)...},$$

gdzie zachowany jest naturalny porządek czynników.

Pierwsze dwa czynniki dają iloczyn:

$$a_1=\frac{\frac{x+y}{2}.\frac{y-x}{2}}{\frac{y^2}{4}}=\frac{y^2-x^2}{y^2}=1-\frac{x^2}{y^2},$$

następne zaś możemy co dwa sprowadzić do postaci:

$$a_n=\frac{\left(1-\frac{(x+y)^2}{n^2.4\pi^2}\right)\left(1-\frac{(y-x)^2}{n^2.4\pi^2}\right)}{\left(1-\frac{y^2}{n^2.4\pi^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{n^2.4\pi^2}\right)}=\frac{4n^2\pi^2-x^2-y^2-2xy}{4n^2\pi^2-y^2}.\frac{4n^2\pi^2-y^2-x^2+2xy}{4n^2\pi^2-y^2},$$

czyli:

$$a_n=\left(1-\frac{x^2+2xy}{4n^2\pi^2-y^2}\right)\left(1-\frac{x^2-2xy}{4n^2\pi^2-y^2}\right),$$

a że:

$$1-\frac{x^2+2xy}{4n^2\pi^2-y^2}=1-\frac{x^2+2xy}{(2n\pi-y)(2n\pi+y)}=\left(1-\frac{x}{2n\pi-y}\right)\left(1+\frac{x}{2n\pi+y}\right),$$

$$1-\frac{x^2-2xy}{4n^2\pi^2-y^2}=1-\frac{x^2-2xy}{(2n\pi-y)(2n\pi+y)}=\left(1+\frac{x}{2n\pi-y}\right)\left(1-\frac{x}{2n\pi+y}\right),$$

przeto otrzymujemy:

$$a_n=\left(1-\frac{x}{2n\pi-y}\right)\left(1+\frac{x}{2n\pi+y}\right)\left(1+\frac{x}{2n\pi-y}\right)\left(1-\frac{x}{2n\pi+y}\right)=\left(1-\frac{x^2}{(2n\pi-y)^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(2n\pi+y)^2}\right),$$

zatem, ostatecznie, szukane rozwinięcie w postaci iloczynu nieskończonego:

$$\frac{\cos x-\cos y}{1-\cos y}=\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(2\pi-y)^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(2\pi+y)^2}\right)...\left(1-\frac{x^2}{(2n\pi-y)^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(2n\pi+y)^2}\right)...$$

21. Rozwijanie funkcyj hiperbolicznych na iloczyny nieskończone. Iloczyny nieskończone, przedstawiające funkcye goniometryczne $\sin x$ i $\cos x$, są bezwarunkowo zbieżne dla wszelkiego skończonego x, prowadzą więc przy urojonych wartościach zmiennej niezależnej x, do iloczynów nieskończonych, przedstawiających funkcye hiperboliczne tej zmiennej.

24) $\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\ldots$

25) $\left(1-\frac{1}{a+b}\right)\left(1-\frac{1}{a-b}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{a+nb}\right)\left(1-\frac{1}{a-nb}\right)$.

26) $\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}}\right)\ldots$

27) $\left(1+\frac{1}{2}\log 2\right)\left(1+\frac{2}{3}\log\frac{3}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n+1}\log\frac{n+1}{n}\right)$.

28) $\left[1+\binom{p}{1}\binom{q}{1}\right]\cdot\left[1+\binom{p}{2}\binom{q}{2}\right]\ldots\left[1+\binom{p}{n}\binom{q}{n}\right]\ldots$

29) $(1+\sin 1)\left(1-\sin\frac{1}{2}\right)\left(1+\sin\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+(-1)^{n+1}\sin\frac{1}{n}\right)$.

30) $(1-\cos 1)\left(1+\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\cos\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+(-1)^{n}\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}\right)$.

31) $(1+\operatorname{tang} 1)\left(1-\operatorname{tang}\frac{1}{2}\right)\ldots\left(1+(-1)^{n+1}\operatorname{tang}\frac{1}{n}\right)\ldots$

32) $(1+1)\left(1-\frac{1}{2}\right)(1+2)\left(1-\frac{1}{2}\right)\ldots(1+n)\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots$

33) $(1+1)\left(1-\frac{1}{2}\right)(1+1)\left(1-\frac{2}{3}\right)\ldots(1+1)\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\ldots$

Wyprowadzić następujące przekształcenia iloczynów nieskończonych, na szeregi:

34) $$(1+xy)(1+x^2y)(1+x^3y)\ldots=1+\frac{x}{1-x}y+\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}y^2+$$
$$+\frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}y^3+\ldots+\frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^n)}y^n+\ldots$$

35) $$(1+xy)(1+x^3y)(1+x^5y)\ldots=1+\frac{x}{1-x^2}y+\frac{x^4}{(1-x^2)(1-x^4)}y^2+$$
$$+\frac{x^9}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)}\cdot y^3+\ldots+\frac{x^{n^2}}{(1-x^2)(1-x^4)\ldots(1-x^{2n})}y^n+\ldots$$

36) $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})\ldots=1+x+x^2+x^3+\ldots$

37) $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots=1-x-x^2+x^5+x^7+\ldots+(-1)^n x^{\frac{3n^2-n}{2}}+(-1)^n x^{\frac{3n^2+n}{2}}+\ldots$

38) **Wykazać**, że iloczyn nieskończony $\prod_{n=1}^{n=\infty}[1+g_n(x)]$, w którym:

$$g_i(x)=a_{i1}x+a_{i2}x^2+\ldots+a_{im}x^m+\ldots$$

jest dla wszystkich wartości x, o bezwzględnej wartości $x<\rho$ bezwarunkowo zbieżny, jeżeli szereg: $|g_1(x)|+|g_2(x)|+\ldots+|g_n(x)|+\ldots$ jest dla $x<\rho$ zbieżny.

39) **Wykazać**, że gdy szereg: $\sum_{n=1}^{n=\infty}|g_n(x)|$ jest w zakresie $|x|<\rho$ jednostajnie zbieżny, natenczas także iloczyn $\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+|g_n(x)|)$ jest w tym zakresie jednostajnie zbieżny, t. z., że wówczas da się zawsze liczbę n tak wyznaczyć, że będzie:

$$|F_{n+1}(x).F_{n+2}(x)\ldots F_{n+r}(x)|-1<\varepsilon,$$

gdzie $F_n(x)=1+|g_n(x)|$, a ε przedstawia dowolnie małą liczbę niezależną od x.

40) Dowieść, że gdy dla wszelkich wartości x w zakresie $x<\rho$, jest $|g_n(x)|<A_n$ a szereg nieskończony $A_1+A_2+\ldots+A_n+\ldots$ jest zbieżny, natenczas iloczyn nieskończony $\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+g_n(x))$ jest w tym zakresie jednostajnie zbieżny.

8) Dowieść, że iloczyn nieskończony:

$$\Pi a_n = a_1 a_2 \dots a_n \dots = (1+u_1)(1+u_2)\dots(1+u_n)\dots,$$

posiada skończoną wartość graniczną, czyli jest zbieżny, gdy dla każdej dowolnie małej wartości η da się wyznaczyć takie n, że dla każdego p będzie:

$$|P_{n+p} - 1| < \eta, \text{ gdzie } P_{n+p} = \frac{\Pi_{n+p}}{\Pi_n},$$

w przeciwnym przypadku iloczyn nieskończony Πa_n, albo dąży do zera, albo do nieskończoności, czyli jest rozbieżnym do zera, lub do nieskończoności, albo nie posiada żadnej granicy oznaczonej, czyli jest iloczynem oscylacyjnym.

9) Dowieść, że koniecznym i dostatecznym warunkiem zbieżności iloczynu:

$$(1+u_1)(1+u_2)\dots(1+u_n)\dots \text{ jest } \lim_{n=\infty} n^{1+\alpha} u_n = 0,\ \alpha > 0$$

10) Dowieść, że iloczyn: $(1+u_1)(1+u_2)\dots(1+u_n)\dots$ jest dla wszelkich liczb rzeczywistych: $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ rozbieżny do zera, gdy szereg: $u_1+u_2+\dots+u_n+\dots$ jest zbieżny, zaś szereg $u_1^2+u_2^2+\dots+u_n^2+\dots$ rozbieżny (co oczywiście tylko możliwe, gdy liczby: $u_1, u_2, \dots, u_n$ nie mają tych samych znaków).

11) Dowieść, że iloczyn nieskończony: $(1+u_1)(1+u_2)\dots(1+u_n)\dots$ jest rozbieżny do zera, jeżeli szereg: $u_1+u_2+\dots+u_n+\dots=-\infty$, lub gdy szereg: $u_1+u_2+\dots+u_n+\dots$ jest oscylacyjny, a przytem szereg: $u_1^2+u_2^2+\dots+u_n^2+\dots$ jest rozbieżny.

12) Dowieść, że iloczyn nieskończony: $(1+u_1)(1+u_2)\dots(1+u_n)\dots$ jest rozbieżny, do nieskończoności, gdy szereg: $u_1+u_2+\dots+u_n+\dots=+\infty$, a przytem szereg: $u_1^2+u_2^2+\dots+u_n^2+\dots$ jest zbieżny.

13) Dowieść, że iloczyn nieskończony: $(1+u_1)(1+u_2)\dots(1+u_n)\dots$ jest oscylacyjnym, gdy szereg: $u_1+u_2+\dots+u_n+\dots$ jest oscylacyjnym, a przytem szereg: $u_1^2+u_2^2+\dots+u_n^2+\dots$ jest szeregiem zbieżnym.

14) Dowieść, że iloczyn: $(1+u_1)(1+u_2)\dots(1+u_n)\dots$ w którym $u_n = a_n + b_n i$ dąży do granicy skończonej, gdy szereg: $|u_1|+|u_2|+\dots+|u_n|+\dots$ jest zbieżny.

15) Dowieść, że iloczyn nieskończony: $\Pi(1-u_n)=(1-u_1)(1-u_2)\dots(1-u_n)\dots$, w którym liczby u_n (przynajmniej od pewnego n począwszy) są wszystkie dodatnie, przyczem $\lim_{n=\infty} u_n=0$, ma w przypadku, gdy szereg malejący: $u_1+u_2+\dots+u_n+\dots$ jest rozbieżnym, wartość graniczną, równą zeru, czyli jest iloczynem rozbieżnym do zera, podczas gdy iloczyn: $\Pi(1+u_n)=(1+u_1)(1+u_2)\dots(1+u_n)\dots$ ma w tych warunkach wartość graniczną, równą nieskończoności, czyli jest iloczynem rozbieżnym do nieskończoności.

16) Jeżeli szereg $|u_1|+|u_2|+\dots+|u_n|+\dots$ jest zbieżny, dowieść, że wówczas także iloczyny: $P=(1+|u_1|).(1+|u_2|)\dots(1+|u_n|)\dots$, $Q=(1-|u_1|).(1-|u_2|)\dots(1-|u_n|)\dots$, zbliżają się do pewnej dodatniej granicy, pierwszy rosnąc, drugi malejąc.

17) Jeżeli szereg: $|u_1|+|u_2|+\dots+|u_n|+\dots$ jest rozbieżny, wykazać, że wówczas iloczyny P i Q (ćw. 16.) są rozbieżne, przyczem: $\lim_{n=\infty} P_n=\infty$, $\lim_{n=\infty} Q_n=0$.

18) Jeżeli iloczyn: $PQ=(1+u_1)(1-u_1)\dots(1+u_n)(1-u_n)\dots$ jest zbieżny, pomimo tego że iloczyny P i Q (ćw. 16.) są rozbieżne, wykazać, że wówczas zbieżność iloczynu PQ jest tylko warunkowa, a wartość iloczynu zależy od porządku czynników. Iloczyn $(1-u_1^2)(1-u_2^2)\dots$ będzie już bezwarunkowo zbieżnym.

Zbadać pod względem zbieżności i rozbieżności następujące iloczyny nieskończone:

19) $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\dots$ 20) $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots$

21) $\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\dots\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\dots$

22) $\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\sqrt{1+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{3}}\dots\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}\dots$

23) $\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\dots\left(1-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)\dots$

55) Wykazać, że iloczyn nieskończony $\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)e^{\frac{x}{n}}$ jest bezwarunkowo zbieżny a wszelkiej skończonej wartości zmiennej x.

Dowieść, że:

56) $\frac{1-q^2}{1-q}\cdot\frac{1-q^4}{1-q^3}\cdots\frac{1-q^{2n}}{1-q^{2n-1}}\cdots=1+q+q^3+q^6+q^{10}+q^{15}+\ldots$

57) $\frac{1-q}{1+q}\cdot\frac{1-q^2}{1+q^2}\cdot\frac{1-q^3}{1+q^3}\cdots\frac{1-q^n}{1+q^n}\cdots=1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}\ldots$

58) $(1-x)(1-qx)(1-q^2x)\ldots(1-q^n x)\ldots=1-\frac{1}{1-q}x+\frac{q}{(1-q)(1-q^2)}x^2-$
$-\frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}x^3+\ldots$

59) $\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-qx}\cdots\frac{1}{1-q^n x}\cdots=1+\frac{1}{1-q}x+\frac{q}{(1-q)(1-q^2)}x^2+$
$+\frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}x^3+\ldots$

60) $\frac{1-ax}{1-bx}\cdot\frac{1-aqx}{1-bqx}\cdot\frac{1-aq^2x}{1-bq^2x}\cdots\frac{1-aq^n x}{1-bq^n x}\cdots=1+\frac{b-a}{1-q}x+\frac{(b-a)(b-aq)}{(1-q)(1-q^2)}x^2+$
$+\frac{(b-a)(b-aq)(b-aq^2)}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}x^3+\ldots$

Wyprowadzić następujące rozwinięcia:

61) $e^x-1=x\,e^{1/2 x}\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1+\frac{x^2}{4n^2\pi^2}\right).$

62) $\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{x}{y}\cdot\frac{\pi^2-x^2}{\pi^2-y^2}\cdot\frac{4\pi^2-x^2}{4\pi^2-y^2}\cdots\frac{n^2\pi^2-x^2}{n^2\pi^2+x^2}\cdots$

63) $\cos y+\operatorname{cotg} x\sin y=\left(1+\frac{y}{x}\right)\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1-\frac{2xy+y^2}{n^2\pi^2-x^2}\right).$

Rozwiązania XXVII. 1)—8) $\Pi(a_n)=e^{\Sigma\log a_n}$. 19) Iloczyn zbieżny do 1. 20) rozbieżny do zera. 21) zbieżny. 22) zbieżny. 23) 0. 24) 0. 25) zbieżny dla wszelkich a i b, pod warunkiem, że iloraz a/b nie jest liczbą całkowitą. 26) 0. 27) zbieżny. 28) zbieżny. 29) 0. 30) zbieżny. 31) rozbieżny. 32) 0. 33) rozbieżny.

Literatura. Dr. Otto Biermann. Elemente der höheren Mathematik. Vorlesungen zur Vorbereitung des Studiums der Differentialrechnung, Algebra und Functionentheorie Leipzig 1895. Johann Lieblein. Sammlug von Aufgaben aus der algebraischen Analysis. Prag. 1867. Dr. Otto Stolz und Dr. J. Anton Gmeiner. Einleitung in die Functionentheorie. In 2 Abtheilungen. Lepzig 1905.

Tematy do rozprawek naukowych:

1. O zbieżności i rozbieżności iloczynów nieskończonych.
2. O iloczynach nieskończonych, których czynniki zależą od jednej zmiennej.
3. O rozkładaniu funkcyj przestępnych ułamkowych na ułamki częściowe.

41) Wyprowadzić wzór Wallisa:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdots$$

42) Wykazać, że wzór Wallisa, przedstawiony w postaci:

$$\frac{2}{\pi}=\frac{1}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdots\frac{(2n-1)^2.2n+1}{(2n)^2}\cdots$$

da się sprowadzić do szeregu:

$$\frac{2}{\pi}=1-\frac{1}{2^2}-\frac{1^2.3}{2^2.4^2}-\cdots-\frac{1^2.3^2.5^2\ldots(2n-3)^2.(2n-1)}{2^2.4^2.6^2\ldots 2n^2}-\cdots$$

Wyprowadzić następujące rozwinięcia danych funkcyj na iloczyny nieskończone:

43) $\sin\pi x=\pi x\left(1-\frac{x^2}{1}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\cdots$

44) $\cos\pi x=\left(1-\frac{4x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{3^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{5^2}\right)\cdots\left(1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2}\right)\cdots$

45) $\cos\frac{1}{2}x=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)\cdots$

46) $\frac{\cos x-\cos\alpha}{1-\cos\alpha}=\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(2\pi-\alpha)^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(2\pi+\alpha)^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(4\pi-\alpha)^2}\right).$
$.\left(1-\frac{x^2}{(4\pi+\alpha)^2}\right)\cdots$

47) $\frac{\cos x+\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\left(1-\frac{x^2}{(\pi-\alpha)^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(\pi+\alpha)^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(3\pi-\alpha)^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(3\pi+\alpha)^2}\right)\cdots$

48) $\frac{\sin x+\sin\alpha}{\sin\alpha}=\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)\left(1+\frac{x}{\pi-\alpha}\right)\left(1-\frac{x}{\pi+\alpha}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi-\alpha}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi+\alpha}\right)\cdots$

49) $\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\left(1+\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\cdots\left(1+\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)\cdots$

50) $\frac{e^x-e^{-x}}{2}=x\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots\left(1+\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\cdots$

51) Dowieść, że iloczyn $(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n)\ldots$ jest bezwarunkowo zbieżnym, gdy istnieje dodatna, choćby bardzo mała, lecz skończona liczba α, że:

w razie $\lim\limits_{n=\infty} u_n=0$, będzie zarazem: $\lim\limits_{n=} n^{1+\alpha}u_n=0$,

" " $\lim\limits_{n=\infty} n.u_n=0$, " " $\lim\limits_{n=\infty} n.(\lg n)^{1+\alpha}.u_n=0$,

" " $\lim\limits_{n=\infty} n.\lg n.u_n=0$ " " $\lim\limits_{n=\infty} n.\lg n.(\lg\lg n)^{1+\alpha}.u_n=0$,

" " $\lim\limits_{n=\infty} n\lg n.\lg\lg n.u_n=0$, " $\lim\limits_{n=\infty} n.\lg n\lg\lg n(\lg\lg\lg n)^{1+\alpha}.u_n=0$

52) Dowieść, że iloczyn $(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n)\ldots$ jest bezwarunkowo zbieżnym, gdy

$\lim\limits_{n=\infty}\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|>1$, a w razie $\lim\limits_{n=\infty}\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|=1$, gdy

$\lim\limits_{n=\infty} n\left\{\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|-1\right\}>1$, a w razie $\lim\limits_{n=\infty} n\left\{\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|-1\right\}=1$, gdy:

$\lim\limits_{n=\infty} n\lg n\left\{\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|-1\right\}>1$, a razie $\lim n\lg n\left\{\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|-1\right\}=1$, gdy:

$\lim\limits_{n=\infty} n\lg n\lg\lg n\left\{\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|-1\right\}>1$, i t. d.

53) Wykazać, że szereg: $\Sigma\log\Pi(1+u_n)=\Sigma u_\lambda-\frac{1}{2}\Sigma u^2_\lambda+\ldots$ jest zbieżny lub rozbieżny wraz z iloczynem: $\Pi(1+u_n)$.

54) Dowieść, że iloczyn $\frac{1.2\ldots(n-1)n^x}{x(x+1)(x+n-1)}$, jest bezwarunkowo zbieżny dla wszelkich wartości zmiennej x z wyjątkiem wartości całkowitych, ujemnych.

55) Wykazać, że iloczyn nieskończony $\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)e^{\frac{x}{n}}$ jest bezwarunkowo zbieżny wszelkiej skończonej wartości zmiennej x.

Dowieść, że:

56) $\frac{1-q^2}{1-q}\cdot\frac{1-q^4}{1-q^3}\cdots\frac{1-q^{2n}}{1-q^{2n-1}}\cdots=1+q+q^3+q^6+q^{10}+q^{15}+\ldots$

57) $\frac{1-q}{1+q}\cdot\frac{1-q^2}{1+q^2}\cdot\frac{1-q^3}{1+q^3}\cdots\frac{1-q^n}{1+q^n}\cdots=1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}\ldots$

58) $(1-x)(1-qx)(1-q^2x)\ldots(1-q^nx)\ldots=1-\frac{1}{1-q}x+\frac{q}{(1-q)(1-q^2)}x^2-$
$$-\frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}x^3+\ldots$$

59) $\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-qx}\cdots\frac{1}{1-q^nx}\cdots=1+\frac{1}{1-q}x+\frac{q}{(1-q)(1-q^2)}x^2+$
$$+\frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}x^3+\ldots$$

60) $\frac{1-ax}{1-bx}\cdot\frac{1-aqx}{1-bqx}\cdot\frac{1-aq^2x}{1-bq^2x}\cdots\frac{1-aq^nx}{1-bq^nx}\cdots=1+\frac{b-a}{1-q}x+\frac{(b-a)(b-aq)}{(1-q)(1-q^2)}x^2+$
$$+\frac{(b-a)(b-aq)(b-aq^2)}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}x^3+\ldots$$

Wyprowadzić następujące rozwinięcia:

61) $e^x-1=xe^{\frac{1}{2}x}\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1+\frac{x^2}{4n^2\pi^2}\right).$

62) $\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{x}{y}\cdot\frac{\pi^2-x^2}{\pi^2-y^2}\cdot\frac{4\pi^2-x^2}{4\pi^2-y^2}\cdots\frac{n^2\pi^2-x^2}{n^2\pi^2+x^2}\cdots$

63) $\cos y+\operatorname{cotg}x\sin y=\left(1+\frac{y}{x}\right)\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1-\frac{2xy+y^2}{n^2\pi^2-x^2}\right).$

Rozwiązania XXVII. 1)—8) $\Pi(a_n)=e^{\Sigma\log a_n}$. 19) Iloczyn zbieżny do 1. 20) rozbieżny do zera. 21) zbieżny. 22) zbieżny. 23) 0. 24) 0. 25) zbieżny dla wszelkich a i b, pod warunkiem, że iloraz a/b nie jest liczbą całkowitą. 26) 0. 27) zbieżny. 28) zbieżny. 29) 0. 30) zbieżny. 31) rozbieżny. 32) 0. 33) rozbieżny.

Literatura. Dr. Otto Biermann. Elemente der höheren Mathematik. Vorlesungen zur Vorbereitung des Studiums der Differentialrechnung, Algebra und Functionentheorie Leipzig 1895. Johann Lieblein. Sammlug von Aufgaben aus der algebraischen Analysis. Prag. 1867. Dr. Otto Stolz und Dr. J. Anton Gmeiner. Einleitung in die Functionentheorie. In 2 Abtheilungen. Lepzig 1905.

Tematy do rozprawek naukowych:

1. O zbieżności i rozbieżności iloczynów nieskończonych.
2. O iloczynach nieskończonych, których czynniki zależą od jednej zmiennej.
3. O rozkładaniu funkcyj przestępnych ułamkowych na ułamki częściowe.

Wykład XXVIII.

Funkcye peryodyczne i rozwijanie ich na szeregi i iloczyny nieskończone.

1. Funkcye jednoperyodyczne. Funkcya jednej zmiennej niezależnej, posiadająca tę własność, że nie zmienia swej wartości, gdy do wartości zmiennej niezależnej dodamy pewną stałą liczbę a nazywa się funkcyą peryodyczną.

Liczbę stałą a, nazywamy peryodem tej funkcyi. Jeżeli liczba a jest peryodem pewnej funkcyi, to jest nią także liczba $k \cdot a$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą, dodatnią, lub ujemną.

Skoro bowiem: $F(x+a)=F(x)$, wówczas: $F(x+2a)=F(x+a)$, a więc także: $F(x+2a)=F(x)$, ogólnie:

$$F(x+k.\, a)=F(x),\ k=\pm 1,\ \pm 2, \ldots$$

Jeżeli więc liczba a jest peryodem pewnej funkcyi, to jest nim także wszelka całkowita wielokrotność tej liczby.

Między liczbami, które dodane do wartości zmiennej niezależnej nie zmieniają wartości funkcyi, jest więc jedna bezwzględnie biorąc najmniejsza i tę uważamy zwykle za właściwy peryod funkcyi, a funkcyę, której odpowiada jedna taka bezwzględnie najmniejsza liczba a, nazywamy funkcyą jednoperyodyczną.

Niech będzie $F(x)$ funkcyą jednoperyodyczną o peryodzie a, natenczas

$$F(x+ka)=F(x),\ (k=\pm 1,\ \pm 2, \ldots)$$

Przypuśćmy, że ta funkcya $F(x)$, staje się zerem dla $x=x_0$, że więc $F(x_0)=0$, natenczas stanie się ona zerem także dla $x=x_0+ka$, $(k=\pm 1, \pm 2 \ldots)$.

Funkcye jednoperyodyczne, mające jedno miejsce zerowe x_0, mają ich więc nieskończenie wiele, w postaci: $x_0+k.a$, $(k=\pm 1,\ \pm 2, \ldots)$.

Peryod a może być liczbą rzeczywistą, urojoną, lub zespoloną. Miejsca zerowe funkcyi jednoperyodycznej, wyobrażają na płaszczyźnie liczbowej zmiennej urojonej szereg punktów, położonych w równych odstępach, na jednej linii prostej.

2. Elementarna funkcya jednoperyodyczna, bez miejsc zerowych. Typową funkcyę jednoperyodyczną bez miejsc zerowych, przedstawia funkcya wykładnicza e^x, określona szeregiem potęgowym, bezwarunkowo i bezustannie zbieżnym, w postaci:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \qquad (1)$$

której peryodem jest liczba urojona $2\pi i$. (T. I. str. 595. art. 7.).

Funkcya wykładnicza e^x nie staje się zerem dla żadnej skończonej wartości zmiennej x, jest dla wszelkich wartości rzeczywistych x dodatnią i rzeczywistą, a tylko dla $x=0$ ma wartość $=1$, czyli e^x przybiera wszelkie wartości dodatnie od 0 (dla $x=-\infty$) do $+\infty$ (dla $x=+\infty$). Dla urojonych wartości $\alpha+\beta i$ zmiennej niezależnej x, funkcya e^x ma wartość bezwzględną: $|e^{\alpha+\beta i}|=|e^\alpha|.|e^{\beta i}|$ a że $|e^{\beta i}|=|\cos\beta+i\sin\beta|=1$, więc $|e^{\alpha+\beta i}|=|e^\alpha|=e^\alpha$, zależną jedynie od części rzeczywistej α. W nieskończoności posiada funkcya e^x miejsce istotnie osobliwe, w którem otrzymuje wszelkie możliwe wartości. Oznaczając to miejsce przez $\alpha+\beta i$, z warunkiem: $|\alpha+\beta i|=\infty$, i mając na uwadze, że $e^{+\infty}=+\infty$, $e^{-\infty}=0$, $|e^{\beta i}|=1$, przy skończonem lub nieskończonem a rzeczywistem β, otrzymujemy w tem miejscu następujące wartości:

1. Jeżeli $\alpha=+\infty$, β dowolnie skończone, natenczas jest $e^x=e^{\infty+\beta i}=e^\infty.e^{\beta i}=\infty$ a więc $e^x=\infty$.

2. Jeżeli $\alpha=-\infty$, β dowolnie skończone lub nieskończone, natenczas jest: $e^x=e^{-\infty+\beta i}=e^{-\infty}.e^{\beta i}=0$, a więc $e^x=0$.

3. Jeżeli α dowolnie skończone, $\beta=\pm\infty$, natenczas jest:

$$e^x=e^{\alpha+\infty.i}=e^\alpha.e^{\pm\infty i}=e^\alpha.(\cos\infty\pm i\sin\infty).$$

Ponieważ jednak $\cos\infty$ i $\sin\infty$ są nieoznaczone, bo ∞ może być uważaną jako nieskończenie wielka wielokrotność liczby 2π, powiększona o zupełnie nieoznaczoną liczbę, obraną w granicach od 0 do 2π, przeto e^x otrzymuje wszelką wartość zespoloną o bezwzględnej wartości e^α, leżącej między zerem (dla $\alpha=-\infty$), a nieskończonością (dla $\alpha=+\infty$).

4. Jeżeli $\alpha=+\infty$, $\beta=\pm\infty$, natenczas:

$$e^x=e^{\infty\pm\infty i}=e^\infty.e^{\pm\infty i}=\infty.e^{\pm\infty i}=\infty,$$

a więc e^x otrzymuje wartość nieskończenie wielką.

5. Jeżeli $\alpha=-\infty$, $\beta=\pm\infty$, natenczas:

$$e^x=e^{-\infty\pm\infty i}=e^{-\infty}.e^{\pm\infty i}=0.e^{\pm\infty i}=0,$$

a więc e^x otrzymuje wartość równą zeru.

Przy pomocy funkcyi wykładniczej e^x, mającej peryod $2\pi i$, możemy z łatwością utworzyć funkcyę jednoperyodyczną $F(x)$, mającą dany peryod ω. Funkcya e^{ax} ma peryod $\frac{2\pi i}{a}$, połóżmy więc: $\frac{2\pi i}{a}=\omega$, a więc $a=\frac{2\pi i}{\omega}$, a otrzymamy najprostszą szukaną funkcyę jednoperyodyczną o peryodzie ω, w postaci:

$$F(x)=e^{\frac{2\pi ix}{\omega}}=\cos\frac{2\pi x}{\omega}+i\sin\frac{2\pi x}{\omega},$$

jest nią więc zarówno funkcya $\cos\frac{2\pi x}{\omega}$, jak funkcya $\sin\frac{2\pi x}{\omega}$.

Związek funkcyi wykładniczej e^x z funkcyami goniometrycznemi, określony wzorem: $e^{xi}=\cos x+i\sin x$ i analogiczny związek z funkcyami hiperbolicznemi, określony wzorem: $e^x=\cos\text{hip}\,x+\sin\text{hip}\,x$, dozwala, na podstawie peryodyczności funkcyi wykładniczej e^x, wyprowadzić peryodyczność, zarówno funkcyj goniometrycznych, jak funkcyj hiperbolicznych oraz wszelkich funkcyj, wymiernie z nich utworzonych a zarazem wyznaczyć ich miejsca zerowe na płaszczyźnie zmiennej urojonej.

3. Peryody i miejsca zerowe funkcyj goniometrycznych i hiperbolicznych. Funkcye goniometryczne $\sin x$ i $\cos x$ mają, na podstawie określeń:

$$\sin x = \frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2},$$

peryod 2π, a funkcye hiperboliczne $\sin \text{hip}\, x$ i $\cos \text{hip}\, x$, mają znowu, na podstawie określeń:

$$\sin \text{hip}\, x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}, \quad \cos \text{hip}\, x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2},$$

peryod $2\pi i$.

Według powyższych określeń, miejsca zerowe funkcyi $\sin x$ wyznaczają się równaniem $e^{xi}-e^{-xi}=0$, czyli $e^{2xi}=1$, a więc przedstawiają się w postaci: $x=k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ tworząc szereg punktów: $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ w odstępie π na osi liczb rzeczywistych; miejsca zerowe funkcyi $\cos x$ określają się równaniem $e^{xi}+e^{-xi}=0$, czyli $e^{2xi}=-1$, a więc przedstawiają się w postaci: $x=\frac{(2k+1)}{2}\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, tworząc na osi liczb rzeczywistych szereg punktów: $\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$ w odstępie π.

Miejsca zerowe funkcyi $\sin \text{hip}\, x$ określone są równaniem $e^{x}-e^{-x}=0$, czyli $e^{2x}=1$, a więc przedstawiają się w postaci: $x=k\pi i$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, tworząc na osi liczb urojonych szereg punktów: $0, \pm\pi i, \pm 2\pi i, \ldots$ w odstępie π; miejsca zerowe funkcyi $\cos \text{hip}\, x$, określone są natomiast równaniem: $e^{x}+e^{-x}=0$, czyli $e^{2x}=-1$ i przedstawiają się w postaci: $x=\frac{(2k+1)}{2}\pi i$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, tworząc także na osi liczb urojonych szereg punktów: $\pm\frac{\pi}{2}i, \pm\frac{3}{2}\pi i, \ldots$ również w odstępie π.

Na podstawie wyznaczonych miejsc zerowych, odpowiadających tym funkcyom, możemy oprzeć rozwinięcia tych funkcyi na iloczyny nieskończone, wyprowadzone w poprzednim wykładzie, a z odpowiednich iloczynów nieskończonych wyprowadzić naodwrót peryodyczność odnośnych funkcyj.

4. Peryodyczność iloczynu nieskończonego, przedstawiającego funkcyę $\sin x$. Dla funkcyi $\sin x$, otrzymaliśmy iloczyn nieskończony:

$$\sin x = x \prod_{r=1}^{r=\infty}\left(1-\frac{x^2}{r^2\pi^2}\right). \tag{2}$$

Weźmy pod uwagę funkcyę:

$$F_n(x) = x \prod_{r=1}^{r=n}\left(1-\frac{x^2}{r^2\pi^2}\right), \tag{3}$$

mającą tę własność, że:

$$\lim_{n=\infty} F_n(x) = \lim_{n=\infty} x \prod_{r=1}^{r=n}\left(1-\frac{x^2}{r^2\pi^2}\right) = \sin x.$$

Funkcya ta przedstawia się w postaci:

$$F_n(x) = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),$$

czyli:

$$F_n(x) = \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\, x(x^2-\pi^2)(x^2-2^2\pi^2)\ldots(x^2-n^2\pi^2).$$

Kładąc: $x^2 - r^2\pi^2 = (x + r\pi)(x - r\pi)$, otrzymujemy:

$$F_n(x) = \frac{(-1)^n}{(n!)^2\pi^{2n}} x.(x+\pi)(x-\pi)(x+2\pi)(x-2\pi)\ldots(x+n\pi)(x-n\pi),$$

ięc także:

$$F_n(x) = \frac{(-1)^n}{(n!)^2\pi^{2n}} x.(x-\pi)(x-2\pi)\ldots(x-n\pi).(x+n\pi)\ldots(x+2\pi)(x+\pi).$$

Zastąpmy tu x przez $x+\pi$, a otrzymamy:

$$(x+\pi) = \frac{(-1)^n}{(n!)^2\pi^{2n}}(x+\pi).x(x-\pi)\ldots(x-(n-1)\pi).(x+(n+1)\pi)\ldots(x+3\pi)(x+2\pi).$$

li:

$$(x+\pi) = \frac{(-1)^n}{(n!)^2\pi^{2n}} x(x-\pi)\ldots(x-(n-1)\pi)(x-n\pi)(x+n\pi)\ldots(x+\pi).\frac{x+(n+1)\pi}{x-n\pi},$$

ięc:

$$F_n(x+\pi) = F_n(x).\frac{x+(n+1)\pi}{x-n\pi}. \qquad (4)$$

Przechodząc do granicy $n=\infty$, otrzymujemy stąd wzór:

$$\sin(x+\pi) = \sin x \lim_{n=\infty} \frac{x+(n+1)\pi}{x-n\pi},$$

e: $$\lim_{n=\infty} \frac{x+(n+1)\pi}{x-n\pi} = -1,$$

m otrzymujemy: $$\sin(x+\pi) = -\sin x,$$

ąd: $$\sin(x+2\pi) = -\sin(x+\pi),$$

li: $$\sin(x+2\pi) = \sin x,$$

wskazuje, że iloczyn nieskończony, przedstawiający funkcyę $\sin x$ ma yod 2π.

5. Punkt istotnie osobliwy funkcyj peryodycznych. Jeżeli funkcya pe-dyczna przyjmuje w pewnem miejscu x w skończoności pewną wartość, musi ona ze względu na warunek $F(x+n\omega) = F(x)$ tę samą wartość ymać także w miejscu nieskończenie dalekiem. Z tego wynika, że war- funkcyi peryodycznej w punkcie nieskończenie dalekim płaszczyzny bowej jest nieoznaczoną, funkcya peryodyczna otrzymuje więc w punkcie skończenie dalekim rozmaite wartości, czyli innemi słowy:

Wszelka funkcya peryodyczna ma w punkcie nieskończenie dalekim płaszczyzny bowej punkt istotnie osobliwy.

Jeżeli funkcya peryodyczna ma, oprócz koniecznego punktu istotnie bliwego w nieskończoności, jeszcze inny punkt istotnie osobliwy w pewnem ejscu $x = a$, to z powodu peryodyczności ma tych miejsc nieskończenie ele.

6. Ogólny sposób tworzenia funkcyj jednoperyodycznych. Niech będzie) dowolną funkcyą jednowartościową, całkowitą lub ułamkową, wymierną, b przestępną.

Połóżmy $x = \frac{\omega}{2\pi i}\log y$, a zatem: $y = e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$, natenczas otrzymamy z danej kcyi jednowartościowej zmiennej y:

$$f(y) = f\left(e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right) = F(x), \qquad (5)$$

jednowartościową funkcyę zmiennej x, kształtu: $F(x)=f\left(e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right)$, która, wob tego, że $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ jest peryodyczną funkcyą zmiennej x o peryodzie równym będzie również peryodyczną funkcyą zmiennej x o tymże peryodzie z czego wynika, że z jakiejkolwiek funkcyi jednowartościowej zmien niezależnej x, otrzymujemy funkcyę peryodyczną o peryodzie ω, je w danej funkcyi jednowartościowej, zastąpimy zmienną x przez $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$.

7. Niektóre uwagi o funkcyach całkowitych przestępnych. Szeregi b ustannie i bezwarunkowo zbieżne określają, jak wiemy, (patrz T. I. 556.) funkcye, zwane funkcyami całkowitemi przestępnemi.

Funkcye takie mają tylko jeden punkt istotnie osobliwy i leżący w nieskończoności, jak funkcye: e^x, $\sin x_1$, $\cos x^3$, i t. d.

Funkcye peryodyczne z jednym punktem istotnie osobliwym, leżąc w nieskończoności, należą zatem do funkcyj całkowitych przestępnych.

Niech będzie $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$ funkcyą całkowitą przestęp Wobec bezwarunkowej i bezustannej zbieżności przedstawiającego ją regu potęgowego, możemy ją przedstawić w postaci innych szereg bezwarunkowo i bezustannie zbieżnych, uporządkowanych według pot $(x-a)$, jak: $f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots$, gdzie, przy skończonem a_n jest liczbą skończoną.

Funkcya taka może, jak funkcya e^x, nie mieć wcale miejsc zerow

Gdyby a było miejscem zerowem tej funkcyi, wówczas byłoby $a_0=$ a funkcya $\frac{f(x)}{x-a}$, byłaby znowu funkcyą całkowitą przestępną.

Między wartościami zmiennej niezależnej x, bezwzględnie mniejsz od pewnej skończonej liczby ξ, będzie zawsze tylko skończona ilość taki miejsc, w których funkcya całkowita przestępna $f(x)$ staje się zerem.

Miejsca takie nazywamy miejscami zerowemi funkcyi.

Dadzą się one zestawić w pewnym porządku: a_1, a_2, a_3,... tak, że $a_{n+1} \geqq a_n$, przyczem: $\lim_{n=\infty} a_n=\infty$.

Niech będzie $x=a_1$ punktem zerowym funkcyi całkowitej przestęp $f(x)$, to otrzymujemy wówczas:

$$f(x)=(x-a_1)f_1(x),$$

gdzie $f_1(x)$ jest znowu funkcyą całkowitą przestępną. Gdyby funkcya f_1 miała skończoną ilość miejsc zerowych: $a_1, a_2,\ldots, a_n$, wówczas moglibyśm w analogiczny sposób przedstawić ją w postaci:

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)f_n(x),$$

gdzie funkcya $f_n(x)$ wyobraża znowu pewną funkcyę całkowitą przestęp

8. Funkcye całkowite przestępne o nieskończonej ilości miejsc zerow Niech będzie danych nieskończenie wiele miejsc: $a_1, a_2,\ldots, a_n$, w któr szukana funkcya całkowita przestępna miałaby swe miejsca zero Oznaczmy przez $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2,\ldots)$ pewne funkcye całkowite przestępne, mające wcale punktów zerowych w skończoności, jak np. $e^{g(x)}$, gdzie $g(x)$ je dowolną funkcyą całkowitą, wymierną lub przestępną i utwórzmy ilocz nieskończony kształtu:

$$\left(1-\frac{x}{a_1}\right)\varphi_1(x)\left(1-\frac{x}{a_2}\right)\varphi_2(x)\ldots\left(1-\frac{x}{a_n}\right)\varphi_n(x)\ldots$$

każemy, że przy odpowiednim wyborze funkcyj $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ żemy zawsze uczynić ten iloczyn bezwarunkowo i bezustannie zbieżnym.

Iloczyn ten będzie bezwarunkowo i bezustannie zbieżny, jeżeli szereg względnych wartości wyrazów $\frac{1}{a_n}$ jest zbieżny, gdy położymy $\varphi_n(x)=1$, wczas otrzymamy żądaną funkcyę, w postaci:

$$f(x)=\left(1-\frac{x}{a_1}\right)\left(1-\frac{x}{a_2}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{a_n}\right)\ldots$$

Przypuśćmy jednak, że szereg: $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}+\ldots$ nie jest bezwarunwo zbieżny, a natomiast istnieje pewna liczba m, taka, że szereg:

$$\left(\frac{1}{a_1}\right)^m+\left(\frac{1}{a_2}\right)^m+\ldots+\left(\frac{1}{a_n}\right)^m+\ldots$$

st bezwarunkowo zbieżny.

Połóżmy tedy:

$$g_n(x)=\frac{x}{a_n}+\frac{1}{2}\frac{x^2}{a_n{}^2}+\ldots+\frac{1}{m-1}\frac{x^{m-1}}{a_n{}^{m-1}},$$

i: $\varphi_n(x)=e^{g_n(x)}$, wówczas zauważymy, że iloczyn nieskończony:

$$\left(1-\frac{x}{a_1}\right)\varphi_1(x)\left(1-\frac{x}{a_2}\right)\varphi_2(x)\ldots\left(1-\frac{x}{a_n}\right)\varphi_n(x)\ldots$$

obec rozwinięcia:

$$-\log\left(1-\frac{x}{a_n}\right)=\frac{x}{a_n}+\frac{1}{2}\frac{x^2}{a_n{}^2}+\ldots+\frac{1}{m-1}\frac{x^{m-1}}{a_n{}^{m-1}}+\frac{1}{m}\frac{x^m}{a_n{}^m}+\ldots$$

temsamem wobec wzoru:

$$\left(1-\frac{x}{a_n}\right)\varphi_n(x)=e^{-\left(\frac{x}{a_n}+\ldots+\frac{1}{m-1}\frac{x^{m-1}}{a_n{}^{m-1}}+\frac{1}{m}\frac{x^m}{a_n{}^m}+\ldots\right)}\,e^{+\left(\frac{x}{a_n}+\ldots+\frac{1}{m-1}\frac{x^{m-1}}{a_n{}^{m-1}}\right)},$$

yli:

$$\left(1-\frac{x}{a_n}\right)\varphi_n(x)=e^{-\frac{1}{m}\frac{x^m}{a_n{}^m}-\frac{1}{m-1}\frac{x^{m+1}}{a_n{}^{m+1}}-\ldots}=e^{-\frac{1}{m}\frac{x^m}{a_n{}^m}(1+\varepsilon)}=1-\frac{1}{m}\frac{x^m}{a_n{}^m}(1+\varepsilon)+\ldots$$

będzie miał n-ty czynnik kształtu:

$$\left(1-\frac{x}{a_n}\right)\varphi_n(x)=1-\frac{1}{m}\frac{x^m}{a_n{}^m}(1+\delta),$$

dzie δ przedstawia liczbę skończoną, która z rosnącem n, bezwzględnie ięta, dąży do zera. Iloczyn nieskończony takich czynników, jest, wobec ożenia, że szereg: $\left(\frac{1}{a_1}\right)^m+\left(\frac{1}{a_2}\right)^m+\ldots$ jest zbieżnym, widocznie bezwarunro zbieżnym.

Przypuśćmy teraz, że szereg: $\left(\frac{1}{a_1}\right)^m+\left(\frac{1}{a_2}\right)^m+\ldots+\left(\frac{1}{a_n}\right)^m+\ldots$ jest dla lkiego skończonego m rozbieżnym.

Połóżmy tedy:

$$g_n(x)=\frac{x}{a_n}+\frac{1}{2}\frac{x^2}{a_n^2}+\ldots+\frac{1}{n-1}\frac{x^{n-1}}{a_n^{n-1}},\quad \varphi_n(x)=e^{g_n(x)},$$

a iloczyn nieskończony:

$$\left(1-\frac{x}{a_1}\right)\varphi_1(x)\left(1-\frac{x}{a_2}\right)\varphi_2(x)\ldots\left(1-\frac{x}{a_n}\right)\varphi_n(x)\ldots$$

będzie miał tedy n-ty czynnik, w postaci:

$$\left(1-\frac{x}{a_n}\right)\varphi_n(x)=\left(1-\frac{x}{a_n}\right).e^{\frac{x}{a_n}+\frac{1}{2}\frac{x^2}{a_n^2}+\ldots+\frac{1}{n-1}\frac{x^{n-1}}{a_n^{n-1}}},$$

której możemy także nadać kształt:

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)\varphi_n(x)=\left(1-\frac{x}{a_n}\right).e^{-\log\left(1-\frac{x}{a_n}\right)-\frac{1}{n}\frac{x^n}{a_n^n}-\frac{1}{n+1}\frac{x^{n+1}}{a_n^{n+1}}-\ldots}$$

$$=\left(1-\frac{x}{a_n}\right).\left(1-\frac{x}{a_n}\right)^{-1}.e^{-\frac{1}{n}\frac{x^n}{a_n^n}-\frac{1}{n+1}\frac{x^{n+1}}{a_n^{n+1}}-\ldots}$$

a więc otrzymujemy:

$$\left(1-\frac{x}{a_n}\right)\varphi_n(x)=1-\frac{1}{n}\frac{x^n}{a^n_n}\left(1+\delta_n\right),$$

gdzie δ_n przy rosnącem n zdąża do zera.

Ponieważ szereg: $\frac{x}{a_1}+\frac{x^2}{a_2^2}+\frac{x^3}{a_3^3}+\ldots+\frac{x^n}{a_n^n}+\ldots$ jest dla każdej skończonej wartości x bezwarunkowo zbieżnym, zatem iloczyn takich czynników będzie też bezwarunkowo zbieżny, a stąd wynika twierdzenie:

Jeżeli liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$, tworzą taki szereg, że: $|a_{n+1}|\geqq|a_n|$, a przytem $\lim\limits_{n=\infty} a_n=\infty$, wówczas da się zawsze utworzyć iloczyn nieskończony, kształtu:

$$\left(1-\frac{x}{a_1}\right)\varphi_1(x)\left(1-\frac{x}{a_2}\right)\varphi_2(x)\ldots\left(1-\frac{x}{a_n}\right)\varphi_n(x)\ldots \tag{6}$$

gdzie $\varphi_n(x)$ są pewne funkcye, nie mające miejsc zerowych, który będzie bezwarunkowo zbieżnym dla wszelkich skończonych wartości zmiennej x, różnych od liczb: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Iloczyny takie przedstawiają tedy funkcye całkowite przestępne o danych nieskończenie wielu miejscach zerowych.

Na podstawie powyższych wywodów, jesteśmy zawsze w stanie wyznaczyć funkcye całkowite przestępne, któreby miały nieskończenie wiele miejsc zerowych: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, jeżeli tylko: $|a_{n+1}|>|a_n|$, a przytem: $\lim\limits_{n=\infty} a_n=\infty$.

Ilość takich funkcyj jest widocznie nieskończenie wielka. Jeżeli bowiem $G(x)$ jest taką funkcyą, tedy jest nią także funkcya: $e^{g(x)}.G(x)$, gdzie $g(x)$ przedstawia jakąkolwiek funkcyę całkowitą, wymierną lub przestępną.

9. Szeregi nieskończone, oparte na iloczynach nieskończonych danych funkcyj. Z iloczynów nieskończonych, przedstawiających rozwinięcia danych funkcyj, możemy otrzymać szeregi dla różnych innych funkcyi.

Weźmy pod uwagę iloczyn nieskończony:

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\dots\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\dots$$

Logarytm jego prowadzi do wzoru:

$$\log\sin x = \log x + \log\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)+\log\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)+\dots+\log\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)+\dots \quad (7)$$

Wyznaczywszy obustronnie pierwsze pochodne, otrzymujemy rozwi- ęcie:

$$\frac{\cos x}{\sin x}=\operatorname{cotg} x=\frac{1}{x}-\frac{2x}{\pi^2-x^2}-\frac{2x}{2^2\pi^2-x^2}-\dots-\frac{2x}{n^2\pi^2-x^2}-\dots \quad (8)$$

óre, ze względu na to, że:

$$-\frac{2x}{n^2\pi^2-x^2}=\frac{1}{n\pi+x}-\frac{1}{n\pi-x},$$

owadzi do szeregu:

$$\operatorname{cotg} x=\frac{1}{x}+\frac{1}{\pi+x}-\frac{1}{\pi-x}+\dots+\frac{1}{n\pi+x}-\frac{1}{n\pi-x}+\dots \quad (9)$$

Zastępując w niem x przez πx i mnożąc obustronnie przez π, otrzy- ujemy szereg:

$$\pi\operatorname{cotg}\pi x=\frac{1}{x}+\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}+\dots+\frac{1}{n+x}-\frac{1}{n-x}+\dots$$

yli:

$$\pi\operatorname{cotg}\pi x=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}+\dots+\frac{1}{x+n}+\frac{1}{x-n}+\dots \quad (10)$$

Zmieniając porządek wyrazów tego szeregu, otrzymujemy szereg:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{1}{x+n}=\dots+\frac{1}{x-n}+\dots+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\dots+\frac{1}{x+n}+\dots=$$

$$=\sum_{n=-1}^{n=-\infty}\frac{1}{x+n}+\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{x+n},$$

kładający się z dwu szeregów nieskończonych, po obu stronach wyrazu odkowego $\frac{1}{x}$.

Temi rodzajami szeregów, zajmijmy się obecnie.

10. Szeregi nieskończone po obu stronach wyrazu środkowego. Niech dzie u_0 wyrazem środkowym szeregu, który rozciąga się po obu stronach go wyrazu w nieskończoność, w postaci:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}u_n=\dots+u_{-n}+\dots+u_{-2}+u_{-1}+u_0+u_1+u_2+\dots+u_n+\dots \quad (11)$$

Ażeby szereg taki był zbieżnym, musiałyby być widocznie oba szeregi ęściowe, a więc zarówno szereg:

$$\sum_{n=-1}^{n=-\infty}u_n=u_{-1}+u_{-2}+\dots+u_{-n}+\dots$$

oteż szereg:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} u_n = u_1 + u_2 + .. + u_n + ...$$

szeregami zbieżnymi.

Jeżeli sumą jednego szeregu jest S', drugiego S, natenczas sum nego szeregu jest:

$$\Sigma = S' + u_0 + S,$$

a suma ta niezależy od porządku wyrazów, jeżeli oba szeregi częścio bezwarunkowo zbieżne.

Zastanówmy się teraz nad przypadkiem, gdy oba szeregi częś są rozbieżne.

11. W tym celu weźmy, jako przykład, pod uwagę szereg:

$$S_a = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{(x+n)^\alpha},$$

w którym wykładnik α jest liczbą dodatnią.

Szereg ten, rozdzielony na dwa szeregi częściowe, ułożone obol razu środkowego $u_0 = \frac{1}{x^\alpha}$, możemy przedstawić w postaci:

$$S_a = \sum_{n=-1}^{n=-\infty} \frac{1}{(x+n)^\alpha} + \frac{1}{x^\alpha} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{(x+n)^\alpha},$$

czyli:

$$S_a = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{(x-n)^\alpha} + \frac{1}{x^\alpha} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{(x+n)^\alpha}.$$

Oba szeregi częściowe:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{(x-n)^\alpha} = \frac{1}{(x-1)^\alpha} + \frac{1}{(x-2)^\alpha} + ... + \frac{1}{(x-n)^\alpha} + ...$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{(x+n)^\alpha} = \frac{1}{(x+1)^\alpha} + \frac{1}{(x+2)^\alpha} + ... + \frac{1}{(x+n)^\alpha} + ...$$

będą widocznie zbieżne; skoro szereg:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + ... + \frac{1}{n^\alpha} + ...$$

będzie szeregiem zbieżnym, co w myśl wywodów, podanych w Tor art. 13 str. 535. nastąpi zawsze, gdy $\alpha > 1$.

Szereg $\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^\alpha}$ jest więc pod warunkiem $\alpha > 1$, zawsze zbieżn dla wszelkich wartości niecałkowitych x sumę skończoną $S_\alpha(x)$.

Jeżeli wykładnik $\alpha = 1$, wówczas są oba szeregi:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{(x-n)} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + ... + \frac{1}{x-n} + ...$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{(x+n)} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + ... + \frac{1}{x+n} + ...$$

bieżne, przyczem pierwszy dąży do granicy $-\infty$, drugi do granicy $+\infty$. na S_a przedstawia się tedy w postaci nieoznaczonej. Ażeby zbadać, czy od jakimi warunkami mogłaby być ta suma oznaczoną, weźmy w obu regach jednakową ilość p wyrazów, utwórzmy więc sumę:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{n=p} \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{n=p} \frac{1}{x+n}, \tag{14}$$

Łącząc co dwa wyrazy, odpowiadające tej samej bezwzględnej warkci wskazówki n w jeden dodajnik, otrzymamy:

$$\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} = \frac{2x}{x^2-n^2},$$

więc powyższą sumę, w postaci:

$$\sum_{n=1}^{n=p} \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{n=p} \frac{1}{x+n} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{n=p} \frac{2x}{x^2-n^2}.$$

Tak otrzymana suma dąży, przy nieograniczenie rosnącem p, do pewnej łnicy, dokładnie oznaczonej.

Połóżmy:

$$\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2x}{x^2-n^2} = F_1(x),$$

możemy łatwo dowieść, że:

$$F_1(x+1) = F_1(x).$$

Weźmy bowiem pod uwagę sumę:

$$S(x) = \sum_{n=-p}^{n=+p} \frac{1}{x+n} = \sum_{n=p}^{n=1} \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{n=p} \frac{1}{x+n}, \tag{15}$$

zauważymy, że zastępując x przez $x+1$, zamienimy każdy wyraz tej my $S(x)$ na wyraz następujący, a otrzymana nowa suma $S_p(x+1)$ potanie więc z sumy $S_p(x)$, przez dodanie wyrazu $\frac{1}{x+p+1}$, a odjęcie wym $\frac{1}{x-p}$. W granicy, gdy p staje się nieskończenie wielkiem, wyrazy: $\frac{1}{p+1}$ i $\frac{1}{x-p}$, staną się zerami, będzie więc:

$$F_1(x+1) = F_1(x).$$

To znaczy: *Funkcya* $F_1(x)$, *określona wzorem:* $F_1(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{x+n}$ *jest peryoczną i ma peryod równy 1.*

Tę samą własność mają widocznie funkcye: $F_2(x)$, $F_3(x)$ ..., określone worami:

$$F_a(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{(x+n)^a}. \tag{16}$$

12. Zastępując we wzorze $F_1(x)$ zmienną x przez $\frac{x}{\pi}$, otrzymamy:

$$F_1\left(\frac{x}{\pi}\right)=\pi\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{1}{x+n\pi},$$

a wtedy powstaje funkcya:

$$\frac{1}{\pi}F_1\left(\frac{x}{\pi}\right)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{1}{x+n\pi},$$

której peryodem jest liczba π, a która w miejscach $x=n\pi$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ otrzymuje wartości nieskończenie wielkie. Funkcya ta jest funkcyą goniometryczną $\operatorname{cotg} x$.

Z iloczynu nieskończonego:

$$\sin x=x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\ldots$$

wypływa bowiem szereg:

$$\log\sin x=+\log x+\log\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)+\log\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)+\ldots+\log\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)+\ldots$$

który, zróżniczkowany, prowadzi do wzoru:

$$\operatorname{cotg} x=\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2-\pi^2}+\frac{2x}{x^2-4\pi^2}+\ldots$$

Jest więc:

$$\frac{1}{\pi}F_1\left(\frac{x}{\pi}\right)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{1}{x+n\pi}=\operatorname{cotg} x. \qquad (17)$$

13. Szereg Jacobiego. Ze szeregów, rozciągających się w nieskończoność, po obu stronach wyrazu środkowego zasługuje na szczególniejszą uwagę, t. z. szereg Jacobi'ego, określony wzorem:

$$\Theta(x)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}e^{an^2+bnx}, \qquad (18)$$

w którym spółczynniki a i b, przedstawiają dowolne liczby stałe.

Środkowym wyrazem tego szeregu, podwójnie nieskończonego, odpowiadającym wskazówce $n=0$, jest 1, oba szeregi otaczające, mają wyraz ogólny $u_n=e^{an^2+bnx}$, którego n-ty pierwiastek: $\sqrt[n]{u_n}=e^{an\pm bx}$, bezwzględnie wzięty, zdąża, przy nieograniczenie rosnącem n, do zera, gdy spółczynnik a jest liczbą ujemną, są więc, gdy $a<0$, bezwarunkowo zbieżne. Szereg Jakobiego:

$$\Theta(x)=\sum_{n=-\infty}^{n=-\infty}e^{an^2+bnx},$$

jest więc, przy ujemnym spółczynniku a, dla wszelkiego x bezwarunkowo zbieżny. (Jeżeli współczynnik a jest liczbą zespoloną kształtu: $\alpha+\beta i$, wówczas musi być $\alpha<0$).

Funkcyami, określonemi tym szeregiem zajmiemy się w następnym wykładzie.

Ćwiczenia XXVIII.

1) Wykazać, że wszystkie funkcye jednowartościowe zmiennej x, które mają jeden punkt istotnie osobliwy w nieskończoności, czyli t. z. funkcye całkowite przestępne dają się przedstawić w postaci szeregów potęgowych zmiennej x, bezwarunkowo i bezustannie zbieżnych.

2) Wykazać, że skoro funkcya całkowita przestępna $G(x)$ (ćw. 1.) ma jeden punkt zerowy w miejscu $x = \alpha$, wówczas iloraz $\frac{G(x)}{x-a}$ jest również funkcyą całkowitą przestępną.

3) Wykazać, że wszystkie jednowartościowe funkcye zmiennej x, mające jeden tylko punkt osobliwy i to istotnie osobliwy w miejscu $x = \alpha$, przedstawiają się w postaci $G\left(\frac{1}{x-a}\right)$, gdzie $G(x)$ przedstawia szereg bezwarunkowo i bezustannie zbieżny.

4) Wykazać, że jeżeli funkcya $f(x)$, da się przedstawić szeregiem bezustannie zbieżnym: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$, wówczas da się iloraz: $\frac{1}{f(x)}$, pod założeniem, że $|a_0|>0$, rozwinąć na szereg potęgowy, którego zakres zbieżności sięga do tego punktu zerowego funkcyi $f(x)$, który leży najbliżej punktu $x = 0$.

5) Wykazać, że wszelka funkcya jednowartościowa $f(x)$ ma te same miejsca istotnie osobliwe, co funkcya ułamkowa $\frac{1}{f(x)}$.

6) Wykazać, że funkcya $f(x)$, przedstawiona ilorazem dwu szeregów potęgowych zmiennej x, $f(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots}{b_0 + b_1x^2 + b_2x^2 + \ldots}$ da się rozwinąć na szereg potęgowy $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots$ jeśli wyraz stały b_0 w mianowniku jest różny od zera.

7) Wykazać, że zakres zbieżności szeregu: $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots$, (określonego w ćw. 6.) sięga do najbliższego miejsca zerowego funkcyi określonej mianownikiem: $b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots$

8) Wykazać, że wszelka funkcya jednowartościowa zmiennej x, nie posiadająca punktu istotnie osobliwego w skończoności, może mieć w skończonym zakresie zmiennej x tylko skończoną ilość takich miejsc, w których jej wartość staje się zerem lub nieskończonością.

9) Dowieść istnienia funkcyj całkowitych przestępnych, które nie mają w skończoności ani jednego miejsca zerowego i podać ich szczególne kształty.

10) Wykazać, że wszelkie funkcye jednowartościowe, które mają tylko jeden punkt istotnie osobliwy i to w nieskończoności, a nadto dowolną ilość miejsc nieistotnie osobliwych, czyli nieskończonościowych, przedstawiają się w postaci ilorazu dwu funkcyj z których przynajmniej jedna będzie całkowitą przestępną.

11) Dowieść, że wszelka funkcya peryodyczna o własności: $f(x + \omega) = f(x)$, ma w nieskończoności punkt istotnie osobliwy.

12) Na podstawie szeregu $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$ wykazać, że:

$$a)\ |e^{xi}| = 1,\quad b)\ |e^{x+yi}| = e^x,\quad c)\ e^{x+2x\pi i} = e^x.$$

13) Wykazać, że funkcya: $e^{\frac{2\pi ix}{a}} - \sin\frac{2\pi x}{a} + i\cos\frac{2\pi x}{a}$ jest funkcyą peryodyczną, o peryodzie a.

14) Na podstawie szeregu: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$ wykazać, że $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

15) Na podstawie iloczynu nieskończonego:

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right),$$

wykazać, że:

$$\sin \pi(x+1) = -\sin \pi x,$$

$$\text{a}\quad \sin \pi(x+2) = \sin \pi x.$$

16) Na podstawie szeregu:

$$\pi \operatorname{cotg} \pi x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2},$$

wykazać, że: $\pi \operatorname{cotg} \pi (x+1) = \pi \operatorname{cotg} \pi x.$

17) Wykazać, że:

$$\operatorname{tang} x = x \frac{\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots}{\left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots}$$

Wyprowadzić następujące rozwinięcia:

18) $\sin m x = 2^{m-1} \sin x \prod_{n=1}^{n=\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{m} - x\right) . \sin\left(\frac{n\pi}{m} + x\right).$

19) $\cos m x = 2^{m-1} \prod_{n=1}^{n=\infty} \sin\left(\frac{2n-1}{2m}\pi - x\right). \sin\left(\frac{2n-1}{2m}\pi + x\right).$

20) $\operatorname{tang} m x = \operatorname{tang} x \prod_{n=1}^{n=\infty} \operatorname{tang}\left(\frac{n\pi}{m} - x\right) . \operatorname{tang}\left(\frac{n\pi}{m} + x\right).$

21) $\operatorname{cosec} mx = \frac{1}{2^{m-1}} . \operatorname{cosec} x \prod_{n=1}^{n=\infty} \operatorname{cosec}\left(\frac{n\pi}{m} - x\right). \operatorname{cosec}\left(\frac{n\pi}{m} + x\right).$

22) $\sec mx = \prod_{n=1}^{n=\infty} \sec\left(\frac{2n-m+1}{2m}\pi - x\right). \sec\left(\frac{2n-m+1}{2m}\pi + x\right)\ldots$

23) $\operatorname{cotg} mx = \operatorname{cotg} x \prod_{n=1}^{n=\infty} \operatorname{cotg}\left(\frac{n\pi}{m} - x\right) \operatorname{cotg}\left(\frac{n\pi}{m} + x\right).$

24) Dowieść twierdzenia Weierstrassa, że miejsca zerowe: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, wszelkiej funkcyi całkowitej przestępnej, dają się zawsze tak zestawić, że: $|\alpha_{n+1}| \geq |\alpha_n|$, że gdy ilość tych miejsc jest nieskończenie wielka, wówczas $\lim_{n=\infty} \alpha_n = \infty$.

25) Jeżeli $\varphi(x)$ jest pewną funkcyą całkowitą przestępną, która nie ma miejsc zerowych w skończoności, wykazać, że funkcya:

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)\,\varphi(x),$$

jest funkcyą całkowitą przestępną, mającą tylko n miejsc zerowych na płaszczyźnie liczbowej.

26) Jeżeli daną jest nieskończona ilość miejsc: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, tak, że: $|\alpha_{n+1}| > |\alpha_n|$, a przytem $\lim_{n=\infty} |\alpha_n| = \infty$, a $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ są pewnemi funkcyami całkowitemi przestępnemi, nie mającemi miejsc zerowych w skończoności, dowieść, że da się zawsze utworzyć iloczyn nieskończony w postaci:

$$\left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right)\varphi_1(x). \quad \left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right)\varphi_2(x)\ldots \quad \left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right)\varphi_n(x)\ldots,$$

który będzie bezwarunkowo zbieżny dla wszelkich wartości x różnych od $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \ldots$

27) Jeżeli daną jest nieskończona ilość miejsc $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, tak, że: $|\alpha_{n+1}| > |\alpha_n|$, a przytem: $\lim_{n=\infty} |\alpha_n| = \infty$, dowieść, że da się zawsze utworzyć iloczyn nieskończony: $\left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right)\ldots$, który będzie bezwarunkowo zbieżny dla wszelkich wartości x, różnych od $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, skoro szereg $\left|\frac{1}{\alpha_1}\right| + \left|\frac{1}{\alpha_2}\right| + \ldots + \left|\frac{1}{\alpha_n}\right| + \ldots$ jest zbieżny.

28) Dowieść, że iloczyny nieskończone, określone w ćw. 26. i 27., dadzą się prze-
ić na szeregi potęgowe zbieżne dla wszelkiego x, przedstawiają więc pewne funkcye ite przestępne.

29) Wykazać, że skoro funkcya $G(x)$ ma nieskończenie wiele miejsc zerowych, to e $f(x)$ kształtu: $f_r(x) = G(x).e^{g_r(x)}$, gdzie $g_r(x)$ jest jakąkolwiek funkcyą całkowitą ępną, mają te same miejsca zerowe i są także funkcyami całkowitemi, przestępnemi.

30) Z iloczynu nieskończonego, przedstawiającego $\sin \pi x$, wyprowadzić szereg:

$$\pi \operatorname{cotg} \pi x = \frac{1}{x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{3+x} - \frac{1}{3-x}.$$

31) Z iloczynu nieskończonego, przedstawiającego $\cos x$, wyprowadzić szereg:

$$\operatorname{tang} x = \frac{1}{\frac{\pi}{2}-x} - \frac{1}{\frac{\pi}{2}+x} + \frac{1}{\frac{3\pi}{2}-x} - \frac{1}{\frac{3\pi}{2}+x} + \frac{1}{\frac{5\pi}{2}-x} - \frac{1}{\frac{5\pi}{2}+x} + \dots$$

Wyprowadzić następujące szeregi:

32) $$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \frac{2x}{\pi^2-x^2} - \frac{2x}{4\pi^2-x^2} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{2x}{n^2\pi^2-x^2} + \dots$$

33) $$\sec x = \frac{1.4\pi}{\pi^2-4x^2} - \frac{3.4\pi}{3^2\pi^2-4x^2} + \frac{5.4\pi}{5^2\pi^2-4x^2} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{(2n-1).4\pi}{(2n-1)^2\pi^2-4x^2}.$$

34) $$\operatorname{tang} x = \frac{2x}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-x^2} + \frac{2x}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2-x^2} + \frac{2x}{\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2-x^2} + \dots + \frac{2x}{\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2-x^2} + \dots$$

35) $$x \operatorname{cotg} x = 1 - \frac{2x^2}{\pi^2-x^2} - \frac{2x^2}{4\pi^2-x^2} - \frac{2x^2}{9\pi^2-x^2} - \dots - \frac{2x^2}{n^2\pi^2-x^2} - \dots$$

36) $$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{4!}{2^4(2!)^2}\frac{x^5}{5} + \dots + \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots =$$
$$= \sqrt{1-x^2}\left\{x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2^4.(2!)^2}{5!}x^5 + \dots + \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \dots\right\}.$$

37) $$\operatorname{arc\,tang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \quad (|x|<1)$$
$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\frac{1}{x^3} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x^5} + \dots - \frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot\frac{1}{x^{2n+1}} + \dots \quad (|x|>1).$$

38) $$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{4!}{4^4(2!)^2}\cdot\frac{x^5}{5} - \dots - \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \dots$$
$$= \frac{\pi}{2} - \sqrt{1-x^2}\left\{x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2^4(2!)^2}{5!}x^5 + \dots + \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1} + \dots\right\}.$$

39) $$(\arcsin x)^2 = x^2 + \frac{2}{3}\frac{x^4}{2} + \frac{2.4}{3.5}\frac{x^6}{3} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\frac{x^8}{4} + \dots \quad |x|<1.$$

40) $$\operatorname{arc\,tang} x = \frac{x}{1+x^2}\left\{1 + \frac{2}{3}\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^3 + \dots\right\}.$$

41) $$\operatorname{arc\,cotang} x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots - (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad (|x|<1)$$
$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{3}\frac{1}{x^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{x^5} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{1}{x^{2n+1}} + \dots \quad (|x|>1)$$

42) Wykazać, że funkcya $f(x)$ przedstawiona szeregiem rozciągającym się po obu h wyrazu środkowego, w postaci:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots + b_1\frac{1}{x} + \dots + b_n\frac{1}{x^n} + \dots$$

zarówno szereg: $a_0 + a_1x + \dots + a_nx_n + \dots$, jak i szereg: $b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + \dots$ są mi bezustannie zbieżnemi, ma dwa miejsca istotnie osobliwe, jeden w miejscu drugi w miejscu $x = \infty$.

43) Wykazać, że skoro funkcya $f(x)$, określona szeregiem:

$$\ldots + a_{-n} x^{-n} + \ldots + a_{-2} x^{-2} + a_{-1} x^{-1} + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

ma tylko dwa punkta istotnie osobliwe, jeden w miejscu $x = 0$, drugi w miejscu $x = \infty$ a staje się zerem dla $x = a$, wówczas także funkcya, określona ilorazem: $\frac{f(x)}{1-\frac{x}{a}}$, lub ilorazem: $\frac{f(x)}{1-\frac{a}{x}}$ posiada te same dwa miejsca istotnie osobliwe.

44) Wykazać, że wszystkie funkcye jednowartościowe, mające tylko dwa miejsca istotnie osobliwe a i b, dadzą się przedstawić się w postaci: $G\left(\frac{1}{x-a}\right) + G_1\left(\frac{1}{x-b}\right)$, gdzie $G(x)$ i $G_1(x)$ są szeregami bezustannie zbieżnemi.

45) Wykazać, że funkcya całkowita, przestępna $f(x)$, stająca się zerem w miejscach $1, a, a^2, a^3, a^4, \ldots$ w razie: $a > 1$, da się przedstawić w postaci:

$$f(x) = e^{g(x)}(1-x)\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a^2}\right)\left(1-\frac{x}{a^3}\right)\ldots$$

przyczem $g(x)$ jest dowolną funkcyą całkowitą, algebraiczną, lub przestępną.

46) Wykazać, że funkcya całkowita przestępna $f(x)$, stająca się zerem w miejscach $a^n\left(\cos\frac{2m\pi}{n} + i\sin\frac{2m\pi}{n}\right)$, przyczem $n = 1, 2, 3, \ldots \infty$, $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, a zarazem: $|a| > 1$ da się przedstawić w postaci:

$$f(x) = e^{g(x)}\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x^2}{a^4}\right)\left(1-\frac{x^3}{a^9}\right)\left(1-\frac{x^4}{a^{16}}\right)\ldots$$

przyczem $g(x)$ jest dowolną funkcyą całkowitą wymierną lub przestępną.

47) Wykazać, że funkcya całkowita przestępna $f(x)$, stająca się zerem w miejscu a jednokrotnie, w miejscu a^2 dwukrotnie, w miejscu a^3 trzykrotnie i t. d., w miejscu a^n n-krotnie, w razie: $|a| > 1$, da się przedstawić w postaci:

$$f(x) = e^{g(x)}\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a^2}\right)^2\left(1-\frac{x}{a^3}\right)^3\ldots$$

48) Wykazać, że funkcya całkowita przestępna $f(x)$, stająca się zerem w miejscach $1, a, a^2, a^3, a^4, \ldots$ w razie: $|a| < 1$, da się przedstawić w postaci:

$$f(x) = e^{g\left(\frac{1}{x}\right)}\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{a}{x}\right)\left(1-\frac{a^2}{x}\right)\left(1-\frac{a^3}{x}\right)\ldots$$

Rozwiązania XXVIII. Wskazówki podane w tym wykładzie i poprzedzającym.

Literatura. Dr. Otto Biermann. Theorie der analytischen Functionen. Leipzig 1887. A. R. Forsyth Theory of fonctions of a complexe variable. Cambridge. 1895. Dr. Józef Kniaź Puzyna. Teorya funkcyj analitycznych. Tom II. Lwów 1900. O. Rausenberger. Lehrbuch der Theorie der periodischen Functionen einer Variablen. Leipzig 1884.

Tematy do rozprawek naukowych.

1. Teorya funkcyj całkowitych przestępnych.
2. Funkcye całkowite przestępne o nieskończenie wielu miejscach zerowych.
3. Badanie szeregów potęgowych, postępujących podług dodatnich i ujemnych potęg zmiennej niezależnej.

Wykład XXIX.

Thetafunkcye Jacobiego i na nich oparte funkcye dwuperyodyczne.

1. Funkcya $\theta(x)$, określona szeregiem: $\theta(x)=\sum\limits_{n=-1}^{n=\infty} e^{an^2+bnx}$. Zastąpmy tym szeregu x przez $x+\frac{2\pi i}{b}$, a otrzymamy:

$$\theta\left(x+\frac{2\pi i}{b}\right)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{an^2+bnx+2n\pi i}=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{an^2+bnx}\,.\,e^{2n\pi i}\,, \qquad (1)$$

że: $e^{2n\pi i}=1_{2n\pi}=\cos 2n\pi+i\sin 2n\pi=1$, zatem:

$$\theta\left(x+\frac{2\pi i}{b}\right)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{an^2+bnx}=\theta(x).$$

Funkcya $\theta(x)$, określona szeregiem Jacobi'ego, jest więc peryodyczna ma peryod równy $\frac{2\pi i}{b}$.

Funkcyę $\theta(x)$, możemy także przedstawić w następującej postaci:

$$\theta(x)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{a\left(n+\frac{bx}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}x^2}=e^{-\frac{b^2}{4a}x^2}\,.\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{a\left(n+\frac{bx}{2a}\right)^2},$$

której, kładąc:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{a\left(n+\frac{bx}{2a}\right)^2}=\varphi(x), \qquad (2)$$

otrzymujemy:

$$\theta(x)=e^{-\frac{b^2}{4a}x^2}\,.\,\varphi(x). \qquad (3)$$

Funkcya $\varphi(x)=\sum\limits_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{a\left(n+\frac{bx}{2a}\right)^2}$ jest widocznie funkcyą peryodyczną, której peryodem jest $\frac{2a}{b}$. Zastępując bowiem w niej x przez $x+\frac{2a}{b}$, otrzymujemy:

$$\varphi\left(x+\frac{2a}{b}\right)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{a\left(n+\frac{bx}{2a}+1\right)^2}=\sum_{n+1=-\infty}^{n+1=+\infty} e^{a\left(\overline{n+1}+\frac{bx}{2a}\right)^2}=\varphi(x).$$

Funkcya $e^{-\frac{b^2}{4a}x^2}$ stanowiąca drugi czynnik funkcyi $\theta(x)$, otrzymuje wskutek zamiany zmiennej na $x+\frac{2a}{b}$ wartość:

$$e^{-\frac{b^2}{4a}\left(x+\frac{2a}{b}\right)^2}=e^{-\frac{b^2}{4a}x^2-bx-a}=e^{-bx-a}\,.\,e^{-\frac{b^2}{4a}x^2}.$$

Wobec tego funkcya $\Theta(x)$ otrzymuje, wskutek zamiany zmiennej x na $x+\frac{2a}{b}$, wartość:

$$\Theta\left(x+\frac{2a}{b}\right)=e^{-bx-a}\cdot e^{-\frac{b^2}{4a}x^2}\varphi(x)=e^{-bx-a}\,\Theta(x). \tag{4}$$

Funkcya $\Theta(x)$, określona szeregiem Jacobi'ego:

$$\Theta(x)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{an^2+bnx},$$

nie zmienia więc swej wartości, gdy x zmienimy o $\frac{2\pi i}{b}$, a staje się pomnożoną przez czynnik e^{-bx-a}, gdy x zmienimy o $\frac{2a}{b}$.

Połóżmy: $\frac{2\pi i}{b}=\omega$, $\frac{2a}{b}=\omega'$, a więc: $b=\frac{2\pi i}{\omega}$, $a=\frac{\pi i\omega'}{\omega}$, natenczas otrzymamy powyższą funkcyę, w postaci szeregu:

$$\Theta(x)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\pi i\omega'}{\omega}n^2+\frac{2n\pi i}{\omega}x}, \tag{5}$$

który jest dla wszelkiego x bezwarunkowo zbieżnym, gdy spółczynnik przy n^2 będzie liczbą ujemną, a więc, gdy stosunek $\frac{\omega'}{\omega}$ będzie liczbą urojoną.

Pod tem założeniem będzie $e^{\frac{\pi i\omega'}{\omega}}$ liczbą dodatnią, mniejszą od 1. Połóżmy $e^{\frac{\pi i\omega'}{\omega}}=q$, a otrzymamy funkcyę $\Theta(x)$ w postaci szeregu:

$$\Theta(x)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q^{n^2}e^{\frac{2n\pi i}{\omega}x}. \tag{6}$$

Łącząc w tym szeregu wyrazy, zawierające te same potęgi liczby q i uwzględniając, że: $e^{\frac{2n\pi i}{\omega}x}+e^{-\frac{2n\pi i}{\omega}x}=2\cos\frac{2n\pi x}{\omega}$, otrzymujemy:

$$\Theta(x)=1+2q\cos\frac{2\pi x}{\omega}+2q^4\cos\frac{4\pi x}{\omega}+2q^9\cos\frac{6\pi x}{\omega}+\ldots+2q^{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{\omega}+\ldots$$

czyli:

$$\Theta(x)=1+2\sum_{n=1}^{n=\infty} q^{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{\omega}. \tag{6'}$$

3. Funkcye Jacobi'ego, zwane Thetafunkcyami. Funkcya $\Theta(x)$, określona wzorem:

$$\Theta(x)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q^{n^2}e^{\frac{2n\pi ix}{\omega}},\ \text{lub}\ \Theta(x)=1+2\sum_{n=1}^{n=\infty} q^{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{\omega}, \tag{7}$$

gdzie stosunek $\frac{\omega'}{\omega}$ jest liczbą urojoną, a więc $q=e^{\frac{\pi i\omega'}{\omega}}<1$, posiada, jak poznaliśmy, następujące własności: 1) że wskutek zamiany x na $x+\omega$, nie zmienia swej wartości; 2) że wskutek zamiany x na $x+\omega'$, otrzymuje wartość

$$\Theta(x+\omega')=q^{-1}\,.\,e^{-\frac{2\pi i x}{\omega}}\,\Theta(x),$$

t. j. tę samą wartość, pomnożoną przez czynnik $q^{-1}e^{-\frac{2\pi i x}{\omega}}$.

Z funkcyi tej dadzą się wyprowadzić inne funkcye, kształtu: $e^{\beta x}.\Theta(x+\alpha)$, które posiadają podobne własności.

Aby wyznaczyć te funkcye, a więc spółczynniki α i β, zauważamy najpierw, że zmiana x na $x+\omega$, zmienia funkcyę: $e^{\beta x}\,\Theta(x+\alpha)$ na funkcyę:

$$e^{\beta(x+\omega)}.\,\Theta(x+\omega+\alpha)=e^{\beta\omega}e^{\beta x}.\,\Theta(x+\alpha),$$

musi być zatem: $e^{\beta\omega}=\pm 1$, a więc: $\beta\omega=\varkappa'\pi i$, czyli $\beta=\frac{\varkappa'\pi i}{\omega}$, gdzie $\varkappa'$ jest dowolną liczbą całkowitą.

Zmiana x na $x+\omega'$, zamienia znowu funkcyę: $e^{\beta x}\,\Theta(x+\alpha)$ na funkcyę:

$$e^{\beta(x+\omega')}\,\Theta(x+\omega'+\alpha)=e^{\beta\omega'}\,e^{\beta x}\,\Theta(x+\omega'+\alpha),$$

a że:
$$\Theta(x+\alpha+\omega')=q^{-1}.\,e^{-\frac{2\pi i(x+\alpha)}{\omega}}\,.\,\Theta(x+\alpha),$$

zatem otrzymujemy:

$$e^{\beta(x+\omega')}\,\Theta(x+\omega'+\alpha)=e^{\beta\omega'-\frac{2\pi i\alpha}{\omega}}.\,q^{-1}\,e^{-\frac{2\pi i x}{\omega}}\,\Theta(x+\alpha),$$

musi być zatem:
$$e^{\beta\omega'-\frac{2\pi i\alpha}{\omega}}=\pm 1,$$

a więc: $\beta\omega'-\frac{2\pi i\alpha}{\omega}=\varkappa\pi i$, gdzie znowu $\varkappa$ jest dowolną liczbą całkowitą, a że: $\beta=\frac{\varkappa'\pi i}{\omega}$, zatem otrzymujemy stąd:

$$\frac{\varkappa'\pi i.\omega'}{\omega}-\frac{2\pi i\alpha}{\omega}=\varkappa\pi i,\ \text{a stąd:}\ \alpha=\varkappa\frac{\omega}{2}+\varkappa'\frac{\omega'}{2}.$$

Funkcye, posiadające powyżej przytoczone własności, mają więc kształt:

$$\Theta_{\varkappa,\varkappa'}(x)=e^{\frac{\varkappa'\pi i x}{\omega}}.\,\Theta\left(x+\varkappa\frac{\omega}{2}+\varkappa'\frac{\omega'}{2}\right),\tag{8}$$

gdzie $\varkappa$ i $\varkappa'$ mogą być dowolnemi liczbami całkowitemi.

4. Nadając liczbom $\varkappa$ i $\varkappa'$ wartość 0 i 1, otrzymamy cztery oddzielne funkcye, a to:

1) Dla $\varkappa=0$, $\varkappa'=0$, mamy: $\beta=0$, $\alpha=0$, dostajemy więc funkcyę:

$$\Theta_{0,0}(x)=\Theta(x)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}q^{n^2}e^{\frac{2n\pi i x}{\omega}}=1+2\sum_{n=1}^{n=\infty}q^{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{\omega}.\tag{9}$$

2) Dla $\varkappa=1$, $\varkappa'=0$, mamy: $\alpha=\frac{\omega}{2}$, $\beta=0$, dostajemy więc:

$$\Theta_{1,0}(x)=\Theta\left(x+\frac{\omega}{2}\right)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-1)^n q^{n^2}e^{\frac{2n\pi i x}{\omega}}=1+2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos\frac{2n\,\omega x}{\omega}.\tag{10}$$

3) Dla $\varkappa=0$, $\varkappa'=1$, mamy $\beta=\frac{\pi i}{\omega}$, $\alpha=\frac{\omega'}{2}$, dostajemy więc, po dołączeniu czynnika $q^{1/4}$:

$$\Theta_{0,1}(x)=q^{1/4}e^{\frac{\pi i x}{\omega}}\,\Theta\left(x+\frac{\omega'}{2}\right)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}q^{(n+1/2)^2}\,e^{\frac{(2n+1)\pi i x}{\omega}}=2\sum_{n=0}^{n=\infty}q^{(n+1/2)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{\omega}.\tag{11}$$

4) Dla $\varkappa=1$, $\varkappa'=1$, mamy $\beta=\frac{\pi i}{\omega}$, $\alpha=\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}$, dostajemy po dołączeniu czynnika $\frac{1}{i}q^{1/4}$:

$$\theta_{1,1}(x)=\frac{1}{i}q^{1/4}e^{\frac{\pi i x}{\omega}}\,\theta\left(x+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)=\frac{1}{i}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2}e^{\frac{(2n+1)\pi i x}{\omega}}=$$

$$=2\sum(-1)^n q^{(n+1/2)^2}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{\omega}. \tag{12}$$

Przyjmując za $\varkappa$ i $\varkappa'$ inne układy wartości, otrzymujemy te same cztery funkcye, pomnożone tylko przez pewne stałe czynniki. Otrzymane cztery funkcye Jakobi'ego, nazywają się zwykle Thetafunkcyami.

5. Miejsca zerowe funkcyi Theta. Zastępując we wzorach 9) — 12), określających powyższe cztery Thetafunkcye, x kolejno przez: $x+\frac{\omega}{2}$, $x+\frac{\omega'}{2}$, $x+\omega$, $x+\omega'$ otrzymujemy związki między temi funkcyami, określone wzorami:

$$\Theta_{00}\left(x+\frac{\omega}{2}\right)=\Theta_{10}(x),\quad \Theta_{10}\left(x+\frac{\omega}{2}\right)=\Theta_{00}(x) \tag{13}$$
$$\Theta_{01}\left(x+\frac{\omega}{2}\right)=-\Theta_{11}(x),\quad \Theta_{11}\left(x+\frac{\omega}{2}\right)=\Theta_{01}(x)$$

$$\Theta_{00}\left(x+\frac{\omega'}{2}\right)=\lambda\,\Theta_{01}(x),\quad \Theta_{10}\left(x+\frac{\omega'}{2}\right)=i\lambda\,\Theta_{11}(x) \tag{14}$$
$$\Theta_{01}\left(x+\frac{\omega'}{2}\right)=\lambda\Theta_{00}(x),\quad \Theta_{11}\left(x+\frac{\omega'}{2}\right)=i\lambda\,\Theta_{10}(x)$$

$$\Theta_{00}(x+\omega)=\Theta_{00}(x),\quad \Theta_{10}(x+\omega)=\Theta_{10}(x) \tag{15}$$
$$\Theta_{01}(x+\omega)=-\Theta_{01}(x),\quad \Theta_{11}(x+\omega)=-\Theta_{11}(x)$$

$$\Theta_{00}(x+\omega')=\mu\Theta_{00}(x),\quad \Theta_{10}(x+\omega')=-\mu\Theta_{10}(x) \tag{16}$$
$$\Theta_{01}(x+\omega')=\mu\Theta_{01}(x),\quad \Theta_{11}(x+\omega')=-\mu\Theta_{11}(x)$$

w których $\lambda=q^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{\pi i x}{\omega}}$, $\mu=q^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{2\pi i x}{\omega}}$ przedstawiają czynniki skończone i dla wszelkiego x, różne od zera.

Z wzorów tych wypływają następujące własności dotyczące poszczególnych funkcyj i ich miejsc zerowych:

Jeżeli funkcya $\Theta_{11}(x)$ staje się zerem dla pewnej wartości x_0 zmiennej x, to staje się zerem dla wartości: $x_0+\omega$, $x_0+\omega'$, a więc, w ogólności, dla wszelkich wartości, kształtu: $x_0+m\omega+n\omega'$, gdzie spółczynniki liczebne m i n są dowolnemi liczbami całkowitemi dodatniemi, lub ujemnemi. Funkcya $\Theta_{01}(x)$ staje się tedy zerem w miejscu: $x_0+\frac{\omega}{2}$, a więc ogólnie w miejscu: $x_0+\frac{\omega}{2}+m\omega+n\omega'$, funkcya $\Theta_{10}(x)$ w miejscu: $x_0+\frac{\omega'}{2}$, a więc ogólnie w miejscu: $x_0+\frac{\omega'}{2}+m\omega+n\omega'$, funkcya $\Theta_{00}(x)$ w miejscu: $x_0+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}$, a więc ogólnie w miejscu: $x_0+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}+m\omega+n\omega'$, gdzie m i n są dowolnemi liczbami całkowitemi.

Funkcya $\Theta_{11}(x)$ staje się widocznie zerem dla $x_0=0$, wobec tego mają szczególne Thetafunkcye następujące miejsca zerowe:

Funkcya $\Theta_{11}(x)=0$, dla $x=m\omega+n\omega'$, (fig. 5. punkty $P^{(1,1)}_{m,n}$).

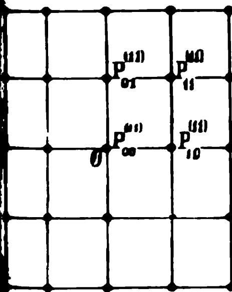
Funkcya $\Theta_{01}(x)=0$, dla $x=\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega+n\omega'$, (fig. 7. punkty $P^{(0,1)}_{m,n}$).

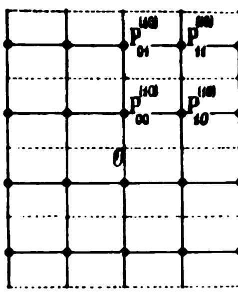
Funkcya $\Theta_{10}(x)=0$, dla $x=m\omega+\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega'$, (fig. 6. punkty $P^{(1,0)}_{m,n}$).

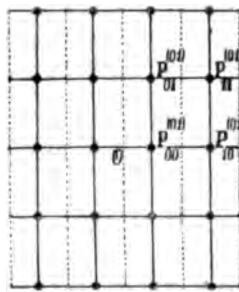
Funkcya $\Theta_{00}(x)=0$, dla $x=\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega+\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega'$, (fig. 8. punkty $P^{(0,0)}_{m,n}$).

ie m i n przedstawiają dowolne liczby całkowite dodatnie, lub ujemne.

Uwzględniając to, że stosunek: $\frac{\omega'}{\omega}$ jest liczbą urojoną, dochodzimy do iosku, że każda z czterech *Theta*-funkcyj ma w zakresie liczb zespolonych, li na płaszczyźnie liczbowej, podwójnie nieskończoną ilość miejsc zerowych. Miejsca te przedstawiają się na płaszczyźnie liczbowej jako wierzłki prostokątów, których boki są równoległe do osi układu i mają dłui, określone bezwzględnemi wartościami liczb ω i ω', jak to przedstaują załączone figury.







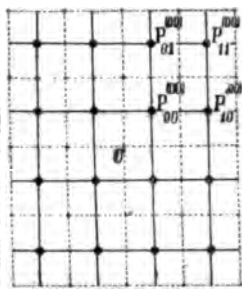


Fig. 5. Fig. 6. Fig. 7. Fig. 8.

6. Rozwijanie Theta-funkcyj na iloczyny nieskończone. Funkcya: $(x)=\Theta(x)$, określona wzorem:

$$\Theta_{00}(x)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q^{n^2} e^{\frac{2n\pi i x}{\omega}},$$

li podwójnym szeregiem nieskończonym:

$$\Theta_{00}(x)=\ldots+q^{n^2}e^{-\frac{2n\pi i x}{\omega}}+\ldots+qe^{-\frac{2\pi i x}{\omega}}+1+qe^{\frac{2\pi i x}{\omega}}+\ldots+q^{n^2}e^{\frac{2n\pi i x}{\omega}}+\ldots$$

, jak poznaliśmy w poprzedzającym artykule, podwójną nieskończoność jsc zerowych, w postaci:

$$x=\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega+\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega'.$$

Uwzględniając, że $q=e^{\pi i\frac{\omega'}{\omega}}$, mamy funkcye wykładnicze:

$$q^{2n+1}e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}=e^{\frac{(2n+1)\pi i\omega'}{\omega}}\cdot e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}=e^{\frac{\pi i}{\omega}[(2n+1)\omega'+2x]},$$

$$q^{2n+1}e^{-\frac{2\pi i x}{\omega}}=e^{\frac{(2n+1)\pi i\omega'}{\omega}}\cdot e^{-\frac{2\pi i x}{\omega}}=e^{\frac{\pi i}{\omega}[(2n+1)\omega'-2x]},$$

tórych pierwsza otrzymuje wartość równą -1, skoro:

$$\frac{\pi i}{\omega}[(2n+1)\omega'+2x]=(2m+1)\pi i,$$

a więc dla wszystkich wartości x, określonych wzorem:

$$x=\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega-\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega',$$

druga zaś otrzymuje wartość równą -1, skoro:

$$\frac{\pi i}{\omega}[(2n+1)\omega'-2x]=(2m+1)\pi i,$$

a więc dla wszelkich wartości x, określonych wzorem:

$$x=-\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega+\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega',$$

gdzie m jest dowolną liczbą całkowitą dodatnią, lub ujemną.

Z tego wynika, że funkcya $1+q^{2n+1}e^{\frac{2\pi ix}{\omega}}$ staje się zerem w miej określonych wzorem:

$$x=\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega-\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega',$$

funkcya zaś $1+q^{2n+1}e^{-\frac{2\pi ix}{\omega}}$, staje się zerem w miejscach:

$$x=\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega+\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega',$$

gdzie m jest dowolną liczbą całkowitą dodatnią, lub ujemną.

Wobec tego iloczyn nieskończony:

$$\prod_{n=0}^{n=\infty}\left(1+q^{2n+1}e^{\frac{2\pi ix}{\omega}}\right)\left(1+q^{2n+1}e^{-\frac{2\pi ix}{\omega}}\right),$$

przedstawia funkcyę, która staje się zerem dla wszelkich wart(kształtu:

$$x=\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega+\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega',$$

gdzie m i n wyobrażają dowolne liczby całkowite, a więc staje się w tych samych miejscach, w których funkcya $\Theta_{00}(x)$ staje się zerem.

Możemy zatem położyć:

$$\Theta_{00}(x)=P.\prod_{n=0}^{n=\infty}\left(1+q^{2n+1}e^{\frac{2\pi ix}{\omega}}\right)\left(1+q^{2n+1}e^{-\frac{2\pi ix}{\omega}}\right),$$

gdzie P jest czynnikiem, który należy bliżej wyznaczyć.

7. W tym celu połóżmy:

$$\prod_{n=0}^{n=m-1}\left(1+q^{2n+1}e^{\frac{2\pi ix}{\omega}}\right)\left(1+q^{2n+1}e^{-\frac{2\pi ix}{\omega}}\right)=\varphi\left(e^{\frac{2\pi ix}{\omega}}\right)=\varphi(z),$$

kładąc $z=e^{\frac{2\pi ix}{\omega}}$, a zauważymy, że funkcya $\varphi(z)$, przedstawi się w p sumy:

$$\varphi(z)=A_{-m}z^{-m}+\ldots+A_{-1}z^{-1}+A_0+A_1z+\ldots+A_mz^m,$$

w której, ze względu na to, że na podstawie wzoru (18) jest: $\varphi(z)=$ jest: $A_{-m}=A_m,\ldots,A_{-1}=A_1$, zatem:

$$\varphi(z)=A_0+A_1(z+z^{-1})+A_2(z^2+z^{-2})+\ldots+A_m(z^m+z^{-m}).$$

Celem wyznaczenia spółczynników A_0, A_1,..., A_m, utwórzmy funkcyę ...z), a otrzymamy z relacyi:

$$\varphi(z)=\prod_{n=0}^{n=m-1}(1+q^{2n+1}z)(1+q^{2n+1}z^{-1}),$$

...stępującą:

$$\varphi(q^2z)=\prod_{n=0}^{n=m-1}(1+q^{2n+3}z)(1+q^{2n-1}z^{-1}),$$

...:

$$\varphi(q^2z)=\varphi(z)\frac{(1+q^{2m+1}z)(1+q^{-1}z^{-1})}{(1+qz)(1+q^{2m-1}z^{-1})}=\frac{\varphi(z)}{qz}\cdot\frac{1+q^{2m+1}z}{1+q^{2m-1}z^{-1}},$$

...d związek:

$$(qz+q^{2m})\cdot\varphi(q^2z)=(1+q^{2m+1}z).\varphi(z).$$

Podstawmy w tym wzorze rozwinięcie (19):

$$\varphi(z)=A_0+A_1(z+z^{-1})+\ldots+A_m(z^m+z^{-m}),$$

...ęc:

$$\varphi(q^2z)=A_0+A_1(q^2z+q^{-2}z^{-1})+\ldots+A_m(q^{2m}z^m+q^{-2m}z^{-m}),$$

...równajmy spółczynniki przy potęgach z^n, a otrzymamy równanie:

$$q^{2n-1}A_{n-1}+q^{2m+2n}A_n=A_n+q^{2m+1}A_{n-1},$$

...tórego wypływa:

$$A_{n-1}=A_n\frac{1-q^{2m+2n}}{q^{2n-1}(1-q^{2m-2n+2})},$$

...nytem:

$$A_m=q^{1+3+\ldots+(2m-1)}=q^{m^2}.$$

Wobec tego będzie:

$$A_{m-1}=q^{m^2}.\frac{1-q^{4m}}{q^{2m-1}(1-q^2)}=q^{(m-1)^2}.\frac{1-q^{4m}}{1-q^2},$$

...ie:

$$A_n=q^{n^2}\frac{(1-q^{4m})(1-q^{4m-2})\ldots(1-q^{2m+2n+2})}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{2m-2n})},\qquad(20)$$

..., określający spółczynniki funkcyi $\varphi(z)$, przedstawionej w postaci (19).

...§. Gdy m rośnie do nieskończoności, otrzymamy przedewszystkiem ...anowniku spółczynnika A_n iloczyn nieskończony:

$$P=(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots$$

..., wobec tego, że $|q|=\left|e^{\frac{\pi i\omega'}{\omega}}\right|<1$, a więc, że szereg: $q^2+q^4+q^6+\ldots$ jest ...arunkowo zbieżny, jest także bezwarunkowo zbieżnym.

Oznaczmy jego wartość przez P, a więc połóżmy:

$$P=(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots.=\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n}),$$

...iczas, mając na względzie, że licznik $(1-q^{4m})(1-q^{4m-2})\ldots(1-q^{2m+2n+2})$, ... nieskończenie rosnącego m, dąży do granicy równej 1, otrzymamy ...oru (20):

$$A_n=q^{n^2}.\frac{1}{P}.$$

...bec tego:

$$\prod_{n=0}^{n=\infty}(1+q^{2n+1}z)(1+q^{2n+1}z^{-1})=\frac{1}{P}\{1+q(z+z^{-1})+\ldots+q^{n^2}(z^n+z^{-n})+\ldots\},$$

...a rozwinięcie funkcyi $\Theta_{00}(x)$ na iloczyn, przedstawia się w postaci:

$$\Theta_{00}(x)=P.\prod_{n=0}^{n=\infty}\left(1+q^{2n+1}e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right).\left(1+q^{2n+1}e^{-\frac{2\pi i x}{\omega}}\right), \tag{21}$$

gdzie $P=\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n})$, $q=e^{\frac{\pi i\omega'}{\omega}}$.

Zebrawszy we wzorze (21), co dwa odpowiednie czynniki, otrzymamy rozwinięcie funkcyi $\Theta_{00}(x)$ na iloczyn nieskończony w postaci:

$$\Theta_{00}(x)=P.\prod_{n=0}^{n=\infty}\left(1+2q^{2n+1}\cos\frac{2\pi x}{\omega}+q^{4n+2}\right). \tag{22}$$

9. Na podstawie tych wzorów, w myśl relacyj 9)—12) otrzymamy rozwinięcie następnych trzech funkcyj Theta, w postaci:

$$\Theta_{10}(x)=P.\prod_{n=0}^{n=\infty}\left(1-q^{2n+1}e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right)\left(1-q^{2n+1}e^{-\frac{2\pi i x}{\omega}}\right), \text{ zatem:}$$

$$\Theta_{10}(x)=P.\prod_{n=0}^{n=\infty}\left(1-2q^{2n+1}\cos\frac{2\pi x}{\omega}+q^{4n+2}\right), \tag{23}$$

$$\Theta_{01}(x)=2q^{1/4}P.\cos\frac{\pi x}{\omega}.\prod_{n=0}^{n=\infty}\left(1+2q^{2n+2}\cos\frac{2\pi x}{\omega}+q^{4n+4}\right), \tag{24}$$

$$\Theta_{11}(x)=2q^{1/4}P.\sin\frac{\pi x}{\omega}.\prod_{n=0}^{n=\infty}\left(1-2q^{2n+2}\cos\frac{2\pi x}{\omega}+q^{4n+4}\right), \tag{25}$$

10. Inną, nie mniej ważną postać rozwinięcia funkcyj: $\Theta_{00}(x)$, $\Theta_{01}(x)$, $\Theta_{10}(x)$, $\Theta_{11}(x)$ na iloczyny zbieżne, otrzymamy, pisząc iloczyny:

$$\left(1+q^{2n+1}e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right)\left(1+q^{2n+1}e^{-\frac{2\pi i x}{\omega}}\right),$$

w postaci:

$$q^{(2n+1)}\left[q^{-\left(\frac{2n+1}{2}\right)}e^{-\frac{\pi i x}{\omega}}+q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)}e^{\frac{\pi i x}{\omega}}\right].\left[q^{-\left(\frac{2n+1}{2}\right)}e^{\frac{\pi i x}{\omega}}+q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)}e^{-\frac{\pi i x}{\omega}}\right],$$

co wobec $q=e^{\frac{\pi i\omega'}{\omega}}$ daje ten iloczyn w postaci:

$$q^{2n+1}\left[e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left[(2n+1)\frac{\omega'}{2}+x\right]}+e^{+\frac{\pi i}{\omega}\left[(2n+1)\frac{\omega'}{2}+x\right]}\right].\left[e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left[(2n+1)\frac{\omega'}{2}-x\right]}+e^{+\frac{\pi i}{\omega}\left[(2n+1)\frac{\omega'}{2}-x\right]}\right]=$$

$$=4q^{2n+1}\cos\frac{\pi}{\omega}\left[x+\frac{(2n+1)\omega'}{2}\right].\cos\frac{\pi}{\omega}\left[x-\frac{(2n+1)\omega'}{2}\right].$$

Czynnik $4q^{2n+1}$ wraz z czynnikiem $1-q^{2n}$ spółczynnika P daje:

$$4q^{2n+1}(1-q^{2n})=\frac{4(1-q^{2n})(1+q^{2n+1})^2}{\left(q^{-\frac{2n+1}{2}}+q^{\frac{2n+1}{2}}\right)^2}=\frac{4(1-q^{2n})(1+q^{2n+1})^2}{\left(e^{-\frac{(2n+1)\pi i\omega'}{2\omega}}+e^{+\frac{(2n+1)\pi i\omega'}{2\omega}}\right)^2}=$$

$$=\frac{(1-q^{2n})(1+q^{2n+1})^2}{\cos^2\frac{(2n+1)\pi\omega'}{2\omega}},$$

stąd wynika ostatecznie:

$$\Theta_{00}(x)=R.\prod_{n=0}^{n=\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{\omega}\left[x+\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega'\right].\cos\frac{\pi}{\omega}\left[x-\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega'\right]}{\cos^2\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi\omega'}{\omega}},$$

a tem samem:

$$\Theta_{10}(x)=R.\prod_{n=0}^{n=\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{\omega}\left[x+\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega'\right].\sin\frac{\pi}{\omega}\left[x-\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega'\right]}{\cos^2\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi\omega'}{\omega}},$$

przyczem:

$$R=(1+q)^2\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n+1})^2.$$

Rozkładając cosinusy na iloczyny nieskończone w postaci:

$$\cos\frac{\pi}{\omega}\left[x\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega'\right]=\prod_{m=0}^{m=\infty}\left\{1-\frac{4\left\{\frac{x\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega'}{\omega}\right\}^2}{(2m+1)^2}\right\},$$

otrzymamy rozwinięcia powyższe w postaci:

$$\Theta_{00}(x)=R.\prod_{m,n}\frac{1-\left\{\frac{x+\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega'}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega}\right\}}{1-\left\{\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega'}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega}\right\}}=R.\prod_{m,n}^{-\infty\ldots+\infty}\left\{1-\frac{x}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega+\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega'}\right\}. \qquad (26)$$

$$\Theta_{10}(x)=R.\prod_{m,n}\frac{1-\left\{\frac{x+\frac{\omega}{2}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega'}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega}\right\}}{1-\left\{\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega'}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega}\right\}^2}=R.\prod_{m,n}\left\{1-\frac{x+\frac{\omega}{2}}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega+\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega'}\right\} \qquad (27)$$

W analogiczny sposób otrzymamy rozwinięcia:

$$\Theta_{01}(x)=e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(x+\frac{\omega'}{4}\right)}R.\prod_{n=0}^{n=\infty}\left\{\frac{\cos\frac{\pi}{\omega}\left[x+(n+1)\omega'\right]\cos\frac{\pi}{\omega}(x-n\omega')}{\cos^2\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi\omega'}{\omega}}\right\}, \qquad (28)$$

względnie:

$$\Theta_{01}(x)=e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(x+\frac{\omega'}{4}\right)}R.\prod_{m,n}\frac{1-\left\{\frac{x+n\omega'}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega}\right\}}{\left\{1-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega'}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega}\right\}}=e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(x+\frac{\omega'}{4}\right)}R.\prod_{m,n}\left\{1-\frac{x+\frac{\omega'}{2}}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega+\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega'}\right\} \qquad (29)$$

Wreszcie:

$$\theta_{11}(x) = \frac{1}{i} e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(x+\frac{\omega'}{4}\right)} R. \prod_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \frac{\sin\frac{\pi}{\omega}[x+(n+1)\omega'] \sin\frac{\pi}{\omega}(x-n\omega')}{\cos^2\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi\omega'}{\omega}} \right\}, \tag{30}$$

względnie:

$$\theta_{11}(x) = \frac{1}{i} e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(x+\frac{\omega'}{4}\right)} R. \prod_{m,n} \frac{1-\left\{\frac{x+\frac{\omega}{2}+n\omega'}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega}\right\}}{\left\{1-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega'}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega}\right\}} = \frac{1}{i} e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(x+\frac{\omega'}{4}\right)} R. \prod_{m,n} \left| 1-\frac{x+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega+\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega'} \right| \tag{31}$$

przyczem:

$$R = \left(1+e^{\frac{\pi i\omega'}{\omega}}\right)^2 . \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1-e^{\frac{2n\pi i\omega'}{\omega}}\right)\left(1+e^{\frac{(2n+1)\pi i\omega'}{\omega}}\right)^2 .$$

11. Logarytmiczna pochodna funkcyi $\theta_{11}(x)$. Weźmy pod uwagę funkcyę $\theta_{11}(x)$ określoną iloczynem nieskończonym:

$$\theta_{11}(x) = 2q^{1/4} P . \sin\frac{\pi x}{\omega} . \prod_{n=0}^{n=\infty} \left(1-2q^{2n+2}\cos\frac{2\pi x}{\omega}+q^{4n+4}\right).$$

Logarytm naturalny tej funkcyi, przedstawia się w postaci funkcyi:

$$\log\theta_{11}(x) = \log(2q^{1/4}P) + \log\sin\frac{\pi x}{\omega} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \log\left(1-2q^{2n+2}\cos\frac{2\pi x}{\omega}+q^{4n+4}\right),$$

której pierwsza pochodna daje logarytmiczną pochodną funkcyi $\theta_{11}(x)$, w postaci:

$$\frac{d\log\theta_{11}(x)}{dx} = \frac{\theta'_{11}(x)}{\theta_{11}(x)} = \frac{\pi}{\omega}\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{\omega} + \frac{4\pi}{\omega}\sin\frac{2\pi x}{\omega} . \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{q^{2n+2}}{1-2q^{2n+2}\cos\frac{2\pi x}{\omega}+q^{4n+4}}$$

przedstawiającej nową funkcyę zmiennej x. Oznaczmy tę nową funkcyę przez $Z(x)$, a więc połóżmy:

$$Z(x) = \frac{d\log\theta_{11}(x)}{dx} = \frac{\theta_{11}'(x)}{\theta_{11}(x)},$$

a otrzymamy na jej określenie szereg:

$$Z(x) = \frac{\pi}{\omega}\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{\omega} + \frac{4\pi}{\omega}\sin\frac{2\pi x}{\omega} . \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{q^{2n+2}}{1-2q^{2n+2}\cos\frac{2\pi x}{\omega}+q^{4n+4}}, \tag{32}$$

który, wobec $|q|<1$, jest bezwarunkowo i jednostajnie zbieżny. Nadajmy zmiennej niezależnej x raz przyrost ω, drugi raz przyrost ω', a otrzymamy równania:

$$Z(x+\omega) = Z(x),$$
$$Z(x+\omega') = Z(x) - \frac{2\pi i}{\omega}.$$

które wypływają także z relacyj 15) i 16) art. 5., przedstawiających się w postaci:

$$\Theta_{11}(x+\omega)=-\Theta_{11}(x),\quad \Theta_{11}(x+\omega')=-\mu\Theta_{11}(x),$$

gdzie $\mu=q^{-1}e^{-\frac{2\pi i x}{\omega}}$.

Otrzymamy bowiem z nich równości:

$$\log\Theta_{11}(x+\omega)=\log(-\Theta_{11}(x)),\quad \log\Theta_{11}(x+\omega')=\log(-\mu\,\Theta_{11}(x)),$$

które zróżniczkowane, prowadzą do równań:

$$\frac{\Theta_{11}'(x+\omega)}{\Theta_{11}(x+\omega)}=\frac{\Theta_{11}'(x)}{\Theta_{11}(x)},\quad \frac{\Theta_{11}'(x+\omega')}{\Theta_{11}(x+\omega')}=\frac{\Theta_{11}'(x)}{\Theta_{11}(x)}+\frac{\mu'}{\mu},$$

gdzie: $\frac{\mu'}{\mu}=-\frac{2\pi i}{\omega}$, a więc, na mocy określenia 32) do równań:

$$Z(x+\omega)=Z(x),\quad Z(x+\omega')=Z(x)-\frac{2\pi i}{\omega},$$

powyżej podanych.

Na podstawie tych równań otrzymujemy:

$$Z(x+2\omega)=Z(x),\quad Z(x+2\omega')=Z(x)-\frac{2.2\pi i}{\omega},$$

$$Z(x+m\omega)=Z(x),\quad Z(x+m\omega')=Z(x)-\frac{2m\pi i}{\omega}, \tag{33}$$

gdzie $m=\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ldots$

Logarytmiczna pochodna funkcyi $\Theta_{11}(x)$, czyli funkcya $Z(x)$, posiada zatem tę własność, że nie zmienia swej wartości, gdy do wartości zmiennej niezależnej x, dodamy dowolną całkowitą wielokrotność liczby ω, posiada więc peryod ω, a zmieni się o stałą wielkość $-\frac{2m\pi i}{\omega}$, gdy do wartości zmiennej niezależnej x dodamy m-krotność liczby ω'.

12. Druga pochodna logarytmu funkcyi $\Theta_{11}(x)$, jako przykład funkcyi dwuperyodycznej. Z własności funkcyi $Z(x)$, określonych równaniami:

$$Z(x+\omega)=Z(x),\quad Z(x+\omega')=Z(x)-\frac{2\pi i}{\omega},$$

otrzymujemy za pomocą różniczkowania dwa równania:

$$Z'(x+\omega)=Z'(x),\quad Z'(x+\omega')=Z'(x), \tag{34}$$

a stąd, dla wszelkiego całkowitego m i n, równania:

$$Z'(x+m\omega)=Z'(x),\quad Z'(x+n\omega')=Z'(x),$$

a więc ogólne równanie:

$$Z'(x+m\omega+n\omega')=Z'(x), \tag{35}$$

które dowodzi, że funkcya $Z'(x)$ nie zmienia swej wartości, gdy do wartości zmiennej niezależnej x dodamy dowolną wielokrotność liczb ω i ω'.

Funkcya $Z'(x)$ posiada więc dwa oddzielne peryody ω i ω', których stosunek: $\frac{\omega'}{\omega}$ jest liczbą urojoną.

Jakąkolwiek funkcyę $F(x)$, posiadającą dwa oddzielne peryody a i b, których stosunek jest urojony, nazywamy f u n k c y ą d w u p e r y o d y c z n ą.

W funkcyi $Z'(x)$, określonej wzorami:

$$Z'(x)=\frac{dZ(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\frac{\Theta_{11}'(x)}{\Theta_{11}(x)}\right]=\frac{d}{dx}\frac{d\log\Theta_{11}(x)}{dx},\ \text{czyli: } Z'(x)=\frac{d^2\log\Theta_{11}(x)}{dx^2},$$

a więc występującej jako druga pochodna logarytmu funkcyi $\theta_{11}(x)$, względem zmiennej niezależnej x, mamy więc przykład funkcyi dwuperyodycznej, posiadającej dwa oddzielne peryody ω i ω', których stosunek $\frac{\omega'}{\omega}$ jest liczbą urojoną.

Rozwinięcie tej funkcyi na szereg nieskończony, przedstawia się na podstawie wzoru 32), w postaci:

$$Z'(x) = \frac{8\pi^2}{\omega^2}\left[\cos\frac{2\pi x}{\omega}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{q^{2n+2}}{1-2q^{2n+2}\cos\frac{2\pi x}{\omega}+q^{4n+4}} - \right.$$

$$\left. -\sin^2\frac{2\pi x}{\omega}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{q^{4n+4}}{(1-2q^{2n+2}\cos\frac{2\pi x}{\omega}+q^{4n+4})^2}\right] - \frac{\pi^2}{\omega^2}\operatorname{cosec}^2\frac{\pi x}{\omega}, \tag{36}$$

gdzie $q=e^{\pi i\frac{\omega'}{\omega}}$.

Uzmysławiając jej peryody, przedstawiające się w ogólnej postaci: $m\omega+n\omega'$, gdzie: $m \gtreqless n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, punktami płaszczyzny zmiennej zespolonej, otrzymujemy podwójnie nieskończony szereg punktów: $P_{m,n}$ ($m \gtreqless n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), występujących jako punkta przecięcia dwu szeregów prostych, do siebie równoległych, jeden w kierunku: OP_{10}, określonym przez peryod $\omega=r(\cos\lambda+i\sin\lambda)$, drugi w kierunku OP_{01}, określonym przez peryod: $\omega'=r'(\cos\lambda'+i\sin\lambda')$.

Punkta 0, P_{10}, P_{01}, P_{11}, odpowiadające liczbom: 0, ω, ω', $\omega+\omega'$, tworzą równoległobok o bokach: $r=|\omega|$ i $r'=|\omega'|$, zwany r ó w n o l e g ł o b o k i e m p e r y o d y c z n o ś c i.

Wartości, jakie funkcya $Z'(x)$ przybiera w obrębie swego równoległoboku peryodyczności, odtwarzają się na mocy wzoru:

$$Z'(x+m\omega+m\omega')=Z'(x),$$

w każdym innym równoległoboku.

13. Rozmaite inne funkcye dwuperyodyczne, oparte na funkcyach Theta. Za pośrednictwem czterech funkcyj Theta: $\theta_{00}(x)$, $\theta_{01}(x)$, $\theta_{10}(x)$, $\theta_{11}(x)$, możemy otrzymać rozmaite inne funkcye dwuperyodyczne.

W szczególności, utwórzmy ilorazy trzech funkcyj: $\theta_{11}(x)$, $\theta_{01}(x)$ i $\theta_{00}(x)$ przez pozostałą: $\theta_{10}(x)$, czyli trzy funkcye:

$$\frac{\theta_{11}(x)}{\theta_{10}(x)}=\frac{\theta_{11}}{\theta_{10}}(x),\quad \frac{\theta_{01}(x)}{\theta_{10}(x)}=\frac{\theta_{01}}{\theta_{10}}(x),\quad \frac{\theta_{00}(x)}{\theta_{10}(x)}=\frac{\theta_{00}}{\theta_{10}}(x),$$

a zauważymy, że wszystkie trzy tak powstałe funkcye są funkcyami dwuperyodycznemi.

Zastępując bowiem w każdej z tych trzech funkcyj raz x przez $x+\omega$, to znowu x przez $x+\omega'$ i uwzględniając własności funkcyi Theta, podane we wzorach 15) i 16) art. 5., otrzymujemy następujące relacye:

1) $\frac{\theta_{11}}{\theta_{10}}(x+\omega)=-\frac{\theta_{11}}{\theta_{10}}(x)$, a stąd:

$$\frac{\theta_{11}}{\theta_{10}}(x+2\omega)=-\frac{\theta_{11}}{\theta_{10}}(x+\omega)=\frac{\theta_{11}}{\theta_{10}}(x),$$

$$\frac{\theta_{11}}{\theta_{10}}(x+\omega')=\frac{\theta_{11}}{\theta_{10}}(x).$$

2) $\frac{\Theta_{01}}{\Theta_{10}}(x+\omega)=-\frac{\Theta_{01}}{\Theta_{10}}(x)$, a więc:

$\frac{\Theta_{01}}{\Theta_{10}}(x+2\omega)=-\frac{\Theta_{01}}{\Theta_{10}}(x+\omega)=\frac{\Theta_{01}}{\Theta_{10}}(x)$,

$\frac{\Theta_{01}}{\Theta_{10}}(x+\omega')=-\frac{\Theta_{01}}{\Theta_{10}}(x)$, a więc:

$\frac{\Theta_{01}}{\Theta_{10}}(x+2\omega')=-\frac{\Theta_{01}}{\Theta_{10}}(x+\omega')=\frac{\Theta_{01}}{\Theta_{10}}(x)$, ale zarazem jest także:

$\frac{\Theta_{01}}{\Theta_{10}}(x+\omega+\omega')=-\frac{\Theta_{01}}{\Theta_{10}}(x+\omega)=\frac{\Theta_{01}}{\Theta_{10}}(x)$.

3) $\frac{\Theta_{00}}{\Theta_{10}}(x+\omega)=\frac{\Theta_{00}}{\Theta_{10}}(x)$,

$\frac{\Theta_{00}}{\Theta_{10}}(x+\omega')=-\frac{\Theta_{00}}{\Theta_{10}}(x)$, a więc:

$\frac{\Theta_{00}}{\Theta_{10}}(x+2\omega')=-\frac{\Theta_{00}}{\Theta_{10}}(x+\omega')=\frac{\Theta_{00}}{\Theta_{10}}(x)$.

Z relacyj tych wypływa, że:

1) funkcya $\frac{\Theta_{11}}{\Theta_{10}}(x)$ posiada dwa peryody oddzielne 2ω i ω', a więc ogólnie peryod kształtu: $2m\omega+n\omega'$,

2) funkcya $\frac{\Theta_{01}}{\Theta_{10}}(x)$ posiada dwa peryody 2ω i $2\omega'$, ponieważ jednak ma ona także peryody:

$$2\omega \text{ i } \omega+\omega', \quad \text{gdyż} \quad 2\omega'=2(\omega+\omega')-2\omega,$$

a więc ma ogólnie peryody kształtu: $2m\omega+n(\omega+\omega')$,

3) funkcya $\frac{\Theta_{00}}{\Theta_{10}}(x)$ posiada dwa peryody ω i $2\omega'$, a więc ogólnie peryody, kształtu: $m\omega+2n\omega'$.

Utworzone trzy funkcye są więc w istocie funkcyami dwuperyodycznemi i mają peryody: 1) 2ω i ω', 2) 2ω i $\omega+\omega'$, 3) ω i $2\omega'$, gdzie stosunek $\frac{\omega'}{\omega}$ jest liczbą urojoną.

Równoległobok, utworzony przez dwa peryody danej funkcyi dwuperyodycznej, nazywamy **równoległobokiem peryodów** tej funkcyi.

W obrębie swego równoległoboku peryodów, otrzymuje funkcya dwuperyodyczna wszelkie wartości, jakie jest wogóle zdolna przyjąć.

Otrzymane trzy funkcye dwuperyodyczne, otrzymują wartości nieskończenie wielkie w tych miejscach, w których funkcya $\Theta_{10}(x)$ ma miejsca zerowe, a więc w miejscach, określonych wzorem:

$$x=m\omega+\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega',$$

dodatnie, lub ujemne.

Miejsca zerowe funkcyi: $\frac{\Theta_{11}}{\Theta_{10}}$, są te same co i w funkcyi $\Theta_{11}(x)$, a więc określone wzorem: $x=m\omega+n\omega'$,

miejsca zerowe funkcyi: $\frac{\Theta_{01}}{\Theta_{10}}(x)$ są te same, co funkcyi $\Theta_{01}(x)$, a więc określone wzorem:
$$x=(m+{}^1/_2)\,\omega+n\omega',$$
a wreszcie miejsce zerowe funkcyi: $\frac{\Theta_{00}(x)}{\Theta_{10}(x)}$, są te same w funkcyi $\Theta_{00}(x)$ a więc określone wzorem:
$$x=(m+{}^1/_2)\,\omega+(n+{}^1/_2)\,\omega'.$$

Na fig. 9., 10., 11. przedstawiono podział płaszczyzny liczbowej na równoległoboki przystające, których boki są peryodami funkcyj:
$$\frac{\Theta_{11}}{\Theta_{10}}(x),\quad \frac{\Theta_{01}}{\Theta_{10}}(x),\quad \frac{\Theta_{00}}{\Theta_{10}}(x),$$
zaznaczając tamże, za pomocą gwiazdek miejsca nieistotnie osobliwe, czyli miejsca nieskończonościowe tych funkcyj, a za pomocą kółek ich miejsca zerowe.

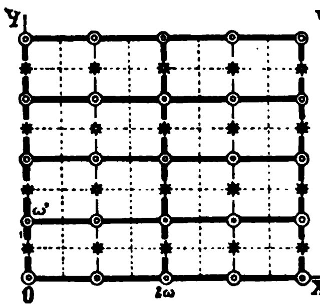


Fig. 9.

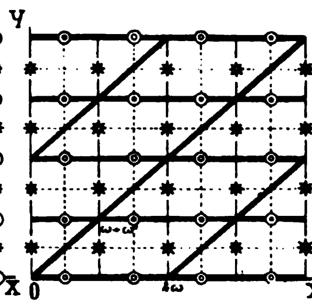


Fig. 10.

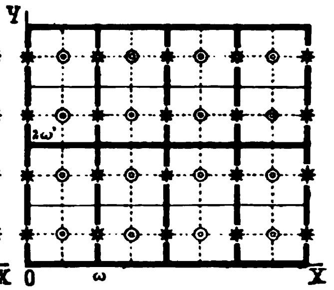


Fig. 11.

Przyjmując liczby ω i ω' jako liczby zespolone, kształtu: $a+bi$ i $a'+b'i$, możemy powyższe peryody uzmysłowić punktami płaszczyzny liczbowej zmiennej urojonej x, które utworzą wierzchołki równoległoboków.

Na fig. 12., 13., 14. przedstawiono i dla tego ogólnego przypadku podział płaszczyzny liczbowej na równoległoboki przystające, których bokami są peryody wspomnianych już funkcyj dwuperyodycznych, zaznaczając miejsca nieskończonościowe ich gwiazdkami, miejsca zerowe zaś kółkami.

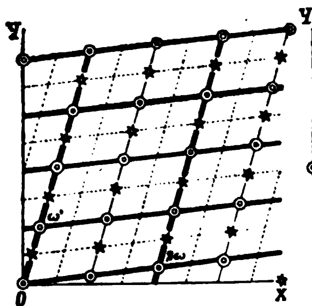


Fig. 12.

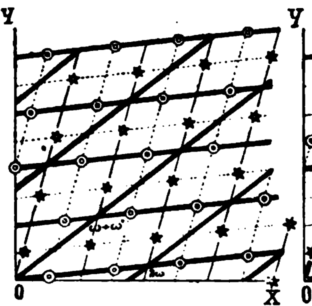


Fig. 13.

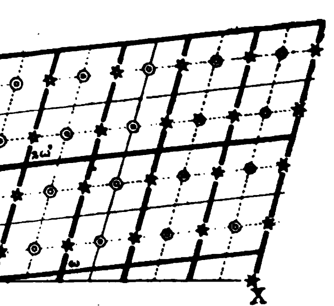


Fig. 14.

14. Tworzenie funkcyj dwuperyodycznych z danemi miejscami zerowemi i nieskończonościowemi. Zapomocą funkcyi $\Theta_{11}(x)$, określonej wzorem:

$$\Theta_{11}(x)=2\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{\omega},$$

ie $q=e^{\pi i\frac{\omega'}{\omega}}$, zmieniającej tylko swój znak, gdy x zastąpimy przez $x+\omega$, trzymującej czynnik $-q^{-1}e^{-\frac{2\pi i x}{\omega}}$, gdy x zastąpimy przez $x+\omega'$, możemy orzyć funkcyę dwuperyodyczną, o peryodach ω i ω', którаby w równoboku peryodów miała n miejsc zerowych: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i tyleż miejsc nieńczonościowych: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Szukaną funkcyę dwuperyodyczną $F(x)$, iemy przedstawić w postaci:

$$F(x)=e^{-\frac{2m\pi x i}{\omega}}\frac{\Theta_{11}(x-a_1)\,\Theta_{11}(x-a_2)\ldots\Theta_{11}(x-a_n)}{\Theta_{11}(x-\alpha_1)\,\Theta_{11}(x-\alpha_2)\ldots\Theta_{11}(x-\alpha_n)},\tag{37}$$

ie m jest dowolną liczbą całkowitą.

Funkcya ta posiada peryod ω, gdyż: $\Theta_{11}(x+\omega)=-\Theta_{11}(x)$, a że: $e^{\frac{2m\pi(x+\omega)i}{\omega}}=e^{\frac{2m\pi x i}{\omega}}$, zatem: $F(x+\omega)=F(x)$.

Zastępując w funkcyi $F(x)$ zmienną x przez $x+\omega'$ i uwzględniając, że:

$$\Theta_{11}(x+\omega')=-q^{-1}e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\Theta_{11}(x),\quad e^{-\frac{2m\pi(x+\omega')i}{\omega}}=e^{-\frac{2m\pi i\omega'}{\omega}}\cdot e^{-\frac{2m\pi x i}{\omega}},$$

zymujemy:

$$F(x+\omega')=e^{\frac{2\pi i}{\omega}(-m\omega'+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n-a_1-a_2-\ldots-a_n)}F(x).$$

Jeżeli więc:

$$-m\omega'+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n-a_1-a_2-\ldots-a_n=n\omega,$$

yli:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+n\omega+m\omega',$$

ie n jest dowolną liczbą całkowitą, natenczas:

$$e^{\frac{2\pi i}{\omega}(-m\omega'+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n-a_1-a_2-\ldots-a_n)}=e^{2n\pi i}=1,$$

więc:

$$F(x+\omega')=F(x).$$

Funkcya $F(x)$, określona wzorem (37), posiada więc także peryod ω', eli suma miejsc zerowych: $a_1+a_2+\ldots+a_n$ jest taką sumą, jak suma iuż miejsc nieskończonościowych: $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$, względnie powiększoną dowolną wielokrotność peryodów ω i ω'.

Ćwiczenia XXIX.

1) Wykazać, że funkcya: $\Theta(x)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}e^{an^2+bnx}$, ma peryod $\frac{2\pi i}{b}$.

2) Wykazać, że funkcya: $\Theta(x)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}e^{an^2+bnx}$,

kutek zamiany x na $x+\frac{2a}{b}$, otrzymuje wartość: $\Theta\left(x+\frac{2a}{b}\right)=e^{-bx-a}\,\Theta(x)$.

3) Wykazać, że funkcye, kształtu:

$$e^{\beta x}\,\theta(x+\alpha),\ \text{gdzie}:\ \theta(x)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q^{n^2} e^{\frac{2n\pi i x}{\omega}},\ \text{przyczem}:\ q=e^{\frac{\pi i\omega'}{\omega}},$$

wskutek zamiany x na $x+\omega$ zmieniają swą wartość, tylko o czynnik $(-1)^{x'}$, gdy $\beta=\frac{x'\pi i}{\omega}$ przy całkowitem x'.

4) Wykazać, że funkcye kształtu, podanego w Ćw. 3., wskutek zamiany x na $x+\omega'$ stają się, pomnożone przez czynnik:

$$(-1)^{x} q^{-1} e^{-\frac{2\pi i x}{\omega}},\ \text{jeżeli}:\ \frac{\alpha}{\omega}=\frac{x\pi i+\beta\omega'}{2\pi i}.$$

5) Wykazać, że funkcye kształtu: $e^{\beta x}\theta(x+\alpha)$, (patrz Ćw. 3.), pod warunkiem: $\beta=\frac{x'\pi i}{\omega}$, $\alpha=x\frac{\omega}{2}+x\frac{\omega'}{2}$, dla całkowitych x i x' nie zmieniają swej wartości, chyba tylko znak, gdy x zmieni się na $x+\omega$, a zarazem stają się pomnożone bez względu na znak, przez czynnik $q^{-1} e^{-\frac{2\pi i x}{\omega}}$, gdy x zmieni się na $x+\omega'$.

Z funkcyi $\theta_{00}(x)$ określonej szeregiem: $\theta_{00}(x)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q^{n^2} e^{\frac{2n\pi i x}{\omega}}$, gdzie: $q=e^{\frac{\pi i\omega'}{\omega}}$, wyprowadzić następujące funkcye:

6) $$\theta_{00}\left(x+\frac{\omega}{2}\right)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-1)^n q^{n^2} e^{\frac{2n\pi i x}{\omega}}=\theta_{10}(x).$$

7) $$\theta_{00}\left(x+\frac{\omega'}{2}\right)=q^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\pi i x}{\omega}}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q^{(n+1/2)^2} e^{\frac{(2n+1)\pi i x}{\omega}}=q^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\pi i x}{\omega}}\,\theta_{01}(x).$$

8) $$\theta_{00}\left(x+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)=q^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\pi i x}{\omega}}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2} e^{\frac{(2n+1)\pi i x}{\omega}}=q^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\pi i x}{\omega}}\cdot i\,\theta_{11}(x).$$

9) Wykazać, że, gdy $q=e^{\pi i\frac{\omega'}{\omega}}$, $|q|<1$, szereg:

$$\theta_{00}(x)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q^{n^2} e^{\frac{2n\pi i x}{\omega}}=1+2\sum_{n=1}^{n=\infty} q^{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{\omega},$$

jest bezwarunkowo zbieżny dla wszelkiego x.

To samo wykazać o szeregach:

10) $$\theta_{10}(x)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-1)^n q^{n^2} e^{\frac{2n\pi i x}{\omega}}=1+2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{\omega}.$$

11) $$\theta_{01}(x)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q^{(n+1/2)^2} e^{\frac{(2n+1)\pi i x}{\omega}}=2\sum_{n=0}^{n=\infty} q^{(n+1/2)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi i x}{\omega}.$$

12) $$\theta_{11}(x)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2} e^{\frac{(2n+1)\pi i x}{\omega}}=2\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{\omega}.$$

13) Wykazać, że funkcya $\theta_{00}(x)$, określona szeregiem w ćw. 9. podanym, staje się zerem dla $x=(m+\frac{1}{2})\omega+(m'+\frac{1}{2})\omega'$, $m \gtreqless m'=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

14) Wykazać, że funkcya $\theta_{10}(x)$, określona w ćw. 10. podanym, staje się zerem, dla $x=m\omega+(m'+\frac{1}{2})\omega'$, $m \gtreqless m'=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

15) Wykazać, że funkcya $\theta_{01}(x)$, określona szeregiem w ćw. 11. podanym, staje się zerem dla $x=(m+\frac{1}{2})\omega+m'\omega'$, $m \gtreqless m'=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

16) **Wykazać**, że funkcya $\theta_{11}(x)$, określona szeregiem, w ćw. 12. podanym, staje się m, dla $x = m\omega + m'\omega'$, $m \gtreqless m' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

17) **Kładąc** $\varphi\left(e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right) = \prod_{\nu=0}^{\nu=m-1} \left(1 + q^{2\nu+1} e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right)\left(1 + q^{2\nu+1} e^{-\frac{2\pi i x}{\omega}}\right)$, $q = e^{\frac{\pi i \omega'}{\omega}}$,

kazać, że:

$$a)\ \varphi\left(e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right) = \varphi\left(e^{-\frac{2\pi i x}{\omega}}\right),$$

$$b)\ \varphi\left(q^2 e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right) = \frac{\left(1 + q^{2m+1} e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right)\left(1 + q^{-1} e^{-\frac{2\pi i x}{\omega}}\right)}{\left(1 + q e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right)\left(1 + q^{2m-1} e^{-\frac{2\pi i x}{\omega}}\right)} \cdot \varphi\left(e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right).$$

18) **Wykazać**, że funkcya $\varphi(z)$, określona iloczynem:

$$\varphi(z) = \prod_{\nu=0}^{\nu=m-1} (1 + q^{2\nu+1} z)(1 + q^{2\nu+1} z^{-1}),\ \text{gdzie: } z = e^{\frac{2\pi i x}{\omega}},\ q = e^{\pi i \frac{\omega'}{\omega}},$$

się rozwinąć w postaci:

$$A_0 + A_1(z + z^{-1}) + A_2(z^2 + z^{-2}) + \ldots + A_m(z^m + z^{-m}),$$

zie:

$$A_n = q^{n^2} \frac{(1 - q^{4m})(1 - q^{4m-2}) \ldots (1 - q^{2m+2n+2})}{(1 - q^2)(1 - q^4) \ldots (1 - q^{2m-2})}.$$

19) **Wykazać**, że iloczyn nieskończony:

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} (1 - q^{2n}) = (1 - q^2)(1 - q^4)(1 - q^6) \ldots$$

t dla $|q| < 1$, bezwarunkowo zbieżny.

Kładąc: $q = e^{\frac{\pi i \omega'}{\omega}}$, $\prod_{n=1}^{n=\infty} (1 - q^{2n}) = P$, wyprowadzić następujące rozwinięcia funkcyj: (x), $\theta_{10}(x)$, $\theta_{01}(x)$, $\theta_{11}(x)$, na iloczyny nieskończone:

$$20)\ \theta_{00}(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} q^{n^2} e^{\frac{2n\pi i x}{\omega}} = P.\prod_{n=0}^{n=\infty}\left(1 + 2q^{2n+1} \cos \frac{2\pi x}{\omega} + q^{4n+2}\right).$$

$$21)\ \theta_{10}(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{\frac{2n\pi i x}{\omega}} = P.\prod_{n=0}^{n=\infty}\left(1 - 2q^{2n+1} \cos \frac{2\pi x}{\omega} + q^{4n+2}\right).$$

$$22)\ \theta_{01}(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q^{(n+1/2)^2} e^{\frac{(2n+1)\pi i x}{\omega}} = 2q^{1/4} P.\cos\frac{\pi x}{\omega}.\prod_{n=0}^{n=\infty}\left(1 - 2q^{2n+2} \cos \frac{2\pi x}{\omega} + q^{4n+4}\right).$$

$$23)\ \theta_{11}(x) = \frac{1}{i}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} e^{\frac{(2n+1)\pi i x}{\omega}} = 2q^{1/4} P.\sin\frac{\pi x}{\omega}.\prod_{n=0}^{n=\infty}\left(1 - 2q^{2n+2} \cos \frac{2\pi x}{\omega} + q^{4n+4}\right).$$

Na podstawie rozwinięć funkcyj: $\theta_{00}(x)$, $\theta_{10}(x)$, $\theta_{01}(x)$, $\theta_{11}(x)$, podanych w ćw. 20)—23) prowadzić następujące własności tych funkcyi:

24) $\theta_{00}\left(x + \frac{\omega}{2}\right) = \theta_{10}(x)$. 25) $\theta_{10}\left(x + \frac{\omega}{2}\right) = \theta_{00}(x)$.

26) $\theta_{01}\left(x + \frac{\omega}{2}\right) = -\theta_{11}(x)$. 27) $\theta_{11}\left(x + \frac{\omega}{2}\right) = \theta_{01}(x)$.

28) $\theta_{00}\left(x + \frac{\omega'}{2}\right) = q^{-1/4} e^{-\frac{\pi i x}{\omega}} \theta_{01}(x)$. 29) $\theta_{10}\left(x + \frac{\omega'}{2}\right) = i q^{-1/4} e^{-\frac{\pi i x}{\omega}} \theta_{11}(x)$.

30) $\theta_{01}\left(x + \frac{\omega'}{2}\right) = q^{-1/4} e^{-\frac{\pi i x}{\omega}} . \theta_{00}(x)$. 31) $\theta_{11}\left(x + \frac{\omega'}{2}\right) = i q^{-1/4} e^{-\frac{\pi i x}{\omega}} \theta_{10}(x)$.

32) $\Theta_{00}(x+\omega)=\Theta_{00}(x)$. 33) $\Theta_{10}(x+\omega)=\Theta_{10}(x)$.

34) $\Theta_{01}(x+\omega)=-\Theta_{01}(x)$. 35) $\Theta_{11}(x+\omega)=-\Theta_{11}(x)$.

36) $\Theta_{00}(x+\omega')=q^{-1}e^{-\frac{2\pi i x}{\omega}}\Theta_{00}(x)$. 37) $\Theta_{10}(x+\omega')=-q^{-1}e^{-\frac{2\pi i x}{\omega}}\Theta_{10}(x)$.

38) $\Theta_{01}(x+\omega')=q^{-1}e^{-\frac{2\pi i x}{\omega}}\Theta_{01}(x)$. 39) $\Theta_{11}(x+\omega')=-q^{-1}e^{-\frac{2\pi i x}{\omega}}\Theta_{11}(x)$.

40) $\Theta_{00}(-x)=\Theta_{00}(x)$. 41) $\Theta_{10}(-x)=\Theta_{10}(x)$. 42) $\Theta_{01}(-x)=\Theta_{01}(x)$.

43) $\Theta_{11}(-x)=-\Theta_{11}(x)$.

44) $\Theta_{00}(x+m\omega+m'\omega')=\Theta_{00}(x+m'\omega')=q^{-m'^2}e^{-\frac{2m'\pi i x}{\omega}}\Theta_{00}(x)$.

45) $\Theta_{10}(x+m\omega+m'\omega')=\Theta_{10}(x+m'\omega')=(-1)^{m'}q^{-m'^2}e^{-\frac{2m'\pi i x}{\omega}}\Theta_{10}(x)$.

46) $\Theta_{01}(x+m\omega+m'\omega')=(-1)^m\Theta_{01}(x+m'\omega')=(-1)^m q^{-m'^2}e^{-\frac{2m'\pi i x}{\omega}}\Theta_{01}(x)$.

47) $\Theta_{11}(x+m\omega+m'\omega')=(-1)^m\Theta_{11}(x+m'\omega')=(-1)^{m+m'}q^{-m'^2}e^{-\frac{2m'\pi i x}{\omega}}\Theta_{11}(x)$.

48) Na podstawie wzorów, określających funkcyę $\Theta_{11}(x)$, w ćw. 23.), wypro rozwinięcie:

$$\frac{d\log\Theta_{11}(x)}{dx}=\frac{\Theta_{11}'(x)}{\Theta_{11}(x)}=\frac{\pi}{\omega}\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{\omega}+\frac{4\pi}{\omega}\sin\frac{2\pi x}{\omega}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{q^{2n+2}}{1-2q^{2n+2}\cos\frac{2\pi x}{\omega}+q^{4n+4}}.$$

49) Kładąc: $Z(x)=\frac{\Theta_{11}'(x)}{\Theta_{11}(x)}$ (patrz ćw. 48.), wykazać, że:

$$\alpha)\ \ Z(x+\omega)=Z(x),\quad \beta)\ Z(x+\omega')=Z(x)-\frac{2\pi i}{\omega},$$

ogólnie, że:

$$\gamma)\ \ Z(x+m\omega)=Z(x),\quad \delta)\ Z(x+m'\omega')=Z(x)-\frac{2m'\pi i}{\omega},$$

gdzie $m\gtreqless m'=\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ldots$

50) Na podstawie wzorów, określających funkcyę $\Theta_{11}(x)$ w 23. wyprowadzić nięcie funkcyi: $Z'(x)=\frac{d^2\log\Theta_{11}(x)}{dx^2}$.

51) Wykazać, że funkcya $Z'(x)$, określona w ćw. 50. jest funkcyą dwuperyod o peryodach ω i ω', czyli, że ma tę własność, że:

$$\alpha)\ \ Z'(x+\omega)=Z'(x),\quad \beta)\ Z'(x+\omega')=Z'(x),$$

ogólnie, że:

$$\gamma)\ Z'(x+m\omega)=Z'(x),\quad \delta)\ Z'(x+m'\omega')=Z'(x),\quad \varepsilon)\ Z'(x+m\omega+m'\omega')=Z'$$

gdy: $m\gtreqless m'=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ldots$

Rozwiązania XXIX. Wskazówki podane w wykładzie.

Literatura. M. C. Jordan. Cours d'analyse de l'école polytechnique. Paris 1882. Thomae. Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctione Veränderlichen Halle a/S. 1873.

Tematy do rozprawek naukowych:

1. O Thetafunkcyach Jacobiego.
2. O logarytmach thetafunkcyj Jacobiego.
3. O funkcyach dwuperyodycznych, opartych na Thetafunkcyach.

Wykład XXX.

Ogólna teorya funkcyj dwuperyodycznych i funkcye elliptyczne.

1. Określenie ogólnej peryodyczności funkcyj. Niech będzie daną dowolna funkcya: $y = \vartheta(x)$; jeżeli pewna funkcya $f(x)$ posiada tę własność, że niezmienia swej wartości, gdy x zmienimy na $\vartheta(x)$, że więc:

$$f(\vartheta(x)) = f(x), \tag{1}$$

tedy powiadamy, że funkcya $f(x)$ jest funkcyą peryodyczną na zasadzie równania: $y = \vartheta(x)$, a odnośne równanie nazywamy równaniem peryodyczności danej funkcyi.

Szczególniejszą wagę posiadają funkcye, posiadające równanie peryodyczności, kształtu:

$$\text{I. } y = x + \omega, \quad \text{II. } y = px, \ |p| \gtrless 1.$$

Pierwsze, czyniące zadość warunkowi: $f(x+\omega) = f(x)$, nazywamy funkcyami dodajnikowo-peryodycznemi, drugie, czyniące zadość warunkowi: $f(px) = f(x)$, nazywamy funkcyami mnożnikowo-peryodycznemi.

2. Funkcye dodajnikowo-peryodyczne. Funkcye, czyniące zadość warunkowi:

$$f(x+\omega) = f(x), \tag{2}$$

któremi zajmowaliśmy się w poprzednich wykładach, mają, jak zauważyliśmy, miejsce w nieskończoności jako miejsce istotnie osobliwe, w którem przyjmować mogą wszelkie możliwe wartości. Z wszelkiej funkcyi jednowartościowej możemy utworzyć funkcyę dodajnikowo-peryodyczną o peryodzie ω, jeżeli w niej zastąpimy zmienną x przez $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$.

3. Funkcye mnożnikowo-peryodyczne. Niech będzie daną funkcya $f(x)$, mnożnikowo-peryodyczna o równaniu peryodyczności: $y = px$, gdzie $p < 1$, a więc posiadająca tę własność, że:

$$f(px) = f(x). \tag{3}$$

Niech będzie $x = a$ miejscem, w którem ta funkcya przybierze wartość $f(a) = A$, to wartość tę samą otrzyma ona także zarówno w miejscach: $pa, p^2a, \ldots, p^n a$, jak w miejscach: $\frac{a}{p}, \frac{a}{p^2}, \ldots, \frac{a}{p^n}$. Otrzymujemy zatem dwa szeregi miejsc, w których funkcya mnożnikowo-peryodycana otrzy-

muje tę samą wartość; granicą jednego szeregu miejsc jest, gdy $p<1$. $\lim_{n=\infty} p^n a=0$, czyli zero, granicą drugiego: $\lim_{n=\infty}\frac{a}{p^n}=\infty$, czyli nieskończoność.

W tych miejscach może więc funkcya mnożnikowo-peryodyczna otrzymać wszelkie możliwe wartości, a zatem:

Wszelka funkcya mnożnikowo-peryodyczna $f(x)$ ma punkt zerowy $x=0$ i punkt nieskończonościowy $x=\infty$, jako dwa miejsca istotnie osobliwe.

4. Tworzenie funkcyj mnożnikowo-peryodycznych. Ponieważ funkcye mnożnikowo-peryodyczne mają punkt zerowy i punkt nieskończonościowy, jako punkta istotnie osobliwe, przeto musiałyby one należeć do funkcyj kształtu:

$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots+a_{-1}x^{-1}+a_{-2}x^{-2}+\ldots+a_{-n}x^{-n}+\ldots$$

spełniających warunek: $f(px)=f(x)$.

Temu warunkowi mogłoby się stać zadość tylko wówczas, gdyby spółczynniki $a_r (r=\pm 1, \pm 2, \ldots)$ spełniały relacyę:

$$a_r=p^r.a_r,$$

a więc były wszystkie zerami, prócz spółczynnika a_0. Z tego wnioskujemy, że funkcya mnożnikowo-peryodyczna, oprócz punktu zerowego i nieskończonościowego, jako punktów istotnie osobliwych, musi posiadać jeszcze inne miejsca nieistotnie osobliwe, do których zaliczamy też miejsca zerowe i miejsca nieskończonościowe funkcyi.

Niech będą: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ miejscami zerowemi, a $b_1, b_2, \ldots, b_m$ miejscami nieskończonościowemi pewnej funkcyi mnożnikowo-peryodycznej, nie związane warunkiem peryodyczności, w ilości skończonej n i m.

Utwórzmy funkcyę, posiadającą miejsce zerowe $x=1$, a nadto warunkiem peryodyczności związane miejsca zerowe:

$$p, p^2, \ldots, p^n, \ldots, \frac{1}{p}, \frac{1}{p^2}, \ldots, \frac{1}{p^n} \ldots,$$

i oznaczmy ją przez $F(p, x)$.

Funkcya taka najprostsza przedstawi się w postaci iloczynu nieskończonego:

$$F(p, x)=(1-x)(1-px)\ldots(1-p^nx)\ldots\left(1-\frac{p}{x}\right)\ldots\left(1-\frac{p^n}{x}\right)\ldots \tag{4}$$

5. Na podstawie tej funkcyi, możemy wszelką funkcyę mnożnikowo-peryodyczną, posiadającą m miejsc zerowych: $a_1, a_2, \ldots, a_m$, i n miejsc nieskończonościowych: $b_1, b_2, \ldots, b_n$ przedstawić w postaci:

$$f(x)=Cx^r\frac{F\left(p, \frac{x}{a_1}\right).F\left(p, \frac{x}{a_2}\right)\ldots F\left(p, \frac{x}{a_m}\right)}{F\left(p, \frac{x}{b_1}\right).F\left(p, \frac{x}{b_2}\right)\ldots F\left(p, \frac{x}{b_n}\right)}, \tag{5}$$

gdzie C jest stałą dowolną.

Jeżeli funkcya ta dla wszelkiego x spełnia warunek:

$$f(px)=f(x),$$

to uwzględniając, że:

$$F(p, px)=-\frac{1}{x}F(p, x),$$

że więc na podstawie wzoru (5):

$$f(px) = p^r \frac{a_1 a_2 \ldots a_m}{b_1 b_2 \ldots b_n} (-x)^{n-m} . f(x),$$

dostajemy warunki:

$$n = m, \quad p^r . \frac{a_1 a_2 \ldots a_m}{b_1 b_2 \ldots b_n} = 1, \tag{6}$$

Pierwszy warunek wypowiada, że wszelka funkcya mnożnikowo-peryodyczna musi mieć tyle miejsc zerowych, ile ma miejsc nieskończonościowych. Ilość ta jednak musi być większą od 1.

Gdyby bowiem było $n=1$, wówczas otrzymalibyśmy z drugiego warunku wzoru (6) relacyę:

$$p^r . \frac{a_1}{b_1} = 1, \text{ czyli: } b_1 = a_1 p^r,$$

byłoby więc:

$$F\left(p, \frac{x}{b_1}\right) = F\left(p, \frac{x}{a_1 p^r}\right) = (-1)^r x^r . F\left(p, \frac{x}{a_1}\right),$$

funkcya $f(x)$ byłaby w takim razie ilością stałą, równą $(-1)^r C$.

Funkcya mnożnikowo-peryodyczna musi więc mieć najmniej dwa miejsca zerowe i dwa miejsca nieskończonościowe, niezwiązane warunkiem peryodyczności.

Jeżeli funkcya mnożnikowo-peryodyczna $f(x)$ staje się na płaszczyźnie liczbowej n-razy równą zeru i n-razy nieskończenie wielką, to musi także każdą wartość A przyjmować n-razy. Funkcya $f(x)-A$ będzie bowiem także funkcyą mnożnikowo-peryodyczną, która staje się n razy nieskończonością, a więc także n-razy zerem, a te miejsca zerowe będą właśnie temi miejscami, w których funkcya $f(x)$ otrzymuje wartość A.

Funkcya $F(p, x)$, za pomocą której możemy utworzyć funkcyę mnożnikowo-peryodyczną $f(x)$ z warunkiem: $f(px)=f(x)$, posiadającą dane miejsca zerowe i jednakową ilość miejsc nieskończonościowych, nazywa się zwykle funkcyą pierwotną funkcyj mnożnikowo peryodycznych.

6. Funkcye dwuperyodyczne pierwszego rodzaju, oparte na funkcyach mnożnikowo-peryodycznych. Zastąpmy w funkcyi mnożnikowo-peryodycznej $f(x)$, czyniącej zadość warunkowi $f(px)=f(x)$, zmienną x przez funkcyę wykładniczą $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ i połóżmy $q=e^{\frac{\pi i \omega'}{\omega}}$, $p=q^2$, tedy funkcya $f(x)$ przekształci się na funkcyę $\varphi(x)=f(e^{\frac{2\pi i x}{\omega}})$, posiadającą tę własność, że:

$$\varphi(x+\omega) = \varphi(x),$$

a zarazem:

$$\varphi(x+\omega') = \varphi(x). \tag{7}$$

Tak utworzona z funkcyi mnożnikowo-peryodycznej $f(x)$ funkcya $\varphi(x)$, jest więc funkcyą dwuperyodyczną o peryodach ω i ω' i spełnia ogólnie relacyę:

$$\varphi(x+m\omega+m'\omega') = \varphi(x), \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{7'}$$

Między peryodami ω i ω' nie może oczywiście zachodzić żaden związek liniowy, kształtu: $a\omega+b\omega'=0$, gdzie a i b są pewnymi rzeczywistymi spółczynnikami, gdyż w tym przypadku oba peryody ω i ω' dałyby się sprowadzić do jednego peryodu.

Z tego wynika także, że przy dwu peryodach od siebie niezależnych: ω i ω' musi być stosunek: $\frac{\omega'}{\omega}$ liczbą urojoną.

Ze względu na to, że jak poznaliśmy, teorya funkcyj dwuperyodycznych może być opartą na teoryi funkcyj mnożnikowo-peryodycznych, możemy z twierdzeń, dotyczących funkcyj mnożnikowo-peryodycznych, wyprowadzić wprost twierdzenia, dotyczące funkcyj dwu-peryodycznych $\varphi(x)$ czyniących zadość relacyi:

$$\varphi(x+m\omega+m'\omega')=\varphi(x), \quad (m \gtreqless m'=0, \pm 1, \pm 2 \ldots), \tag{8}$$

zwanych **funkcyami dwuperyodycznemi pierwszego rodzaju, albo też zwykłemi funkcyami dwuperyodycznemi.**

W szczególności dochodzimy do następujących wniosków:

1°. Funkcya dwuperyodyczna pierwszego rodzaju posiada tylko jeden punkt istotnie osobliwy, mianowicie: $x=\infty$.

2°. Niema funkcyi dwuperyodycznej pierwszego rodzaju, któraby nigdzie nie była zerem, ani nieskończonością.

3°. Wszelka funkcya dwuperyodyczna pierwszego rodzaju ma jednakową ilość miejsc zerowych i miejsc nieskończonościowych, a zarazem co najmniej dwa takie miejsca.

4°. Jeżeli funkcya dwuperyodyczna pierwszego rodzaju ma n, nie związanych warunkiem peryodyczności, miejsc zerowych: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i n, nie związanych warunkiem peryodyczności, ani z niemi, ani między sobą, miejsc nieskończonościowych: $b_1, b_2, \ldots, b_n$, natenczas:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=b_1+b_2+\ldots+b_n+m\omega+m'\omega', \quad (m \gtreqless m'=0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

5°. Wszelka funkcya dwuperyodyczna pierwszego rodzaju przyjmuje wszelką wartość jednakową ilość razy, a co najmniej dwa razy.

6°. Wszelka funkcya dwuperyodyczna pierwszego rodzaju da się utworzyć na podstawie t. z. **funkcyi pierwotnej**:

$$F(q^2,z)=(1-z)(1-q^2z)\ldots(1-q^{2n}z)\ldots\left(1-\frac{q^2}{z}\right)\left(1-\frac{q^4}{z}\right)\ldots\left(1-\frac{q^{2n}}{z}\right)\ldots,$$

gdzie $q=e^{\frac{\pi i\omega'}{\omega}}$, $z=e^{\frac{2\pi ix}{\omega}}$, względnie, na podstawie funkcyi $\Theta_{11}(x)$, różniącej się od funkcyi pierwotnej $F\left(q^2 e^{\frac{2\pi ix}{\omega}}\right)$ tylko czynnikiem $\frac{1}{i} q^{1/4} e^{\frac{\pi ix}{\omega}}.P$, gdzie $P=\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n})$, znanej jako Thetafunkcya:

$$\Theta_{11}(x)=\frac{1}{i}q^{1/4}e^{\frac{\pi ix}{\omega}}.P(1-e^{\frac{2\pi ix}{\omega}})\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n}e^{\frac{2\pi ix}{\omega}})(1-q^{2n}e^{-\frac{2\pi ix}{\omega}}).$$

7°. Wszelka funkcya dwuperyodyczna pierwszego rodzaju $\varphi(x)$, da się sprowadzić do postaci:

$$\varphi(x)=e^{-\frac{2m\pi ix}{\omega}}\frac{\Theta_{11}(x-a_1).\Theta_{11}(x-a_2)\ldots\Theta_{11}(x-a_n)}{\Theta_{11}(x-b_1).\Theta_{11}(x-b_2)\ldots\Theta_{11}(x-b_n)},$$

gdzie $a_1+a_2+\ldots+a_n=b_1+b_2+\ldots+b_n+m\omega+m'\omega'$, $(m \gtreqless m'=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

7. **Funkcye dwuperyodyczne drugiego rodzaju.** Jeżeli funkcya $\varphi(x)$ posiada tę własność, że wskutek przejścia wartości zmiennej niezależnej x na $x+\omega$, lub na $x+\omega'$, gdzie ω i ω' są pewne liczby stałe, otrzyma tę samą wartość $\varphi(x)$, pomnożoną tylko raz przez liczbę stałą a, a drugi raz przez stałą liczbę a', a więc spełnia relacye:

$$\varphi(x+\omega)=a\,\varphi(x), \quad \varphi(x+\omega')=a'\varphi(x), \tag{9}$$

wówczas nazywamy funkcyę $\varphi(x)$ funkcyą dwuperyodyczną drugiego rodzaju, a stałe ω i ω' nazywamy również peryodami funkcyi $\varphi(x)$. Jedną z tych stałych a i a', możemy zawsze przyjąć równą 1.

Skoro bowiem położymy: $F(x)=e^{\alpha x}\varphi(x)$, gdzie α jest pewną stałą, wówczas otrzymamy:

$$F(x+\omega)=e^{\alpha(x+\omega)}.\varphi(x+\omega)=e^{\alpha\omega}.a.F(x),$$
$$F(x+\omega')=e^{\alpha(x+\omega')}.\varphi(x+\omega')=e^{\alpha\omega'}.a'.F(x),$$

a przyjmując α tak, aby było $e^{\alpha\omega}.a=1$ i kładąc $e^{\alpha\omega}.a'=e^{\frac{\lambda}{\omega}}$, otrzymujemy funkcyę $F(x)$, spełniającą relacye: $F(x+\omega)=F(x)$, $F(x+\omega')=e^{\frac{\lambda}{\omega}}.F(x)$.

Funkcye dwuperyodyczne drugiego rodzaju $\varphi(x)$, możemy z łatwością utworzyć za pośrednictwem funkcyi $\Theta_{11}(x)$. Kładąc bowiem:

$$\varphi(x)=\frac{\Theta_{11}(x-a_1).\Theta_{11}(x-a_2)\ldots\Theta_{11}(x-a_n)}{\Theta_{11}(x-b_1).\Theta_{11}(x-b_2)\ldots\Theta_{11}(x-b_n)},$$

otrzymujemy na mocy wzorów 16. str. 480: $\varphi(x+\omega)=\varphi(x)$:

$$\varphi(x+\omega')=e^{\frac{2\pi i}{\omega}(a_1+a_2+\ldots+a_n-b_1-b_2-\ldots-b_n)}.\varphi(x)=e^{\frac{\lambda}{\omega}}\varphi(x),$$

gdzie $\lambda=2\pi i(a_1+a_2+\ldots+a_n-b_1-b_2-\ldots-b_n)$,

funkcya $\varphi(x)$ jest zatem funkcyą dwuperyodyczną drugiego rodzaju.

Utworzywszy jedną taką funkcyę $\varphi(x)$, możemy utworzyć już jakąkolwiek inną, pomnożywszy tak utworzoną funkcyę przez dowolną funkcyę dwuperyodyczną pierwszego rodzaju.

W szczególności, możemy wszelką funkcyę dwuperyodyczną drugiego rodzaju $f(x)$, sprowadzić do postaci:

$$f(x)=e^{-\frac{2m\pi i x}{\omega}}\frac{\Theta_{11}(x-a_1)\Theta_{11}(x-a_2)\ldots\Theta_{11}(x-a_n)}{\Theta_{11}(x-b_1)\Theta_{11}(x-b_2)\ldots\Theta_{11}(x-b_n)},$$

z warunkiem:

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)-(b_1+b_2+\ldots+b_n)+m\,\omega+m'\omega'=\frac{\lambda}{2\pi i},$$

gdzie λ jest liczbą dowolną, a $m \gtreqless m'=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

8. Funkcye dwuperyodyczne trzeciego rodzaju. Jeżeli funkcya $f(x)$ czyni zadość warunkom:

$$\begin{aligned} f(x+\omega) &= e^{ax+b}.f(x) \\ f(x+\omega') &= e^{a'x+b'}.f(x) \end{aligned} \tag{10}$$

natenczas nazywamy taką funkcyę funkcyą dwuperyodyczną trzeciego rodzaju, a stałe ω i ω' od siebie niezależne, nazywamy znowu jej peryodami.

Ze względu na to, że na podstawie powyższych określeń ma być:

$$f(x+\omega+\omega')=e^{a'(x+\omega)+b'}f(x+\omega)=e^{a'(x+\omega)+b'}.e^{ax+b}.f(x),$$
$$f(x+\omega'+\omega)=e^{a(x+\omega')+b}f(x+\omega')=e^{a(x+\omega')+b}.e^{a'x+b'}.f(x),$$

przeto otrzymujemy relacyę:

$$a'\omega=a\omega'+2k\pi i, \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

która dowodzi, że stałe a i a' nie mogą być zupełnie dowolne; danej stałej a odpowiada stała a', określona równaniem:

$$a'=\frac{\omega'}{\omega}a+\frac{2k\pi}{\omega}i. \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Utwórzmy w miejscu funkcyi $f(x)$ dwuperyodycznej trzeciego rodzaju funkcyę $F(x)$, określoną wzorem:

$$F(x)=e^{-\left[a\omega\left(\frac{x}{\omega}\right)^2+(2b-a\omega)\frac{x}{\omega}\right]}.f(x),$$

to funkcya $F(x)$ uczyni zadość warunkom:

$$F(x+\omega)=F(x),$$

$$F(x+\omega')=e^{\frac{2\mu\pi i x+\lambda}{\omega}}F(x),$$

gdzie μ jest liczbą całkowitą, a $\lambda=b'\omega-b\omega'+\frac{a\omega'}{2}(\omega-\omega')$, funkcya $F(x)$ należy zatem także do funkcyj dwuperyodycznych trzeciego rodzaju.

W przypadku $\mu=0$, staje się funkcya $F(x)$ funkcyą dwuperyodyczną drugiego rodzaju, a w przypadku $\mu=\lambda=0$, funkcyą dwuperyodyczną pierwszego rodzaju, czyli zwykłą funkcyą dwuperyodyczną.

Chcąc utworzyć szczególną funkcyę $\varphi(x)$, czyniącą zadość powyższym warunkom, połóżmy:

$$\varphi(x)=e^{-\frac{\mu\pi i x}{\omega}}\frac{\Theta_{11}(x-a_1).\Theta_{11}(x-a_2)\ldots\Theta_{11}(x-a_n)}{\Theta_{11}(x-b_1)\,\Theta_{11}(x-b_2)\ldots\Theta_{11}(x-b_{n+\mu})}.$$

Otrzymujemy tu:

$$\varphi(x+\omega)=\varphi(x),$$

$$\varphi(x+\omega')=e^{\frac{2\mu\pi i x+\lambda}{\omega}}.\varphi(x),$$

gdzie: $\lambda=2\pi i(a_1+a_2+\ldots+a_n-b_1-b_2-\ldots-b_{n+\mu}+{}^1/_2\mu)$,

mamy więc w funkcyi $\varphi(x)$ funkcyę, spełniającą właśnie powyższe warunki.

Znalazłszy jedną taką funkcyę, możemy otrzymać funkcyę dwuperyodyczną trzeciego rodzaju w postaci iloczynu tej funkcyi szczególnej i dowolnej funkcyi dwuperyodycznej pierwszego rodzaju.

Wszelka funkcya dwuperyodyczna trzeciego rodzaju, posiadająca n miejsc zerowych, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i $n+\mu$ miejsc nieskończonościowych: $b_1, b_2, \ldots$ $\ldots, b_{n+\mu}$, da się więc przedstawić w postaci:

$$f(x)=e^{-\frac{(2m+\mu)\pi i x}{\omega}}\frac{\Theta_{11}(x-a_1).\Theta_{11}(x-a_2)\ldots\Theta_{11}(x-a_n)}{\Theta_{11}(x-b_1).\Theta_{11}(x-b_2)\ldots\Theta_{11}(x-b_{n+\mu})},$$

gdzie μ jest liczbą całkowitą, przedstawiającą różnicę między ilością miejsc zerowych funkcyi a ilością jej miejsc nieskończonościowych, przyczem musi być:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n-b_1-b_2-\ldots-b_{n+\mu}+{}^1/_2\mu=m\omega+m'\omega'+\frac{\lambda}{2\pi i}.$$

9. **Thetafunkcye n-go rzędu.** Szczególny rodzaj funkcyj dwuperyodycznych trzeciego rodzaju stanowią funkcye $f(x)$, czyniące zadość warunkom:

$$f(x+\omega)=(-1)^n.f(x),$$

$$f(x+\omega')=(-1)^{n'}.e^{-\frac{n\pi i(2x+\omega')}{\omega}}.f(x), \qquad (11)$$

gdzie n jest liczbą całkowitą. Funkcyą tego rodzaju jest funkcya $\Theta_{11}(x)$ i wszelkie jej całkowite, dodatne potęgi.

Jest bowiem:

$$\Theta_{11}{}^n(x+\omega)=(-1)^n\,\Theta_{11}{}^n(x),$$

$$\Theta_{11}{}^n(x+\omega')=(-1)^n\,e^{\frac{n\pi i(2x+\omega')}{\omega}}\,\Theta_{11}{}^n(x), \qquad (12)$$

ego powodu nazywamy też funkcye, czyniące zadość warunkom (11), etafunkcyami n-go rzędu. Parę liczb $\varkappa$ i $\varkappa'$ nazywamy cechą charakterystyką Thetafunkcyi, rozróżniając cztery istotnie ne cechy: (0, 0), (0, 1), (1, 0) i (1, 1).

10. Ilość Theta-funkcyj n-go rzędu o wspólnych cechach $\varkappa$, $\varkappa'$, pomiędzy ą niezależnych jest ograniczoną, na podstawie twierdzenia Hermite'a: *Pomiędzy* $(n+1)$ *Thetafunkcyami n-go rzędu o wspólnej charakterystyce* $(\varkappa, \varkappa')$ *hodzi przynajmniej jeden związek liniowy o stałych spółczynnikach.*

Dowód. Wszelka funkcya $f(x)$, całkowita przestępna o peryodzie ω, je się przedstawić w postaci:

$$f(x)=\sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} A_r e^{\frac{2r\pi i x}{\omega}}, \tag{13}$$

b co na jedno wychodzi, w postaci:

$$f(x)=\sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} C_r . e^{\frac{r^2\pi i\omega'}{n\omega}} . e^{\frac{2r\pi i x}{\omega}}, \tag{13'}$$

zyczem spółczynniki A_r, względnie C_r, związane relacyą:

$$A_r = C_r . e^{\frac{r^2\pi i\omega'}{n\omega}},$$

liczbami stałemi. Stałe te możemy tak dobrać, aby się stało zadość ugiemu warunkowi:

$$f(x+\omega')=e^{\frac{n\pi i(2x+\omega')}{\omega}} . f(x). \tag{14}$$

Otrzymujemy tu, bowiem:

$$f(x+\omega')=\sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} C_r . e^{\frac{r^2\pi i\omega'}{n\omega}} . e^{\frac{2r\pi i(x+\omega')}{\omega}} = \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} C_r . e^{\frac{\pi i}{n\omega}[r^2\omega'+2nr(x+\omega')]} =$$

$$=\sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} C_r . e^{\frac{\pi i}{n\omega}[(r+n)^2\omega'+2(r+n)x]} . e^{-\frac{n\pi i(2x+\omega')}{\omega}},$$

zatem:

$$f(x+\omega')=e^{-\frac{n\pi i(2x+\omega')}{\omega}} \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} C_r . e^{\frac{\pi i}{n\omega}[(r+n)^2\omega'+2(r+n)x]} . \tag{15}$$

Warunek:

$$f(x+\omega')=e^{-\frac{n\pi i(2x+\omega')}{\omega}} . f(x),$$

ymaga, aby było: $C_{r+n}=C_r$, a więc:

$$C_0 = C_n = C_{2n} = C_{3n} = \dots$$
$$C_1 = C_{n+1} = C_{2n+1} = C_{3n+1} = \dots$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$C_{n-1} = C_{2n-1} = C_{3n-1} = C_{4n-1} = \dots$$

Oznaczmy przez $f_m(x)$ Thetafunkcyę n-go rzędu, otrzymaną z założenia: $_m=1$, $C_0=C_1=\dots=C_{m-1}=C_{m+1}=\dots=C_n=0$, a więc połóżmy:

$$f_m(x)=\sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} e^{\frac{\pi i(nr+m)^2\omega'}{n\omega}} . e^{\frac{2(nr+m)\pi i x}{\omega}}, \tag{16}$$

każdą inną Thetafunkcyę n-go rzędu;

$$f(x)=\sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} C_r e^{\frac{\pi i r^2 \omega'}{n\omega}} \,.\, e^{\frac{2r\pi i x}{\omega}}, \tag{17}$$

przedstawimy w postaci:

$$f(x)=c_0 f_0(x)+c_1 f_1(x)+\ldots+c_{n-1} f_{n-1}(x), \tag{18}$$

której spółczynniki: $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$, możemy wyznaczyć, kładąc za x odpowiednio dobrany układ n szczególnych wartości.

11. Thetafunkcye pierwszego rzędu. Szczególny przypadek Theta-funkcyj n-go rzędu stanowią Thetafunkcye pierwszego rzędu, określone (w art. 3. str. 479.), wzorami:

$$\begin{aligned} \Theta_{00}(x)&=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q^{n^2} e^{\frac{2n\pi i x}{\omega}}, & \Theta_{10}(x)&=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{\frac{2n\pi i x}{\omega}}, \\ \Theta_{01}(x)&=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q^{(n+1/2)^2} e^{\frac{(2n+1)\pi i x}{\omega}}, & \Theta_{11}(x)&=-i\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} e^{\frac{(2n+1)\pi i x}{\omega}}, \end{aligned} \tag{19}$$

które możemy zastąpić wzorem ogólnym:

$$\Theta_{\kappa\kappa'}(x)=(-1)^{\kappa\kappa'} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^{n\kappa} e^{\frac{2(n+1/2\kappa')\pi i x+(n+1/2\kappa')^2\pi i\omega'}{\omega}}, \tag{20}$$

o własnościach charakterystycznych:

$$\Theta_{\kappa\kappa'}(x+m\omega+m'\omega')=(-1)^{m\kappa'+m'\kappa} e^{-m'\pi i(2x+m'\omega)} \,.\, \Theta_{\kappa\kappa'}(x).$$

$$\Theta_{\kappa,\kappa'+2}(x)=\Theta_{\kappa,\kappa'}(x)\,;\;\; \Theta_{\kappa+2,\kappa'}(x)=(-1)^{\kappa'}\Theta_{\kappa\kappa'}(x),$$

$$\Theta_{\kappa\kappa'}\left(x+\frac{\omega}{2}\right)=(-1)^{\kappa'}\Theta_{\kappa+1,\kappa'}(x)=\Theta_{\kappa-1,\kappa'}(x),$$

$$\Theta_{\kappa\kappa'}\left(x+\frac{\omega'}{2}\right)=i^{\kappa} e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(x+\frac{\omega'}{4}\right)} \Theta_{\kappa,\kappa'\pm 1}(x).$$

Funkcyę $\Theta_{\kappa\kappa'}(x)$ oznacza się w przypadkach, gdy chodzi o zaznaczenie peryodów ω i ω', w postaci: $\Theta_{\kappa\kappa'}(x, \omega, \omega')$, nazywając zmienną x argumentem, stałe parametry ω i ω' peryodami, a stosunek parametrów $\frac{\omega'}{\omega}$, modułem Thetafunkcyi.

Z tych czterech Thetafunkcyj pierwszego rzędu, funkcye $\Theta_{00}(x)$, $\Theta_{10}(x)$ i $\Theta_{01}(x)$ nie zmieniają swej wartości wskutek zmiany x na $-x$, są więc t. z. funkcyami parzystemi, funkcya $\Theta_{11}(x)$ zmienia zaś przy zamianie x na $-x$, swój znak na przeciwny, jest więc t. z. funkcyą nieparzystą.

Wszystkie inne Thetafunkcye pierwszego rzędu, mogą się od powyższych czterech Thetafunkcyj różnić o pewien stały czynnik, który zależy w ogólności od peryodów ω i ω', względnie od modułu $\frac{\omega'}{\omega}$.

12. W poprzedzającym wykładzie poznaliśmy szczególne związki, jakie zachodzą między czterema funkcyami Theta, wykazujące, że poszczególne te funkcye przemieniają się jedna w drugą, opatrzoną pewnym czynnikiem wykładniczym, jeżeli zmienną niezależną powiększymy o połowę peryodów ω i ω'. W tym kierunku otrzymujemy następującą tablicę:

Powiększenie x o	zmienia funkcyę $\theta_{00}(x)$	$\theta_{10}(x)$	$\theta_{01}(x)$	$\theta_{11}(x)$	Czynnik wykładniczy
	na funkcyę				
$m\omega+n\omega'$	$\theta_{00}(x)$	$(-1)^n\,\theta_{10}(x)$	$(-1)^m\,\theta_{01}(x)$	$(-1)^{m+n}\,\theta_{11}(x)$	$e^{-\frac{n\pi i(2x+n\omega')}{\omega}}$
$m-{}^1/_2)\omega+n\omega'$	$(-1)^n\,\theta_{10}(x)$	$\theta_{00}(x)$	$(-1)^{m+n+1}\theta_{11}(x)$	$(-1)^m.\,\theta_{01}(x)$	$e^{-\frac{n\pi i(2x+n\omega')}{\omega}}$
$\omega+(n+{}^1/_2)\omega'$	$\theta_{01}(x)$	$(-1)^n.i.\theta_{11}(x)$	$(-1)^m\,\theta_{00}(x)$	$(-1)^{m+1}.i.\,\theta_{10}(x)$	$e^{-\frac{(n+{}^1/_2)\pi i[2x+(n+{}^1/_2)\omega']}{\omega}}$
$-{}^1/_2)\omega+(n+{}^1/_2)\omega'$	$(-1)^n.i.\theta_{11}(x)$	$\theta_{01}(x)$	$(-1)^{m+n+1}.i.\theta_{10}(x)$	$(-1)^m.\,\theta_{00}(x)$	$e^{-\frac{(n+{}^1/_2)\pi i[2x+(n+{}^1/_2)\omega']}{\omega}}$

z której wynikają miejsca zerowe:

funkcyi $\theta_{00}(x)$ dla $x=\frac{2m+1}{2}\omega+\frac{2n+1}{2}\omega'$,

" $\theta_{10}(x)$ " $x=m\omega+\frac{2n+1}{2}\omega'$,

" $\theta_{01}(x)$ " $x=\frac{2m+1}{2}\omega+n\omega'$,

" $\theta_{11}(x)$ " $x=m\omega+n\omega'$.

Z określenia czterech Thetafunkcyj pierwszego rzędu wypływają wreszcie ich rozwinięcia według szeregów sinusowych, względnie cosinusowych w postaci:

$$\theta_{00}(x)=1+2\sum_{n=1}^{n=\infty} q^{n^2}.\cos\frac{2n\pi x}{\omega},\quad \theta_{10}(x)=1+2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n q^{n^2}.\cos\frac{2n\pi x}{\omega},$$
$$\theta_{01}(x)=2\sum_{n=0}^{n=\infty} q^{(n+{}^1/_2)^2}.\cos\frac{(2n+1)\pi x}{\omega},\quad \theta_{11}(x)=2\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n q^{(n+{}^1/_2)^2}.\sin\frac{(2n+1)\pi x}{\omega},\tag{21}$$

następnie rozwinięcia w postaci iloczynów:

$$\theta_{00}(x)=\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n}).\prod_{n=1}^{n=+\infty}(1+q^{2n-1}e^{\frac{2\pi i x}{\omega}})(1+q^{2n-1}e^{-\frac{2\pi i x}{\omega}}),$$
$$\theta_{10}(x)=\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n}).\prod_{n=1}^{n=+\infty}(1-q^{2n-1}e^{\frac{2\pi i x}{\omega}})(1-q^{2n-1}e^{-\frac{2\pi i x}{\omega}}),\tag{22}$$
$$\theta_{01}(x)=2q^{{}^1/_4}\cos\frac{\pi x}{\omega}.\prod_{n=1}^{n=+\infty}(1-q^{2n}).\prod_{n=1}^{n=+\infty}(1+q^{2n}e^{\frac{2\pi i x}{\omega}})(1+q^{2n}e^{-\frac{2\pi i x}{\omega}}),$$
$$\theta_{11}(x)=2q^{{}^1/_4}\sin\frac{\pi x}{\omega}.\prod_{n=1}^{n=+\infty}(1-q^{2n}).\prod_{n=1}^{n=+\infty}(1-q^{2n}e^{\frac{2\pi i x}{\omega}})(1-q^{2n}e^{-\frac{2\pi i x}{\omega}}),$$

z których wypływają rozwinięcia następujące:

$$\theta_{00}(x)=\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n}).\prod_{n=1}^{n=+\infty}(1+2q^{2n-1}\cos\frac{2\pi x}{\omega}+q^{4n-2}),$$
$$\theta_{10}(x)=\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n}).\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-2q^{2n-1}\cos\frac{2\pi x}{\omega}+q^{4n-2}),\tag{23}$$
$$\theta_{01}(x)=2q^{{}^1/_4}\cos\frac{\pi x}{\omega}.\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n}).\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+2q^{2n}\cos\frac{2\pi x}{\omega}+q^{4n}),$$
$$\theta_{11}(x)=2q^{{}^1/_4}\sin\frac{\pi x}{\omega}.\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n}).\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-2q^{2n}\cos\frac{2\pi x}{\omega}+q^{4n}).$$

Gdy $x=0$, otrzymują pierwsze trzy thetafunkcye następujące wartości:

$$\Theta_{00}(0)=1+2q+2q^4+2q^9+\ldots+2q^{n^2}+\ldots$$
$$\Theta_{10}(0)=1-2q+2q^4-2q^9+\ldots+(-1)^n 2q^{n^2}+\ldots \qquad (24)$$
$$\Theta_{01}(0)=2q^{\frac{1}{4}}+2q^{\frac{9}{4}}+2q^{\frac{25}{4}}+\ldots+2q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}+\ldots$$

Uwzględniając miejsca zerowe poszczególnych theta-funkcyj pierwszego rzędu, otrzymujemy ich rozwinięcia w postaci podwójnych iloczynów nieskończonych:

$$\Theta_{00}(x)=\Theta_{00}(0).\prod_{m,n}^{-\infty\ldots+\infty}\left[1-\frac{x}{(m+{}^1/_2)\omega+(n+{}^1/_2)\omega'}\right],$$
$$\Theta_{10}(x)=\Theta_{10}(0).\prod_{m,n}^{-\infty\ldots+\infty}\left[1-\frac{x}{m\omega+(n+{}^1/_2)\omega'}\right],$$
$$\Theta_{01}(x)=\Theta_{01}(0).\prod_{m,n}^{-\infty\ldots+\infty}\left[1-\frac{x}{(m+{}^1/_2)\omega+n\omega'}\right], \qquad (25)$$
$$\Theta_{11}(x)=\Theta_{11}'(0).x\prod_{m,n}^{-\infty\ldots+\infty}\left[1-\frac{x}{m\omega+n\omega'}\right],$$

przyczem we wzorze na $\Theta_{11}(x)$ należy pominąć parę $m=0$, $n=0$, a przy obliczaniu wartości Thetafunkcyj należy zachować porządek wskazany w tych iloczynach.

13. Thetafunkcye drugiego rzędu. Kwadrat każdej ze czterech Thetafunkcyj pierwszego rzędu: $\Theta_{00}(x)$, $\Theta_{10}(x)$, $\Theta_{01}(x)$, $\Theta_{11}(x)$ określonych wspólnym wzorem:

$$\Theta_{\varkappa\varkappa'}(x)=(-1)^{\varkappa\varkappa'}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-1)^{\varkappa n}\, e^{\frac{2\pi i x(n+{}^1/_2\varkappa')+\pi i\omega'(n+{}^1/_2\varkappa')^2}{\omega}}, \qquad (26)$$

spełnia relacye:

$$\Theta_{\varkappa\varkappa'}{}^2(x+\omega)=\Theta_{\varkappa\varkappa'}{}^2(x),$$
$$\Theta_{\varkappa\varkappa'}{}^2(x+\omega')=e^{-\frac{2\pi i(x+\omega')}{\omega}}.\Theta_{\varkappa\varkappa'}{}^2(x), \qquad (26')$$

czyli jest thetafunkcyą rzędu drugiego i to jak bezpośrednio widoczna z tą samą charakterystyką (0, 0).

Wnosimy z tego, że między któremikolwiek trzema thetafunkcyami drugiego rzędu, muszą zachodzić związki liniowe, które należałoby wyznaczyć. W tym celu weźmy pod uwagę pierwsze trzy thetafunkcye drugiego rzędu: $\Theta_{00}{}^2(x)$, $\Theta_{10}{}^2(x)$ i $\Theta_{01}{}^2(x)$ i połóżmy:

$$c_1.\Theta^2_{00}(x)=c_2.\Theta_{01}{}^2(x)+c_3.\Theta_{10}{}^2(x), \qquad (27)$$

a otrzymamy niewiadome spółczynniki: c_1, c_2, c_3, podstawiając za x rozmaite wartości.

Kładąc $x=\frac{\omega}{2}$, otrzymamy, na podstawie tablicy:

$$\Theta_{00}\left(0+\frac{\omega}{2}\right)=\Theta_{10}(0),\quad \Theta_{10}\left(0+\frac{\omega}{2}\right)=\Theta_{00}(0),\quad \Theta_{01}\left(\frac{\omega}{2}\right)=0,$$

zatem, na podstawie przyjętej relacyi będzie:

$$c_1.\Theta_{10}{}^2(0)=c_3.\Theta_{00}{}^2(0). \qquad (a)$$

Kładąc $x=\frac{\omega'}{2}$, otrzymamy:

$$\theta_{00}\left(0+\frac{\omega'}{2}\right)=e^{-\frac{\pi i\omega'}{4\omega}}\theta_{01}(0),\quad \theta_{10}\left(\frac{\omega'}{2}\right)=0,\quad \theta_{01}\left(0+\frac{\omega'}{2}\right)=e^{-\frac{\pi i\omega}{4\omega}}\theta_{00}(0),$$

na podstawie przyjętej relacyi będzie więc:

$$c_1 . \theta_{01}{}^2(0)=c_2 . \theta_{00}{}^2(0), \tag{b}$$

Na wyznaczenie niewiadomych spółczynników c_1, c_2, c_3 związku liniowego (27), otrzymujemy więc z ostatnich dwu relacyj, (a) i (b), stosunki:

$$\frac{c_1}{\theta_{00}{}^2(0)}=\frac{c_2}{\theta_{01}{}^2(0)}=\frac{c_3}{\theta_{10}{}^2(0)}, \tag{28}$$

wobec czego szukany związek liniowy między trzema thetafunkcyami drugiego rzędu: $\theta_{00}{}^2(x)$, $\theta_{01}{}^2(x)$ i $\theta_{10}{}^2(x)$, przedstawia się w postaci:

$$\theta_{00}{}^2(0) . \theta_{00}{}^2(x)=\theta_{01}{}^2(0) . \theta_{01}{}^2(x)+\theta_{10}{}^2(0) . \theta_{10}{}^2(x). \tag{29}$$

Zastępując w tym związku x przez $x+\frac{\omega}{2}$, $x+\frac{\omega'}{2}$, $x+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}$, otrzymujemy z niego trzy inne związki liniowe między trzema innemi trójkami czterech thetafunkcyj drugiego rzędu w postaci wzorów:

$$\begin{aligned}\theta_{00}{}^2(0) . \theta_{10}{}^2(x)&=\theta_{01}{}^2(0) . \theta_{11}{}^2(x)+\theta_{10}{}^2(0) . \theta_{00}{}^2(x),\\ \theta_{00}{}^2(0) . \theta_{01}{}^2(x)&=\theta_{01}{}^2(0) . \theta_{00}{}^2(x)-\theta_{10}{}^2(0) . \theta_{11}{}^2(x),\\ \theta_{00}{}^2(0) . \theta_{11}{}^2(x)&=\theta_{01}{}^2(0) . \theta_{10}{}^2(x)-\theta_{10}{}^2(0) . \theta_{01}{}^2(x),\end{aligned} \tag{29'}$$

które dadzą się także wprost wyprowadzić metodą podaną przy wyprowadzaniu wzoru (29).

Z tych wzorów wynika, że kwadrat każdej z czterech Thetafunkcyi pierwszego rzędu możemy wyrazić przez kwadraty dwu tylko z tych funkcyj, dowolnie zresztą wybranych.

Wybierając w tym celu jako takie dwie funkcye, funkcye $\theta_{01}{}^2(x)$ i $\theta_{11}{}^2(x)$, otrzymamy dwie inne Thetafunkcye drugiego rzędu: $\theta_{00}{}^2(x)$ i $\theta_{10}{}^2(x)$, wyrażone przez dwie poprzednie wzorami, wynikającymi bezpośrednio z wzorów poprzednich, w postaci:

$$\theta_{01}{}^2(0) . \theta_{00}{}^2(x)=\theta_{00}{}^2(0) . \theta_{01}{}^2(x)+\theta_{10}{}^2(0) . \theta_{11}{}^2(x), \tag{30}$$

$$\theta_{01}{}^2(0) . \theta_{10}{}^2(x)=\theta_{10}{}^2(0) . \theta_{01}{}^2(x)+\theta_{00}{}^2(x) . \theta_{11}{}^2(x), \tag{31}$$

14. Z wzorów (29) i (29') wypływa ciekawy związek, zachodzący między wartościami trzech Thetafunkcyj drugiego rzędu, nieznikających w miejscu $x=0$, t. j. między wartościami $\theta_{00}(0)$, $\theta_{01}(0)$ i $\theta_{10}(0)$, które są różne od zera, bo tylko $\theta_{11}(0)=0$. Kładąc mianowicie we wzorze (29), $x=0$, otrzymamy wzór:

$$\theta_{00}{}^4(0)=\theta_{01}{}^4(0)+\theta_{10}{}^4(0). \tag{32}$$

Czwarta potęga wartości funkcyi $\theta_{00}(x)$ w miejscu $x=0$, jest więc równa sumie czwartych potęg funkcyj $\theta_{01}(x)$ i $\theta_{10}(x)$ w temże miejscu $x=0$.

Uwzględniając wartości $\theta_{00}(0)$, $\theta_{10}(0)$ i $\theta_{01}(0)$, we wzorach (24) podane, otrzymamy powyższy wzór w postaci:

$$\begin{aligned}&[1+2q+2q^4+\ldots+2q^{n^2}+\ldots]^4=[1-2q+2q^4-\ldots+(-1)^n 2q^{n^2}+\ldots]^4+\\ &+\left[2q^{\frac{1}{4}}+2q^{\frac{9}{4}}+2q^{\frac{25}{4}}+\ldots+2q^{\frac{(2n+1)^2}{4}}+\ldots\right]^4\end{aligned} \tag{32'}$$

15. Tworzenie elementarnych funkcyj dwuperyodycznych przy pomocy Thetafunkcyj pierwszego rzędu. Zapomocą Thetafunkcyj pierwszego rzędu, możemy tworzyć funkcye dwuperyodyczne pierwszego rodzaju. W najprostszy sposób otrzymamy takie funkcye w postaci ilorazu którychkolwiek dwu Thetafunkcyj pierwszego rzędu.

Gdy bowiem położymy:

$$F(x)=\frac{\vartheta_\alpha(x)}{\vartheta_\beta(x)}, \tag{33}$$

gdzie wskazówki α, β, przedstawiają jedną z cech: (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1), wówczas otrzymamy:

$$F(x+2\omega)=F(x), \text{ a zarazem } F(x+2\omega')=F(x).$$

Funkcya $F(x)$ posiada więc dwa peryody 2ω i $2\omega'$.

Weźmy pod uwagę tylko te stosunki, których dzielnikiem jest funkcya $\vartheta_{10}(x)$, a więc trzy stosunki:

$$\frac{\vartheta_{00}(x)}{\vartheta_{10}(x)},\ \frac{\vartheta_{01}(x)}{\vartheta_{10}(x)},\ \frac{\vartheta_{11}(x)}{\vartheta_{10}(x)},$$

i ich kwadraty:

$$\frac{\vartheta_{00}^2(x)}{\vartheta_{10}^2(x)},\ \frac{\vartheta_{01}^2(x)}{\vartheta_{10}^2(x)},\ \frac{\vartheta_{11}^2(x)}{\vartheta_{10}^2(x)},$$

to na podstawie związków 29), 30) i 31), w art. poprzednim wyprowadzonych, otrzymujemy relacye:

$$\vartheta_{10}^2(0).\vartheta_{01}^2(x)=\vartheta_{01}^2(0).\vartheta_{10}^2(x)-\vartheta_{00}^2(0).\vartheta_{11}^2(x),$$
$$\vartheta_{10}^2(0).\vartheta_{00}^2(x)=\vartheta_{00}^2(0).\vartheta_{10}^2(x)-\vartheta_{01}^2(0).\vartheta_{11}^2(x),$$

a stąd:

$$\frac{\vartheta_{10}^2(0)}{\vartheta_{01}^2(0)}\cdot\frac{\vartheta_{01}^2(x)}{\vartheta_{10}^2(x)}=1-\frac{\vartheta_{00}^2(0)}{\vartheta_{01}^2(0)}\cdot\frac{\vartheta_{11}^2(x)}{\vartheta_{10}^2(x)}, \tag{34}$$

$$\frac{\vartheta_{10}^2(0)}{\vartheta_{00}^2(0)}\cdot\frac{\vartheta_{00}^2(x)}{\vartheta_{10}^2(x)}=1-\frac{\vartheta_{01}^2(0)}{\vartheta_{00}^2(0)}\cdot\frac{\vartheta_{11}^2(x)}{\vartheta_{10}^2(x)}, \tag{35}$$

Między wartościami trzech funkcyj: $\vartheta_{00}(x)$, $\vartheta_{10}(x)$ i $\vartheta_{01}(x)$ w miejscu: $x=0$, zachodzi wiadomy związek (32):

$$\vartheta_{00}^4(0)=\vartheta_{10}^4(0)+\vartheta_{01}^4(0),$$

który możemy napisać w postaci:

$$\frac{\vartheta_{10}^4(0)}{\vartheta_{00}^4(0)}+\frac{\vartheta_{01}^4(0)}{\vartheta_{00}^4(0)}=1, \tag{36}$$

czyli:

$$\varkappa^2+\varkappa'^2=1, \tag{36'}$$

jeżeli położymy:

$$\frac{\vartheta_{10}^2(0)}{\vartheta_{00}^2(0)}=\varkappa',\quad \frac{\vartheta_{01}^2(0)}{\vartheta_{00}^2(0)}=\varkappa. \tag{37}$$

czyli:

$$\sqrt{\varkappa'}=\frac{\vartheta_{10}(0)}{\vartheta_{00}(0)},\quad \sqrt{\varkappa}=\frac{\vartheta_{01}(0)}{\vartheta_{00}(0)}. \tag{37'}$$

Wprowadzając stosunki $\varkappa$ i $\varkappa'$ we wzory (34) i (35), sprowadzimy je do postaci:

$$\sqrt{\frac{\varkappa'}{\varkappa}}\cdot\frac{\vartheta_{01}(x)}{\vartheta_{10}(x)}=\sqrt{1-\frac{1}{\varkappa}\cdot\frac{\vartheta_{11}^2(x)}{\vartheta_{10}^2(x)}} \tag{38}$$

$$\sqrt{\varkappa'}\cdot\frac{\vartheta_{00}(x)}{\vartheta_{10}(x)}=\sqrt{1-\varkappa\cdot\frac{\vartheta_{11}^2(x)}{\vartheta_{10}^2(x)}} \tag{39}$$

ładąc:

$$\sqrt{\frac{1}{\varkappa}}\cdot\frac{\Theta_{11}(x)}{\Theta_{10}(x)}=\varphi_1(x);\quad \sqrt{\frac{\varkappa'}{\varkappa}}\cdot\frac{\Theta_{01}(x)}{\Theta_{10}(x)}=\varphi_2(x),\quad \sqrt{\varkappa'}\cdot\frac{\Theta_{00}(x)}{\Theta_{10}(x)}=\varphi_3(x), \tag{40}$$

amy wzory (38) i (39) w postaci:

$$\varphi_2(x)=\sqrt{1-[\varphi_1(x)]^2} \tag{41}$$

$$\varphi_3(x)=\sqrt{1-\varkappa^2[\varphi_1(x)]^2} \tag{42}$$

i. Otrzymane wzory przedstawiają związek między trzema funkcyami: $\varphi_2(x)$ i $\varphi_3(x)$, które na podstawie określeń (40), z uwzględnieniem ięć funkcyj: $\Theta_{11}(x)$, $\Theta_{10}(x)$ i $\Theta_{01}(x)$, podanych w art. 10. przedstawiają postaci:

$$\varphi_1(x)=\sqrt{\frac{1}{\varkappa}}\cdot\frac{2\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi x}{\omega}-2\sqrt[4]{q^9}\sin\frac{3\pi x}{\omega}+2\sqrt[4]{q^{25}}\sin\frac{5\pi x}{\omega}+\dots}{1-2q\cos\frac{2\pi x}{\omega}+2q^4\cos\frac{4\pi x}{\omega}-2q^9\cos\frac{6\pi x}{\omega}+\dots}$$

$$\varphi_2(x)=\sqrt{\frac{\varkappa'}{\varkappa}}\cdot\frac{2\sqrt[4]{q}\cos\frac{\pi x}{\omega}+2\sqrt[4]{q^9}\cos\frac{3\pi x}{\omega}+2\sqrt[4]{q^{25}}\cos\frac{5\pi x}{\omega}+\dots}{1-2q\cos\frac{2\pi x}{\omega}+2q^4\cos\frac{4\pi x}{\omega}-2q^9\cos\frac{6\pi x}{\omega}+\dots} \tag{43}$$

$$\varphi_3(x)=\sqrt{\varkappa'}\cdot\frac{1+2q\cos\frac{2\pi x}{\omega}+2q^4\cos\frac{4\pi x}{\omega}+2q^9\cos\frac{6\pi x}{\omega}+\dots}{1-2q\cos\frac{2\pi x}{\omega}+2q^4\cos\frac{4\pi x}{\omega}-2q^9\cos\frac{6\pi x}{\omega}+\dots}$$

zem:

$$\sqrt{\varkappa}=\frac{\Theta_{01}(0)}{\Theta_{00}(0)}=\frac{2\sqrt[4]{q}+2\sqrt[4]{q^9}+2\sqrt[4]{q^{25}}+\dots}{1+2q+2q^4+2q^9+\dots}$$

$$\sqrt{\varkappa'}=\frac{\Theta_{10}(0)}{\Theta_{00}(0)}=\frac{1-2q+2q^4-2q^9+\dots}{1+2q+2q^4+2q^9+\dots} \tag{44}$$

Funkcye $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, nazywamy zwykle elementarnemi kcyami dwuperyodycznemi stopnia drugiego, albo też funkmi eliptycznemi drugiego stopnia.

17. Rozwijanie elementarnych funkcyj dwuperyodycznych $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$,), na szeregi potęgowe. Trzy funkcye $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, występujące stosunki trzech Thetafunkcyj $\Theta_{11}(x)$, $\Theta_{01}(x)$, $\Theta_{00}(x)$ do Thetafunkcyi), pomnożone przez pewne stałe spółczynniki, czyli określone wzorami:

$$\varphi_1(x)=\sqrt{\frac{1}{\varkappa}}\cdot\frac{\Theta_{11}(x)}{\Theta_{10}(x)};\quad \varphi_2(x)=\sqrt{\frac{\varkappa'}{\varkappa}}\cdot\frac{\Theta_{01}(x)}{\Theta_{10}(x)};\quad \varphi_3(x)=\sqrt{\varkappa'}\cdot\frac{\Theta_{00}(x)}{\Theta_{10}(x)},$$

):

$$\varkappa=\frac{\Theta_{01}(0)}{\Theta_{00}(0)},\quad \varkappa'=\frac{\Theta_{10}(0)}{\Theta_{00}(0)}.$$

ą się rozwinąć na szeregi potęgowe w otoczeniu miejsca $x=0$. Liczniki em, $\Theta_{11}(x)$, $\Theta_{01}(x)$ i $\Theta_{00}(x)$ i mianownik $\Theta_{10}(x)$ tych trzech funkcyj dadzą jak wiemy z poprzedzających artykułów, przedstawić jako bezustannie ne szeregi potęgowe zmiennej niezależnej x, przyczem funkcya $\Theta_{10}(x)$, ępująca w mianowniku, otrzymuje w miejscu $x=0$ wartość skończoną,

różną od zera. Odnośne szeregi potęgowe mają więc kołowe zakresy zbieżności o środku w punkcie 0, sięgające obwodem do najbliższego punktu zeroweg funkcyi $\Theta_{10}(x)$.

Ażeby wyprowadzić szeregi potęgowe, przedstawiające funkcye dwu peryodyczne $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, należałoby wyznaczyć pochodne tych funkcy i wyznaczyć wartości tych pochodnych w miejscu $x=0$.

Celem wyznaczenia pierwszej pochodnej funkcyi:

$$\varphi_1(x)=\sqrt{\frac{1}{\varkappa}}\cdot\frac{\Theta_{11}(x)}{\Theta_{01}(x)},\ \text{t. j. funkcyi: } \frac{d\varphi_1(x)}{dx}=\sqrt{\frac{1}{\varkappa}}\cdot\frac{d\frac{\Theta_{11}(x)}{\Theta_{10}(x)}}{dx},$$

weźmy pod uwagę, że funkcya: $\Theta_{10}{}^2(x)\cdot\frac{d\frac{\Theta_{11}(x)}{\Theta_{10}(x)}}{dx}$ jest Thetafunkcyą drugieg rzędu o charakterystyce (0, 1), ponieważ wartość x, powiększona o ω, względni o ω', zmienia ją o czynnik $+1$, względnie o czynnik $e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(2x+\omega')}$. Ponieważ jedna funkcye $\Theta_{01}(x)\cdot\Theta_{00}(x)$, oraz $\Theta_{11}(x)\cdot\Theta_{10}(x)$ posiadają tę samą własność, przeto na zasadzie twierdzenia Hermite'a (art. 10.), możemy przyjąć:

$$\frac{d\frac{\Theta_{11}(x)}{\Theta_{10}(x)}}{dx}=\frac{c_1\Theta_{01}(x)\,\Theta_{00}(x)+c_2\,\Theta_{11}(x)\,\Theta_{10}(x)}{\Theta_{10}{}^2(x)},$$

czyli:

$$\Theta_{10}{}^2(x)\cdot\frac{d\frac{\Theta_{11}(x)}{\Theta_{10}(x)}}{dx}=c_1\Theta_{01}(x)\Theta_{00}(x)+c_2\Theta_{11}(x)\Theta_{10}(x).$$

Na podstawie tego założenia, możemy wyznaczyć niewiadome spół czynniki c_1 i c_2, podstawiając za x pewne szczególne wartości.

Podstawiając $x=0$, i uwzględniając, że $\Theta_{11}(0)=0$, otrzymujemy stąd równość:

$$\Theta_{10}{}^2(0)\cdot\left(\frac{\Theta_{11}(x)}{\Theta_{10}(x)}\right)'_0=c_1\Theta_{01}(0)\cdot\Theta_{00}(0),$$

czyli:

$$\Theta_{10}{}^2(0)\cdot\frac{\Theta_{10}(0)\cdot\Theta_{11}{}'(0)-\Theta_{11}(0)\cdot\Theta_{10}{}'(0)}{\Theta_{10}{}^2(0)}=c_1\Theta_{01}(0)\cdot\Theta_{00}(0),$$

a stąd:

$$\Theta_{10}(0)\cdot\Theta_{11}{}'(0)=c_1\cdot\Theta_{01}(0)\cdot\Theta_{00}(0),$$

zatem:

$$c_1=\frac{\Theta_{10}(0)\cdot\Theta_{11}{}'(0)}{\Theta_{01}(0)\cdot\Theta_{00}(0)}.$$

W analogiczny sposób znajdziemy wreszcie $c_2=0$.

Wobec tego będzie:

$$\frac{d\frac{\Theta_{11}(x)}{\Theta_{10}(x)}}{dx}=\frac{\Theta_{10}(0)\cdot\Theta_{11}{}'(0)}{\Theta_{01}(0)\cdot\Theta_{00}(0)}\cdot\frac{\Theta_{01}(x)\cdot\Theta_{00}(x)}{\Theta_{10}{}^2(x)}=\frac{\Theta_{10}(0)\cdot\Theta_{11}{}'(0)}{\Theta_{01}(0)\cdot\Theta_{00}(0)}\cdot\frac{\Theta_{01}(x)}{\Theta_{10}(x)}\cdot\frac{\Theta_{00}(x)}{\Theta_{10}(x)},$$

zatem:

$$\frac{d\varphi_1(x)}{dx}=\sqrt{\frac{1}{\varkappa}}\cdot\frac{\Theta_{10}(0)\cdot\Theta_{11}{}'(0)}{\Theta_{01}(0)\cdot\Theta_{00}(0)}\cdot\sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa'}}\cdot\varphi_2(x)\cdot\frac{1}{\sqrt{\varkappa'}}\cdot\varphi_3(x),$$

czyli:

$$\frac{d\varphi_1(x)}{dx}=\frac{1}{\varkappa'}\cdot\frac{\Theta_{10}(0)\cdot\Theta_{11}{}'(0)}{\Theta_{01}(0)\cdot\Theta_{00}(0)}\cdot\varphi_2(x)\cdot\varphi_3(x),$$

że:
$$x' = \frac{\theta_{10}{}^2(0)}{\theta_{00}{}^2(0)}, \quad \frac{1}{x'} \cdot \frac{\theta_{10}(0) \cdot \theta_{11}'(0)}{\theta_{01}(0) \cdot \theta_{00}(0)} = \frac{\theta_{00}(0) \cdot \theta_{11}'(0)}{\theta_{01}(0) \cdot \theta_{10}(0)},$$

przeto otrzymujemy:
$$\frac{d\varphi_1(x)}{dx} = \frac{\theta_{00}(0) \cdot \theta_{11}'(0)}{\theta_{01}(0) \cdot \theta_{10}(0)} \cdot \varphi_2(x) \cdot \varphi_3(x). \tag{47}$$

Uwzględniając wzory (22), (23), (25), podające rozwinięcia Thetafunkcyj $\theta_{00}(x)$, $\theta_{10}(x)$, $\theta_{01}(x)$, $\theta_{11}(x)$, na iloczyny nieskończone i mając na uwadze wzory (24), na $\theta_{00}(0)$, $\theta_{10}(0)$, $\theta_{01}(0)$, znajdziemy z łatwością, że:
$$\theta_{11}'(0) = \frac{\pi}{\omega} \cdot \theta_{00}(0) \cdot \theta_{10}(0) \cdot \theta_{01}(0).$$

czyli:
$$\frac{\theta_{00}(0) \cdot \theta_{11}'(0)}{\theta_{01}(0) \cdot \theta_{10}(0)} = \frac{\pi}{\omega} \cdot \theta_{00}{}^2(0), \tag{48}$$

zatem ostatecznie pierwszą pochodną funkcyi $\varphi_1(x)$, w postaci:
$$\frac{d\varphi_1(x)}{dx} = \frac{\pi}{\omega} \cdot \theta_{00}{}^2(0) \cdot \varphi_2(x) \cdot \varphi_3(x). \tag{49}$$

Podobnie znajdziemy:
$$\frac{d\varphi_2(x)}{dx} = -\frac{\pi}{\omega} \cdot \theta_{00}{}^2(0) \cdot \varphi_3(x) \cdot \varphi_1(x), \tag{50}$$

następnie:
$$\frac{d\varphi_3(x)}{dx} = -\frac{\pi}{\omega} \cdot \frac{\theta_{01}{}^4(0)}{\theta_{00}{}^2(0)} \cdot \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x),$$

czyli:
$$\frac{d\varphi_3(x)}{dx} = -\frac{\pi}{\omega} \theta_{00}{}^2(0) \cdot x^2 \cdot \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x). \tag{51}$$

Powtarzając różniczkowanie, możemy znaleźć podobnie pochodne wyższych rzędów funkcyj $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, a wstawiając w nie $x=0$, znajdziemy spółczynniki ich rozwinięć na szeregi potęgowe, uporządkowane podług potęg zmiennej niezależnej x.

18. Wprowadzając w miejsce zmiennej niezależnej x, nową zmienną niezależną u, określoną związkiem:
$$u = \frac{\pi}{\omega} \theta_{00}{}^2(0) . x,$$

otrzymamy: $\frac{du}{dx} = \frac{\pi}{\omega} \cdot \theta_{00}{}^2(0)$, zatem pierwsze pochodne funkcyj: $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ względem zmiennej u, w postaci szczególnie prostych wzorów:
$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1(x)}{du} &= \varphi_2(x) \cdot \varphi_3(x), \\ \frac{d\varphi_2(x)}{du} &= -\varphi_3(x) \cdot \varphi_1(x), \\ \frac{d\varphi_3(x)}{du} &= -x^2 \cdot \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x). \end{aligned} \tag{52}$$

Na podstawie tych wzorów, możemy utworzyć pochodne wyższych rzędów funkcyj: $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, względem zmiennej u, a oznaczywszy wartości poszczególnych pochodnych w miejscu $x=0$, a więc $u=0$, możemy wyprowadzić rozwinięcia tych funkcyj na szeregi potęgowe, uporządkowane według potęg zmiennej x, względnie zmiennej u.

Z powyższych wzorów wynika zarazem, że spółczynniki poszczególnych wyrazów, w otrzymanych szeregach potęgowych, będą całkowitemi wymiernemi funkcyami parametru x^2.

Wszystkie trzy funkcye dwuperyodyczne pierwszego rodzaju: $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ są więc jednowartościowemi funkcyami zarówno zmiennej $u=\frac{\pi}{\omega}\Theta_{00}{}^2(0).x$, jak parametru κ^2.

19. Funkcye elliptyczne w ogólności. Funkcyami elliptycznemi nazywamy dziś w analizie wyższej wszelkie funkcye jednowartościowe dwuperyodyczne, które, oprócz koniecznego punktu istotnie osobliwego w nieskończoności, nie posiadają żadnych miejsc istotnie osobliwych w skończoności, a tylko miejsca nieistotnie osobliwe.

Funkcye takie posiadają mianowicie w swym równoległoboku peryodów tyle miejsc nieistotnie osobliwych (miejsc nieskończonościowych), ile posiadają miejsc zerowych i tyle też razy przyjmują każdą wartość A w tymże równoległoboku.

Liczbę, podającą ilość miejsc zerowych, jakie funkcya elliptyczna posiada w obrębie swego równoległoboku peryodów nazywamy stopniem funkcyi eliptycznej.

Ilość ta podaje zarazem ilość miejsc, w których funkcya dwuperyodyczna w obrębie równoległoboku peryodów przyjmuje tę samą wartość.

Funkcye $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, są według tego szczególnemi funkcyami elliptycznemi, najniższego, t. j. drugiego stopnia. Innemi funkcyami elliptycznemi drugiego stopnia, zajmiemy się w następnym wykładzie.

Ćwiczenia XXX.

1) Dowieść, że wszelka funkcya dodajnikowo-peryodyczna: $F(x+\omega)=F(x)$ ma miejsce istotnie osobliwe w nieskończoności.

2) Dowieść, że z wszelkiej funkcyi jednowartościowej, wymiernej, całkowitej zmiennej x, otrzymujemy funkcyę dodajnikowo-peryodyczną o peryodzie ω, jeżeli zastąpimy w niej zmienną x przez funkcyę $e^{\frac{2\pi x i}{\omega}}$.

3) Dowieść, że gdy funkcya dodajnikowo-peryodyczna, ma oprócz punktu w nieskończoności jeszcze inny punkt istotnie osobliwy, to ma ich nieskończenie wiele.

4) Dowieść, że wszelka funkcya mnożnikowo-peryodyczna: $F(px)=F(x)$ ma dwa punkty istotnie osobliwe, jeden w miejscu $x=0$, drugi w miejscu $x=\infty$.

5) Dowieść, że gdy funkcya mnożnikowo-peryodyczna ma oprócz punktu zerowego i punktu nieskończonościowego (ćw. 4.) jeszcze inny punkt istotnie osobliwy, to ma ich nieskończenie wiele.

6) Dowieść, że wszelka funkcya mnożnikowo-peryodyczna: $F(px)=F(x)$, oprócz punktu zerowego i nieskończonościowego posiada jeszcze inne punkty nieistotnie osobliwe.

7) Dowieść, że nie ma funkcyi jednowartościowej o dwu punktach istotnie osobliwych: $x=0$ i $x=\infty$, którąby dla żadnej wartości x różnej od 0 i ∞, nie stawała się ani zerem, ani nieskończonością, a była przytem funkcyą mnożnikowo-peryodyczną.

8) Dowieść, że wszelka funkcya, mnożnikowo-peryodyczna: $f(px)=f(x)$ ma tyle miejsc zerowych, nie związanych równaniem peryodyczności, ile miejsc nieskończonościowych.

9) Dowieść, że wszelka funkcya mnożnikowo-peryodyczna: $f(px)=f(x)$ przyjmuje każdą wartość jednakową ilość razy w miejscach, niezwiązanych z sobą równaniem peryodyczności.

10) Dowieść, że niema funkcyi mnożnikowo-peryodycznej, któraby, pomijając peryodyczność, jakąkolwiek wartość tylko raz otrzymywała.

11) **Dowieść, że wszelka funkcya mnożnikowo-peryodyczna:** $f(px)=f(x)$ jest funkcyą **...kową, której licznik i mianownik składają się z jednakowej ilości czynników, kształtu:**

$$\varphi\left(p,\ -\frac{x}{a}\right)=\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{px}{a}\right)\ldots\left(1-\frac{p^n x}{a}\right)\ldots\left(1-\frac{pa}{x}\right)\left(1-\frac{p^2 a}{x}\right)\ldots\left(1-\frac{p^n a}{x}\right)\ldots$$

12) **Wykazać, że t. z. funkcya pierwotna, określona iloczynem nieskończonym ...łtu:**

$$\varphi(q^2,\ qx)=(1+qx)(1+q^3x)\ldots(1+q^{2n-1}x)\ldots\left(1+\frac{q}{x}\right)\left(1+\frac{q^3}{x}\right)\ldots\left(1+\frac{q^{2n-1}}{x}\right)\ldots$$

...órym $|q|<1$, **da się przekształcić na szereg nieskończony, kształtu:**

$$\varphi(q^2,qx)=\frac{1}{\prod\limits_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n})}\left[1+q\left(x+\frac{1}{x}\right)+q^4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+q^9\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\ldots\right]$$

13) Dowieść, że zastępując w danej funkcyi mnożnikowo-peryodycznej: $f(px)=f(x)$, ... $|p|<1$, zmienną x przez $e^{2\pi ix}$ i kładąc: $p=q^2$, $q=e^{\pi i\omega}$, $\omega=a+bi$, otrzymujemy: ... funkcyę $F(x)$, czyniącą zadość warunkom: $F(x+1)=F(x)$, $F(x+\omega)=F(x)$, czyli ... funkcyę dwuperyodyczną $F(x)$ o dwu peryodach, od siebie niezależnych 1 i ω.

14) Dowieść, że funkcya dwuperyodyczna: $F(x)$ o peryodach niezależnych, 1 i ω, ...ąc spełniająca warunki: $F(x+1)=F(x)$, $F(x+\omega)=F(x)$, nie może mieć innych ...dów, jak peryody kształtu: $m+m'\omega$, gdzie m i m' są dowolne liczby całkowite.

15) Dowieść, że funkcya dwuperyodyczna $F(x)$, czyniąca zadość warunkom: ...$+1)=F(x)$, $F(x+\omega)=F(x)$ ma przynajmniej jeden punkt istotnie osobliwy w miejscu ...

16) Dowieść, że nie ma funkcyi dwuperyodycznej $F(x)$, czyniącej zadość warunkom: ...$=F(x+1)=F(x+\omega)$, któraby w żadnym punkcie płaszczyzny liczbowej, różnym od ...kończoności, nie stawała się nigdzie równą ani zeru, ani nieskończoności.

17) Dowieść, że wszelka funkcya dwuperyodyczna $F(x)=F(x+1)=F(x+\omega)$ przyj... bez względu na peryody, wszelką wartość jednakową ilość razy, a co najmniej ... razy.

18) Dowieść, że kładąc w funkcyi:

$$\ldots,-z)=(1-z)(1-q^2z)(1-q^4z)\ldots(1-q^{2n}z)\ldots\left(1-\frac{q^2}{z}\right)\left(1-\frac{q^4}{z}\right)\ldots\left(1-\frac{q^{2n}}{z}\right)\ldots,\ \text{gdzie } q<1,$$

...ą $z=e^{2\pi ix}$, $q=e^{\pi i\omega}$, otrzymujemy funkcyę:

$$\varphi(x)=(1-e^{2\pi ix})\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n}e^{2\pi ix})(1-q^{2n}e^{-2\pi ix}),$$

...stawioną iloczynem nieskończonym, bezwarunkowo zbieżnym dla wszelkich skończo... wartości zmiennej x.

19) **Wykazać, że funkcya** $\varphi(x)$, określona w ćw. 18., da się wyrazić za pomocą ...funkcyi: $\Theta_{11}(x)$, w której $\omega=1$, $\omega'=\omega$, przedstawiającej się w postaci:

$$\Theta_{11}(x,\ 1,\ \omega)=\frac{1}{i}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2}e^{(2n+1)\pi ix}.$$

20) Dowieść, że wszelka funkcya dwuperyodyczna pierwszego rodzaju o peryodach: ..., da się sprowadzić do postaci:

$$f(x)=e^{-2m'\pi ix}\frac{\Theta_{11}(x-a_1)\,.\,\Theta_{11}(x-a_2)\ldots\Theta_{11}(x-a_n)}{\Theta_{11}(x-b_1)\,.\,\Theta_{11}(x-b_2)\ldots\Theta_{11}(x-b_n)},$$

... $a_1+a_2+\ldots+a_n-b_1-b_2-\ldots-b_n=m+m'\omega$.

21) Dowieść, że wszelka funkcya dwuperyodyczna drugiego rodzaju $f(x)=e_1 f(x+1)=$ $f(x+\omega)$, da się sprowadzić do postaci:

$$f(x)=e^{-2m'\pi ix}\frac{\Theta_{11}(x-a_1)\,.\,\Theta_{11}(x-a_2)\ldots\Theta_{11}(x-a_n)}{\Theta_{11}(x-b_1)\,.\,\Theta_{11}(x-b_2)\ldots\Theta_{11}(x-b_n)},$$

...zem: $\quad (a_1+a_2+\ldots+a_n)-(b_1+b_2+\ldots+b_n)=m+m'\omega+\frac{\lambda}{2\pi i}$,

λ **jest liczbą dowolną.**

22) Wykazać, że wszelka funkcya dwuperyodyczna trzeciego rodzaju:

$$f(x) = f(x+1) = e^{-2(\mu\pi i x+\lambda)} f(x+\omega),$$

da się sprowadzić do postaci:

$$f(x) = e^{-(2m'+\mu)\pi i x} \frac{\Theta_{11}(x-a_1).\Theta_{11}(x-a_2)\dots\Theta_{11}(x-a_n)}{\Theta_{11}(x-b_1).\Theta_{11}(x-b_2)\dots\Theta_{11}(x-a_{n+\mu})},$$

przyczem $(a_1+a_2+\dots+a_n)-(b_1+b_2+\dots+b_{n+\mu})+\frac{\mu}{2}=m+m'\omega+\frac{\lambda}{2i\pi}$.

23) Na podstawie określeń:

$$\Theta_{11}(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} e^{\frac{(2n+1)\pi i x}{\omega}}, \quad \Theta_{01}(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q^{(n+1/2)^2} e^{\frac{(2n+1)\pi i x}{\omega}},$$

$$\Theta_{00}(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q^{n^2} e^{\frac{2n\pi i x}{\omega}}, \quad \Theta_{10}(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{\frac{2n\pi i x}{\omega}}, \quad q = e^{\frac{\pi i \omega'}{\omega}},$$

wykazać, że ilorazy: $\frac{\Theta_{11}(x)}{\Theta_{10}(x)}, \frac{\Theta_{01}(x)}{\Theta_{10}(x)}, \frac{\Theta_{00}(x)}{\Theta_{10}(x)}$, przedstawiają funkcye dwuperyodyczne pierwszego rodzaju, czyli zwykle funkcye dwuperyodyczne, zwane funkcyami elliptycznemi drugiego stopnia.

W szczególności wykazać, na podstawie określeń w ćw. 23) podanych, że:

24) $\frac{\Theta_{11}}{\Theta_{10}}(x+2m\omega+m'\omega')=\frac{\Theta_{11}}{\Theta_{10}}(x)$. 25) $\frac{\Theta_{01}}{\Theta_{10}}[(x+2m\omega+m'(\omega+\omega')]=\frac{\Theta_{01}}{\Theta_{10}}(x)$.

26) $\frac{\Theta_{01}}{\Theta_{10}}[x+m(\omega-\omega')+m'(\omega+\omega')]=\frac{\Theta_{01}}{\Theta_{10}}(x)$. 27) $\frac{\Theta_{00}}{\Theta_{10}}(x+m\omega+2m'\omega')]=\frac{\Theta_{00}}{\Theta_{10}}(x)$.

28) $\frac{\Theta_{11}}{\Theta_{10}}(m\omega+m'\omega')=0$. 29) $\frac{\Theta_{01}}{\Theta_{10}}[(m+\frac{1}{2})\omega+m'\omega']=0$.

30) $\frac{\Theta_{00}}{\Theta_{10}}[(m+\frac{1}{2})\omega+(m'+\frac{1}{2})\omega']=0$. 31) $\frac{\Theta_{11}}{\Theta_{10}}[m\omega+(m'+\frac{1}{2})\omega']=\infty$.

32) $\frac{\Theta_{01}}{\Theta_{10}}[m\omega+(m'+\frac{1}{2})\omega']=\infty$. 33) $\frac{\Theta_{00}}{\Theta_{10}}[m\omega+(m'+\frac{1}{2})\omega']=\infty$.

34) Wykazać, że iloraz jakichkolwiek dwu Thetafunkcyj: $\Theta_{00}(x)$, $\Theta_{10}(x)$, $\Theta_{01}(x)$, $\Theta_{11}(x)$, jest funkcyą elliptyczną drugiego stopnia.

Rozwiązania XXX. Wskazówki podane w ostatnich dwu wykładach.

Literatura. Bobek. Einleitung in die Theorie der elliptischen Functionen. Lepzig, 1884. Martin Krause. Theorie der doppeltperiodischen Functionen einer veränderlichen Grösse. Leipzig 1895. Tannery et Molk. Elements de la théorie des fonctions elliptiques Paris, 1893.

Tematy do rozpraw naukowych:

1. Rozwijanie funkcyj dwuperyodycznych drugiego i trzeciego rodzaju.
2. Tworzenie i własności funkcyj mnożnikowo-peryodycznych.
3. Teorya i własności funkcyj elliptycznych, na podstawie teoryi funkcyj mnożnikowo-peryodycznych.

Wykład XXXI.

Szczególne funkcye eliptyczne.

1. Funkcye eliptyczne Jacobi'ego. Związki zachodzące między trzema kcyami dwuperyodycznemi pierwszego rodzaju, oznaczonemi przez $\varphi_1(x)$, $x)$, $\varphi_3(x)$, określone wzorami:

$$\varphi_2(x)=\sqrt{1-[\varphi_1(x)]^2},\quad \varphi_3(x)=\sqrt{1-\varkappa^2[\varphi_1(x)]^2},\tag{1}$$

pomocą których, znając wartość funkcyi $\varphi_1(x)$, w pewnem miejscu x moży wartości dwu innych funkcyj $\varphi_2(x)$ i $\varphi_3(x)$ wyrachować, spowodowały prowadzenie odmiennego znakowania dla tych funkcyj.

Kładąc mianowicie $\varphi_1(x)=\sin\varphi$, otrzymujemy:

$$\varphi_2(x)=\cos\varphi,\quad \varphi_3(x)=\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}\,.$$

Używając, nadto za przykładem Legendre'a, znakowania:

$$\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}=\Delta\varphi\tag{2}$$

edstawimy funkcye: $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ w postaci równań:

$$\varphi_1(x)=\sin\varphi,\quad \varphi_2(x)=\cos\varphi,\quad \varphi_3(x)=\Delta\varphi.\tag{3}$$

Za pomocą tych równań, możemy wyznaczyć kąt φ, gdy dane są warci na $u=\frac{\pi}{\omega}\,\vartheta_{00}{}^2(0)\,.\,x$ i na $\varkappa^2=\frac{\vartheta_{01}{}^4(0)}{\vartheta_{00}{}^4(0)}$.

Przynależne wartości kąta φ, mogą się pomiędzy sobą różnić tylko wielokrotność kąta 2π.

Dla $x=0$, będzie $u=0$, $\vartheta_{11}(0)=0$, a tem samem także:

$$\varphi_1(0)=\sqrt{\frac{1}{\varkappa}}\cdot\frac{\vartheta_{11}(0)}{\vartheta_{10}(0)}=0,$$

więc $\sin\varphi=0$, przeto $\varphi=2n\pi$, $(n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$.

Przyjmując, że dla $u=0$, ma być φ nie dowolną wielokrotnością kąta , ale wprost zerem, t. j. $\varphi=0$, sprawimy tem założeniem, że każdej warci zmiennej u, odpowiadać będzie, przy pewnej wartości parametru $\varkappa^2$, ko jedna wartość na φ.

Możemy tedy φ uważać jako jednowartościową funkcyę zmiennej u arametru $\varkappa$.

Nazywamy tedy φ amplitudą zmiennej u, przy module $\varkappa$ i piszemy $am(u)$, albo krótko $\varphi=am u$, a chcąc zaznaczyć także moduł $\varkappa$, piszemy $=am(u,\ \varkappa)$.

Przy tak przyjętem znakowaniu kąta φ, otrzymujemy równania:

$$\varphi_1(x)=\sin amu, \quad \varphi_2(x)=\cos amu, \quad \varphi_3(x)=\Delta amu, \tag{4}$$

względnie:

$$\varphi_1(x)=\sin am(u, \varkappa), \quad \varphi_2(x)=\cos am(u, \varkappa), \quad \varphi_3(x)=\Delta am(u, \varkappa), \tag{4'}$$

określające nowe znakowanie trzech funkcyj dwuperyodycznych $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$.

W miejsce tego znakowania, wprowadzamy, za przykładem Gudermana, znakowanie:

$$\sin amu=snu, \quad \cos amu=cnu, \quad \Delta amu=dnu,$$

piszemy więc:

$$\varphi_1(x)=snu, \quad \varphi_2(x)=cnu, \quad \varphi_3(x)=dnu, \tag{5}$$

a chcąc zaznaczyć moduł $\varkappa$, piszemy:

$$\varphi_1(x)=sn(u, \varkappa), \quad \varphi_2(x)=cn(u, \varkappa), \quad \varphi_3(x)=dn(u, \varkappa). \tag{5'}$$

Zmienną u nazywemy argumentem, a stałą $\varkappa$ modułem trzech funkcyj snu, cnu, dnu, a funkcye samę nazywamy funkcyami eliptycznemi Jacobi'ego.

Związek między trzema funkcyami eliptycznemi snu, cnu, dnu a czterema Theta-funkcyami: $\Theta_{00}(x)$, $\Theta_{10}(x)$, $\Theta_{01}(x)$, $\Theta_{11}(x)$, określony jest wzorami:

$$snu=\sqrt{\frac{1}{\varkappa}}.\frac{\Theta_{11}(x)}{\Theta_{10}(x)}; \quad cnu=\sqrt{\frac{\varkappa'}{\varkappa}}.\frac{\Theta_{01}(x)}{\Theta_{10}(x)}, \quad dnu=\sqrt{\varkappa'}.\frac{\Theta_{00}(x)}{\Theta_{10}(x)}, \tag{6}$$

przyczem

$$u=\frac{\pi}{\omega}\Theta_{00}{}^2(0).x, \quad \varkappa=\frac{\Theta_{01}{}^2(0)}{\Theta_{00}{}^2(0)}, \quad \varkappa'=\frac{\Theta_{10}{}^2(0)}{\Theta_{00}{}^2(0)}. \tag{7}$$

2. Peryody funkcyj eliptycznych snu, cnu, dnu. Z własności Theta-funkcyj, względnie z własności elementarnych funkcyj dwuperyodycznych: $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, wynikają bezpośrednio odpowiednie własności funkcyj eliptycznych Jacobi'ego: snu, cnu, dnu. Jeżeli powiększymy x o ω, natenczas u powiększy się o $\pi\Theta_{00}{}^2(0)$.

Oznaczmy tę wielkość przez $2K$, t. j. połóżmy:

$$\pi\Theta_{00}{}^2(0)=2K,$$

tedy będzie na mocy wzorów (37) str. 506., równocześnie:

$$\pi\Theta_{01}{}^2(0)=2\varkappa.K, \quad \pi\Theta_{10}{}^2(0)=2\varkappa'.K.$$

Jeżeli powiększymy x o ω', natenczas powiększy się u o $\pi\Theta_{00}{}^2(0).\frac{\omega'}{\omega}$.
Oznaczmy tę wielkość przez $2K'i$, t. j. połóżmy:

$$\pi\Theta_{00}{}^2(0).\frac{\omega'}{\omega}=2K\frac{\omega'}{\omega}=2K'i,$$

zatem:

$$\frac{\omega'}{\omega}=\frac{K'}{K}i. \tag{8}$$

Powiększenie argumentu u o całkowitą lub połówkową wielokrotność liczb $2K$ i $2K'i$, wywołuje pewne zmiany w wartościach funkcyj snu, cnu, dnu, które zestawimy w tablicy analogicznej do tablicy podanej w art. 12., poprzedniego wykładu, która przedstawiała zmiany w wartościach czterech Theta-funkcyj, wywołane zmianą zmiennej niezależnej x o całkowitą lub połówkową wielokrotność peryodów ω i ω'.

Mianowicie otrzymujemy tu następującą tablicę:

Powiększenie argumentu u o	zamienia funkcye eliptyczne $sn\,u$ na	$cn\,u$ na	$dn\,u$ na
$2mK+2nK'i$	$(-1)^m sn\,u$	$(-1)^{m+n} cn\,u$	$(-1)^n dn\,u$
$(2m-1)K+2nK'i$	$(-1)^{m+1}\frac{cn\,u}{dn\,u}$	$(-1)^{m+n}\varkappa'\frac{sn\,u}{dn\,u}$	$(-1)^n\frac{\varkappa'}{dn\,u}$
$2mK+(2n+1)K'i$	$(-1)^m\frac{1}{\varkappa.sn\,u}$	$(-1)^{m+n+1}\frac{i.dn\,u}{\varkappa.sn\,u}$	$(-1)^{n+1}\frac{i.cn\,u}{sn\,u}$
$(2m-1)K+(2n+1)K'i$	$(-1)^{m+1}\frac{dn\,u}{\varkappa.cn\,u}$	$(-1)^{m+n}\frac{i.\varkappa'}{\varkappa.cn\,u}$	$(-1)^n\frac{\varkappa'.i\,sn\,u}{cn\,u}$

z której wypływają następujące wnioski, dotyczące peryodów funkcyj eliptycznych: $sn\,u$, $cn\,u$, $dn\,u$.

1°. Funkcya $sn\,u$ jest funkcyą dwuperyodyczną, czyniącą zadość równaniu:

$$sn\,(u+4mK+2nK'i)=sn\,u,$$

dla wszelkiego całkowitego m i n, a zatem posiada peryody, określone wzorem:

$$4mK+2nK'i,\ (m \gtreqless n=0,\ \pm 1,\ \pm 2, ...),$$

występujące więc jako sumy całkowitych wielokrotności liczb $4K$ i $2K'i$, które są dwoma zasadniczemi peryodami funkcyi eliptycznej $sn\,u$.

2°. Funkcya $cn\,u$ jest funkcyą dwuperyodyczną, spełniającą równanie:

$$cn\,(u+2mK+2nK'i)=cn\,u,$$

dla całkowitych liczb m i n, których suma $m+n$ jest liczbą parzystą. Peryody funkcyi $cn\,u$ są określone wzorem:

$$2mK+2nK'i,\ \text{gdzie}\ m+n=2r,\ (r=0,\ \pm 1,\ \pm 2, ...),$$

a więc występują jako sumy wielokrotności peryodów $4K$ i $2K+2K'i$, względnie peryodów $2K+2K'i$, $2K-2K'i$, które możemy uważać jako zasadnicze peryody drugiej funkcyi eliptycznej $cn\,u$.

3°. Funkcya $dn\,u$, jest funkcyą dwuperyodyczną, spełniającą warunek:

$$dn\,(u+2mK+4nK'i)=dn\,u,$$

dla wszelkiego całkowitego m i n, a więc posiada peryody, określone wzorem:

$$2mK+4nK'i,\ (m \gtreqless n=0,\ \pm 1,\ \pm 2, ...),$$

występujące zatem jako sumy wielokrotności liczb $2K$ i $4K'i$, które to liczby możemy uważać jako dwa zasadnicze peryody trzeciej funkcyi eliptycznej $dn\,u$.

3. Punkta zerowe i punkta nieskończonościowe funkcyj *snu, cnu, dnu*. Punkta nieskończonościowe są we wszystkich trzech funkcyach eliptycznych $sn\,u$, $cn\,u$, $dn\,u$ jednakowe i wypływają bezpośrednio z miejsc zerowych funkcyi $\vartheta_{10}(x)$, któremi są miejsca, określone wzorem:

$$x=m\omega+\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega',$$

dla funkcyj $sn\,u$, $cn\,u$, $dn\,u$, przedstawiają się więc w postaci:

$$u = 2mK + (2n+1)K'i.$$

Punkta zerowe funkcyj snu, cnu, dnu, wypływają znowu z punktów zerowych funkcyj: $\Theta_{11}(x)$, $\Theta_{01}(x)$ i $\Theta_{00}(x)$.

Funkcya snu, (czyt. *es-enu*) czyli t. z. sinusamplituda staje się więc zerem w miejscach u, określonych wzorem:

$$u = 2mK + 2nK'i, \quad (m \gtreqless n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

funkcya cnu, (czyt. *ce-enu*), czyli t. z. cosinusamplituda, staje się zerem, w miejscach, określonych wzorem:

$$u = (2m+1)K + 2nK'i, \quad (m \gtreqless n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Funkcya dnu, (czyt. *de-enu*), czyli t. z. deltaamplituda, staje się zerem w miejscach, określonych wzorem:

$$u = (2m+1)K + (2n+1)K'i, \quad (m \gtreqless n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

W szczególności, dla $u = 0$, otrzymujemy:

$$sn\,0 = 0, \quad cn\,0 = 1, \quad dn\,0 = 1.$$

Szczególne własności funkcyj eliptycznych Jacobi'ego wypływają ze związku tych funkcyj z Theta-funkcyami.

W szczególności dwie funkcye: cnu i dnu nie zmieniają swej wartości, gdy u zastąpimy przez $-u$, zaliczają się więc do t. z. funkcyj parzystych, określonych warunkiem: $f(-x) = f(x)$, trzecia funkcya eliptyczna Jacobi'ego: snu, zmienia tylko swój znak, gdy u zastąpimy przez $-u$, zalicza się więc do t. z. funkcyj nieparzystych, określonych warunkiem: $f(-x) = -f(x)$.

Zajmijmy się teraz prawami dodawniczemi funkcyj eliptycznych. W tym celu wyprowadzimy naprzód prawa dodawnicze czterech Thetafunkcyj.

4. Prawa dodawnicze Thetafunkcyj. Utwórzmy funkcyę $f(x)$, jako iloczyn dwu jednakowych Thetafunkcyj, w postaci:

$$f(x) = \Theta_{00}(x+y) \cdot \Theta_{00}(x-y),$$

to otrzymamy:

$$f(x+\omega) = f(x),$$

$$f(x+\omega') = e^{-\frac{2\pi i(2x+\omega')}{\omega}} f(x).$$

Funkcya tak utworzona $f(x)$ jest więc Thetafunkcyą drugiego rzędu z charakterystyką $(0, 0)$, a jako taka da się wyrazić liniowo przez kwadraty którychkolwiek dwu Thetafunkcyj tegoż rzędu o tejże charakterystyce.

Tym sposobem otrzymamy $\binom{4}{2} = 6$ sposobów, przedstawiających tę funkcyę.

Połóżmy:

$$\Theta_{00}(x+y) \cdot \Theta_{00}(x-y) = c_1 \cdot \Theta_{00}{}^2(x) + c_2 \cdot \Theta_{11}{}^2(x). \tag{9}$$

Celem wyznaczenia spółczynników c_1 i c_2, otrzymamy dla $x = 0$, równość:

$$\Theta_{00}(y) \cdot \Theta_{00}(-y) = c_1 \cdot \Theta_{00}{}^2(0),$$

skąd, ze względu na to, że: $\Theta_{00}(-y) = \Theta_{00}(y)$, otrzymujemy: $\Theta_{00}{}^2(y) = c_1 \cdot \Theta_{00}{}^2(0)$

a stąd:

$$c_1 = \frac{\Theta_{00}{}^2(y)}{\Theta_{00}{}^2(0)}.$$

Dla $x = \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}$, otrzymamy zaś:

$$\Theta_{00}\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2} + y\right) \cdot \Theta_{00}\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2} - y\right) = c_2 \cdot \Theta_{11}{}^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}\right),$$

a że według tablicy str. 503.:

$$\Theta_{00}\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}+y\right)=i.e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(\frac{\omega'}{4}+y\right)}.\Theta_{11}(y),$$

$$\Theta_{00}\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}-y\right)=ie^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(\frac{\omega'}{4}-y\right)}.\Theta_{11}(-y)=-ie^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(\frac{\omega'}{4}-y\right)}.\Theta_{11}(y),$$

em:

$$\Theta_{11}\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)=e^{-\frac{\pi i\omega'}{4\omega}}.\Theta_{00}(0),$$

eto powyższa równość po uproszczeniu przedstawia się w postaci:

$$\Theta_{11}{}^2(y)=c_2\,.\,\Theta_{00}{}^2(0),$$

tórej otrzymujemy:

$$c_2=\frac{\Theta_{11}{}^2(y)}{\Theta_{00}{}^2(0)}.$$

Podstawiwszy te wartości we wzór (9), otrzymamy:

$$\Theta_{00}(x+y).\Theta_{00}(x-y)=\frac{\Theta_{00}{}^2(y)}{\Theta_{00}{}^2(0)}.\Theta_{00}{}^2(x)+\frac{\Theta_{11}{}^2(y)}{\Theta_{00}{}^2(0)}.\Theta_{11}{}^2(x).$$

więc wzór:

$$\Theta_{00}{}^2(0).\Theta_{00}(x+y).\Theta_{00}(x-y)=\Theta_{00}{}^2(x).\Theta_{00}{}^2(y)+\Theta_{11}{}^2(x).\Theta_{11}{}^2(y), \qquad (10)$$

ry stanowi t. z. wzór dodawniczy funkcyj $\Theta_{00}(x)$, na podstawie u Theta funkcyj $\Theta_{00}(x)$ i $\Theta_{11}(x)$.

Pozostałe pięć dadzą się w podobny sposób jak wzór (10) wyprowadzić rzedstawiają się w postaci:

$$\Theta_{00}{}^2(0).\Theta_{00}(x+y).\Theta_{00}(x-y)=\Theta_{01}{}^2(x).\Theta_{01}{}^2(y)+\Theta_{10}{}^2(x).\Theta_{10}{}^2(y), \qquad (11)$$

$$\Theta_{01}{}^2(0).\Theta_{00}(x+y).\Theta_{00}(x-y)=\Theta_{01}{}^2(x).\Theta_{00}{}^2(y)+\Theta_{11}{}^2(x).\Theta_{10}{}^2(y), \qquad (12)$$

$$\Theta_{10}{}^2(0).\Theta_{00}(x+y).\Theta_{00}(x-y)=\Theta_{00}{}^2(x).\Theta_{10}{}^2(y)-\Theta_{01}{}^2(x).\Theta_{11}{}^2(y), \qquad (13)$$

$$\Theta_{10}{}^2(0).\Theta_{00}(x+y).\Theta_{00}(x-y)=\Theta_{10}{}^2(x).\Theta_{00}{}^2(y)-\Theta_{11}{}^2(x).\Theta_{01}{}^2(y), \qquad (14)$$

$$\Theta_{01}{}^2(0).\Theta_{00}(x+y).\Theta_{00}(x-y)=\Theta_{00}{}^2(x).\Theta_{01}{}^2(y)+\Theta_{10}{}^2(x).\Theta_{11}{}^2(y). \qquad (15)$$

Podobne wzory dodawnicze otrzymamy:

α) dla funkcyi $\Theta_{10}(x)$, w postaci:

$$\begin{aligned}\Theta_{00}{}^2(0).\Theta_{10}(x+y).\Theta_{10}(x-y)&=\Theta_{10}{}^2(x).\Theta_{00}{}^2(y)+\Theta_{01}{}^2(x).\Theta_{11}{}^2(y)\\&=\Theta_{00}{}^2(x).\Theta_{10}{}^2(y)+\Theta_{11}{}^2(x).\Theta_{01}{}^2(y)\\ \Theta_{01}{}^2(0).\Theta_{10}(x+y).\Theta_{10}(x-y)&=\Theta_{01}{}^2(x).\Theta_{10}{}^2(y)+\Theta_{11}{}^2(x).\Theta_{00}{}^2(y)\\&=\Theta_{10}{}^2(x).\Theta_{01}{}^2(y)+\Theta_{00}{}^2(x).\Theta_{11}{}^2(y)\\ \Theta_{10}{}^2(0).\Theta_{10}(x+y).\Theta_{10}(x-y)&=\Theta_{10}{}^2(x).\Theta_{10}{}^2(y)-\Theta_{11}{}^2(x).\Theta_{11}{}^2(y)\\&=\Theta_{00}{}^2(x).\Theta_{00}{}^2(y)-\Theta_{01}{}^2(x).\Theta_{01}{}^2(y)\end{aligned} \qquad (16)$$

β) dla funkcyi $\Theta_{01}(x)$, w postaci:

$$\begin{aligned}\Theta_{00}{}^2(0).\Theta_{01}(x+y).\Theta_{01}(x-y)&=\Theta_{01}{}^2(x).\Theta_{00}{}^2(y)-\Theta_{10}{}^2(x).\Theta_{11}{}^2(y)\\&=\Theta_{00}{}^2(x).\Theta_{01}{}^2(y)-\Theta_{11}{}^2(x).\Theta_{10}{}^2(y)\\ \Theta_{01}{}^2(0).\Theta_{01}(x+y).\Theta_{01}(x-y)&=\Theta_{00}{}^2(x).\Theta_{00}{}^2(y)-\Theta_{10}{}^2(x).\Theta_{10}{}^2(y)\\&=\Theta_{01}{}^2(x).\Theta_{01}{}^2(y)-\Theta_{11}{}^2(x).\Theta_{11}{}^2(y)\\ \Theta_{10}{}^2(0).\Theta_{01}(x+y).\Theta_{01}(x-y)&=\Theta_{01}{}^2(x).\Theta_{10}{}^2(y)-\Theta_{00}{}^2(x).\Theta_{11}{}^2(y)\\&=\Theta_{10}{}^2(x).\Theta_{01}{}^2(y)-\Theta_{11}{}^2(x).\Theta_{00}{}^2(y)\end{aligned} \qquad (17)$$

γ) dla funkcyi $\Theta_{11}(x)$, w postaci:

$$\begin{aligned}\Theta_{00}{}^2(0).\Theta_{11}(x+y).\Theta_{11}(x-y)&=\Theta_{11}{}^2(x).\Theta_{00}{}^2(y)-\Theta_{00}{}^2(x).\Theta_{11}{}^2(y)\\&=\Theta_{10}{}^2(x).\Theta_{01}{}^2(y)-\Theta_{01}{}^2(x).\Theta_{10}{}^2(y)\\ \Theta_{01}{}^2(0).\Theta_{11}(x+y).\Theta_{11}(x-y)&=\Theta_{11}{}^2(x).\Theta_{01}{}^2(y)-\Theta_{01}{}^2(x).\Theta_{11}{}^2(y)\\&=\Theta_{10}{}^2(x).\Theta_{00}{}^2(y)-\Theta_{00}{}^2(x).\Theta_{10}{}^2(y)\\ \Theta_{10}{}^2(0).\Theta_{11}(x+y).\Theta_{11}(x-y)&=\Theta_{00}{}^2(x).\Theta_{01}{}^2(y)-\Theta_{01}{}^2(x).\Theta_{00}{}^2(y)\\&=\Theta_{11}{}^2(x).\Theta_{10}{}^2(y)-\Theta_{10}{}^2(x).\Theta_{11}{}^2(y)\end{aligned} \qquad (18)$$

5. Utwórzmy teraz funkcyę $f(x)$, jako iloczyn dwu różnych thetafu
w postaci:

$$f(x) = \Theta_{10}(x+y) \,.\, \Theta_{01}(x-y),$$

i uważajmy ją jako funkcyę zmiennej x, to zauważymy, że:

$$f(x+\omega) = -f(x)$$

$$f(x+\omega') = -e^{-\frac{2\pi i(2x+\omega')}{\omega}} f(x).$$

Funkcya $f(x)$ jest więc, ze względu na zmienną x Thetafunkcy
giego rzędu z charakterystyką (1, 1), a jako taka da się wyrazić li
przez odpowiednio dobrane iloczyny dwóch thetafunkcyj pierwszego
Możemy więc n. p. położyć:

$$\Theta_{10}(x+y) . \Theta_{01}(x-y) = c_1 \Theta_{01}(x) . \Theta_{10}(x) + c_2 \Theta_{11}(x) . \Theta_{00}(x).$$

Podstawiając w tej tożsamości $x=0$, otrzymamy:

$$\Theta_{01}(y) . \Theta_{10}(y) = c_1 \Theta_{01}(0) . \Theta_{10}(0),$$

a więc:

$$c_1 = \frac{\Theta_{01}(y) . \Theta_{10}(y)}{\Theta_{01}(0) . \Theta_{10}(0)},$$

podstawiając zaś $x = \frac{\omega'}{2}$, dostajemy:

$$\Theta_{01}\left(\frac{\omega'}{2}+y\right) . \Theta_{10}\left(\frac{\omega'}{2}-y\right) = c_2 . \Theta_{11}\left(\frac{\omega'}{2}\right) . \Theta_{00}\left(\frac{\omega'}{2}\right),$$

a że, na podstawie tablicy (str. 480 art. 5.):

$$\Theta_{10}\left(\frac{\omega'}{2}+y\right) = i e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(y+\frac{\omega'}{4}\right)} \Theta_{11}(y), \quad \Theta_{01}\left(\frac{\omega'}{2}-y\right) = e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(-y+\frac{\omega'}{4}\right)} \Theta_{00}(y),$$

$$\Theta_{11}\left(\frac{\omega'}{2}\right) = i e^{-\frac{\pi i \omega'}{4\omega}} \Theta_{10}(0), \quad \Theta_{00}\left(\frac{\omega'}{2}\right) = e^{-\frac{\pi i \omega'}{4\omega}} \Theta_{01}(0),$$

przeto będzie:

$$\Theta_{11}(y) . \Theta_{00}(y) = c_2 . \Theta_{01}(0) . \Theta_{10}(0),$$

a więc:

$$c_2 = \frac{\Theta_{11}(y) . \Theta_{00}(y)}{\Theta_{01}(0) . \Theta_{10}(0)},$$

zatem otrzymujemy wzór:

$$\Theta_{10}(0)\Theta_{01}(0) . \Theta_{10}(x+y)\Theta_{01}(x-y) = \Theta_{01}(x)\Theta_{10}(x)\Theta_{01}(y)\Theta_{10}(y) + \Theta_{11}(x)\Theta_{00}(x)\Theta_{11}(y$$

podobnie:

$$\Theta_{01}(0) . \Theta_{10}(0) . \Theta_{10}(x-y)\Theta_{01}(x+y) = \Theta_{01}(x)\Theta_{10}(x)\Theta_{01}(y)\Theta_{10}(y) - \Theta_{11}(x)\Theta_{00}(x)\Theta_{11}(y$$

Oba te wzory możemy zestawić w jeden wspólny wzór, który,
dla skrócenia położymy $\Theta_{00}(0) = \Theta_{00}$, $\Theta_{01}(0) = \Theta_{01}$, $\Theta_{10}(0) = \Theta_{10}$, przedsta
w postaci:

$$\Theta_{01}\Theta_{10} . \Theta_{10}(x \pm y)\Theta_{01}(x \mp y) = \Theta_{01}(x)\Theta_{10}(x)\Theta_{01}(y)\Theta_{10}(y) \pm \Theta_{00}(x)\Theta_{11}(x)\Theta_{00}(y)\Theta_{11}($$

W podobny sposób otrzymamy analogiczne wzory dla innyc
Thetafunkcyj, które, jeżeli położymy dla skrócenia: $\Theta_{00}(0) = \Theta_{00}$, $\Theta_{01}(0$
$\Theta_{10}(0) = \Theta_{10}$, przedstawiają się w postaci:

$$\Theta_{00}\Theta_{01} . \Theta_{00}(x \pm y)\Theta_{01}(x \mp y) = \Theta_{00}(x)\Theta_{01}(x)\Theta_{00}(y)\Theta_{01}(y) \pm \Theta_{10}(x)\Theta_{11}(x)\Theta_{10}(y)\Theta_{11}($$

$$\Theta_{10}\Theta_{00} . \Theta_{10}(x \pm y)\Theta_{00}(x \mp y) = \Theta_{10}(x)\Theta_{00}(x)\Theta_{10}(y)\Theta_{00}(y) \pm \Theta_{11}(x)\Theta_{01}(x)\Theta_{11}(y)\Theta_{01}($$

$$\Theta_{01}\Theta_{10} . \Theta_{11}(x \pm y)\Theta_{00}(x \mp y) = \Theta_{11}(x)\Theta_{00}(x)\Theta_{01}(y)\Theta_{10}(y) \pm \Theta_{01}(x)\Theta_{10}(x)\Theta_{11}(y)\Theta_{00}($$

$$\Theta_{00}\Theta_{10} . \Theta_{11}(x \pm y)\Theta_{01}(x \mp y) = \Theta_{01}(x)\Theta_{11}(x)\Theta_{00}(y)\Theta_{10}(y) \pm \Theta_{00}(x)\Theta_{10}(x)\Theta_{01}(y)\Theta_{11}($$

$$\Theta_{01}\Theta_{00} . \Theta_{11}(x \pm y)\Theta_{10}(x \mp y) = \Theta_{11}(x)\Theta_{10}(x)\Theta_{01}(y)\Theta_{00}(y) \pm \Theta_{01}(x)\Theta_{00}(x)\Theta_{11}(y)\Theta_{10}($$

re wraz z wzorem (20) wyczerpują wszelkie możliwe połączenia i pokazując, , znając wartości Thetafunkcyi w dwu różnych miejscach x i y, wyznać odpowiednią wartość Thetafunkcyi w miejscu $x+y$, względnie $x-y$.

Wzorów tych użyjemy do wyprowadzenia analogicznych praw dodawczych dla funkcyj elliptycznych.

6. Prawa dodawnicze funkcyj eliptycznych: $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$. Weźmy uwagę trzy prawa dodawnicze Thetafunkcyi, określone wzorami: (24), i (22), a otrzymamy trzy równości:

$$\theta_{00}\theta_{01}.\theta_{11}(x\pm y)\theta_{10}(x\mp y)=\theta_{10}(x)\theta_{11}(x)\theta_{00}(y)\theta_{01}(y)\pm\theta_{00}(x)\theta_{01}(x)\theta_{10}(y)\theta_{11}(y),$$

$$\theta_{01}\theta_{10}.\theta_{01}(x\pm y)\theta_{10}(x\mp y)=\theta_{01}(x)\theta_{10}(x)\theta_{01}(y)\theta_{10}(y)\mp\theta_{11}(x)\theta_{00}(x)\theta_{11}(y)\theta_{00}(y),$$

$$\theta_{10}\theta_{11}.\theta_{00}(x\pm y)\theta_{10}(x\mp y)=\theta_{10}(x)\theta_{00}(x)\theta_{10}(y)\theta_{00}(y)\mp\theta_{11}(x)\theta_{01}(x)\theta_{11}(y)\theta_{01}(y).$$

Podzielmy lewe strony tych równości przez lewą, a prawe strony przez ewą stronę tożsamości:

$$\theta_{10}{}^2.\theta_{10}(x\pm y)\theta_{10}(x\mp y)=\theta_{10}{}^2(x)\theta_{10}{}^2(y)-\theta_{11}{}^2(x)\theta_{11}{}^2(y),$$

otrzymamy następujące równości:

$$\frac{\theta_{01}}{\theta_{10}}\cdot\frac{\theta_{11}(x\pm y)}{\theta_{10}(x\pm y)}=\frac{\theta_{10}(x)\theta_{11}(x)\theta_{00}(y)\theta_{01}(y)\pm\theta_{00}(x)\theta_{01}(x)\theta_{10}(y)\theta_{11}(y)}{\theta_{10}{}^2(x)\theta_{10}{}^2(y)-\theta_{11}{}^2(x)\theta_{11}{}^2(y)},\quad(26)$$

$$\frac{\theta_{01}}{\theta_{10}}\cdot\frac{\theta_{01}(x\pm y)}{\theta_{10}(x\pm y)}=\frac{\theta_{01}(x)\theta_{10}(x)\theta_{01}(y)\theta_{10}(y)\mp\theta_{11}(x)\theta_{00}(x)\theta_{11}(y)\theta_{00}(y)}{\theta_{10}{}^2(x)\theta_{10}{}^2(y)-\theta_{11}{}^2(x)\theta_{11}{}^2(y)},\quad(27)$$

$$\frac{\theta_{00}}{\theta_{10}}\cdot\frac{\theta_{00}(x\pm y)}{\theta_{10}(x\pm y)}=\frac{\theta_{10}(x)\theta_{00}(x)\theta_{10}(y)\theta_{00}(y)\mp\theta_{11}(x)\theta_{01}(x)\theta_{11}(y)\theta_{01}(y)}{\theta_{10}{}^2(x)\theta_{10}{}^2(y)-\theta_{11}{}^2(x)\theta_{11}{}^2(y)},\quad(28)$$

Wprowadziwszy w te wzory funkcye $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, według określeń wykładu poprzedzającego (art. 17.), w postaci:

$$\varphi_1(x)=\frac{\Theta_{00}(0)}{\Theta_{01}(0)}\cdot\frac{\Theta_{11}(x)}{\Theta_{10}(x)}=\sqrt{\frac{1}{\varkappa}}\cdot\frac{\Theta_{11}(x)}{\Theta_{10}(x)},\quad \varphi_2(x)=\frac{\Theta_{10}(0)}{\Theta_{01}(0)}\cdot\frac{\Theta_{01}(x)}{\Theta_{10}(x)}=\sqrt{\frac{\varkappa'}{\varkappa}}\cdot\frac{\Theta_{01}(x)}{\Theta_{10}(x)},$$

$$\varphi_3(x)=\frac{\Theta_{10}(0)}{\Theta_{00}(0)}\cdot\frac{\Theta_{00}(x)}{\Theta_{10}(x)}=\sqrt{\varkappa'}\cdot\frac{\Theta_{00}(x)}{\Theta_{10}(x)},\text{ gdzie }\varkappa'=\frac{\Theta_{10}{}^2(0)}{\Theta_{00}{}^2(0)},\quad\varkappa=\frac{\Theta_{01}{}^2(0)}{\Theta_{00}{}^2(0)},$$

przedstawimy równania (26), (27) i (28), w postaci:

$$\varphi_1(x\pm y)=\frac{\varphi_1(x).\varphi_2(y).\varphi_3(y)\pm\varphi_2(y).\varphi_2(x).\varphi_3(x)}{1-\varkappa^2\varphi_1{}^2(x).\varphi_1{}^2(y)},\quad(29)$$

$$\varphi_2(x\pm y)=\frac{\varphi_2(x).\varphi_2(y)\mp\varphi_1(x).\varphi_1(y).\varphi_3(x).\varphi_3(y)}{1-\varkappa^2\varphi_1{}^2(x).\varphi_1{}^2(y)},\quad(30)$$

$$\varphi_3(x\pm y)=\frac{\varphi_3(x).\varphi_3(y)\mp\varkappa^2\varphi_1(x).\varphi_1(y).\varphi_2(x).\varphi_2(y)}{1-\varkappa^2\varphi_1{}^2(x).\varphi_1{}^2(y)},\quad(31)$$

które dowodzą, że wartości każdej z trzech funkcyi φ_1, φ_2, φ_3, w miejscach $x\pm y$ dadzą się wymiernie wyrazić przez wartości tychże funkcyj w miejscach x i y.

7. Prawa dodawnicze funkcyj eliptycznych *snu*, *cnu*, *dnu* i związki na nich oparte. Zastępując we wzorach (29), (30), (31) wartości $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, przez *snu*, *cnu*, *dnu*, zaś $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(y)$, przez *snv*, *cnv*, *dnv*, gdzie

$$u=\frac{\pi}{\omega}.\theta_{00}{}^2(0).x=2Kx,\quad v=\frac{\pi}{\omega}\,\theta_{00}{}^2(0).y=2Ky,$$

otrzymujemy następujące wzory:

$$sn\,(u\pm v)=\frac{sn\,u.cn\,v.dn\,v\pm sn\,v.cn\,u.dn\,u}{1-\varkappa^2.sn^2u.sn^2v}, \tag{32}$$

$$cn(u\pm v)=\frac{cn\,u.cn\,v-sn\,u.sn\,v.dn\,u.\,dn\,v}{1-\varkappa^2.sn^2u.sn^2v}, \tag{33}$$

$$dn\,(u\pm v)=\frac{dn\,u.dn\,v\mp\varkappa^2.sn\,u.sn\,v.\,cn\,u.cnv}{1-\varkappa^2.sn^2u.sn^2v}, \tag{34}$$

które dowodzą, że wszystkie trzy funkcye eliptyczne Jacobi'ego dla argumentów $u\pm v$ dadzą się wyrazić wymiernie przez te funkcye dla argumentów u i v.

8. Zastosowania. Z powyższych wzorów, określających prawidła dodawnicze funkcyj eliptycznych Jacobi'ego, możemy otrzymać rozmaite ciekawe związki.

W szczególności, kładąc $u=v$ i uwzględniając we wzorach (32), (33) i (34) znak u góry, otrzymujemy następujące wzory:

$$sn\,2u=\frac{2\,snu\,cnu\,dn\,u}{1-\varkappa^2 sn^4u}, \tag{35}$$

$$cn\,2u=\frac{cn^2u-sn^2u\,dn^2u}{1-\varkappa^2sn^4u}, \tag{36}$$

$$dn\,2u=\frac{dn^2\,u-\varkappa^2\,sn^2ucn^2u}{1-\varkappa^2sn^4u}, \tag{37}$$

dozwalające wyznaczyć wartości funkcyj eliptycznych Jacobi'ego dla podwójnego argumentu, gdy znane są wartości tych funkcyj dla pojedyńczego argumentu.

9. Łącząc co dwa wzory, wynikające z wzorów (32), (33) i (34) w sumę i różnicę, otrzymujemy związki następujące:

$$\begin{aligned}
sn\,(u+v)+sn\,(u-v)&=\frac{2\,sn\,u.cn\,v.dn.v}{1-\varkappa^2.sn^2u.sn^2v},\\
sn\,(u+v)-sn\,(u-v)&=\frac{2\,sn\,v.cn\,u.dn\,u}{1-\varkappa^2.sn^2u.sn^2v},\\
cn\,(u+v)+cn\,(u-v)&=\frac{2\,cn\,u.cn\,v}{1-\varkappa^2.\,sn^2u\,.\,sn^2v},\\
cn\,(u+v)-cn\,(u-v)&=-\frac{2\,sn\,u.sn\,v.dn\,u.dn\,v}{1-\varkappa^2.sn^2u.sn^2v},\\
du\,(u+v)+dn\,(u-v)&=\frac{2\,dn\,u.dn\,v}{1-\varkappa^2.sn^2u\,sn^2\,v},\\
dn\,(u+v)-dn\,(u-v)&=-\frac{2\varkappa^2.sn\,u.sn\,v.cn\,u.cn\,v}{1-\varkappa^2.sn^2u.sn^2v},
\end{aligned} \tag{38}$$

10. Z pomnożenia co dwu wzorów na funkcye eliptyczne argumentów $u+v$ i $u-v$, dostaniemy wreszcie wzory następujące:

$$\begin{aligned}
sn\,(u+v)sn\,(u-v)&=\frac{sn^2u-sn^2\,v}{1-\varkappa^2\,sn^2u\,sn^2\,v},\\
cn\,(u+v)\,cn\,(u-v)&=\frac{cn^2v-dn^2v\,sn^2u}{1-\varkappa^2sn^2u\,sn^2v},\\
dn\,(u+v)dn\,(u-v)&=\frac{dn^2v-\varkappa^2cn^2vsn^2u}{1-\varkappa^2sn^2u\,sn^2v}.
\end{aligned} \tag{39}$$

11. Stosując prawidła dodawnicze funkcyj $sn\,u$, $cn\,u$, $dn\,u$ i uwzględniając cye:

$$sn(\pm K)=\pm 1,\quad cn(\pm K)=0,\quad dn(\pm K)=+\varkappa',$$
$$sn(\pm 2K)=0,\quad cn(\pm 2K)=-1,\quad dn(\pm 2K)=+1,$$
$$sn(\pm 3K)=\mp 1,\quad cn(\pm 3K)=0,\quad dn(\pm 3K)=+\varkappa', \tag{40}$$
$$sn(\pm 4K)=0,\quad cn(\pm 4K)=+1,\quad dn(\pm 4K)=+1,$$

iemy w szczególności do następujących wzorów:

$$sn(u\pm K)=\pm\frac{cn\,u}{dn\,u},\quad cn(u\pm K)=\pm\frac{\varkappa' sn\,u}{dn\,u},\quad dn(u\pm K)=\frac{\varkappa'}{dn\,u},$$
$$sn(u\pm 2K)=-sn\,u,\quad cn(u\pm 2K)=-cn\,u,\quad dn(u\pm 2K)=dn\,u, \tag{41}$$
$$sn(u\pm 3K)=\mp\frac{cn\,u}{dn\,u},\quad cn(u\pm 3K)=\mp\frac{\varkappa' sn\,u}{dn\,u},\quad dn(u\pm 3K)=\frac{\varkappa'}{dn\,u},$$
$$sn(u\pm 4K)=sn\,u,\quad cn(u\pm 4K)=cn\,u,\quad dn(u\pm 4K)=dn\,u,$$

re stwierdzają, że z peryodów, występujących jako wielokrotności liczby ają $sn\,u$ i $cn\,u$ peryod $4K$ a $dn\,u$ peryod $2K$.

12. Funkcya *tn u* i *cot nu*. Do funkcyj eliptycznych $sn\,u$, $cn\,u$, $dn\,u$, ązanych relacyami:

$$sn^2u+cn^2u=1,\quad dn^2u+\varkappa^2sn^2u=1,$$

których wypływa:

$$cnu=\sqrt{1-sn^2u},\quad dn\,u=\sqrt{1-\varkappa^2sn^2u}$$

ącza się zazwyczaj jeszcze funkcye $tn\,u$ i $cot\,nu$ (czytaj *tc-en u*, *cotc-en-u*), ślone wzorami:

$$tn\,u=\frac{sn\,u}{cn\,u},\quad cot\,n\,u=\frac{cn\,u}{sn\,u}, \tag{42}$$

ane tangensamplitudą, względnie cotangensamplitudą zmiennej niezależnej u.

Ze względu na to, że $sn(u\pm 2K)=-sn\,u$, $cn(u\pm 2K)=-cn\,u$, otrzyujemy wzór:

$$tn(u\pm 2K)=\frac{sn(u\pm 2K)}{cn(u\pm 2K)}=\frac{-sn\,u}{-cn\,u}=tn\,u,$$

więc:

$$tn(u\pm 2K)=tn\,u,$$

óry dowodzi, że funkcya $tn\,u$ ma peryod $2K$.

Ponieważ nadto $sn(u+2K'i)=sn\,u$, $cn(u+2K'i)=cn\,u$, zatem:

$$tn(u+2K')=tn\,u,$$

ugim peryodem funkcyi $tn\,u$, jest więc $2K'i$, wszelkie peryody funkcyi u, występują zatem jako sumy wielokrotności peryodów zasadniczych K i $2K'i$, czyli określają się wzorem:

$$2mK+2nK'i,\quad (m \gtreqless n=0,\ \pm 1,\ \pm 2...).$$

Też same uwagi dotyczą funkcyi $\cot nu$.

13. Oprócz wspomnianych funkcyj eliptycznych, możemy utworzyć szcze inne funkcye eliptyczne, a mianowicie określone wzorami:

$$sd\,u=\frac{sn\,u}{dn\,u},\quad ds\,u=\frac{dn\,u}{cn\,u},\quad cd\,u=\frac{cn\,u}{dn\,u},\quad dc\,u=\frac{dn\,u}{cn\,u},$$

peryodach $4K$, $2K+2K'i$, względnie o peryodach $4K$ i $2K'i$.

Odwrotności funkcyj $cn\,u$, $sn\,u$, znane są pod nazwą: sekansamplitudy, osekansamplitudy i określają się wzorami: $\sec n\,u=\dfrac{1}{cn\,u}$, $\operatorname{cosec} n\,u=\dfrac{1}{sn\,u}$.

Ćwiczenia XXXI.

1) Wykazać, że wszelka funkcya elliptyczna posiada w każdym równoległoboku peryodów przynajmniej dwa miejsca nieskończonościowe.

2) Wykazać, że wszelka funkcya elliptyczna posiada w swym równoległoboku peryodów tyle miejsc zerowych, ile posiada miejsc nieskończonościowych.

3) Jeżeli funkcya elliptyczna: $F(x)=F(x+\omega)=F(x+\omega')$, o peryodach niezależnych ω i ω' otrzymuje bez względu na peryody w n miejscach: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ wartość równą zeru a w innych n miejscach: $b_1, b_2, \ldots, b_n$, wartość nieskończenie wielką, dowieść że wówczas: $a_1+a_2+\ldots+a_n=b_1+b_2+\ldots+b_n+m\omega+m'\omega'$, gdzie spółczynniki m i m' przedstawiają dowolne liczby całkowite.

4) Wykazać, że dwie funkcye elliptyczne o tych samych peryodach ω i ω', mające w swym równoległoboku peryodów te same zera i te same punkta nieskończonościowe, każdy w tej samej wielokrotności pozostają do siebie w stałym stosunku.

5) Wykazać, że dwie funkcye dwuperyodyczne trzeciego rodzaju, czyniące zadość tymsamym relacyom kształtu: $f(x+\omega)=e^{ax+b}f(x)$, $f(x+\omega')=e^{a'x+b'}f'(x)$, dają w ilorazie funkcyę eliptyczną o peryodach ω, ω'.

Dowieść, że funkcyę $\theta_{11}(x)$ o peryodach 1 i ω, określoną wzorem:

$$\theta_{11}(x, 1, \omega)=\frac{1}{i}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)}e^{(2n+1)\pi i x},$$

gdzie $q=e^{\pi i\omega}$, możemy także przedstawić w następujących postaciach:

6) $$\theta_{11}(x, 1, \omega)=2q^{1/4}\sin\pi x\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n})\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-2q^{2n}\cos 2\pi x+q^{4n}).$$

7) $$\theta_{11}(x, 1, \omega)=2\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2}\sin(2n+1)\pi x.$$

8) $$\theta_{11}(x, 1, \omega)=2q^{1/4}\sin\pi x-2q^{9/4}\sin 3\pi x+2q^{25/4}\sin 5\pi x+\ldots$$

9) $$\theta_{11}(x, 1, \omega)=2q^{1/4}\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n})\sin\pi x.\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-e^{2n\pi i\omega+2\pi i x})(1-e^{2n\pi i\omega-2\pi i x}).$$

10) $$\theta_{11}(x, 1, \omega)=2q^{1/4}\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n})\sin\pi x.\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-2e^{2n\pi i\omega}\cos 2\pi x+e^{4n\pi i\omega}).$$

11) $$\theta_{11}(x, 1, \omega)=2q^{1/4}\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n})\sin\pi x.\prod_{n=1}^{n=\infty}e^{2n\pi i\omega}[e^{-2n\pi i\omega}-2\cos 2\pi x+e^{2n\pi i\omega}].$$

12) $$\theta_{11}(x, 1, \omega)=2q^{1/4}\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n})\sin\pi x.\prod_{n=1}^{n=\infty}e^{2n\pi i\omega}[2\cos 2n\pi\omega-2\cos 2\pi x].$$

13) $$\theta_{11}(x, 1, \omega)=2q^{1/4}\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n})^3\sin\pi x.\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin(x+n\omega)\pi.\sin(x-n\omega)\pi}{1/4\,[e^{n\pi i\omega}-e^{-n\pi i\omega}]^2}.$$

14) $$\theta_{11}(x, 1, \omega)=2q^{1/4}\pi(1-q^{2n})^3\sin\pi x.\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin(x+n\omega)\pi.\sin(x-n\omega)\pi}{(\sin n\pi\omega)^2}.$$

15) $$\theta_{11}(x, 1, \omega)=2q^{1/4}\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n})^3\sin\pi x.\prod_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{\sin(x+n\omega)\pi}{\sin n\pi\omega}.$$

16) $$\theta_{11}(x, 1, \omega)=2q^{1/4}\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n})^3\pi x.\prod_{n=-\infty}^{n=+\infty}\prod_{m=-\infty}^{m=+\infty}\left(1-\frac{x}{m+n\omega}\right),$$

łkluczeniem kombinacyi $m=n=0$, przy którego wyznaczaniu należałoby najpierw łyć podług m (od $-\infty$ do $+\infty$), a następnie podług n (od $-\infty$ do $+\infty$).

17) **Wykazać**, że funkcya $\theta_{11}(x, 1, \omega)$ otrzymuje wartości równe zeru w miejscach: $n+m'\omega$, gdzie m i m' przedstawiają dowolne liczby całkowite.

18) **Wykazać**, że funkcya $\theta_{11}(x, 1, \omega)$, czyni zadość równaniom:

$$\theta_{11}(x+1)=-\theta_{11}(x),\ \theta_{11}(x+\omega)=-e^{-\pi i(2x+\omega)}.\theta_{11}(x).$$

19) **Wykazać**, że funkcye $\lambda(x)$, $\mu(x)$, $\nu(x)$, określone wzorami:

$$\lambda(x)=\frac{\theta_{00}(0)}{\theta_{01}(0)}\cdot\frac{\theta_{11}(x)}{\theta_{10}(x)},\quad \mu(x)=\frac{\theta_{10}(0)}{\theta_{01}(0)}\cdot\frac{\theta_{01}(x)}{\theta_{10}(x)},\quad \nu(x)=\frac{\theta_{10}(0)}{\theta_{00}(0)}\cdot\frac{\theta_{00}(x)}{\theta_{10}(x)},$$

są funkcyami elliptycznemi, sprawdzającemi relacye:

$$\lambda(x+2m\omega+m'\omega')=\lambda(x),$$
$$\mu(x+2m\omega+m'(\omega+\omega'))=\mu(x),$$
$$\nu(x+m\omega+2m'\omega')=\nu(x).$$

20) **Wykazać**, że:

$$\theta_{00}(0)=1+2\sum_{n=1}^{n=\infty}q^{n^2},\quad \theta_{10}(0)=1+2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n q^{n^2},$$

$$\theta_{01}(0)=2\sum_{n=1}^{n=\infty}q^{(n-1/2)^2},\ \text{gdzie}\ q=e^{\frac{\pi i\omega'}{\omega}}.$$

Na podstawie określeń:

$$sn\,u=\sqrt{\frac{1}{\varkappa}}\cdot\frac{\theta_{11}\left(\frac{u\omega}{2K}\right)}{\theta_{10}\left(\frac{u\omega}{2K}\right)},\quad cn\,u=\sqrt{\frac{\varkappa'}{\varkappa}}\cdot\frac{\theta_{01}\left(\frac{u\omega}{2K}\right)}{\theta_{10}\left(\frac{u\omega}{2K}\right)},\quad dn\,u=\sqrt{\varkappa'}\,\frac{\theta_{00}\left(\frac{u\omega}{2K}\right)}{\theta_{10}\left(\frac{u\omega}{2K}\right)},$$

kładąc $\omega'K=\omega K'i$, wykazać, że:

21) $sn(u+2K)=-sn\,u$, $cn(u+2K)=-cn\,u$, $dn(u+2K)=dn\,u$

22) $sn(u+2iK')=sn\,u$, $cn(u+2iK')=-cn\,u$, $dn(u+2iK')=-dn\,u$,

23) $sn(u+K)=\frac{cn\,u}{dn\,u}$, $cn(u+K)=-\varkappa'\frac{sn\,u}{cn\,u}$, $dn(u+K)=\varkappa'.\frac{1}{dn\,u}$,

24) $sn(u+K'i)=\frac{1}{\varkappa}\,\frac{1}{sn\,u}$, $cn(u+K'i)=-\frac{i}{\varkappa}\,\frac{dn\,u}{sn\,u}$, $dn(u+K'i)=-i\frac{cn\,u}{sn\,u}$,

25) $sn(u+K+K'i)=\frac{1}{\varkappa}\,\frac{dn\,u}{cn\,u}$, $cn(u+K+K'i)=-i\frac{\varkappa'}{\varkappa}\,\frac{1}{cn\,u}$, $dn(u+K+K'i)=i\varkappa'\,\frac{sn\,u}{cn\,u}$.

26) $sn(+K)=+1$, $sn(+2K)=0$, $sn(+3K)=-1$, $sn(+4K)=0$,

27) $cn(+K)=0$. $cn(+2K)=-1$. $cn(+3K)=0$. $cn(+4K)=+1$.

28) $dn(+K)=+\varkappa'$, $dn(+2K)=+1$, $dn(+3K)=+\varkappa'$, $dn(+4K)=+1$,

29) $sn(-K)=-1$, $sn(-2K)=0$, $sn(-3K)=+1$, $sn(-4K)=0$,

30) $cn(-K)=0$, $cn(-2K)=-1$, $cn(-3K)=0$, $cn(-4K)=+1$,

31) $dn(-K)=+\varkappa'$ $dn(-2K)=+1$, $dn(-3K)=+\varkappa'$ $dn(-4K)=+1$.

32) $sn(u-K)=-\frac{cn\,u}{dn\,u}$, $cn(u-K)=\frac{\varkappa'\,sn\,u}{dn\,u}$, $dn(u-K)=\frac{\varkappa'}{dn\,u}$,

33) $sn(u\pm 2K)=-sn\,u$, $cn(u\pm 2K)=-cn\,u$, $dn(u\pm 2K)=dn\,u$,

34) $sn(u+4K'i)=sn\,u$, $cn(u+4K'i)=cn\,u$, $dn(u+4K'i)=dn\,u$.

35) $sn(4K \pm 4K'i) = 0,$ 36) $sn(2K \pm 2K'i) = 0,$ 37) $sn(K \pm K'i) = \frac{1}{\varkappa},$

$cn(4K \pm 4K'i) = 1,$ $cn(2K \pm 2K'i) = 1,$ $cn(K \pm K'i) = \mp i\,\frac{\varkappa'}{\varkappa},$

$dn(4K \pm 4K'i) = 1,$ $dn(2K \pm 2K'i) = -1,$ $dn(K \pm K'i) = 0.$

38) $sn^2u + cn^2u = 1,\quad dn^2u + \varkappa^2 sn^2u = 1.$

Wyprowadzić następujące wzory dodawnicze funkcyj eliptycznych: $sn\,u$, $cn\,u$

39) $$sn(u+v) = \frac{sn\,u\,cn\,v\,dn\,v + sn\,v\,cn\,u\,dn\,u}{1-\varkappa^2 sn^2u\,sn^2v},$$

$$cn(u+v) = \frac{cn\,u\,cn\,v - sn\,u\,sn\,v\,dn\,u\,dn\,v}{1-\varkappa^2 sn^2u\,sn^2v},$$

$$dn(u+v) = \frac{dn\,u\,dn\,v - \varkappa^2 sn\,u\,sn\,v\,cn\,u\,cn\,v}{1-\varkappa^2 sn^2u\,sn^2v}.$$

40) $$sn\,2u = \frac{2\,snu\,cnu\,dnu}{1-\varkappa^2 sn^4u},\qquad 41)\ sn(u+v)+sn(u-v) = \frac{2\,snu\,cnv\,dnv}{1-\varkappa^2 sn^2u\,sn^2v},$$

$$cn\,2u = \frac{cn^2u - sn^2u\,dn^2u}{1-\varkappa^2 sn^4u}\qquad cn(u+v)+cn(u-v) = \frac{2\,cnu\,cnv}{1-\varkappa^2 sn^2u\,sn^2v},$$

$$dn\,2u = \frac{dn^2u - \varkappa^2 sn^2u\,cn^2u}{1-\varkappa^2 sn^4u}\qquad dn(u+v)+dn(u-v) = \frac{2\,dnu\,dnv}{1-\varkappa^2 sn^2u\,sn^2v},$$

42) $$sn(u+v) - sn(u-v) = \frac{2\,snv\,cnu\,dnu}{1-\varkappa^2 sn^2u\,sn^2v},$$

$$cn(u-v) - cn(u+v) = \frac{2\,snu\,snv\,dnu\,dnv}{1-\varkappa^2 sn^2u\,sn^2v},$$

$$dn(u-v) - dn(u+v) = \frac{2\,\varkappa^2 snu\,snv\,cnu\,cnv}{1-\varkappa^2 sn^2u\,sn^2v},$$

43) $$sn(u+v)\,.\,sn(u-v) = \frac{sn^2u - sn^2v}{1-\varkappa^2 sn^2u\,sn^2v},$$

44) $$sn(u+v)\,.\,cn(u-v) = \frac{snu\,cnu\,dnv + snv\,cnv\,dnu}{1-\varkappa^2 sn^2u\,sn^2v}.$$

45) $$sn(u-v)\,.\,cn(u+v) = \frac{snu\,cnu\,dnv - snv\,cnv\,dnu}{1-\varkappa^2 sn^2u\,sn^2v}.$$

46) $$sn(u+v)\,dn(u-v) = \frac{snu\,dnu\,cnv + snv\,dnv\,cnu}{1-\varkappa^2 sn^2u\,sn^2u}.$$

47) $$snu\,(u-v)\,dn(u+v) = \frac{snu\,dnu\,cnv - snv\,dnv\,cnu}{1-\varkappa^2 sn^2u\,sn^2v}.$$

48) $$cn(u+v)\,dn(u-v) = \frac{cnu\,cnv\,dnu\,dnv - \varkappa'^2 snu\,snv}{1-\varkappa^2 sn^2u\,sn^2v}.$$

49) $$cn(u-v)\,dn(u+v) = \frac{cnu\,cnv\,dnu\,dnv + \varkappa'^2 snu\,snv}{1-\varkappa^2 sn^2u\,sn^2v}.$$

Rozwiązania XXX. Wskazówki podane w wykładzie.

Literatura. Briot et Bouquet. Théorie des fonctions elliptiques. Pari Artur Cayley. An elementary treatise on elliptic fonctions. Cambridge 1876. (Jacobi. Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum auctore Dr. Carolo G Jacobo Jacobi. Regiomonti 1829 w wydawnictwie C. G. J. Jacobi's gesammelte Berlin 1881.

Tematy do rozprawek naukowych:

1. Funkcya eliptyczna $sn\,x$ i jej własności.
2. Funkcya eliptyczna $cn\,x$ i jej własności.
3. Funkcya eliptyczna $dn\,x$ i jej własności.

Wykład XXXII.

Funkcye eliptyczne Weierstrassa.

1. Funkcya Weierstrassa $\sigma(u)$. Oznaczmy przez $2\omega_1$ i $2\omega_2$ dwie liczby osunku urojonym i weźmy pod uwagę układ równoległoboków, odpowiacy liczbom: $2m\omega_1+2n\omega_2$, $(m \gtrless n=0, \pm 1, \pm 2\ldots)$.

Nazwijmy pierwszym równoległobokiem ten równoległobok, ego wierzchołki odpowiadają liczbom 0, $2\omega_1$, $2\omega_1+2\omega_2$, $2\omega_2$, a więc przedwiony figurą 15, gdy ω_1 jest liczbą rzeczywistą dodatnią, a ω_2 liczbą to urojoną, albo fig. 16., gdy ω_1 jest liczbą rzeczywistą dodatnią a ω_2 ą zespoloną, lub w końcu figurą 17, gdy zarówno ω_1, jak ω_2 są liczbami olonemi.

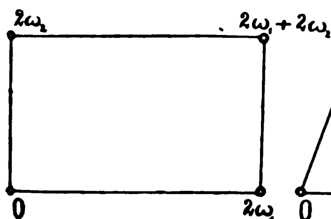


Fig. 15.

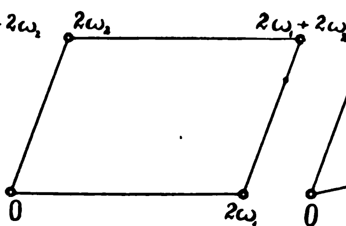


Fig. 16.

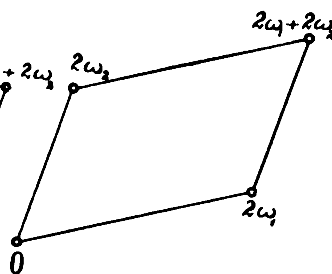


Fig. 17.

Zaliczmy do tego pierwszego równoległoboku wszystkie punkta wewnątrz o położone, wreszcie punkta położone na pierwszym boku, łączą- punkta 0 i $2\omega_1$ i na czwartym boku, łączącym $2\omega_2$ i 0, podczas punkta położone na drugim boku, który łączy punkta $2\omega_1$ i $2\omega_1+2\omega_2$ trzecim boku, łączącym punkta $2\omega_1+2\omega_2$ i $2\omega_2$, niech należą do sąsiego równoległoboku.

Równoległobok, którego wierzchołki odpowiadają punktom: u, $u+2\omega_1$, $2\omega_1+2\omega_2$, $u+2\omega_2$, nazwijmy równoległobokiem peryodów, ze ględu na punkt u.

Postawmy sobie najpierw zadanie, utworzyć funkcyę całkowitą, przeą, której pojedyńcze miejsca zerowe, określone byłyby liczbami ultu: $2m\omega_1+2n\omega_2$, $(m \gtrless n=0, \pm 1, \pm 2,\ldots)$.

Żądana funkcya da się, na mocy prawidła Weierstrassa, wyprowa... nego w wykładzie XXVIII. na str. 467., przedstawić w postaci ilo... nieskończonego, którego czynniki pierwotne są kształtu:

$$\left(1-\frac{1}{2m\omega_1+2n\omega_2}\right)e^{\frac{u}{2m\omega_1+2n\omega_2}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{(2m\omega_1+2n\omega_2)^2}} \text{ czyli: } \left(1-\frac{u}{s}\right)e^{\frac{u}{s}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{s^2}},$$

jeżeli dla skrócenia położymy $2m\omega_1+2n\omega_2=s$.

Jeżeli uwzględnimy wszystkie wartości na s, odpowiadające lic... m i n całkowitym, dodatnim i ujemnym z wykluczeniem kombinacyi $m=0$, n... i uważać będziemy czynniki $\left(1-\frac{u}{s}\right)$ i $e^{\frac{u}{s}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{s^2}}$, odpowiadające pewne... jako nierozdzielne, otrzymamy iloczyn podwójnie nieskończony:

$$\prod_s^{(1)}\left(1-\frac{u}{s}\right)e^{\frac{u}{s}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{s^2}},$$

który przedstawia funkcyę stającą się zerem we wszystkich wierzchoł... równoległoboków, odpowiadających liczbom $2m\omega_1+2n\omega_2$, $(m \gtreqless n=0, \pm 1, \ldots)$ z wyjątkiem wierzchołka 0; znak $^{(1)}$ po prawej stronie Π wskazuje, że ... spółczynników $m=0$, $n=0$ ma być pominiętą w tym iloczynie.

Funkcya, która staje się oprócz tego także jednokrotnie zerem w pun... $u=0$, a niema żadnych innych miejsc zerowych, przedstawi się ... w postaci:

$$u.\prod_s^{(1)}\left(1-\frac{u}{s}\right)e^{\frac{u}{s}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{s^2}}.$$

Jest to najprostsza funkcya, zwana funkcyą $\sigma(u)$ [czytaj sigma]... utworzona przez Weierstrassa, jako funkcya pomocnicza do twor... funkcyj eliptycznych. Chcąc zaznaczyć, że w jej skład wchodzą liczb... i ω_2, używamy znakowania $\sigma(u \mid \omega_1, \omega_2)$, pisząc:

$$\sigma(u)=u\prod_s^{(1)}\left(1-\frac{u}{s}\right)e^{\frac{u}{s}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{s^2}} \quad (1)$$

lub:

$$\sigma(u \mid \omega_1, \omega_2)=u\prod_{m,n}^{(1)}\left(1-\frac{u}{2m\omega_1+2n\omega_2}\right)e^{\frac{u}{2m\omega_1+2n\omega_2}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{(2m\omega_1+2n\omega_2)^2}} \quad (1')$$

Wszelka inna funkcya całkowita, przestępna, mająca pojedyńcze mie... zerowe, określone liczbami $2m\omega_1+2n\omega_2$, $(m \gtreqless n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, a nie... jąca się zerem w żadnym innym punkcie płaszczyzny liczbowej, da... przeto przedstawić w postaci:

$$e^{g(u)}.\sigma(u),$$

gdzie $g(u)$ oznacza jakąkolwiek funkcyę całkowitą wymierną, lub pr... stępną.

Z określenia funkcyi $\sigma(u)$ wypływają wprost następujące własności:

1) Funkcya $\sigma(u)$ jest funkcyą nieparzystą:

$$\sigma(-u)=-\sigma(u).$$

Każdej wartości liczby $s=2m\omega_1+2n\omega_2$, różnej od zera, odpowiada ... wiem jedna wartość równa, a znaku przeciwnego $-s=-2m\omega_1-2n\omega_2$, a w... każdemu czynnikowi pierwotnemu $\left(1-\frac{u}{s}\right)e^{\frac{u}{s}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{s^2}}$ iloczynu, określając...

nkcyę $\sigma(u)$, odpowiada czynnik $\left(1+\frac{u}{s}\right)e^{-\frac{u}{s}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{s^2}}$, a te czynniki przechodzą jeden na drugi, gdy zmienimy u na $-u$, pozostaje więc we wzorze

$$\sigma(u)=u\prod_s^{(1)}\left\{\left(1-\frac{u}{s}\right)e^{\frac{u}{s}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{s^2}}\right\},$$

lko jeden czynnik u, który zmieni znak, a więc $\sigma(-u)=-\sigma(u)$.

2) Funkcya $\sigma(u)$ posiada tę własność, że:

$$\sigma(au\,|\,a\omega_1,\ a\omega_2)=a.\sigma(u\,|\,\omega_1,\ \omega_2),$$

dzie a przedstawia dowolną liczbę, różną od zera. Kładąc:

$$as=2m.a\omega_1+2n.a\omega_2, \text{ zamiast: } s=2m\omega_1+2n\omega_2,$$

rzymamy:

$$\sigma(au\,|\,a\omega_1,\ a\omega_2)=au\prod_s^{(1)}\left(1-\frac{au}{as}\right)e^{\frac{au}{as}+\frac{1}{2}\frac{a^2u^2}{a^2s^2}}=a.u\prod_s^{(1)}\left(1-\frac{u}{s}\right)^{\frac{u}{s}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{s^2}},$$

że:
$$u\left(1-\frac{u}{s}\right)e^{\frac{u}{s}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{s^2}}=\sigma(u,\ |\,\omega_1,\ \omega_2),$$

atem:
$$\sigma(au\,|\,a\omega_1,\ a\omega_2)=a.\sigma(u\,|\,\omega_1,\ \omega_2).$$

2. **Pochodna logarytmiczna funkcyi $\sigma(u)$.** Z określenia funkcyi $\sigma(u)$, według wzoru:

$$\sigma(u)=u\prod_s^{(1)}\left(1-\frac{u}{s}\right)e^{\frac{u}{s}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{s^2}},$$

otrzymujemy:

$$\log\sigma(u)=\log u+\sum_s^{(1)}\left\{\log\left(1-\frac{u}{s}\right)+\frac{u}{s}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{s^2}\right\},$$

stąd, na podstawie prawideł różniczkowania, otrzymujemy pochodną logarytmiczną funkcyi $\sigma(u)$, określoną szeregiem:

$$\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}=\frac{1}{u}+\sum_s^{(1)}\left\{\frac{1}{u-s}+\frac{1}{s}+\frac{u}{s^2}\right\},$$

którego poszczególne wyrazy kształtu: $\left\{\frac{1}{u-s}+\frac{1}{s}+\frac{u}{s^2}\right\}$ należy uważać za nierozdzielne.

Pochodna logarytmiczna funkcyi $\sigma(u)$, czyli funkcya $\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$ posiada widocznie w wierzchołkach równoległoboków, odpowiadających liczbom: $s=2m\omega_1+2n\omega_2$, ($m \gtreqless n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), pojedyncze punkty nieskończonościowe.

Funkcyę tę oznaczamy symbolem $\zeta(u)$, (czytaj dzeta u), albo chcąc zaznaczyć liczby ω_1, ω_2, w jej skład wchodzące, także symbolem $\zeta(u\,|\,\omega_1,\ \omega_2)$, pisząc:

$$\zeta(u)=\frac{d\log\sigma u)}{du}=\frac{1}{u}+\sum_s^{(1)}\left\{\frac{1}{u-s}+\frac{1}{s}+\frac{u}{s^2}\right\}, \tag{2}$$

względnie:

$$\zeta(u\ \omega_1,\ \omega_2)=\frac{1}{u}+\sum_{m,n}^{(1)}\left\{\frac{1}{u-2m\omega_1-2n\omega_2}+\frac{1}{2m\omega_1+2n\omega_2}+\frac{u}{(2m\omega_1+2n\omega_2)^2}\right\} \tag{2'}$$

1° Funkcya $\zeta(u)$ jest podobnie jak funkcya $\sigma(u)$ funkcyą nieparzystą. Zastępując bowiem u przez $-u$, otrzymujemy:

$$\zeta(-u)=-\frac{1}{u}\sum_s^{(1)}\left\{\frac{1}{u+s}-\frac{1}{s}+\frac{u}{s^2}\right\},$$

a że:
$$\sum_s^{(1)}\left(\frac{1}{u+s}-\frac{1}{s}+\frac{u}{s^2}\right)=\sum_s^{(1)}\left(\frac{1}{u-s}+\frac{1}{s}+\frac{u}{s^2}\right),$$

przeto:
$$\zeta(-u)=-\left(\frac{1}{u}+\sum_s^{(1)}\frac{1}{u-s}+\frac{1}{s}+\frac{u}{s^2}\right),$$

czyli:
$$\zeta(-u)=-\zeta(u).$$

2° Funkcya $\zeta(u)$ posiada tę własność, że: $\zeta(au|a\omega_1, a\omega_2)=\frac{1}{a}\zeta(u|\omega_1, \omega_2)$.

Zastępując bowiem u, ω_1, ω_2, przez au, $a\omega_1$, $a\omega_2$, a więc s przez as otrzymujemy:
$$\zeta(au\,|\,a\omega_1,\ a\omega_2)=\frac{1}{au}+\sum_s^{(1)}\frac{1}{au-as}+\frac{1}{as}+\frac{au}{a^2s^2}\Big),$$

a że:
$$\sum^{(1)}\left(\frac{1}{au-as}+\frac{1}{as}+\frac{au^2}{a^2s^2}\right)=\frac{1}{a}\sum_{as}^{(1)}\frac{1}{u-s}+\frac{1}{s}+\frac{u}{s^2}\Big)=\frac{1}{a}\sum_{as}\left(\frac{1}{u-s}+\frac{1}{s}+\frac{u}{s^2}\right)$$

przeto:
$$\zeta(au\,|\,a\omega_1,\ a\omega_2)=\frac{1}{a}\zeta(u\,|\,\omega_1,\ \omega_2).$$

4. Funkcya eliptyczna Weierstrassa $\wp(u)$. Z funkcyi $\zeta(u)$ otrzymujemy za pomocą różniczkowania jej szeregu pierwszą pochodną tej funkcyi, określoną szeregiem:
$$\zeta'(u)=\frac{d\zeta(u)}{du}=-\frac{1}{u^2}-\sum_s^{(1)}\left(\frac{1}{(u-s)^2}-\frac{1}{s^2}\right),$$
którego poszczególne wyrazy przedstawiają się w postaci nierozdzielnej: $\frac{1}{(u-s)^2}-\frac{1}{s^2}$.

Funkcya $\zeta'(u)$ posiada widocznie podwójne punkta nieskończonościowe w miejscach, określonych liczbami $s=2m\omega_1+2n\omega_2$, ($m \gtreqless n=0, \pm 1, \pm 2,\ldots$) czyli we wszystkich wierzchołkach równoległoboków, odpowiadających liczbom $2m\omega_1+2n\omega_2$.

Otóż funkcyę $-\zeta'(u)$ oznaczamy podług Weierstrassa za pomocą symbolu $\wp(u)$, (czytaj *pe-u*) a chcąc zaznaczyć liczby ω_1 i ω_2, w jej skład wchodzące, oznaczamy ją symbolem $\wp(u|\omega_1, \omega_2)$, pisząc:
$$\wp(u)=-\zeta'(u)=-\frac{d^2}{du^2}\log\wp(u)=\frac{1}{u^2}+\sum_s^{(1)}\left(\frac{1}{(u-s)^2}-\frac{1}{s^2}\right), \tag{3}$$
względnie:
$$\wp(u\,|\,\omega_1,\ \omega_3)=\frac{1}{(2m\omega_1+2n\omega_2)^3}+\sum_{m,n}^{(1)}\left(\frac{1}{u-2m\omega_1-2n\omega_2)^2}-\frac{1}{(2m\omega_1+2n\omega_2)^2}\right) \tag{3'}$$

1° Funkcya $\wp(u)$ jest funkcyą parzystą. Zastępując bowiem u przez $-u$, otrzymujemy:
$$\wp(-u)=\frac{1}{u^2}+\sum_s^{(1)}\left(\frac{1}{(u+s)^2}-\frac{1}{s^2}\right)=\frac{1}{u^2}+\sum_s^{(1)}\left(\frac{1}{(u-s^2)}-\frac{1}{s^2}\right)=\wp(u),$$

zatem:
$$\wp(-u)=\wp(u).$$

2° Funkcya $\wp(u)$ posiada tę własność, że: $\wp(au|a\omega_1, a\omega_2)=\frac{1}{a^2}\wp(u|\omega_1, \omega_2)$.

Zastępując bowiem $u\,\omega_1$, ω_2 u przez $au\,a\omega_1$, $a\omega_2$, a więc s przez as, otrzymamy:
$$\wp(au\ |\,a\omega_1,\ a\omega_2)=\frac{1}{a^2u^2}+\sum_s^{(1)}\left(\frac{1}{(au-as)^2}-\frac{1}{a^2s^2}\right)=\frac{1}{a^2}\wp(u\,|\,\omega_1,\ \omega_2),$$

zatem:
$$\wp(au\,|\,a\omega_1,\ a\omega_2)=\frac{1}{a^2}\wp(u,\ |\,\omega_1,\ \omega_2),$$

5. Wyprowadzenie wzoru $\sigma(u+a)$. Z określenia funkcyi pomocniczej $\sigma(u)$ według wzoru:

$$\sigma(u)=u\,\Pi^{(1)}_{s}\left(1-\frac{u}{s}\right)e^{\frac{u}{s}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{s^2}},$$

otrzymujemy:

$$\frac{\sigma(u)}{u}=\Pi^{(1)}_{s}\left(1-\frac{u}{s}\right)e^{\frac{u}{s}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{s^2}}. \qquad (4)$$

Zastąpmy w tym wzorze u przez $u+a$, gdzie a jest dowolną liczbą, różną od liczb przedstawionych przez $s=2m\omega_1+2n\omega_2$, a otrzymamy:

$$\frac{\sigma(u+a)}{u+a}=\Pi'_{s}\left\{\left(1-\frac{u+a}{s}\right)e^{\frac{u+a}{s}+\frac{1}{2}\frac{(u+a)^2}{s^2}}\right\}.$$

Mamy tu jednak:

$$\left(1-\frac{u+a}{s}\right)e^{\frac{u+a}{s}+\frac{1}{2}\frac{(u+a)^2}{s^2}}=\left(1-\frac{u}{s}-\frac{a}{s}\right)e^{\frac{u}{s}+\frac{au}{s^2}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{s^2}}.e^{\frac{a}{s}+\frac{1}{2}\frac{a^2}{s^2}},$$

a że:

$$1-\frac{u}{s}-\frac{a}{s}=\left(1-\frac{u}{s-a}\right)\left(1-\frac{a}{s}\right),$$

a natomiast:

$$\frac{u}{s}+\frac{au}{s^2}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{s^2}=\frac{u}{s-a}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{(s-a)^2}-\frac{u}{s-a}+\frac{u}{s}+\frac{au}{s^2}-\frac{1}{2}\frac{u^2}{(s-a)^2}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{s^2},$$

a więc:

$$\frac{u}{s}+\frac{au}{s^2}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{s^2}=\frac{u}{s-a}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{(s-a)^2}+u\left[\frac{1}{a-s}+\frac{1}{s}+\frac{a}{s^2}\right]-\frac{u^2}{2}\left[\frac{1}{(a-s)^2}-\frac{1}{s^2}\right],$$

przeto możemy położyć:

$$\left(1-\frac{u+a}{s}\right)e^{\frac{u+a}{s}+\frac{1}{2}\frac{(u+a)^2}{s^2}}=\left(1-\frac{u}{s-a}\right)\left(1-\frac{a}{s}\right).e^{\frac{u}{s-a}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{(s-a)^2}}.$$

$$.e^{\frac{a}{s}+\frac{1}{2}\frac{a^2}{s^2}}.e^{u\left[\frac{1}{a-s}+\frac{1}{s}+\frac{a}{s^2}\right]-\frac{u^2}{2}\left[\frac{1}{(a-s)^2}-\frac{1}{s^2}\right]},$$

zatem funkcya $\dfrac{\sigma(u+a)}{u+a}$ da się przedstawić jako iloczyn trzech czynników w postaci:

$$\frac{\sigma(u+a)}{u+a}=\Pi^{(1)}_{s}\left(1-\frac{a}{s}\right)e^{\frac{a}{s}+\frac{1}{2}\frac{a^2}{s^2}}.e^{\Sigma'\left\{u\left[\frac{1}{a-s}+\frac{1}{s}+\frac{a}{s^2}\right]-\frac{u^2}{2}\left[\frac{1}{(a-s)^2}-\frac{1}{s^2}\right]\right\}}.$$

$$.\Pi^{(1)}_{s}\left(1-\frac{u}{s-a}\right)e^{\frac{u}{s-a}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{(s-a)^2}}.$$

Uwzględniając, że na podstawie wzoru (1):

$$\Pi^{(1)}_{s}\left(1-\frac{a}{s}\right)e^{\frac{a}{s}+\frac{1}{2}\frac{a^2}{s^2}}=\frac{\sigma(a)}{a},$$

a zaś na podstawie wzorów (2) i (3):

$$\Sigma^{(1)}_{s}\left(\frac{1}{a-s}+\frac{1}{s}+\frac{a}{s^2}\right)=\zeta(a)-\frac{1}{a},$$

$$\sum_s^{(1)}\left\{\frac{1}{(a-s)^2}-\frac{1}{s^2}\right\}=\wp(a)-\frac{1}{a^2},$$

otrzymujemy wzór powyższy w postaci:

$$\frac{\sigma(u+a)}{u+a}=\frac{\sigma(a)}{a}\cdot e^{u\left[\zeta(a)-\frac{1}{a}\right]-\frac{u^2}{2}\left[\wp(a)-\frac{1}{a^2}\right]}\cdot\Pi_s^{(1)}\left\{\left(1-\frac{u}{s-a}\right)e^{\frac{u}{s-a}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{(s-a)^2}}\right\}. \quad (5)$$

Wprowadzając do czynników iloczynu nieskończonego Π'_s także czynnik: $\left(1+\frac{u}{a}\right)e^{-\frac{u}{a}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{a^2}}$, który należy do czynników ogólnych, zawartych w iloczynie $\Pi_s^{(1)}$, pod postacią: $\left(1-\frac{u}{s-a}\right)e^{\frac{u}{s-a}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{(s-a)^2}}$, pod założeniem $s=0$, otrzymujemy powyższy wzór (5) ostatecznie w postaci:

$$\frac{\sigma(u+a)}{\sigma(a)}=e^{u\zeta(a)-\frac{u^2}{2}\wp(a)}\cdot\Pi_s\left\{\left(1-\frac{u}{s-a}\right)e^{\frac{u}{s-a}-\frac{1}{2}\frac{u^2}{(s-a)^2}}\right\}, \quad (6)$$

gdzie s może już przyjmować bez wyjątku wszelkie wartości, jakie się otrzymuje z liczby $2m\omega_1+2m\omega_2$, $m \gtreqless n=0, \pm 1, \pm 2 \ldots$).

6. Funkcye $\zeta(u+a)$ i $\wp(u+a)$. Logarytmując wzór (6), otrzymujemy:

$$\log\sigma(u+a)-\log\sigma(a)-u\zeta(a)+\frac{u^2}{2}\wp(a)=\sum_s\left\{\log\left(1-\frac{u}{s-a}\right)+\frac{u}{s-a}-\frac{1}{2}\frac{u^2}{(s-a)^2}\right\}$$

wzór, który, zróżniczkowany podług u, daje:

$$\frac{\sigma'(u+a)}{\sigma(u+a)}-\zeta(a)+u\wp(a)=\sum_s\left\{\frac{1}{u+a-s}-\frac{1}{s-a}+\frac{u}{(s-a)^2}\right\},$$

a że:
$$\frac{\sigma'(u+a)}{\sigma(u+a)}=\zeta(u+a),$$

przeto otrzymujemy stąd równość:

$$\zeta(u+a)-\zeta(a)+u\wp(a)=\sum_s\left\{\frac{1}{u+a-s}-\frac{1}{s-a}+\frac{u}{(s-a)^2}\right\}. \quad (7)$$

Różniczkując tę równość obustronnie podług u i uwzględniając, że: $\zeta'(u+a)=\wp(u+a)$, otrzymujemy wzór:

$$\wp(u+a)-\wp(a)=\sum_s\left\{\frac{1}{(u+a-s)^2}-\frac{1}{(a-s)^2}\right\},$$

który podaje różnicę między wartościami funkcyi Weierstrassa $\wp(u)$ w miejscach $u+a$ i u.

7. Dwuperyodyczność funkcyi $\wp(u)$. Na podstawie powyższych własności funkcyi $\wp(u)$, mamy:

$$\wp(u+a+s)-\wp(a+s)=\wp(u+a)-\wp(a),$$

skąd, zastępując u przez $b-a$, dostajemy wzór:

$$\wp(b+s)-\wp(b)=\wp(a+s)-\wp(a), \quad (8)$$

który dowodzi, że różnica $\wp(a+s)-\wp(a)$ jest od liczby a niezależną, czyli jest liczbą stałą.

Aby ją wyznaczyć, połóżmy $a=-\frac{s}{2}$, to uwzględniając, że funkcya $\wp(u)$ jest funkcyą parzystą widzimy, iż szukana liczba stała jest zerem, że zatem:

$$\wp(a+s)=\wp(a).$$

W szczególności otrzymujemy stąd, kładąc raz $m=1$, $n=0$, a więc $s=2\omega_1$, drugi raz $m=0$, $n=1$, a więc $s=2\omega_2$, następujące wzory:

$$\wp(u+2\omega_1)=\wp(u);\ \wp(u+2\omega_2)=\wp(u), \tag{9}$$

ięc ogólnie dla wszelkich całkowitych liczb m i n, wzór:

$$\wp(u+2m\omega_1+2n\omega_2)=\wp(u),$$

ry dowodzi, że funkcya $\wp(u)$ jest zwykłą funkcyą dwuperyodyczną o pedach zasadniczych: $2\omega_1$ i $2\omega_2$.

8. **Rodzaj dwuperyodyczności funkcyi** $\zeta(u)$. Z własności funkcyi $\zeta(u)$, lonej wzorem (7), wynika, że:

$$\zeta(u+a+s)-\zeta(a+s)+u\wp(a+s)=\zeta(u+a)-\zeta(a)+u\wp(a),$$

d, zastępując u przez $b-a$, otrzymujemy wzór:

$$\zeta(b+s)-\zeta(b)=\zeta(a+s)-\zeta(a),$$

ry dowodzi, że różnica $\zeta(a+s)-\zeta(a)$, jest liczbą stałą. Aby ją wyznaczyć óżmy $a=-\frac{s}{2}$, to mając na uwadze, że funkcya $\zeta(u)$ jest nieparzystą ymamy:

$$\zeta(a+s)-\zeta(a)=\zeta\left(+\frac{s}{2}\right)-\zeta\left(-\frac{s}{2}\right)=2.\zeta\left(\frac{s}{2}\right),$$

więc stała powyższa ma wartość: $2.\zeta\left(\frac{s}{2}\right)$, zatem: $\zeta(a+s)=\zeta(a)+2.\zeta\left(\frac{s}{2}\right)$.

W szczególności, kładąc raz $m=0$, $n=1$, drugi raz $m=1$, $n=0$, otrzymy stąd wzory następujące:

$$\zeta(a+2\omega_1)=\zeta(a)+2\zeta(\omega_1),$$
$$\zeta(u+2\omega_2)=\zeta(a)+2\zeta(\omega_2),$$

lnie dla całkowitych m i n, wzór:

$$\zeta(u+2m\omega_1+2n\omega_2)=\zeta(u)+2m\zeta(\omega_1)+2n\zeta(\omega_2),$$

ry, kładąc $\zeta(\omega_1)=\eta_1$, $\zeta(\omega_2)=\eta_2$, sprowadzamy do postaci:

$$\zeta(u+2m\omega_1+2n\omega_2)=\zeta(u)+2m\eta_1+2n\eta_2.$$

Funkcya $\zeta(u)$ jest funkcyą dwuperyodyczną drugiego rodzaju o peryoh $2\omega_1$ i $2\omega_2$.

9. **Rodzaj peryodyczności funkcyi** $\sigma(u)$. Na podstawie wzoru (6), mamy:

$$\frac{\sigma(u+a+s)}{\sigma(a+s)}e^{-u\zeta(a+s)+\frac{u^2}{2}\wp(a+s)}=\frac{\sigma(u+a)}{\sigma(a)}e^{-u\zeta(a)+\frac{u^2}{2}\wp(a)},$$

d, uwzględniając relacye: $\zeta(a+s)=\zeta(a)+2m\eta_1+2n\eta_2$, $\wp(a+s)=\wp(a)$, otrzyjemy wzór:

$$\frac{\sigma(u+a+s)}{\sigma(a+s)}e^{-u(2m\eta_1+2n\eta_2)}=\frac{\sigma(u+a)}{\sigma(a)},$$

li:

$$\frac{\sigma(u+a+s)}{\sigma(a+s)}=e^{u(2m\eta_1+2n\eta_2)}.\frac{\sigma(u+a)}{\sigma(a)}.$$

Zastępując u przez $b-a$, otrzymujemy stąd:

$$\frac{\sigma(b+s)}{\sigma(b)}=e^{(b-a)(2m\eta_1+2n\eta_2)}.\frac{\sigma(a+s)}{\sigma(a)},$$

m:

$$\frac{\sigma(b+s)}{\sigma(b)}.e^{-b(2m\eta_1+2n\eta_2)}=\frac{\sigma(a+s)}{\sigma(a)}.e^{-a(2m\eta_1+2n\eta_2)},$$

liczbą stałą C.

Położmy: $$a=-\frac{s}{2}=-(m\omega_1+n\omega_2),$$
otrzymamy wartość tej stałej, przedstawioną przez: $C=-e^{(m\omega_1+n\omega_2)(m\eta_1+n\eta_2)}$, otrzymujemy zatem:
$$\sigma(u+2\omega_1)=e^{-2\eta_1(u+\omega_1)}\sigma(u),$$
$$\sigma(u+2\omega_2)=e^{-2\eta_2(u+\omega_2)}.\sigma(u).$$

Funkcya $\sigma(u)$ jest funkcyą dwuperyodyczną trzeciego rodzaju o peryodach $2\omega_1$ i $2\omega_2$.

Ogólnie otrzymamy na podstawie powyższych wzorów:
$$\sigma(u+2m\omega_1)=(-1)^m e^{2\eta_1(mu+m^2\omega_1)}\sigma(u),$$
$$\sigma(u+2n\omega_2)=(-1)^n e^{2\eta_2(nu+n^2\omega_2)}\sigma(u),$$
a zarazem: $$\sigma(u+2m\omega_1+2n\omega_2)=(-1)^{m+n}e^{\lambda}\sigma(u), \tag{10}$$
gdzie:
$$\lambda=2\eta_1[m(u+2n\omega_2)+m^2\omega_1]+2\eta_2(nu+n^2\omega_2)=$$
$$=(2m\eta_1+2n\eta_2)(u+m\omega_1+n\omega_2)++2mn[\eta_1\omega_2-\eta_2\omega_1].$$

10. Pierwsza pochodna funkcyi $\wp(u)$. Z dwuperyodyczności funkcyi $\wp(u)$, określonej wzorem: $$\wp(u+2m\omega_1+2n\omega_2)=\wp(u),$$
wynika bezpośrednio dwuperyodyczność wszystkich pochodnych tej funkcyi, jak:
$$\wp'(u)=\frac{d\wp(u)}{du},\quad \wp''(u)=\frac{d^2\wp(u)}{du^2},\dots$$

Mianowicie otrzymujemy z powyższego wzoru:
$$\wp'(u+2m\omega_1+2n\omega_2)=\wp'(u).$$

Położmy w tym wzorze $u=-\omega_1$, $m=1$, $n=0$, a otrzymamy:
$$\wp'(\omega_1)=\wp'(-\omega_1),$$
a że funkcya $\wp(u)$ jest funkcyą parzystą, więc funkcya $\wp'(u)$ musi być funkcyą nieparzystą, będzie zatem:
$$\wp'(-\omega_1)=-\wp'(\omega_1),\text{ a więc: }\wp'(\omega_1)=-\wp'(\omega_1),\text{ czyli: }\wp'(\omega_1)=0.$$

W podobny sposób znajdziemy, że także:
$$\wp'(\omega_2)=0,\text{ a więc także: }\wp'(\omega_1+\omega_2)=0.$$

Do tych wyników dojdziemy wprost z wzoru określającego funkcyę $\wp'(u)$. Na podstawie wzoru:
$$\wp(u)=\frac{1}{u^2}+\sum_s\left\{\frac{1}{(u-s)^2}-\frac{1}{s^2}\right\},$$
otrzymujemy za pomocą prawideł różniczkowania wzór:
$$\wp'(u)=-\frac{2}{u^3}-2\sum_s^{(1)}\frac{1}{(u-s)^3}=-2\left\{\frac{1}{u^3}+\sum_s^{(1)}\frac{1}{(u-s)^3}\right\},$$
czyli: $$\wp'(u)=-2\sum_s\frac{1}{(u-s)^3}.$$

Z wzoru tego otrzymujemy w szczególności następujące wzory:
$$\wp'(\omega_1)=-2\sum_{m,n}\frac{1}{[(2m-1)\omega_1+2n\omega_2]^3},$$
$$\wp'(\omega_2)=-2\sum_{m,n}\frac{1}{[2m\omega_1+(2n-1)\omega_2]^3},$$
$$\wp'(\omega_1+\omega_2)=-2\sum_{m,n}\frac{1}{[(2m-1)\omega_1+(2n-1)\omega_2]^3},$$
których prawa strona składa się z wyrazów parami równych i znaków przeciwnych, które się mieszczą w sumie, zatem otrzymujemy, jak powyżej:
$$\wp'(\omega_1)=0,\quad \wp'(\omega_2)=0,\quad \wp'(\omega_1+\omega_2)=0.$$

Ćwiczenia XXXII.

1) **Wykazać**, że szereg podwójnie nieskończony: $\sum_{m,n} \frac{1}{(2m\omega_1+2n\omega_2)^\alpha}$ jest bezwarun-
wo zbieżny, gdy α jest liczbą całkowitą, większą jak 2.

2) **Wykazać**, że iloczyn podwójnie nieskończony:

$$\prod_{m,n}^{(1)} \left(1-\frac{u}{2m\omega_1+2n\omega_2}\right) e^{\frac{u}{2m\omega_1+2n\omega_2}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{(2m\omega_1+2n\omega_2)^2}},$$

zymany przy całkowitych m, n, dodatnich i ujemnych, z wykluczeniem pary $m=n=0$, st dla wszelkiego u bezwarunkowo zbieżny.

3) **Wykazać**, że funkcya $\sigma(u)$, określona wzorem:

$$\sigma(u \mid \omega_1, \omega_2)=u.\prod_{m,n}^{(1)}\left(1-\frac{u}{2m\omega_1+2n\omega_2}\right)e^{\frac{u}{2m\omega_1+2n\omega_2}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{(2m\omega_1+2n\omega_2)^2}},$$

siada tylko pojedyńcze miejsca zerowe i to tylko w wierzchołkach równoległoboków, powiadających liczbom $2m\omega_1+2n\omega_2$, $(m \gtreqless n=0, \pm 1, \pm 2, ...)$.

4) **Wykazać**, że funkcya $\sigma(u)$, określona w ćw. 3. jest funkcyą nieparzystą.

5) **Wykazać**, że funkcya $\sigma(u)$, czyni zadość relacyi:

$$\sigma(\alpha u \mid \alpha\omega_1, \alpha\omega_2)=\alpha.\sigma(u \mid \omega_1, \omega_2).$$

6) Z **określenia** funkcyi $\sigma(u)$, podanego w ćw. 3., wyprowadzić rozwinięcie:

$$\sigma(u)=u-\frac{1}{4}u^5.\sum_{m,n}^{(1)}\frac{1}{(2m\omega_1+2n\omega_2)^4}+\frac{1}{6}u^7.\sum_{m,n}^{(1)}\frac{1}{(2m\omega_1+2n\omega_2)^6}-...$$

7) **Wykazać**, że funkcya $\zeta(u)$, określona wzorem:

$$\zeta(u \mid \omega_1, \omega_2)=\frac{1}{u}+\sum_{m,n}^{(1)}\left(\frac{1}{u-2m\omega_1-2n\omega_2}+\frac{1}{2m\omega_1+2n\omega_2}+\frac{u}{(2m\omega_1+2n\omega_2)^2}\right),$$

siada tylko pojedyńcze miejsca nieskończonościowe i to tylko w wierzchołkach równo-głoboków, odpowiadających liczbom: $2m\omega_1+2n\omega_2$, $(m \gtreqless n=0, \pm 1, \pm 2, ...)$.

8) **Wykazać**, że funkcya $\zeta(u)$, określona w ćw. 7. jest funkcyą nieparzystą.

9) **Wykazać**, że funkcya $\zeta(u)$ ma własność, określoną wzorem:

$$\zeta(\alpha u \mid \alpha\omega_1, \alpha\omega_2)=\frac{1}{\alpha}\zeta(u \mid \omega_1, \omega_2).$$

10) **Na podstawie** określeń funkcyi $\sigma(u)$, (ćw. 3.) i funkcyi $\zeta(u)$, (ćw. 7.) wykazać, że:

$$\zeta(u)=\frac{d\log\sigma(u)}{du}=\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}.$$

11) Z **określenia** funkcyi $\zeta(u)$, podanego w ćw. 7., wyprowadzić równanie:

$$\zeta(u)=\frac{1}{u}-u^3.\sum_{m,n}^{(1)}\frac{1}{(2m\omega_1+2n\omega_2)^4}-u^5.\sum_{m,n}\frac{1}{(2m\omega_2+2n\omega_2)^4}-...$$

12) **Wykazać**, że funkcya $\wp(u)$, określona wzorem:

$$\wp(u)=\frac{1}{u^2}+\sum_{m,n}^{(1)}\left\{\frac{1}{(u-2m\omega_1-2n\omega_2)^2}-\frac{1}{(2m\omega_1+2n\omega_2)^2}\right\},$$

siada tylko podwójne miejsca nieskończonościowe w wierzchołkach równoległoboków, powiadających liczbom: $2m\omega_1+2n\omega_2$, $(m \gtreqless n=0, \pm 1, \pm 2 ...)$.

13) **Wykazać**, że funkcya $\wp(u)$, określona w ćw. 12., jest funkcyą parzystą.

14) **Wykazać**, że funkcya $\wp(u)$, określona w ćw. 12. ma własność, określoną wzorem:

$$\wp(\alpha u \mid \alpha\omega_1, \alpha\omega_2)=\frac{1}{\alpha^2}\wp(u \mid \omega_1, \omega_2).$$

15) **Na podstawie** określeń funkcyi $\sigma(u)$, (ćw. 3.) i funkcyi $\wp(u)$ (ćw. 12.), okazać, że:

$$\wp(u)=-\frac{d^2\log\sigma(u)}{du^2}.$$

16) Z określenia funkcyi $\wp(u)$, podanego w ćw. 12., wyprowadzić rozwinięcie:

$$\wp(u)=\frac{1}{u^2}+3u^2.\sum_{m,n}^{(1)}\frac{1}{(2m\omega_1+2n\omega_2)^4}+5u^4.\sum_{m,n}^{(1)}\frac{1}{(2m\omega_1+2n\omega_2)^6}-\dots$$

Kładąc $s=(2m\omega_1+2n\omega_2)$, $(m \gtreqless n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, wykazać, że:

17) $\frac{\sigma(u+a)}{\sigma(a)}.e^{-u\zeta(a)+\frac{u^2}{2}\wp(a)}=\prod_s\left\{\left(1-\frac{u}{s-a}\right)e^{\frac{u}{s-a}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{(s-a)^2}}\right\}.$

18) $\zeta(u+a)-\zeta(a)+u\wp(a)=\sum_s\left\{\frac{1}{u+a-s}-\frac{u}{a-s}+\frac{u}{(a-s)^2}\right\}.$

19) $\wp(u+a)-\wp(a)=\sum_s\left\{\frac{1}{(u+a-s)^2}-\frac{1}{(a-s)^2}\right\}.$

20) $\wp(a+s)-\wp(a)=0.$ 21) $\zeta(a+s)-\zeta(a)=2\zeta\left(\frac{s}{2}\right).$

22) $\sigma(a+s)=-e^{[2m.\zeta(\omega_1)+2n.\zeta(\omega_2)[a+\frac{1}{2}s]]}.\sigma(a).$

23) $\wp'(u)=-2\sum_s\frac{1}{(u-s)^3}.$

24) Na podstawie wzoru, określającego funkcyę $\wp'(u)$, wykazać:

$$\wp'(\omega_1)=0,\quad \wp'(\omega_2)=0,\quad \wp'(\omega_1+\omega_2)=0.$$

25) Dowieść, że wszystkie pochodne nieparzystego rzędu funkcyi $\wp'(u)$ stają się zerami dla: $u=\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_1+\omega_2$.

Dowieść, że:

26) $\wp(u)-\wp(a)=\frac{\sigma(u+a).\sigma(u-a)}{\sigma^2(u).\sigma^2(a)}.$ 27) $\frac{\wp'(u)}{\wp(u)-\wp(a)}=\zeta(a+u)-\zeta(a-u)-2\zeta(u).$

28) $\frac{\wp'(a)}{\wp(u)-\wp(a)}=\zeta(a+u)+\zeta(a-u)-2\zeta(a).$

29) $\frac{\wp'(u)-\wp'(a)}{\wp(u)-\wp(a)}=2\zeta(u+a)-2\zeta(u)-2\zeta(a).$

30) $\frac{\wp'(u)+\wp'(a)}{\wp(u)+\wp(a)}=2\zeta(u-a)-2\zeta(u)+2\zeta(a).$

31) $\zeta(u+a)=\zeta(a)+\frac{1}{2}\frac{\wp'(u)-\wp'(a)}{\wp(u)-\wp(a)}.$ 32) $\zeta(u-a)=\zeta(u)-\zeta(a)+\frac{\wp'(u)+\wp'(a)}{\wp(u)-\wp(a)}.$

33) $\wp(u+a)=\wp(u)-\frac{1}{2}\frac{d}{du}\left[\frac{\wp'(u)-\wp'(a)}{\wp(u)-\wp(a)}\right].$

34) $\wp(u-a)=\wp(u)+\frac{1}{2}\frac{d}{du}\left[\frac{\wp'(u)+\wp'(a)}{\wp(u)-\wp(a)}\right].$

Rozwiązania XXXII. Wskazówki podane w tym wykładzie.

Literatura. G.—H. Halphen. Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications. 1886. James Harkness and Trank Morley. A treatise on the theory of fonctions. London 1893. Jules Tannery et Joles Molk. Eléments de la théorie des fonctions elliptique. H. A. Schwarz. Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen nach Weierstrass. Göttingen 1885.

Tematy do rozprawek naukowych.

1. Związki między funkcyami $\sigma(u)$, $\zeta(u)$, $\wp(u)$ i $\wp'(u)$.
2. Związki między Theta-funkcyami Jacobiego a sigmafunkcyami Weierstrassa.
3. Związki między funkcyami eliptycznemi snu, cnu, dnu Jacobi'ego a funkcyą eliptyczną $\wp(u)$ Weierstrassa.

Wykład XXXIII.

Rozwijanie funkcyj eliptycznych.

1. Odwrotności Thetafunkcyj i ich rozwinięcia. Weźmy najpierw pod uwagę odwrotności funkcyj $\Theta_{10}(x)$ i $\Theta_{11}(x)$, czyli funkcye: $\frac{1}{\Theta_{10}(x)}$ i $\frac{1}{\Theta_{11}(x)}$.

Załóżmy następujące rozwinięcia:

$$\frac{1}{\Theta_{10}(x)} = A_0 + A_1\cos\frac{2\pi x}{\omega} + A_2\frac{\cos 4\pi x}{\omega} + \dots + A_m\frac{\cos 2m\pi x}{\omega} + \dots$$

$$\frac{1}{\Theta_{11}(x)} = \frac{\pi}{\omega\Theta_{11}'(0)}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\pi x}{\omega}} + B_0\frac{\sin\pi x}{\omega} + B_1\sin\frac{3\pi x}{\omega} + \dots + B_m\sin\frac{(2m+1)\pi x}{\omega} + \dots$$

postawmy sobie za zadanie wyznaczyć spółczynniki A_m i B_m tych rozwinięć.

Mając na uwadze związek między funkcyami $\Theta_{10}(x)$ i $\Theta_{11}(x)$, określony na str. 502. wzorem:

$$\Theta_{11}\left(x+\frac{\omega'}{2}\right) = ie^{-\left(x+\frac{\omega'}{4}\right)\frac{\pi i}{\omega}}.\Theta_{10}(x),$$

otrzymujemy:

$$\frac{1}{\Theta_{11}\left(x+\frac{\omega'}{2}\right)} = -ie^{\frac{\pi i}{\omega}\left(x+\frac{\omega'}{4}\right)}.\frac{1}{\Theta_{10}(x)}. \qquad (1)$$

Na mocy założenia będzie z jednej strony:

$$\frac{1}{\Theta_{11}\left(x+\frac{\omega'}{2}\right)} = \frac{\pi}{\omega\Theta_{11}'(0)}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\pi}{\omega}\left(x+\frac{\omega'}{2}\right)} + \sum_{m=0}^{m=\infty} B_m\sin\frac{(2m+1)\pi}{\omega}\left(x+\frac{\omega'}{2}\right),$$

gdzie:

$$\frac{\pi}{\omega\Theta_{11}'(0)\sin\frac{\pi}{\omega}\left(x+\frac{\omega'}{2}\right)} = \frac{2\pi i}{\omega\Theta_{11}'(0)\left[e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(x+\frac{\omega'}{2}\right)} - e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(x+\frac{\omega'}{2}\right)}\right]} = -\frac{2\pi i.q^{1/2}.e^{\frac{\pi i x}{\omega}}}{\omega\Theta_{11}'(0)\left[1-qe^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right]},$$

czyli:

$$\frac{\pi}{\omega\Theta_{11}'(0).\sin\frac{\pi}{\omega}\left(x+\frac{\omega'}{2}\right)} = -\frac{2\pi i q^{1/2}}{\omega\Theta'_{11}(0)}.e^{\frac{\pi i x}{\omega}}\sum_{m=0}^{m=\infty} q^m e^{\frac{2m\pi i x}{\omega}};$$

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} B_m \sin\frac{(2m+1)\pi}{\omega}\left(x+\frac{\omega'}{2}\right) = \frac{1}{2i}\sum_{m=0}^{m=\infty} B_m\left\{q^{\frac{2m+1}{\omega}} . e^{(2m+1)\frac{\pi i x}{2}} - q^{-\frac{2m+1}{2}} . e^{-(2m+1)}\right.$$

przeto otrzymujemy:

$$\frac{1}{\theta_{11}\left(x+\frac{\omega'}{2}\right)} = -\frac{2\pi i q^{1/2}}{\omega\theta_{11}'(0)} . e^{\frac{\pi i x}{\omega}} \sum_{m=0}^{m=\infty} q^m e^{\frac{2m\pi i x}{\omega}} +$$

$$+\frac{1}{2i}\sum_{m=0}^{m=\infty} B_m\left\{q^{\frac{2m+1}{2}} e^{(2m+1)\frac{\pi i x}{\omega}} - q^{-\frac{2m+1}{2}} e^{-(2m+1)\frac{\pi i x}{\omega}}\right\}.$$

Z drugiej strony założyliśmy:

$$\frac{1}{\theta_{10}(x)} = \sum_{m=0}^{m=\infty} A_m \cos\frac{2m\pi x}{\omega},$$

a więc:

$$\frac{1}{\theta_{10}(x)} = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{1}{2} A_m\left\{e^{\frac{2m\pi i x}{\omega}} + e^{-\frac{2m\pi i x}{\omega}}\right\},$$

zatem otrzymujemy:

$$-i\, e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(x+\frac{\omega'}{4}\right)} . \frac{1}{\theta_{10}(x)} = -\frac{i}{2} e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(x+\frac{\omega'}{4}\right)} \sum_{m=0}^{m=\infty} A_m\left\{e^{\frac{2m\pi i x}{\omega}} + e^{-\frac{2m\pi i x}{\omega}}\right\}.$$

Z porównania obu rozwinięć, w myśl wzoru (1), otrzymujem równywując osobno spółczynniki przy $e^{\frac{(2m+1)\pi i x}{\omega}}$ i spółczynniki przy e^{-} relacye:

$$-\frac{2i\pi}{\omega\theta_{11}'(0)} q^{\frac{2m+1}{2}} + \frac{B_m}{2i} q^{\frac{2m+1}{2}} = -i q^{1/4} \frac{A_m}{2}, \quad \frac{B_m}{i} q^{-\frac{2m+1}{2}} = i q^{1/4} A_{m+1}, \quad m=1,\ 2,$$

ale
$$-\frac{2i\pi}{\omega\theta_{11}'(0)} q^{1/2} + \frac{B_0}{2i} q^{1/2} = -i q^{1/4} A_0, \quad \frac{B_0}{i} q^{-1/2} = i q^{1/4} A_1,$$

przeto wypływa stąd związek między spółczynnikami A_m i A_{m-1} w p

$$A_m = -A_{m-1} q^{-2m+1} + \frac{4\pi}{\omega\theta_{11}'(0)} . q^{-(m-1/4)},$$

skąd otrzymujemy wzór bezpośredni:

$$A_m q^{m^2} = (-1)^m 2\left\{A_0 + \frac{2\pi}{\omega\theta_{11}'(0)} \sum_{r=1}^{r=m} (-1)^r q^{\frac{(2r-1)^2}{4}}\right\}.$$

Dla $m=\infty$ staje się $A_m=0$, zatem otrzymujemy na wyznaczeni czynnika A_0, wzór:

$$A_0 + \frac{2\pi}{\omega\theta_{11}'(0)} \sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^r q^{\frac{(2r-1)^2}{4}} = 0,$$

a stąd:
$$A_0 = -\frac{2\pi}{\omega\theta_{11}'(0)} \sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^r q^{\frac{(2r-1)^2}{4}}.$$

Wobec tego będzie:

$$A_0 + \frac{2\pi}{\omega\theta_{11}'(0)} \sum_{r=1}^{r=m} (-1)^r q^{\frac{(2r-1)^2}{4}} = -\frac{2\pi}{\omega\,\theta_{11}'(0)} \sum_{r=m+1}^{r=0} (-1)^r q^{\frac{(2r-1)^2}{4}},$$

przeto:

$$A_m q^{m^2} = (-1)^{m+1} \frac{4\pi}{\omega\theta_{11}'(0)} \sum_{r=m+1}^{r=\infty} (-1)^r q^{\frac{(2r-1)^2}{4}},$$

li:

$$A_m q^{m^2} = \frac{4\pi}{\omega\theta_{11}'(0)} \sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^{r-1} q^{\frac{(2m+2r-1)^2}{4}},$$

ąd:

$$A_m = \frac{4\pi}{\omega\theta_{11}'(0)} \cdot \sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^{r-1} q^{\frac{(2r-1)^2}{4}+m(2r-1)}. \tag{3}$$

Odwrotność funkcyi $\theta_{10}(x)$, przedstawia się zatem w postaci szeregu:

$$\frac{1}{(x)} = \frac{2\pi}{\omega\theta_{11}'(0)} \cdot \left\{ \sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^{r-1} q^{\frac{(2r-1)^2}{4}} + 2\sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^{r-1} q^{\frac{(2r-1)^2}{4}+(2r-1)m} \cdot \cos\frac{2m\pi x}{\omega} \right\}.$$

2. Kładąc dla uproszczenia:

$$\sum_{r=0}^{r=\infty} (-1)^r q^{(n+r+1/2)^2} = a_n, \tag{4}$$

yczem $a_{n+1} + a_n = q^{(n+1/2)^2}$, a nadto $a_n = a_{-n}$, otrzymujemy powyższe rozwi-ie w postaci:

$$\frac{1}{\theta_{10}(x)} = \frac{2\pi}{\omega\theta_{11}'(0)} \cdot \left\{ a_0 + 2\sum_{m=1}^{m=\infty} a_m q^{-m^2} \cos\frac{2m\pi x}{\omega} \right\},$$

li:

$$\frac{\omega\theta_{11}'(0)}{2\pi} \cdot \frac{1}{\theta_{10}(x)} = a_0 + 2\sum_{m=1}^{m=\infty} a_m q^{-m^2} \cos\frac{2m\pi x}{\omega}. \tag{5}$$

Na tej podstawie otrzymamy odwrotność funkcyi $\theta_{11}(x)$, określoną egiem:

$$\frac{\theta_{11}'(0)}{2\pi} \cdot \frac{1}{\theta_{11}(x)} = \frac{1}{\sin\frac{\pi x}{\omega}} + 2\sum_{m=0}^{m=\infty} a_{m+1} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \cdot \sin(2m+1)\frac{\pi x}{\omega}. \tag{6}$$

stąd także odwrotności dwu pozostałych Thetafunkcyj $\theta_{01}(x)$ i $\theta_{00}(x)$, postaci:

$$\frac{\omega\theta_{11}'(0)}{\pi} \cdot \frac{1}{\theta_{01}(x)} = \frac{1}{\cos\frac{\pi x}{\omega}} + 2\sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^{m+1} \cdot a_{m+1} \cdot q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \cos\frac{(2m+1)\pi x}{\omega}, \tag{7}$$

$$\frac{\omega\theta_{11}'(0)}{2\pi} \cdot \frac{1}{\theta_{00}(x)} = a_0 + 2\sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^m a_m q^{-m^2} \cos\frac{2m\pi x}{\omega}. \tag{8}$$

3. Przy wprowadzeniu spółczynników a_m, określonych wzorem (4), ymujemy rozwinięcia samych Thetafunkcyj, w następującej postaci:

$$\theta_{10}(x) = q^{-1/4}(1 - e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \cdot q) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n \cdot a_n \cdot q^n \cdot e^{\frac{2n\pi i x}{\omega}},$$

$$\theta_{11}(x) = 4\sin\frac{\pi x}{\omega}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n a_n \cos\frac{2n\pi x}{\omega}\right), \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \Theta_{01}(x) &= 4\cos\frac{\pi x}{\omega}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos\frac{2n\pi x}{\omega}\right), \\ \Theta_{00}(x) &= q^{-1/4}\left(1 + e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}.q\right) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n q^n e^{\frac{2n\pi i x}{\omega}}. \end{aligned} \tag{9}$$

4. Rozwinięcia funkcyj eliptycznych i ich odwrotności. Z rozwinię Thetafunkcyj, wynikają rozwinięcia funkcyj eliptycznych, w postaci ic ilorazów.

Możemy jednak otrzymać także rozwinięcia funkcyj el iptycznyc w postaci szeregów, jeżeli pomnożymy szeregi, przedstawiające odwrotnośc Thetafunkcyj przez odpowiednie szeregi przynależnych Thetafunkcyj.

Tak, otrzymamy na podstawie określeń:

$$\begin{aligned} snu &= \sqrt{\frac{1}{\varkappa}}.\frac{\Theta_{11}(x)}{\Theta_{10}(x)} = \sqrt{\frac{1}{\varkappa}}.\Theta_{11}(x).\frac{1}{\Theta_{10}(x)}, \\ cnu &= \sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa'}}.\frac{\Theta_{01}(x)}{\Theta_{10}(x)} = \sqrt{\frac{1}{\varkappa'}}.\Theta_{01}(x).\frac{1}{\Theta_{10}(x)}, \\ dnu &= \sqrt{\varkappa'}.\frac{\Theta_{00}(x)}{\Theta_{10}(x)} = \sqrt{\varkappa'}.\Theta_{00}(x).\frac{1}{\Theta_{10}(x)}, \end{aligned} \tag{10}$$

w których:

$$u = \frac{\pi}{\omega}.\Theta_{00}{}^2(0).x, \quad \varkappa = \frac{\Theta_{01}{}^2(0)}{\Theta_{00}{}^2(x)}, \quad \varkappa' = \frac{\Theta_{10}{}^2(0)}{\Theta_{00}{}^2(0)}, \quad \pi\,\Theta_{00}{}^2(0) = 2K,$$

$$\frac{\pi}{\omega}.\Theta_{01}{}^2(0) = 2\varkappa K, \quad \frac{\pi}{\omega}.\Theta_{10}{}^2(0) = 2\varkappa' K,$$

następujące iloczyny:

$$snu = \frac{2\pi}{\omega\Theta'_{11}(0)}\sqrt{\frac{1}{\varkappa}}.4\sin\frac{\pi x}{\omega}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^m a_m \cos\frac{2m\pi x}{\omega}\right)\left[a_0 + 2\sum_{m=1}^{m=\infty} a_m q^{-m^2}.\cos\frac{2m\pi x}{\omega}\right],$$

$$cnu = \frac{2\pi}{\omega\,\Theta_{11}'(0)}\sqrt{\frac{\varkappa'}{\varkappa}}.4\cos\pi x\left(1/_2 a_0 + \sum_{m=1}^{m=\infty} a_m \cos\frac{2m\pi x}{\omega}\right)\left(a_0 + 2\sum_{m=1}^{m=\infty} a_m q^{-m^2}.\cos\frac{2m\pi x}{\omega}\right),$$

$$dnu = \frac{2\pi}{\omega\Theta_{11}'(0)}\sqrt{\varkappa'}.q^{-\frac{1}{4}}\left(1 + e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} q\right)\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} a_m q^m e^{\frac{2m\pi i x}{\omega}}.\left(a_0 + 2\sum_{m=1}^{m=\infty} a_m q^{-m^2}.\cos\frac{2m\pi x}{\omega}\right).$$

Zamiast wykonywać wskazane mnożenia, połóżmy:

$$\frac{2K}{\pi}.\frac{1}{snu} = \frac{1}{\sin\frac{\pi x}{\omega}} + \sum_{m=0}^{m=\infty} B_m \sin\frac{(2m+1)\pi x}{\omega},$$

tedy będzie:

$$\frac{2K}{\pi}.\frac{1}{\sin(u+K')} = \frac{1}{\sin\pi\left(x+\frac{\omega'}{2}\right)} + \sum_{m=0}^{m=\infty} B_m \sin(2m+1)\pi\left(x+\frac{\omega'}{2}\right),$$

czyli:

$$\frac{2K}{\pi}k\,snu = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{\omega}\left(x+\frac{\omega'}{2}\right)} + \sum_{m=0}^{m=\infty} B_m \sin\frac{(2m+1)\pi}{\omega}\left(x+\frac{\omega'}{2}\right).$$

Połóżmy:

$$\frac{2K}{\pi}\varkappa\, sn\, u=\sum_{m=0}^{m=\infty} A_m.\sin\frac{(2m+1)\pi x}{\omega},$$

a otrzymamy tożsamość:

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} A_m \sin\frac{(2m+1)\pi x}{\omega}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{\omega}\left(x+\frac{\omega'}{2}\right)}+\sum_{m=0}^{m=\infty} B_m.\sin\frac{(2m+1)\pi}{\omega}\left(x+\frac{\omega'}{2}\right),$$

czyli:

$$\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{A_m}{2i}\left\{e^{\frac{(2m+1)\pi x i}{\omega}}-e^{\frac{-(2m+1)\pi x i}{\omega}}\right\}=2iq^{1/2}e^{\frac{\pi x i}{\omega}}\sum_{m=0}^{m=\infty} q^m e^{\frac{2m\pi x i}{\omega}}+$$

$$+\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{B_m}{2i}\left[e^{\frac{(2m+1)\pi x i}{\omega}}.q^{\frac{2m+1}{2}}-e^{\frac{-(2m+1)\pi x i}{\omega}}.q^{-\frac{2m+1}{2}}\right].$$

skąd wypływają związki między spółczynnikami A_m i B_m, w postaci:

$$A_m=-2iq^{\frac{2m+1}{2}}+\frac{B_m}{2i}q^{\frac{2m+1}{2}},\quad A_m=B_m.q^{-\frac{2m+1}{2}},$$

z których wypływa:

$$A_m=\frac{4q^{\frac{2m+1}{2}}}{1-q^{2m+1}}.$$

Wobec tego założone rozwinięcie, przedstawi się w postaci:

$$\frac{2\varkappa K}{\pi}.sn\, u=4\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{q^{\frac{2m+1}{2}}}{1-q^{2m+1}}\sin\frac{(2m+1)\pi x}{\omega},$$

a zarazem:

$$\frac{2K}{\pi}.\frac{1}{sn\, u}=\frac{1}{\sin\frac{\pi x}{\omega}}+4\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{q^{2m+1}}{1-q^{2m+1}}\sin\frac{(2m+1)\pi x}{\omega},$$

Otrzymujemy zatem rozwinięcie funkcyi $sn\, u$ i jej odwrotności: $\frac{1}{sn\, u}$ w postaci:

$$snu=\frac{2\pi}{\varkappa K}.\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{q^{\frac{2m+1}{2}}}{1-q^{2m+1}}\sin\frac{(2m+1)\pi x}{\omega}. \tag{11}$$

$$\frac{1}{sn\, u}=\frac{\pi}{2K}.\frac{1}{\sin\pi x}+\frac{2\pi}{K}.\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{q^{2m+1}}{1-q^{2m+1}}\sin\frac{(2m+1)\pi x}{\omega}. \tag{12}$$

5. Podobnie znajdziemy rozwinięcia dla dwu pozostałych funkcyi eliptycznych, w postaci:

$$cnu=\frac{2\pi}{\varkappa K}.\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{q^{\frac{2m+1}{2}}}{1+q^{2m+1}}\cos\frac{(2m+1)\pi x}{\omega}. \tag{13}$$

$$\frac{1}{cn\, u}=\frac{\pi}{2\varkappa' K}.\frac{1}{\cos\pi x}+\frac{2\pi}{\varkappa' K}\sum_{m=0}^{m=\infty}(-1)^m\frac{q^{2m+1}}{1+q^{2m+1}}\cos\frac{(2m+1)\pi x}{\omega}. \tag{14}$$

$$dn\,u = \frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{q^m}{1+q^{2m}} \cos\frac{2m\pi x}{\omega}.$$

$$\frac{1}{dn\,u} = \frac{\pi}{2\varkappa' K} + \frac{2\pi}{\varkappa' K} \sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^m \frac{q^m}{1+q^{2m}} \cos\frac{2m\pi x}{\omega}.$$

Ćwiczenia XXXIII.

1) Na podstawie określeń:

$$\alpha)\quad \Theta_{11}(x) = \frac{1}{i} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n e^{\frac{\pi i}{\omega}[(2n+1)x + (n+1/2)^2 \omega']},$$

$$\beta)\quad \Theta_{01}(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}[(2n+1)x + (n+1/2)^2 \omega']},$$

$$\gamma)\quad \Theta_{10}(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n e^{\frac{\pi i}{\omega}(2nx + n^2\omega')}, \quad \delta)\quad \Theta_{00}(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}(2nx + n^2\omega')},$$

wykazać, że stosunki co dwu tych theta-funkcyj, są funkcyami elliptycznemi.

Na podstawie powyższych określeń, wyprowadzić następujące rozwinięcia

2) $$\frac{\Theta_{10}(x)}{\Theta_{11}(x)} = \frac{\pi}{\omega} \cdot \frac{\Theta_{10}(0)}{\Theta_{11}'(0)} \cdot \sum_{m=-\infty}^{m=-\infty} \frac{1}{\sin\frac{\pi}{\omega}(x - m\omega')}.$$

3) $$\frac{\Theta_{00}(x)}{\Theta_{11}(x)} = \frac{\pi}{\omega} \cdot \frac{\Theta_{10}(0)}{\Theta_{11}'(0)} \cdot \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{(-1)^m}{\sin\frac{\pi}{\omega}(x - m\omega')}.$$

4) $$\frac{\Theta_{0}(x)}{\Theta_{01}(x)} = \frac{\pi}{\omega} \cdot \frac{\Theta_{10}(0)}{\Theta_{11}'(0)} \cdot \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{1}{\cos\frac{\pi}{\omega}(x - m\omega')}.$$

5) $$\frac{\Theta_{10}(x)}{\Theta_{01}(x)} = \frac{\pi}{\omega} \cdot \frac{\Theta_{10}(0)}{\Theta_{11}'(0)} \cdot \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{(-1)^m}{\cos\frac{\pi}{\omega}(x - m\omega')}.$$

6) $$\frac{\Theta_{11}(x)}{\Theta_{10}(x)} = \frac{\pi}{\omega} \cdot \frac{\Theta_{10}(0)}{\Theta_{11}'(0)} \cdot \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{1}{\sin\frac{\pi}{\omega}\left(x - (2m-1)\frac{\omega'}{2}\right)}.$$

7) $$\frac{\Theta_{01}(x)}{\Theta_{10}(x)} = \frac{\pi i}{\omega} \cdot \frac{\Theta_{00}(0)}{\Theta'_{11}(0)} \cdot \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{(-1)^m}{\sin\frac{\pi}{\omega}\left(x - 2m - 1)\frac{\omega'}{2}\right)}.$$

8) $$\frac{\Theta_{01}(x)}{\Theta_{00}(x)} = \frac{\pi}{\omega} \cdot \frac{\Theta_{10}(0)}{\Theta_{11}'(0)} \cdot \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{1}{\cos\frac{\pi}{\omega}\left(x - (2m-1)\frac{\omega'}{2}\right)}.$$

9) $$\frac{\Theta_{11}(x)}{\Theta_{00}(x)} = -\frac{\pi i}{\omega} \cdot \frac{\Theta_{00}(0)}{\Theta_{11}'(0)} \cdot \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{(-1)^m}{\cos\frac{\pi}{\omega}\left(x - (2m-1)\frac{\omega'}{2}\right)}.$$

Wykazać, że:

10) $$sn\,\frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \cdot \frac{2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x - \dots}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \dots}.$$

11) $cn\,\frac{2Kx}{\pi}=\sqrt{\frac{\varkappa'}{\varkappa}}\;\frac{2\sqrt[4]{q}\cos x+2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x+\dots}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\dots}.$

12) $dn\,\frac{2Kx}{\pi}=\sqrt{\varkappa'}\;\frac{1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\dots}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos x-2q^9\cos 6x+\dots}.$

Wyprowadzić następujące wzory na pochodne funkcyj eliptycznych:

13) $\frac{d\,sn\,u}{du}=cn\,u\,.\,dn\,u.$ 14) $\frac{d\,sn\,u}{du}=\sqrt{(1-sn^2u)(1-\varkappa^2 sn^2 u)}.$

15) $\frac{d\,cn\,u}{du}=-\,sn\,u\,dn\,u.$ 16) $\frac{d\,dn\,u}{du}=-\varkappa^2\,sn\,u\,cn\,u.$

17) $\frac{d^2 sn\,u}{du^2}=-\varkappa^2 sn\,u\,cn\,u-sn\,u\,dn^2 u.$ 18) $\frac{d^2 sn\,u}{du^2}=-(1+\varkappa^2)\,sn\,u+2\varkappa^2 sn^3 u.$

19) $\frac{d^3 sn\,u}{du^3}=[-(1+\varkappa^2)+6\varkappa^2 sn^2 u]\,cn\,u\,dn\,u.$

Wyprowadzić następujące rozwinięcie:

20) $sn\,u=\frac{u}{1}-\frac{1+\varkappa^2}{3!}u^3+\frac{1+14\varkappa^2+\varkappa^4}{5!}u^5-\frac{1+135\varkappa^2+135\varkappa^4+\varkappa^6}{7!}u^7+\dots$

21) $cn\,u=1-\frac{1}{2!}u^2+\frac{1+4\varkappa^2}{4!}u^4-\frac{1+44\varkappa^2+16\varkappa^4}{6!}u^6+\dots$

22) $dn\,u=1-\frac{\varkappa^2}{2!}u^2+\frac{\varkappa^2(4+\varkappa^2)}{4!}u^4-\frac{\varkappa^2(16+44\varkappa^2+\varkappa^4)}{6!}u^6+\dots$

23) $sn\,u=-\frac{\pi}{\varkappa K}\sin\frac{\pi u}{2K}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{\cos\frac{(2m-1)\pi i K'}{2K}}{\sin^2\frac{(2m-1)\pi i K'}{2K}-\sin^2\frac{\pi u}{2K}}.$

24) $cn\,u=\frac{iK}{\varkappa K}\cos\frac{\pi u}{2K}\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^{m-1}\frac{\sin\frac{(2m-1)\pi i K'}{2K}}{\sin^2\frac{(2m-1)\pi i K'}{2K}-\sin^2\frac{\pi u}{2K}}.$

25) $dn\,u=1+\frac{i\pi}{K}\sin^2\frac{\pi u}{2K}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{(-1)^{m-1}\cot g\frac{(2m-1)\pi i K'}{K}}{\sin^2\frac{(2m-1)\pi i K'}{K}-\sin^2\frac{\pi u}{2K}}.$

26) $sn^2\,\frac{2Kx}{\pi}=\frac{2\pi}{\varkappa K}\sin x\,.\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^{m-1/2}(1+q^{2m-1})}{1-2q^{2m-1}\cos 2x+q^{4m-2}}.$

27) $cn^2\,\frac{2Kx}{\pi}=\frac{2\pi}{\varkappa K}\cos x\,.\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^{m-1}\frac{q^{m-1/2}(1-q^{2m-1})}{1-2q^{2m-1}\cos 2x+q^{4m-2}}.$

28) $dn^2\,\frac{2Kx}{\pi}=1-\frac{4\pi}{K}\sin^2 x\,.\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{(-1)^{m-1}q^{2m-1}\frac{1+y^{2m-1}}{1-q^{2m-1}}}{1-2q^{2m-1}\cos 2x+q^{4m-2}}.$

29) $sn\,\frac{2Kx}{x}=\sin x\,.\prod_{r=1}^{r=\infty}\left(\frac{1+q^{2r-1}}{1+q^{2r}}\right).\prod_{r=1}^{r=\infty}\frac{1-q^{2r}\cos 2x+q^{4r}}{1-q^{2r-1}\cos 2x+q^{4r-2}}.$

30) $cn\,\frac{2Kx}{\pi}=\cos x\,.\prod_{r=1}^{r=\infty}\left(\frac{1-q^{2r-1}}{1+q^{2r}}\right)^2.\prod_{r=1}^{r=\infty}\frac{1+2q^{2r}\cos 2x+q^{4r}}{1-2q^{2r-1}\cos 2x+q^{4r-2}}.$

$$31)\quad dn\,\frac{2\,k\,x}{\pi}=\prod_{r=1}^{r=\infty}\left(\frac{1-q^{2r-1}}{1+q^{2r-1}}\right)^2\cdot\prod_{r=1}^{r=\infty}\frac{1+2q^{2r-1}\cos 2x+q^{4r-2}}{1-2q^{2r-1}\cos 2x+q^{4r-2}}.$$

$$32)\quad \mathrm{sn}\,2\,K\,u=\frac{2\pi}{\varkappa\,K}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^{\frac{2m-1}{2}}}{1-q^{2m-1}}\sin(2m-1)\pi u.$$

$$33)\quad cn\,2Ku=\frac{2\,\pi}{2K}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^{\frac{2m-1}{2}}}{1+q^{2m-1}}\cos(2m-1)\,\pi\,u.$$

$$34)\quad dn\,2Ku=\frac{\pi}{2K}+2\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^m}{1+q^{2m}}\cos 2m\,\pi\,u.$$

$$35)\quad \frac{sn'u}{sn\,u}=\frac{\pi}{2\,K}\mathrm{cotg}\,\frac{\pi u}{2\,K}-\frac{2\,\pi}{K}\left\{\frac{q}{1+q}\sin\frac{\pi\,u}{K}+\frac{q^2}{1+q^2}\sin\frac{2\pi u}{K}+\dots\right\}.$$

$$36)\quad \frac{cn'\,u}{cn\,u}=-\frac{\pi}{2\,K}\mathrm{tang}\,\frac{\pi u}{2\,K}-\frac{2\,\pi}{K}\left\{\frac{q}{1+q}\sin\frac{\pi\,u}{K}+\frac{q^2}{1+q^2}\sin\frac{2\pi u}{K}+\frac{q^3}{1+q^3}\sin\frac{3\pi u}{K}+\dots\right\}$$

$$37)\quad \frac{dn'u}{dn\,u}=-4\frac{\pi}{K}\left\{\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi\,u}{K}+\frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{K}+\dots\right\}.$$

$$38)\quad \frac{tn'u}{tn\,u}=\frac{\pi}{2\,K}\left\{\mathrm{cotg}\,\frac{\pi u}{2\,K}+\mathrm{tang}\,\frac{\pi u}{2\,K}\right\}+\frac{2\pi}{K}\left\{\frac{q^2}{1+q^2}\,\frac{2\pi u}{K}+\frac{q^4}{1+q^4}\sin\frac{4\pi u}{K}+\dots\right\}.$$

Rozwiązania XXXIII. Wskazówki podane w wykładzie.

Literatura. M.-M. Briot et Bouquet. Théorie des fonctions elliptiques. Paris 1875. Artur Cayley. An elementary treatise on elliptic fonctions. Cambridge 1886. Dr. Alfred Enneper. Elliptische Functionen, Theorie und Geschichte. Halle a/S. 1876. C. J. J. Jacobi's gesammelte Werke. „Fundamenta nova theorie functionum ellipticarum auctore D. Carolo Gustavo Jacobo Jacobi. Regiomonti 1829". Berlin 1881.

Tematy do rozprawek naukowych:

1. Różniczkowanie funkcyj eliptycznych.
2. Rozwinięcia funkcyj eliptycznych na szeregi potęgowe.
3. Rozwinięcia funkcyj eliptycznych na szeregi trygonometryczne.

Wykład XXXIV.

Rozwijanie funkcyj na ułamki ciągłe nieskończone.

1. Ułamek ciągły nieskończony i jego wartości przybliżone. Jeżeli nieskończony szereg ułamków:

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \ldots, \frac{p_n}{q_n}, \ldots,$$

tak ze sobą połączymy, że każdy następny ułamek będzie dodajnikiem w mianowniku poprzedzającego ułamka, wtedy otrzymamy wyrażenie nieskończone, kształtu:

$$\cfrac{p_1}{q_1 + \cfrac{p_2}{q_2 + \cfrac{p_3}{q_3 + \cdots + \cfrac{p_n}{q_n + \cdots}}}} \tag{1}$$

które oznaczamy dla oszczędności miejsca (patrz T. I. wykład XXX.) także w postaci:

$$\frac{p_1}{q_1} \dot{+} \frac{p_2}{q_2} \dot{+} \frac{p_3}{q_3} \dot{+} \ldots \dot{+} \frac{p_n}{q_n} \dot{+} \ldots \tag{2}$$

i nazywamy ułamkiem ciągłym nieskończonym.

Ułamek $\frac{p_r}{q_r}$ jest jego r-tym wyrazem, p_r jest r-tym licznikiem częściowym, q_r jest r-tym mianownikiem częściowym a liczby $p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n, \ldots$, nazywamy także elementami ułamka ciągłego.

Przerwawszy nieskończony ułamek ciągły na n-tym wyrazie, otrzymujemy ułamek ciągły n-wyrazowy:

$$\frac{p_1}{q_1} \dot{+} \frac{p_2}{q_2} \dot{+} \frac{p_3}{q_3} \dot{+} \ldots \dot{+} \frac{p_n}{q_n} = \frac{P_n}{Q_n}, \tag{3}$$

który nazywamy n-tym reduktem albo także n-tą wartością przybliżoną, danego ułamka ciągłego.

Ogólne prawidło obliczania kolejno po sobie następujących reduktów danego ułamka ciągłego, wyraża się wzorami redukcyjnymi, wyprowadzonymi w Tomie I. w art. 3. wykładu XXX. str. 397. i 398., w postaci:

$$P_n = P_{n-1} q_n + P_{n-2} p_n; \quad Q_n = Q_{n-1} q_n + Q_{n-2} p_n, \tag{4}$$

gdzie P_n jest licznikiem, a Q_n mianownikiem n-tego reduktu (n-tej wartości przybliżonej) danego ułamka ciągłego.

3. Różnica między dwoma po sobie następującymi reduktami danego ułamka ciągłego, przedstawia się w myśl wywodów, przeprowadzonych na str. 402. Tomu I., w postaci wzoru:

$$\Delta_n = \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = (-1)^{n-1} \frac{p_1 p_2 \dots p_n}{Q_{n-1} Q_n},$$

za pomocą którego otrzymujemy n-ty redukt, wyrażony w postaci sumy kształtu:

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{p_1}{Q_1} - \frac{p_1 p_2}{Q_1 Q_2} + \frac{p_1 p_2 p_3}{Q_2 Q_3} - \frac{p_1 p_2 p_3 p_4}{Q_3 Q_4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{p_1 p_2 \dots p_n}{Q_{n-1} Q_n}.$$

Wzór ten możemy zarazem położyć do zamiany nieskończonego ułamka ciągłego na nieskończony szereg.

Jeżeli mamy mianowicie ułamek ciągły nieskończony w postaci:

$$\frac{P}{Q} = \frac{p_1}{q_1} \dot{+} \frac{p_2}{q_2} \dot{+} \dots \dot{+} \frac{p_n}{q_n} \dot{+} \dots$$

to przynależny mu szereg nieskończony, przedstawia się w postaci:

$$\frac{P}{Q} = \frac{p_1}{Q_1} - \frac{p_1 p_2}{Q_1 Q_2} + \frac{p_1 p_2 p_3}{Q_2 Q_3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{p_1 p_2 \dots p_n}{Q_{n-1} Q_n} + \dots \tag{5}$$

gdzie $Q_1 = q_1, \; Q_2 = q_1 q_2 + p_2, \dots, \; Q_n = Q_{n-1} q_n + Q_{n-2} p_n.$

Powyższe wzory, dotyczą ułamków ciągłych w ogólności, bez względu na to, czy ich wyrazy są rzeczywiste, czy też zespolone.

4. **Ułamki ciągłe nieskończone, o samych wyrazach dodatnich.** Jeżeli wyrazy danego ułamka ciągłego są wszystkie dodatnie, natenczas różnica między dwoma po sobie następującymi reduktami, przedstawiająca się w postaci:

$$\Delta_n = \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = (-1)^{n-1} \frac{p_1 p_2 \dots p_n}{Q_{n-1} Q_n}, \tag{6}$$

będzie dodatnią, lub ujemną, stosownie do tego, czy n jest liczbą parzystą, czy też nieparzystą. Każdy redukt takiego ułamka ciągłego, leży więc między dwoma bezpośrednio po sobie następującymi, poprzednimi reduktami. Różnica między dowolnymi dwoma reduktami $\frac{P_n}{Q_n}$ i $\frac{P_m}{Q_m}$, przyczem $n > m+1$, przedstawia się znowu, według art. 12., str. 403. Tomu I., w postaci:

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_m}{Q_m} = (-1)^m \frac{p_1 p_2 \dots p_m \cdot p_{m+1}}{Q_m Q_n}, \tag{7}$$

z czego wynika, że każdy redukt z parzystą wskazówką jest mniejszy od każdego reduktu z nieparzystą wskazówką, że:

$$\frac{P_{2r}}{Q_{2r}} < \frac{P_{2r+1}}{Q_{2r+1}} \text{ i } \frac{P_{2r}}{Q_{2r}} < \frac{P_{2r-1}}{Q_{2r-1}},$$

że więc:

$$\frac{P_2}{Q_2} < \frac{P_4}{Q_4} < \dots < \frac{P_{2r+1}}{Q_{2r+2}} \text{ i } \frac{P_1}{Q_1} > \frac{P_3}{Q_3} > \dots > \frac{P_{2r-1}}{Q_{2r-1}} > \frac{P_{2r+1}}{Q_{2r+1}},$$

Redukty z nieparzystą wskazówką, jak niemniej redukty z parzystą wskazówką zbliżają się, przy rosnącej wskazówce coraz bardziej do wartości danego ułamka ciągłego. Dla tego rodzaju ułamków ciągłych jest więc nazywanie reduktów ułamka ciągłego, także wartościami przybliżonemi zupełnie usprawiedliwionem.

5. **Zbieżność i rozbieżność nieskończonych ułamków ciągłych.** Mając dany ułamek ciągły nieskończony:

$$U = \frac{p_1}{q_1} \dotplus \frac{p_2}{q_2} \dotplus \frac{p_3}{q_3} \dotplus \ldots \dotplus \frac{p_n}{q_n} \dotplus \ldots \qquad (8)$$

możemy dochodzić, do jakiej wartości granicznej zdąża n-ty redukt tego ułamka ciągłego:

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{p_1}{q_1} \dotplus \frac{p_2}{q_2} \dotplus \ldots \dotplus \frac{p_n}{q_n},$$

gdy n zdąża do nieskończoności dodatniej, t. j., gdy $n = +\infty$.

Zajść tu mogą następujące przypadki:

1) Wartość graniczna n-go reduktu: $\frac{P_n}{Q_n}$ staje się dla $n = \infty$, danego ułamka ciągłego o jakichkolwiek wyrazach, pewną liczbą skończoną, oznaczoną: U, rzeczywistą, urojoną lub zespoloną, tak, że:

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_n}{Q_n} = U.$$

Dany ułamek ciągły, nieskończony, nazywamy w tym przypadku zbieżnym a graniczną wartość: U nazywamy wartością tegoż ułamka ciągłego

2) Wartość graniczną n-go reduktu: $\frac{P_n}{Q_n}$, danego ułamka ciągłego o rzeczywistych wyrazach, staje się, dla $n = +\infty$, liczbą nieskończenie wielką $+\infty$, lub $-\infty$ tak, że:

$$\lim_{n=+\infty} \frac{P_n}{Q_n} = +\infty, \quad \text{lub} \quad \lim_{n=+\infty} \frac{P_n}{Q_n} = -\infty.$$

Dany ułamek ciągły nazywamy wtedy ułamkiem ciągłym właściwie rozbieżnym.

3) Wartość graniczna n-go reduktu: $\frac{P_n}{Q_n}$ danego ułamka ciągłego jest nieoznaczoną, a tylko chwieje się między dwiema różnemi wartościami: wartością dolną A i wartością górną B, dany ułamek ciągły nieskończony nazywamy wtedy niewłaściwie rozbieżnym, albo oscylacyjnym.

4) Wartość graniczna n-go reduktu: $\frac{P_n}{Q_n}$ danego ułamka ciągłego jest nieoznaczoną, przyczem sam redukt staje się dla nieskończenie wielu wartości n nieskończenie wielkim.

Dany ułamek ciągły nazywamy wtedy nieoznaczenie rozbieżnym.

Dochodzenie, czy i do jakiej wartości granicznej zdąża n-ty redukt danego ułamka ciągłego, celem rozstrzygnięcia pytania, czy dany ułamek ciągły nieskończony jest zbieżnym, czy też w ogólności rozbieżnym, możemy zawsze sprowadzić do badania zbieżności szeregu nieskończonego, lub prostszego ułamka ciągłego, zamieniając dany ułamek ciągły U na równoważny szereg nieskończony lub na inny ułamek ciągły według wzoru:

$$U = \frac{h_1 p_1}{h_1 q_1} \dotplus \frac{h_1 h_2 p_2}{h_2 q_2} \dotplus \frac{h_2 h_3 p_3}{h_3 q_3} \dotplus \ldots \dotplus \frac{h_{n-1} h_n p_n}{h_n q_n} \dotplus \ldots \qquad (9)$$

Wobec dowolności czynników h możemy je zawsze tak obrać, ab wszystkie liczniki częściowe były równe 1, a więc możemy dany ułame ciągły nieskończony przekształcić na równoważny ułamek ciągły nieskoń czony, kształtu:

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{a_1} \dotplus \frac{1}{a_2} \dotplus \frac{1}{a_3} \dotplus \ldots \dotplus \frac{1}{a_n} \dotplus \ldots$$

gdzie $a_r = h_r q_r$, przyczem:

$$h_{2r-1} = \frac{p_2 p_4 \ldots p_{2r-2}}{p_1 p_3 \ldots p_{2r-1}}, \quad h_{2r} = \frac{p_1 p_3 \ldots p_{2r-1}}{p_2 p_4 \ldots p_{2r}}.$$

6. Badanie zbieżności lub rozbieżności danego ułamka ciągłego za pc mocą badania zbieżności lub rozbieżności równoważnego szeregu nieskoń czonego. Weźmy pod uwagę ułamek ciągły nieskończony, którego wszystki liczniki częściowe są równe 1, a więc ułamek ciągły nieskończony kształtu

$$U = \frac{1}{a_1} \dotplus \frac{1}{a_2} \dotplus \frac{1}{a_3} \dotplus \ldots \dotplus \frac{1}{a_n} \dotplus \ldots \qquad (10)$$

Równoważny z nim szereg nieskończony przedstawia się według wzoru 6) w postaci:

$$U = \frac{1}{Q_1} - \frac{1}{Q_1 Q_2} + \frac{1}{Q_2 Q_3} - \frac{1}{Q_3 Q_4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1} Q_n} + \ldots \qquad (11)$$

gdzie $Q_1 = a_1$, $Q_2 = a_1 a_2 + 1$, a ogólnie $Q_n = Q_{n-1} a_n + Q_{n-2}$.

Zbieżność lub rozbieżność tego szeregu zależy od zbieżności lub rozbieżności szeregu:

$$S = \frac{1}{|Q_1|} + \frac{1}{|Q_1 Q_2|} + \frac{1}{|Q_2 Q_3|} + \ldots + \frac{1}{|Q_{n-1} Q_n|} + \ldots \qquad (12)$$

Jeżeli od pewnego n począwszy, wszystkie mianowniki Q_n są różne od zera, wówczas, jak łatwo dowieść, otrzymujemy:

$$|Q_n| \leqq (1+|a_1|).(1+|a_2|)\ldots(1+|a_n|)\ldots$$

Dla nieskończenie wielkiego n będzie iloczyn nieskończony:

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} (1+|a_n|) = (1+|a_1|)(1+|a_2|)\ldots(1+|a_n|)\ldots,$$

zbieżny, skoro szereg:

$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$ jest zbieżny, a tem samem szereg: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ bezwarunkowo zbieżny.

Pod tem założeniem będzie szereg (12) rozbieżny, a tem samem będzie równoważny ułamek ciągły także rozbieżny.

A zatem: *Ułamek ciągły nieskończony:* $\frac{1}{a_1} \dotplus \frac{1}{a_2} \dotplus \frac{1}{a_3} \dotplus \ldots \dotplus \frac{1}{a_n} \dotplus \ldots$ *jest zawsze rozbieżny, skoro szereg:* $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ *jest bezwarunkowo zbieżny.*

Rozbieżność ta nie jest właściwą, gdyby bowiem rozbieżność danego ułamka ciągłego przy bezwarunkowej zbieżności szeregu: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ była właściwą byłoby tedy: $\lim\limits_{n=\infty} \frac{P_n}{Q_n} = \infty$, a tem samem:

$$\lim_{n=\infty}\left(1:\frac{P_n}{Q_n}\right)=0,$$

ałby więc ułamek ciągły: $\frac{1}{1}\dot{+}\frac{1}{a_1}\dot{+}\frac{1}{a_2}\dot{+}\frac{1}{a_3}\dot{+}\ldots\dot{+}\frac{1}{a_n}\dot{+}\ldots$ zdążać do zera, st niemożliwe, gdyż wobec bezwarunkowej zbieżności szeregu kształtu: $a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$ jest także szereg: $1+a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$ bezwa-owo zbieżny.

Twierdzenie powyższe możemy uogólnić.

Ze względu bowiem na to, że wszelki ułamek ciągły, kształtu:

$$\frac{p_1}{q_1}\dot{+}\frac{p_2}{q_2}\dot{+}\frac{p_3}{q_3}\dot{+}\ldots\dot{+}\frac{p_n}{q_n}\dot{+}\ldots,$$

ię sprowadzić do postaci zasadniczej: $\frac{1}{a_1}\dot{+}\frac{1}{a_2}\dot{+}\frac{1}{a_3}\dot{+}\ldots\dot{+}\frac{1}{a_n}\dot{+}\ldots$ na pod-ie przekształcenia:

$$\frac{h_1 p_1}{h_1 q_1}\dot{+}\frac{h_1 h_2 p_2}{h_2 q_2}\dot{+}\frac{h_2 h_3 p_3}{h_3 q_3}\dot{+}\ldots\dot{+}\frac{h_{n-1} h_n p_n}{h_n q_n}\dot{+}\ldots$$

ie:

$$h_1=\frac{1}{p_1},\ldots,\ h_{2r}=\frac{p_1 p_3\ldots p_{2r-1}}{p_2 p_4\ldots p_{2r}},\ h_{2r+1}=\frac{p_2 p_4\ldots p_{2r}}{p_1 p_3\ldots p_{2r+1}},\ (r=1,\ 2,\ 3,\ldots), \quad (13)$$

ymujemy:

$$a_1=\frac{q_1}{p_1},\ldots,\ a_{2r}=\frac{p_1 p_3\ldots p_{2r-1}}{p_2 p_4\ldots p_{2r}}\,q_{2r},\ a_{2r+1}=\frac{p_2 p_4\ldots p_{2r}}{p_1 p_3\ldots p_{2r-1}}\cdot\frac{q_{2r+1}}{p_{2r+1}}\ (r=1,\ 2,\ 3,\ldots).$$

Jeżeli szereg: $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$ jest bezwarunkowo zbieżny, na-as każdy z szeregów: $a_1+a_3+\ldots+a_{2r+1}+\ldots$ i $a_2+a_4+\ldots+a_{2r}+\ldots$ jest e bezwarunkowo zbieżny.

A zatem: *Ułamek ciągły nieskończonościowy:* $\frac{p_1}{q_1}\dot{+}\frac{p_2}{q_2}\dot{+}\frac{p_3}{q_3}\dot{+}\ldots\dot{+}\frac{p_n}{q_n}\dot{+}\ldots$ *jest e rozbieżny i to niewłaściwie rozbieżny, jeżeli każdy z dwu szeregów:*

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} a_{2r}=\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{p_1 p_3\ldots p_{2r-1}}{p_2 p_4\ldots p_{2r}}\,q_{2r},$$

$$\text{i}\ \sum_{r=0}^{r=\infty} a_{2r+1}=\sum_{r=0}^{r=\infty}\frac{p_2 p_4\ldots p_{2r}}{p_1 p_3\ldots p_{2r-1}}\cdot\frac{q_{2r+1}}{p_{2r+1}},$$

bezwarunkowo zbieżny.

7. Zasadnicze typy nieskończonych ułamków ciągłych. Prawidło prze-ałcenia ułamków ciągłych nieskończonych, kształtu:

$$\frac{p_1}{q_1}\dot{+}\frac{p_2}{q_2}\dot{+}\frac{p_3}{q_3}\dot{+}\ldots\dot{+}\frac{p_n}{q_n}\dot{+}\ldots$$

łamki ciągłe nieskończone, kształtu:

$$\frac{h_1 p_1}{h_1 q_1}\dot{+}\frac{h_1 h_2 p_2}{h_2 q_2}\dot{+}\frac{h_2 h_3 p_3}{h_3 q_3}\dot{+}\ldots\dot{+}\frac{h_{n-1} h_n p_n}{h_n q_n}\dot{+}\ldots$$

e dowolne czynniki: $h_1,\ h_2,\ldots,\ h_n,\ldots$ są wszystkie różne od zera, dozwala adzać dane ułamki ciągłe nieskończone przez stosowny wybór czyn-$h_1,\ h_2,\ldots,\ h_n,\ldots$ do pewnych zasadniczych typów nieskończonych ułam-ciągłych. Jako takie typy zasadnicze, przyjmujemy takie ułamki , których wszystkie liczniki częściowe są równe rzeczywistym jedno-$+1$, lub -1, jak:

$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n} + \ldots$ typ zasadniczy dodatni.

$\frac{-1}{a_1} - \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} - \ldots - \frac{1}{a_n} - \ldots$ typ zasadniczy ujemny.

$\frac{-1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{(-1)^n}{a_n} + \ldots$ typ zasadniczy o znakach naprzemian ujemnych i dodatnich.

Przy ocenianiu zbieżności danego ułamka ciągłego nieskończonego okazuje się często korzystnem zamienić dany ułamek ciągły, na inny z nim równoważny, należący do jednego z typów zasadniczyczych.

8. Ułamki ciągłe nieskończone, złożone z samych wyrazów dodatnich. Niech będzie dany ułamek ciągły kształtu:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n} + \ldots \tag{14}$$

w którym mianowniki częściowe $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, są wszystkie dodatnie. Oznaczmy jego wartości przybliżone kolejno przez $W_1, W_2, \ldots, W_n, \ldots$, to zauważymy przedewszystkiem, że w takim ułamku ciągłym wartości przybliżone parzystego rzędu, tworzą szereg rosnący: $W_2 < W_4 < W_6 < \ldots < W_{2r}$, wartości przybliżone nieparzystego rzędu, tworzą zaś szereg malejący: $W_1 > W_3 > W_4 > \ldots > W_{2r+1}$, przyczem $W_{2r} < W_{2r+1}$.

Wobec tego zarówno wartości przybliżone parzystego rzędu W_{2r} $(r=1, 2, 3\ldots)$, jak niemniej wartości przybliżone nieparzystego rzędu W_{2r+1} $(r=1, 2, 3\ldots)$ będą, przy nieograniczenie rosnącem r, zdążały do pewnej granicy skończonej. Granice te, mogą być dla obu szeregów wartości przybliżonych, równe lub między sobą różne.

W pierwszym przypadku, wartości przybliżone ułamka ciągłego dążą do jednej granicy skończonej W, ułamek ciągły jest tedy zbieżny, a ta granica W jest jego wartością, w drugim przypadku, ułamek ciągły waha się między dwiema granicami skończonemi W i W' jest tedy oscylacyjnym. Ażeby ocenić, kiedy który z obu przypadków w danym ułamku ciągłym nastąpi, weźmy pod uwagę wzór:

$$\Delta = W_{2r+1} - W_{2r} = \frac{P_{2r+1}}{Q_{2r+1}} - \frac{P_{2r}}{Q_{2r}} = \frac{1}{Q_{2r}\, Q_{2r+1}},$$

a zauważymy, że dany ułamek jest wtedy, i tylko wtedy zbieżny, jeżeli:

$$\lim_{r=+\infty} . Q_{2r}\, Q_{2r+1} = +\infty. \tag{15}$$

Ponieważ jednak: $Q_1 = a_1, \ldots, Q_n = Q_{n-2} + a_n Q_{n-1}$, $(n \geq 2)$, więc $Q_n > Q_{n-2} > 0$, przeto widzimy, że zarówno mianowniki Q_{2r} wartości przybliżonych parzystego rzędu, jak mianowniki Q_{2r+1} wartości przybliżonych nieparzystego rzędu rosną wraz z rosnącem r. Warunek (15) spełni się zatem, gdy albo Q_{2r}, albo Q_{2r+1}, otrzymuje dla $r = +\infty$ wartości $+\infty$.

Dla ocenienia tego, otrzymujemy, na podstawie wzoru: $Q_n = Q_{n-2} + a_n Q_{n-1}$ ze względu na to, że $Q_{2r} > 1$, kolejno następujące nierówności:

$$Q_3 = Q_1 + a_3 Q_2 > a_1 + a_3,$$

$$Q_5 = Q_3 + a_5 Q_4 > a_1 + a_3 + a_5,$$

ogólnie:

$$Q_{2r+1} > a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2r+1}, \quad (r \geq 1).$$

Warunek 15) staje się zatem spełniony, czyli ułamek ciągły:

$$\frac{1}{a_1} \dot{+} \frac{1}{a_2} \dot{+} \frac{1}{a_3} \dot{+} \ldots \dot{+} \frac{1}{a_n} \dot{+} \ldots$$

jest zbieżny, gdy szereg: $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2r+1} + \ldots$ jest rozbieżny. W takim razie będzie jednak także zbieżnym ułamek ciągły:

$$a_1 + \frac{1}{a_2} \dot{+} \frac{1}{a_3} \dot{+} \ldots \dot{+} \frac{1}{a_n} \dot{+} \ldots$$

coby wymagało rozbieżności szeregu: $a_2 + a_4 + \ldots + a_{2r} + \ldots$

Ułamek ciągły nieskończony: $\frac{1}{a_1} \dot{+} \frac{1}{a_2} \dot{+} \frac{1}{a_3} \dot{+} \ldots \dot{+} \frac{1}{a_n} \dot{+} \ldots$ jest więc zbieżnym, jeżeli jeden z szeregów: $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2r+1} + \ldots$ lub $a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{2r} + \ldots$ jest rozbieżny, albo, co na jedno wychodzi, jeżeli szereg: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ jest rozbieżny, jeżeli zaś ten szereg jest zbieżny, wtedy dany ułamek ciągły jest, jak już wiemy z art. 6., niewłaściwie rozbieżny, a to oscylacyjnym między dwiema skończonemi granicami.

Mamy zatem twierdzenie:

Ułamek ciągły nieskończony: $\frac{1}{a_1} \dot{+} \frac{1}{a_2} \dot{+} \frac{1}{a_3} \dot{+} \ldots \dot{+} \frac{1}{a_n} \dot{+} \ldots$ *jest zbieżny, lub oscyluje między skończonemi granicami, zależnie od tego, czy szereg:* $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ *jest rozbieżnym, czy też zbieżnym, albo, co na jedno wychodzi, czy przynajmniej jeden z szeregów:* $a_1 + a_3 + \ldots + a_{2r+1} + \ldots$ *lub* $a_2 + a_4 + \ldots + a_{2r} + \ldots$ *jest rozbieżny, czy też żaden.*

9. Uwaga. W przypadku rozbieżności szeregu: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$, a więc zbieżności ułamka ciągłego nieskończonego: $\frac{1}{a_1} \dot{+} \frac{1}{a_2} \dot{+} \ldots \dot{+} \frac{1}{a_n} \dot{+} \ldots$ możemy ułamek ciągły przerwać na n-tym wyrazie $\frac{1}{a_n}$, a więc zastąpić dany ułamek ciągły nieskończony W przez ułamek ciągły skończony W_n, będzie bowiem wtedy błąd $W - W_n$, bezwzględnie wzięty:

$$|\delta| = |W - W_n| < |W_{n+1} - W_n|,$$

czyli:

$$|\delta| < \frac{1}{Q_n Q_{n+1}},$$

a że: $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{Q_n Q_{n+1}} = 0$, przeto możemy przy obliczaniu wartości danego ułamka ciągłego nieskończonego przy każdem przerwaniu jego ocenić dokładność rachunku.

10. Wracając do ogólnego ułamka ciągłego nieskończonego o dodatnich wyrazach, otrzymujemy następujące kryteryum zbieżności:

Ułamek ciągły nieskończony: $\frac{p_1}{q_1} \dot{+} \frac{p_2}{q_2} \dot{+} \ldots \dot{+} \frac{p_n}{q_n} \dot{+} \ldots$ *jest zbieżnym, lub oscyluje między pewnemi skończonemi granicami, zależnie od tego, czy przynajmniej jeden z szeregów:*

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{p_1 p_3 \cdots p_{2r-1}}{p_2 p_4 \cdots p_{2r}} \cdot q_{2r}, \quad \text{lub} \quad \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{p_2 p_4 \cdots p_{2r}}{p_1 p_3 \cdots p_{2r-1}} \cdot \frac{q_{2r+1}}{p_{2r+1}},$$

jest rozbieżny, czy też żaden.

11. Wystarczające, choć nie zawsze konieczne kryterya zbieżności ułamków ciągłych nieskończonych, złożonych z samych wyrazów dodatnich. Powyżej podane kryteryum zbieżności lub niewłaściwej rozbieżności ułamków ciągłych nieskończonych, złożonych z samych wyrazów dodatnich, okazuje się częstokroć niewygodnem. Zastępujemy je wtedy innemi kryteryami, które są wprawdzie wystarczające, ale nie zawsze konieczne.

1. Jeżeli szereg: $a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_na_{n+1} + ...$ jest rozbieżny, natenczas ułamek ciągły $\frac{1}{a_1} \dot{+} \frac{1}{a_2} \dot{+} ... \dot{+} \frac{1}{a_n} \dot{+}$ jest zbieżny.

Jeżeli bowiem szereg: $a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_n a_{n+1} + ...$ jest rozbieżny, natenczas taki szereg: $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ jest rozbieżny, a zatem ułamek ciągły nieskończony $\frac{1}{a_1} \dot{+} \frac{1}{a_2} \dot{+} ... \dot{+} \frac{1}{a_n} \dot{+} ...$ jest zbieżny.

2. Jeżeli szereg: $\frac{q_1q_2}{p_2} + \frac{q_2q_3}{p_3} + ... + \frac{q_n q_{n+1}}{p_{n+1}} + ...$ jest rozbieżny, natenczas szereg $\frac{p_1}{q_1} \dot{+} \frac{p_2}{q_2} \dot{+} \frac{p_3}{q_3} \dot{+} ... \dot{+} \frac{p_n}{q_n} \dot{+} ...$ jest zbieżny.

Jest bowiem wtedy: $a_n a_{n+1} = \frac{q_n q_{n+1}}{p_{n+1}}$, $(n = 1, 2, ...)$.

3. Jeżeli w danym ułamku ciągłym nieskończonym: $\frac{p_1}{q_1} \dot{+} \frac{p_2}{q_2} \dot{+} ... \dot{+} \frac{p_n}{q_n} \dot{+} ...$ od pewnego n począwszy jest $q_n > p_n$, a szereg: $q_1 + q_2 + ... + q_n + ..$ jest rozbieżny, natenczas dany ułamek ciągły nieskończony jest zbieżny.

Wtedy bowiem mamy: $\frac{q_n q_{n+1}}{p_{n+1}} \geqq q_n$ a więc z rozbieżności szeregu: $q_1 + q_2 + ... + q_n + ...$ wynika rozbieżność szeregu: $\frac{q_1q_2}{p_2} + \frac{q_2q_3}{p_3} + .. + \frac{q_n q_{n+1}}{p_{n+1}} + ...$, a tem samem według 2. zbieżność danego ułamka ciągłego nieskończonego.

4) Jeżeli szereg: $\sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_2a_3} + ... + \sqrt{a_na_{n+1}} + ...$ jest rozbieżny, natenczas ułamek ciągły nieskończony: $\frac{1}{a_1} \dot{+} \frac{1}{a_2} \dot{+} ... \dot{+} \frac{1}{a_n} \dot{+} ...$ jest zbieżny.

Jest bowiem $\sqrt{a_n a_{n+1}} \leqq \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$, a więc rozbieżność szeregu: $\sum_{n=1}^{n=\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ pociąga za sobą rozbieżność szeregu: $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2} = \frac{a_1}{2} + \sum_{n=2}^{n=\infty} a_n$ a tem samem zbieżność danego ułamka ciągłego.

12. Ułamki ciągłe zwyczajne. Jeżeli w ułamku ciągłym są wszystkie liczniki częściowe równe $+1$, a mianowniki liczbami szeregu naturalnego: 1, 2, 3, ..., natenczas nazywamy taki ułamek ciągły *zwyczajnym*; przedstawia się on w postaci:

$$q_0 + \frac{1}{q_1} \dot{+} \frac{1}{q_2} \dot{+} ... \dot{+} \frac{1}{q_n} \dot{+} ...$$

i ma wartości przybliżone, określone wzorem:

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1} q_n + P_{n-2}}{Q_{n-1} q_n + Q_{n-2}}.$$

13. Wartości przybliżone skończonych ułamków ciągłych zwyczajnych mają następujące własności:

1) Liczniki i mianowniki wartości przybliżonych $\frac{P_n}{Q_n}$ danego ułamka ciągłego zwyczajnego są liczbami szeregu naturalnego, rosnącemi wraz z wskazówką n.

Własność ta wynika z wzorów: $P_n = P_{n-2} + q_n P_{n-1}$, $Q_n = Q_{n-2} + q_n Q_{n-1}$.

2) Liczniki i mianowniki każdej wartości przybliżonej są liczbami względem siebie pierwszemi.

Własność ta wynika z wzoru: $P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = (-1)^{n-1}$.

3) **Każda** wartość przybliżona leży bliżej każdej następnej, jak którejkolwiek poprzedniej wartości przybliżonej:

Jest bowiem:

$$\left|\frac{P_{n+r}}{Q_{n+r}}-\frac{P_n}{Q_n}\right|<\left|\frac{P_{n+r}}{Q_{n+r}}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right|.$$

4) **Bezwzględna** wartość różnicy między n-tą a r-tą wartością przybliżoną, gdzie $n>r$, jest mniejszą, jak $1:Q_r^2$.

Jest bowiem:

$$\left|\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_r}{Q_r}\right|<\left|\frac{P_{r+1}}{Q_{r+1}}-\frac{P_r}{Q_r}\right|<\frac{1}{Q_r^2}.$$

5) **Mianownik** b każdego ułamka zwyczajnego $\frac{a}{b}$, leżącego między dwiema po sobie następującemi wartościami przybliżonemi: $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ i $\frac{P_n}{Q_n}$ jest większy, jak mianownik Q_n.

Jest bowiem:

$$0<\left|\frac{a}{b}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right|<\left|\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right|,$$

zatem:

$$0<\left|\frac{a}{b}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right|<\frac{1}{Q_{n-1}Q_n},$$

skąd, pomnożywszy tę nierówność obustronnie przez $b\,.\,Q_{n-1}$, otrzymujemy

$$0<|a\,Q_{n-1}-b\,P_{n-1}|<\frac{b}{Q_n},$$

więc:

$$\frac{b}{Q_n}>1,\quad \text{przeto}\quad b>Q_n.$$

6) **Ułamek** zwyczajny $\frac{a}{b}$, któryby leżał bliżej wartości $\frac{P_n}{Q_n}$, jak wartość przybliżona $\frac{P_r}{Q_r}$, musiałby mieć mianownik b większy, od mianownika Q_r.

Skoro bowiem:

$$\left|\frac{P_n}{Q_n}-\frac{a}{b}\right|<\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_r}{Q_r},$$

ułamek $\frac{a}{b}$ musi leżeć między wartościami $\frac{P_r}{Q_r}$ i $\frac{P_{r-1}}{Q_{r-1}}$, przeto musi być $b>Q_r$.

14. Ułamek ciągły nieskończony kształtu:

$$q_0+\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}+\ldots+\frac{1}{q_n}+\ldots$$

otrzymuje wartości przybliżone $\frac{P_n}{Q_n}$ o coraz większych mianownikach Q_n, które rosną wraz z n i stają się wraz z n nieskończenie wielkimi.

Taki ułamek ciągły nieskończony jest zawsze zbieżny, a jego wartość liczbowa leży między q_0 a $q_0+\frac{1}{q_1}$ jest więc zawsze dodatnią i mniejszą od 1, gdy $q_0=0$.

Wartość ta x leży tem bliżej wartości przybliżonej $\frac{P_n}{Q_n}$, czem większy jest wskaźnik n, przyczem jest zarazem:

$$\left| x - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{1}{Q_n^2}.$$

Wartość graniczna zwyczajnego ułamka ciągłego nieskończonego jest zawsze niewymierną.

Gdyby bowiem liczba x była liczbą wymierną równą $\frac{a}{b}$, natenczas musiałby ułamek $\frac{a}{b}$ leżeć między dwiema bezpośrednio po sobie następującemi wartościami przybliżonemi, mianownik b musiałby więc być większym od każdego mianownika Q_n, co jest niemożliwem, gdyż mianownik Q_n staje się wraz z wskazówką n nieskończenie wielkim.

15. Nawzajem, nietrudno dowieść, że każda wartość przybliżona $\frac{P_n}{Q_n}$ podaje wartość A nieskończonego ułamka ciągłego zwyczajnego dokładniej jak jakikolwiek ułamek zwyczajny sprowadzony do najprostszej postaci $\frac{a}{b}$, w której mianownik b nie jest większy od mianownika Q_n.

Otrzymujemy bowiem w tym przypadku nierówności:

$$\left| A - \frac{a}{b} \right| < \left| A - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \left| \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - A \right|,$$

które są tylko wówczas możliwe, gdy nietylko A lecz także $\frac{a}{b}$ leży między wartościami przybliżonemi $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ i $\frac{P_n}{Q_n}$, a więc gdy $b > Q_n$.

16. Twierdzenie. *Dwa zwyczajne ułamki ciągłe nieskończone są tylko wówczas równe, gdy są tożsamościowe.*

Dowód. Niech będą bowiem dane dwa ułamki ciągłe nieskończone, kształtu:

$$A = q_0 + \frac{1}{q_1} \dot{+} \frac{1}{q_2} \dot{+} \ldots \dot{+} \frac{1}{q_n} \dot{+} \ldots, \quad A' = q_0' + \frac{1}{q_1'} \dot{+} \frac{1}{q_2'} \dot{+} \frac{1}{q'_3} \dot{+} \ldots \dot{+} \frac{1}{q_n'} \dot{+} \ldots$$

o których przypuszczamy, że $A = A'$.

Położywszy $R_n = \frac{1}{q_n} \dot{+} \frac{1}{q_{n+1}} \dot{+} \ldots$, $R_n' = \frac{1}{q_n'} \dot{+} \frac{1}{q'_{n+1}} \dot{+} \ldots$, otrzymamy dla wszelkiego $n \geqq 1$ nierówności:

$$0 < R_n < 1, \quad 0 < R'_n < 1,$$

a że $A = A'$, przeto będzie $q_0 + R_1 = q'_0 + R'_1$, a więc:

$$|q_0 - q'_0| = |R_1 - R'_1| < 1.$$

Ponieważ q_0 i q'_0 są liczbami całkowitemi, przeto wynika stąd, że: $q_0 = q_0'$ a zarazem $R_1 = R_1'$.

Jeżeli zaś dla pewnego n mamy $R_n = R'_n$, a więc $q_n + R_{n+1} = q'_n + R'_{n+1}$ to będzie także, $\quad |q_n - q'_n| = |R_{n+1} - R'_{n+1}| < 1$,
a tem samem $q_n = q_n'$, $R_{n+1} = R'_{n+1}$, zatem musi być ogólnie $q_n = q'_n$ dla wszelkiego n, czyli oba ułamki ciągłe równe muszą być zarazem tożsamościowe.

17. Rozwijanie liczb wymiernych i liczb niewymiernych na ułamki ...e zwyczajne. Twierdzenie o zwyczajnych ułamkach ciągłych skończonych: *...lką liczbę ułamkową wymierną $\frac{a}{b}$ można zawsze i to tylko na jeden sposób ...ienić na skończony ułamek zwyczajny.*

Mianowicie, na podstawie relacyj: $a = q_0 b + r_1$, $b = q_1 r_1 + r_2$, $r_1 = q_2 r_2 + r_3, \ldots$ $r_{m-1} = q_m r_m + r_{m+1}$, gdzie $0 < r_{m+1} < r_m$, a liczby $q_0, q_2, \ldots, q_m, \ldots, r_1, r_2, \ldots$ $r_m, \ldots$ są liczbami szeregu naturalnego, otrzymujemy ostatecznie:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \ldots + \frac{1}{q_n}.$$

Twierdzenie analogiczne o zwyczajnych ułamkach ciągłych nieskończo...: *Wszelką liczbę niewymierną można zawsze i to tylko na jeden sposób za...ić na zwyczajny ułamek ciągły nieskończony.*

Niech będzie bowiem A jakąkolwiek daną liczbą niewymierną a q_0 ...iększą liczbą całkowitą w A zawartą. Połóżmy tedy: $A = q_0 + a_1$, to ...ie $a_1 < 1$, zatem $\frac{1}{a_1} > 1$.

Połóżmy $\frac{1}{a_1} = q_1 + a_2$, $\frac{1}{a_2} = q_2 + a_3, \ldots$, $\frac{1}{a_n} = q_n + a_{n+1}$, to ilość tych związków ...t nieograniczona, bo każda z liczb a_n jest znowu liczbą niewymierną.

Otrzymujemy tedy:

$$A = q_0 + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \ldots + \frac{1}{q_n + a_{n+1}} = \frac{P_n + P_{n-1} a_{n+1}}{Q_n + Q_{n-1} a_{n+1}},$$

...tem:

$$A - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{(-1)^n a_{n+1}}{Q_n (Q_n + a_{n+1} Q_{n-1})}, \tag{16}$$

...c:

$$\left| A - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{1}{Q_n^2},$$

...li:

$$A = \lim_{n=\infty} \frac{P_n}{Q_n}.$$

18. Przykład. Rozwinąć ludolfinę $\pi = 3{\cdot}1415926\ldots$ na zwyczajny ułamek ciągły.

Połóżmy $\pi = 3{\cdot}1415926 + \frac{\alpha}{10^7}$, gdzie $0 < \alpha < 1$ i rozwińmy iloraz $\frac{1415926 + \alpha}{10^7}$ na uła...k ciągły a otrzymamy:

$r_1 = 1415926 + \alpha$ $\qquad q_0 = 3$

$\frac{10^7}{r_1} = 7 + \frac{88518 - 7\alpha}{r_1}$, $\qquad q_1 = 7$

$r_2 = 88518 - 7\alpha$

$\frac{r_1}{r_2} = 15 + \frac{88156 - 106\alpha}{r_2}$, $\qquad q_2 = 15$

$r_3 = 88156 - 106\alpha$

$\frac{r_2}{r_3} = 1 + \frac{362 - 113\alpha}{r_3}$, $\qquad q_3 = 1$

$r_4 = 362 - 113\alpha$

$\frac{r_3}{r_4} = 292 + r_5$, $\qquad q_4 = 292$,

...m:

$$\pi = 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{1} + \frac{1}{292} + \ldots$$

Przy zamianie danej liczby niewymiernej na ułamek ciągły korzystnie jest po...szyć ostatnią daną cyfrę o 1 i rozwijać równocześnie oba ułamki, jak w tym przy...u, ułamki: $3{\cdot}1415926$ i $3{\cdot}1415927$, przerywając rachunek w tym miejscu, gdzie w wy...ach obu ułamków ciągłych okazuje się już różnica.

19. Ułamki ciągłe nieskończone, których wyrazy, począwszy od drugiego są ujemne. Jeżeli wyrazy danego ułamka ciągłego nie są wszystkie dodatnie, wówczas niepodobna z góry orzec o jego zbieżności bez osobnego rozważania, zastosowanego do każdego poszczególnego przypadku. Najbardziej interesującym jest rodzaj takich ułamków ciągłych, których wyrazy począwszy od drugiego, są wszystkie ujemne.

Niech będzie

$$x = \frac{p_1}{q_1} \dot{-} \frac{p_2}{q_2} \dot{-} \frac{p_3}{q_3} \dot{-} \ldots$$

tedy otrzymamy w myśl wywodów Tomu I. art. 18. str. 405. wartość n-tego reduktu:

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{p_1}{Q_1} + \frac{p_1 p_2}{Q_1 Q_2} + \frac{p_1 p_2 p_3}{Q_2 Q_3} + \ldots + \frac{p_1 p_2 \ldots p_n}{Q_{n-1} Q_n}. \tag{17}$$

Wartość ta złożona jest z samych liczb dodatnich, nie może być przeto nieoznaczoną.

Przyjmijmy do tego, że dla wszelkiego n będzie $q_n > p_n$, tedy będzie: $\frac{P_n}{Q_n} < 1$, a więc także: $x = \lim \frac{P_n}{Q_n} < 1$, to znaczy: Dany ułamek ciągły jest zbieżny. Mamy zatem udowodnione twierdzenie:

„*Ułamek ciągły nieskończony*: $\frac{p_1}{q_1} \dot{-} \frac{p_2}{q_2} \dot{-} \frac{p_3}{q_3}, \ldots$ *jest zbieżny jeżeli*: $q_n > p_n$.

W tym wypadku są redukty wszystkie mniejsze od wartości całego ułamka ciągłego, tworząc zarazem szereg liczb rosnących, zbliżających się coraz bardziej do wartości całego ułamka ciągłego.

Wartość ułamka ciągłego nie może być w tym razie liczbą wymierną, gdyż gdyby liczba $x = \frac{p_1}{q_1} \dot{-} \frac{p_2}{q_2} \dot{-} \frac{p_3}{q_3} \dot{-} \ldots > \frac{p_1}{q_1}$ była liczbą wymierną $\frac{P}{Q}$, tedy musiałyby liczby P i Q być liczbami całkowitymi skończonymi, przyczem byłoby $Q > P$, a przeto w różnicy:

$$\frac{P}{Q} - \frac{p_1}{q_1} = \frac{Pq_1 - Qp_1}{Qq_1} = \frac{N}{Q_1 q_1},$$

musiałaby liczba $N = Pq_1 - Qp_1$ być liczbą całkowitą, przyczem byłoby znowu

$$\frac{N}{P} = q_1 - \frac{Q}{P} p_1 = \frac{p_2}{q_2} \dot{-} \frac{p_3}{q_3} \dot{-} \frac{p_4}{q_4} \dot{-} \ldots > \frac{p_2}{q_2},$$

gdzie $P > N$. Postępując tak dalej, musielibyśmy otrzymać szereg nieskończony liczb całkowitych i dodatnich, oraz malejących: $Q > P > N \ldots$ co jest niemożebnem, gdy P i Q są liczby skończone. Wartość ułamka ciągłego nie może być zatem liczbą wymierną. Wyjątek stanowi jednakże przypadek, gdy dla wielkiego n będzie $q_n = p_n + 1$ wtedy otrzymamy bowiem według Tomu I. art. 20. str. 406:

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{p_1 + p_1 p_2 + p_1 p_2 p_3 + \ldots + p_1 p_2 \ldots p_n}{1 + p_1 + p_1 p_2 + p_1 p_2 p_3 + \ldots + p_1 p_2 \ldots p_n}, \tag{18}$$

przeto:

$$\frac{P}{Q} = \lim_{n=\infty} \frac{P_n}{Q_n} = 1.$$

Przykłady. 1) Ułamek ciągły: $\frac{1}{2} \dot{-} \frac{1}{3} \dot{-} \frac{1}{4} \dot{-} \frac{1}{5} \dot{-}, \ldots$, jest zbieżny i ma za wartość liczbę niewymierną, mniejszą od 1.

2) Ułamki ciągłe:

$$\frac{1}{2} \dot{-} \frac{2}{3} \dot{-} \frac{3}{4}, \ldots; \quad \frac{1}{2} \dot{-} \frac{3}{4} \dot{-} \frac{5}{6} \dot{-} \ldots; \quad \frac{2}{3} \dot{-} \frac{4}{5} \dot{-} \frac{6}{7}, \ldots$$

są zbieżne i mają wszystkie wartości $= 1$.

20. Ułamki ciągłe peryodyczne. Jeżeli ułamek ciągły ma tę własność, od pewnego wyrazu począwszy pewna grupa wyrazów, stale się powtarza, wtenczas nazywamy tę grupę stale się powtarzającą peryodem, a dany ułamek ciągły ułamkiem peryodycznym.

Ułamek peryodyczny, w którym peryod zaczyna się zaraz od pierwszego wyrazu, nazywamy ułamkiem ciągłym czysto peryodycznym. Ułamek taki, mający peryod złożony z m wyrazów, przedstawia się ogólnie w postaci:

$$\frac{p_1}{q_1} \dot{+} \frac{p_2}{q_2} \dot{+} \ldots \dot{+} \frac{p_m}{q_m} \dot{+} \frac{p_1}{q_1} \dot{+} \ldots,$$

gdzie zarówno częściowe liczniki, jak mianowniki mogą być zupełnie dowolnemi liczbami rzeczywistemi lub zespolonemi.

Dla takiego ułamka ciągłego otrzymujemy $(m+n)$-tą wartość przybliżoną w postaci:

$$\frac{P_{m+n}}{Q_{m+n}} = \frac{p_1}{q_1} \dot{+} \ldots \dot{+} \frac{p_m}{q_m + \frac{P_n}{Q_n}},$$

stąd:

$$\frac{P_{m+n}}{Q_{m+n}} = \frac{P_{m-1}\frac{P_n}{Q_n} + P_m}{Q_{m-1}\frac{P_n}{Q_n} + Q_m} \tag{19}$$

Jeżeli dany ułamek ciągły peryodyczny jest zbieżny i ma wartość x, wtenczas będzie:

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_{m+n}}{Q_{m+n}} = \lim_{n=\infty} \frac{P_n}{Q_n} = x,$$

zatem otrzymujemy z wzoru (19) wzór graniczny:

$$x = \frac{P_{m-1}\,x + P_m}{Q_{m-1}\,x + Q_m}, \tag{20}$$

stąd na wyznaczenie wartości x równanie drugiego stopnia w postaci:

$$Q_{m-1}\,x^2 + (Q_m - P_{m-1})\,x - P_m = 0, \tag{21}$$

które nazywamy równaniem kwadratowem, przynależnem danemu ułamkowi ciągłemu peryodycznemu.

21. Otrzymane równanie kwadratowe (21) ma dwa pierwiastki. Aby ocenić, czy dany ułamek ciągły peryodyczny jest zbieżny i który z dwu pierwiastków równania kwadratowego przedstawia wartość danego ułamka ciągłego peryodycznego, weźmy pod uwagę wyróżnik tego równania, który otrzymuje tu kształt:

$$D = (P_{m-1} - Q_m)^2 + 4P_m Q_{m-1} = (Q_m + P_{m-1})^2 + 4(P_m Q_{m-1} - Q_m P_{m-1}),$$

czyli:

$$D = S^2 + 4P,$$

gdzie $S = Q_m + P_{m-1}$, $P = P_m Q_{m-1} - Q_m P_{m-1}$.

Jeżeli wyróżnik $D=0$, natenczas otrzymane równanie kwadratowe ma jeden pierwiastek podwójny w postaci:

$$x = \frac{P_{m-1} - Q_m}{2\,Q_{m-1}}.$$

$$U = \frac{h_1 p_1}{h_1 q_1} \dot{+} \frac{h_1 h_2 p_2}{h_2 q_2} \dot{+} \frac{h_2 h_3 p_3}{h_3 q_3} \dot{+} \ldots \dot{+} \frac{h_{n-1} h_n p_n}{h_n q_n} \dot{+} \ldots \qquad (9)$$

Wobec dowolności czynników h możemy je zawsze tak obrać, aby wszystkie liczniki częściowe były równe 1, a więc możemy dany ułamek ciągły nieskończony przekształcić na równoważny ułamek ciągły nieskończony, kształtu:

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{a_1} \dot{+} \frac{1}{a_2} \dot{+} \frac{1}{a_3} \dot{+} \ldots \dot{+} \frac{1}{a_n} \dot{+} \ldots$$

gdzie $a_r = h_r q_r$, przyczem:

$$h_{2r-1} = \frac{p_2 p_4 \ldots p_{2r-2}}{p_1 p_3 \ldots p_{2r-1}}, \quad h_{2r} = \frac{p_1 p_3 \ldots p_{2r-1}}{p_2 p_4 \ldots p_{2r}}.$$

6. Badanie zbieżności lub rozbieżności danego ułamka ciągłego za pomocą badania zbieżności lub rozbieżności równoważnego szeregu nieskończonego. Weźmy pod uwagę ułamek ciągły nieskończony, którego wszystkie liczniki częściowe są równe 1, a więc ułamek ciągły nieskończony kształtu:

$$U = \frac{1}{a_1} \dot{+} \frac{1}{a_2} \dot{+} \frac{1}{a_3} \dot{+} \ldots \dot{+} \frac{1}{a_n} \dot{+} \ldots \qquad (10)$$

Równoważny z nim szereg nieskończony przedstawia się według wzoru 6) w postaci:

$$U = \frac{1}{Q_1} - \frac{1}{Q_1 Q_2} + \frac{1}{Q_2 Q_3} - \frac{1}{Q_3 Q_4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1} Q_n} + \ldots \qquad (11)$$

gdzie $Q_1 = a_1$, $Q_2 = a_1 a_2 + 1$, a ogólnie $Q_n = Q_{n-1} a_n + Q_{n-2}$.

Zbieżność lub rozbieżność tego szeregu zależy od zbieżności lub rozbieżności szeregu:

$$S = \frac{1}{|Q_1|} + \frac{1}{|Q_1 Q_2|} + \frac{1}{|Q_2 Q_3|} + \ldots + \frac{1}{|Q_{n-1} Q_n|} + \ldots \qquad (12)$$

Jeżeli od pewnego n począwszy, wszystkie mianowniki Q_n są różne od zera, wówczas, jak łatwo dowieść, otrzymujemy:

$$|Q_n| \leqq (1 + |a_1|) \cdot (1 + |a_2|) \ldots (1 + |a_n|) \ldots$$

Dla nieskończenie wielkiego n będzie iloczyn nieskończony:

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + |a_n|) = (1 + |a_1|)(1 + |a_2|) \ldots (1 + |a_n|) \ldots,$$

zbieżny, skoro szereg:

$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$ jest zbieżny, a tem samem szereg: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ bezwarunkowo zbieżny.

Pod tem założeniem będzie szereg (12) rozbieżny, a tem samem będzie równoważny ułamek ciągły także rozbieżny.

A zatem: *Ułamek ciągły nieskończony:* $\frac{1}{a_1} \dot{+} \frac{1}{a_2} \dot{+} \frac{1}{a_3} \dot{+} \ldots \dot{+} \frac{1}{a_n} \dot{+} \ldots$ *jest zawsze rozbieżny, skoro szereg:* $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ *jest bezwarunkowo zbieżny.*

Rozbieżność ta nie jest właściwą, gdyby bowiem rozbieżność danego ułamka ciągłego przy bezwarunkowej zbieżności szeregu: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ była właściwą byłoby tedy: $\lim_{n=\infty} \frac{P_n}{Q_n} = \infty$, a tem samem:

$$\lim_{n=\infty}\left(1:\frac{P_n}{Q_n}\right)=0,$$

musiałby więc ułamek ciągły: $\frac{1}{1}\dot{+}\frac{1}{a_1}\dot{+}\frac{1}{a_2}\dot{+}\frac{1}{a_3}\dot{+}\ldots\dot{+}\frac{1}{a_n}\dot{+}\ldots$ zdążać do zera, co jest niemożliwe, gdyż wobec bezwarunkowej zbieżności szeregu kształtu: $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$ jest także szereg: $1+a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$ bezwarunkowo zbieżny.

Twierdzenie powyższe możemy uogólnić.

Ze względu bowiem na to, że wszelki ułamek ciągły, kształtu:

$$\frac{p_1}{q_1}\dot{+}\frac{p_2}{q_2}\dot{+}\frac{p_3}{q_3}\dot{+}\ldots\dot{+}\frac{p_n}{q_n}\dot{+}\ldots,$$

da się sprowadzić do postaci zasadniczej: $\frac{1}{a_1}\dot{+}\frac{1}{a_2}\dot{+}\frac{1}{a_3}\dot{+}\ldots\dot{+}\frac{1}{a_n}\dot{+}\ldots$ na podstawie przekształcenia:

$$\frac{h_1 p_1}{h_1 q_1}\dot{+}\frac{h_1 h_2 p_2}{h_2 q_2}\dot{+}\frac{h_2 h_3 p_3}{h_3 q_3}\dot{+}\ldots\dot{+}\frac{h_{n-1} h_n p_n}{h_n q_n}\dot{+}\ldots$$

gdzie:

$$h_1=\frac{1}{p_1},\ldots,\ h_{2r}=\frac{p_1p_3\ldots p_{2r-1}}{p_2p_4\ldots p_{2r}},\ h_{2r+1}=\frac{p_2p_4\ldots p_{2r}}{p_1p_3\ldots p_{2r+1}},\ (r=1,\ 2,\ 3,\ldots),\qquad(13)$$

otrzymujemy:

$$a_1=\frac{q_1}{p_1},\ldots,\ a_{2r}=\frac{p_1p_3\ldots p_{2r-1}}{p_2p_4\ldots p_{2r}}\,q_{2r},\ a_{2r+1}=\frac{p_2p_4\ldots p_{2r}}{p_1p_3\ldots p_{2r-1}}\cdot\frac{q_{2r+1}}{p_{2r+1}}\ (r=1,\ 2,\ 3,\ldots).$$

Jeżeli szereg: $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$ jest bezwarunkowo zbieżny, natenczas każdy z szeregów: $a_1+a_3+\ldots+a_{2r+1}+\ldots$ i $a_2+a_4+\ldots+a_{2r}+\ldots$ jest także bezwarunkowo zbieżny.

A zatem: *Ułamek ciągły nieskończonościowy:* $\frac{p_1}{q_1}\dot{+}\frac{p_2}{q_2}\dot{+}\frac{p_3}{q_3}\dot{+}\ldots\dot{+}\frac{p_n}{q_n}\dot{+}\ldots$ *jest zawsze rozbieżny i to niewłaściwie rozbieżny, jeżeli każdy z dwu szeregów:*

$$\sum_{r=1}^{r=\infty}a_{2r}=\sum_{r=1}^{r=0}\frac{p_1p_3\ldots p_{2r-1}}{p_2p_4\ldots p_{2r}}\,q_{2r},$$

$$\text{i}\quad\sum_{r=0}^{r=\infty}a_{2r+1}=\sum_{r=0}^{r=\infty}\frac{p_2p_4\ldots p_{2r}}{p_1p_3\ldots p_{2r-1}}\cdot\frac{q_{2r+1}}{p_{2r+1}},$$

jest bezwarunkowo zbieżny.

7. **Zasadnicze typy nieskończonych ułamków ciągłych.** Prawidło przekształcenia ułamków ciągłych nieskończonych, kształtu:

$$\frac{p_1}{q_1}\dot{+}\frac{p_2}{q_2}\dot{+}\frac{p_3}{q_3}\dot{+}\ldots\dot{+}\frac{p_n}{q_n}\dot{+}\ldots$$

na ułamki ciągłe nieskończone, kształtu:

$$\frac{h_1p_1}{h_1q_1}\dot{+}\frac{h_1h_2p_2}{h_2q_2}\dot{+}\frac{h_2h_3p_3}{h_3q_3}\dot{+}\ldots\dot{+}\frac{h_{n-1}h_np_n}{h_nq_n}\dot{+}\ldots$$

gdzie dowolne czynniki: $h_1,\ h_2,\ldots,\ h_n,\ldots$ są wszystkie różne od zera, dozwala sprowadzać dane ułamki ciągłe nieskończone przez stosowny wybór czynników $h_1,\ h_2,\ldots,\ h_n,\ldots$ do pewnych zasadniczych typów nieskończonych ułamków ciągłych. Jako takie typy zasadnicze, przyjmujemy takie ułamki ciągłe, których wszystkie liczniki częściowe są równe rzeczywistym jednostkom $+1$, lub -1, jak:

24. Przykłady ułamków ciągłych peryodycznych.

1) Niech będzie dany ułamek ciągły peryodyczny, kształtu: $\frac{p}{q} \dot{+} \frac{p}{q} \dot{+} \frac{p}{q} \dot{+} \ldots$ gdzie p i q są różne od zera, tedy ułamkowi temu odpowiada równanie drugiego stopnia w postaci: $x^2 + qx = p$.

Mamy tedy $S = q$, $D = q^2 + 4p$.

Jeżeli $D < 0$, to równanie $x^2 + qx = p$ ma pierwiastki sprzężone, a ułamek ciągły jest wtedy rozbieżny. Gdy $D = 0$, równanie posiada pierwiastek podwójny $x = -\frac{q}{2}$, który jest zarazem wartością ułamka ciągłego.

Jeżeli $D > 0$, tedy mamy w przypadku $q \gtrless 0$ nierówność: $|S - \sqrt{D}| \lessgtr |S + \sqrt{D}|$. ułamek ciągły jest wtedy zbieżny a jego wartością jest:

$$\frac{-q + \sqrt{q^2 + 4p}}{2}, \quad \text{lub} \quad \frac{-q - \sqrt{q^2 + 4p}}{2},$$

stosownie do tego, czy mianownik q jest dodatni, czy ujemny. Wartość ułamka ciągłego jest w tym przypadku zawsze równa bezwzględnie mniejszemu pierwiastkowi równania.

Na szczególną uwagę zasługuje najprostszy z ułamków peryodycznych tego typu w postaci: $\frac{1}{1} \dot{+} \frac{1}{1} \dot{+} \frac{1}{1} \dot{+} \ldots$

Mamy tu $P_0 = 0$, $Q_0 = P_1 = 1$, ogólnie $Q_n = P_{n+1}$, a przynależne równanie kwadratowe w postaci: $x^2 + x = 1$.

Wartością graniczną tego ułamka jest dodatni pierwiastek równania:

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Między licznikami poszczególnych wartości przybliżonych, zachodzi tu relacya:

$$P_n = P_{n-1} + P_{n-2},$$

otrzymujemy zatem, ze względu, że: $P_0 = 0$, $P_1 = 1$, wartości następne: $P_2 = 1$, $P_3 = 2$, $P_4 = 3$, $P_5 = 5$, $P_6 = 8$, $P_7 = 13$, $P_8 = 21$, $P_9 = 34$, $P_{10} = 55, \ldots$ zwane liczbami Lame'go.

2) Ułamek peryodyczny dwuwyrazowy kształtu: $\frac{p}{1} \dot{+} \frac{r}{q} \dot{+} \frac{p}{1} \dot{+} \frac{r}{q} \dot{+} \ldots$ otrzymuje ze względu na to, że: $P_1 = p$, $Q_1 = 1$, $P_2 = pq$, $Q_2 = q + r$ równanie przynależne kształtu:

$$x^2 + (q + r - p)x = pq.$$

Mamy tu $S = p + q + r$. Jeżeli $S = 0$, a więc $r = -(p + q)$, tedy ułamek ciągły otrzymuje postać:

$$\frac{p}{1} \dot{-} \frac{p+q}{q} \dot{+} \frac{p}{1} \dot{-} \frac{p+q}{q} \dot{+} \ldots$$

a przynależne równanie: $\quad x^2 - 2px = pq$,

ma pierwiastki $p + \sqrt{p^2 + pq}$ i $p - \sqrt{p^2 + pq}$ rzeczywiste i różne, skoro: $p^2 + pq > 0$. ułamek jest wtedy rozbieżny.

Jeżeli $S \gtrless 0$, to ułamek jest zbieżny, jak długo przynależne równanie:

$$x^2 + (q + r - p)x = pq,$$

ma pierwiastki rzeczywiste.

3) Ułamek peryodyczny m-wyrazowy kształtu: $x = \frac{p_1}{q_1} \dot{+} \frac{p_2}{q_2} \dot{+} \ldots \dot{+} \frac{p_m}{q_m} \dot{+} \frac{p_1}{q_1} \dot{+} \ldots$ w którym liczniki $p_1, p_2, \ldots p_m$ i mianowniki $q_1, q_2, \ldots, q_m$ są wszystkie dodatnie, jest zbieżny Jego wartość graniczna jest dodatnia, określona dodatnim pierwiastkiem przynależnego równania kwadratowego, postaci:

$$x = \frac{P_{m-1} - Q_m + \sqrt{(P_{m-1} - Q_m)^2 + 4 P_m Q_{m-1}}}{2 Q_{m-1}}$$

gdzie: $\quad (P_{m-1} - Q_m)^2 + 4 P_m Q_{m-1} > (P_{m-1} - Q_m)^2$,

a więc:

$$\sqrt{(P_{m-1} - Q_m)^2 + P_m Q_{m-1}} > |P_{m-1} - Q_m|.$$

Ćwiczenia XXXIV.

Wyznaczyć n-ty redukt następujących ułamków ciągłych:

1) $\frac{1}{q} \dotplus \frac{1}{q} \dotplus \frac{1}{q} \dotplus \ldots \dotplus \frac{1}{q} \dotplus \ldots$ 2) $\frac{1}{p} \dotplus \frac{1}{q} \dotplus \frac{1}{p} \dotplus \frac{1}{q} \dotplus \ldots$

3) $\frac{p}{q} \dotplus \frac{p}{q} \dotplus \frac{p}{q} \dotplus \ldots \dotplus \frac{p}{q} \dotplus \ldots$ 4) $\frac{p}{q} \dotplus \frac{p-p_1}{q-q_1} \dotplus \frac{p-p_2}{q-q_2} \dotplus \frac{p-p_3}{q-q_3} \dotplus \ldots$

5) Wyznaczyć warunki, pod jakimi dwa ułamki ciągłe o zmiennej x, kształtu:

$$\frac{1}{x+a_0} \dot{-} \frac{b_0}{x+a_1} \dot{-} \frac{b_1}{x+a_2} \dot{-} \ldots \dot{-} \frac{b_{n-1}}{x+a_n}$$

$$\frac{1:x}{1} \dotplus \frac{p_1:x}{1} \dotplus \frac{p_2:x}{1} \dotplus \ldots \dotplus \frac{p_{2n}:x}{1+p_{2n+1}}$$

ą tożsamościowe.

6) Wykazać, że licznik i mianownik ułamka ciągłego: $\frac{p_1}{q_1} \dotplus \frac{p_2}{q_2} \dotplus \ldots \dotplus \frac{p_m}{q_m}$ są odpowie- równe mianownikom ułamków ciągłych:

$$\frac{1}{q_m} \dotplus \frac{p_m}{q_{m-1}} \dotplus \ldots \dotplus \frac{p_3}{q_2} \text{ i } \frac{1}{q_m} \dotplus \frac{p_m}{q_{m-1}} \dotplus \ldots \dotplus \frac{p_2}{q_1}.$$

7) Wykazać, że wartość ułamka ciągłego leży zawsze między dwoma po sobie na- pującymi reduktami a bliżej następnego.

8) Wykazać, że n-ty redukt $\frac{P_n}{Q_n}$ ułamka ciągłego jest bliższy wartości ułamka ciągłego jakikolwiek ułamek $\frac{P}{Q}$, którego mianownik byłby mniejszy, niż Q_n.

9) Między jakiemi granicami leży błąd, jeżeli zamiast ułamka ciągłego:

$$\frac{p_1}{q_1} \dotplus \frac{p_2}{q_2} \dotplus \ldots \dotplus \frac{p_n}{q_n},$$

ómiemy jego $(n-m)$-ty redukt.

10) Wykazać, że ułamek ciągły nieskończony: $\frac{1}{a_1} \dotplus \frac{1}{a_2} \dotplus \frac{1}{a_3} \dotplus \ldots \dotplus \frac{1}{a_n} \dotplus \ldots$ jest za- ze rozbieżny, skoro szereg: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ jest bezwarunkowo zbieżny.

11) Wykazać, że ułamek ciągły nieskończony: $\frac{p_1}{q_1} \dotplus \frac{p_2}{q_2} \dotplus \ldots \dotplus \frac{p_n}{q_n} \dotplus \ldots$ jest niewłaści- e rozbieżny, jeżeli oba szeregi:

$$\frac{p_1}{p_2} q_1 + \frac{p_1 p_3}{p_2 p_4} q_3 + \ldots + \frac{p_1 p_3 \cdots p_{2r-1}}{p_2 p_4 \cdots p_{2r}} q_{2r} + \ldots$$

$$\frac{q_1}{p_1} + \frac{q_2}{p_1} \cdot \frac{q_3}{p_3} + \ldots + \frac{p_2 p_4 \cdots p_{2r}}{p_1 p_3 \cdots p_{2r-1}} \cdot \frac{q_{2r+1}}{p_{2r+1}} + \ldots$$

bezwarunkowo zbieżne.

12) Wykazać, że ułamek ciągły $\frac{1}{a_1} \dotplus \frac{1}{a_2} \dotplus \frac{1}{a_3} \dotplus \ldots \dotplus \frac{1}{a_n} \dotplus \ldots$ jest zbieżnym, jeżeli reg: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ jest rozbieżny.

Zbadać zbieżność następujących ułamków ciągłych nieskończonych:

13) $\frac{3^2}{1} \dotplus \frac{4^2}{2} \dotplus \frac{5^2}{3} \dotplus \frac{6^2}{4} \dotplus \ldots \dotplus \frac{(n-2)^2}{n} \dotplus \ldots$

14) $\frac{1.2}{2} \dotplus \frac{2.3}{2^2} \dotplus \frac{3.4}{2^3} \dotplus \frac{4.5}{2^4} \dotplus \ldots \dotplus \frac{n.(n+1)}{2^n} \dotplus \ldots$

15) $\frac{1}{2} \dotplus \frac{1.2^2}{3^2} \dotplus \frac{2^2.3^3}{4^3} \dotplus \ldots \dotplus \frac{(n-2)^{n-1}.n^n}{(n+1)^n} \dotplus \ldots$

16) $\frac{x+1}{x-1} \dotplus \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{1/2} \dotplus \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2/3} \dotplus \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{3/4} \dotplus \ldots \dotplus \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{n-1}{n}} \dotplus \ldots$

17) $\frac{\frac{1}{1.2}}{\sin\frac{\pi}{2}} + \frac{\frac{1}{2.3}}{\sin\frac{\pi}{3}} + \frac{\frac{1}{3.4}}{\sin\frac{\pi}{4}} + \dots + \frac{\frac{1}{(n-1)n}}{\sin\frac{\pi}{n}} + \dots$

18) $1 + \frac{2}{1} + \frac{2^2}{1} + \frac{2^3}{1} + \dots + \frac{2^n}{1} + \dots$ 19) $\frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{3}{1} + \dots + \frac{n}{1} + \dots$

20) $\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3} + \frac{a^4}{x^4} + \dots + \frac{a^n}{x^n} + \dots$ 21) $\frac{1^\alpha}{x^2} + \frac{2^\alpha}{x^2} + \frac{3^\alpha}{x^2} + \dots + \frac{n^\alpha}{x^2} + \dots$

22) $\frac{1^\alpha a^2}{x^2} + \frac{2^\alpha (a^2+1)}{x^2} + \frac{3^\alpha (a^2+2)}{x^2} + \dots + \frac{n^\alpha (a^2+n-1)}{x^2} + \dots$

23) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{(-1)^n}{n} + \dots$

24) $\frac{\sin 1}{1} - \frac{\sin\frac{1}{2}}{2} + \frac{\sin\frac{1}{3}}{3} - \frac{\sin\frac{1}{4}}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}\sin\frac{1}{n}}{n} + \dots$

Wyprowadzić następujące rozwinięcia:

25) $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$ 26) $\sqrt{11} = 3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \dots$

27) $\sqrt{18} = 4 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ 28) $\frac{3+\sqrt{5}}{4} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots$

Wykazać, że:

29) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \dots = \frac{3+\sqrt{37}}{7}.$

30) $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \frac{\sqrt{37}-4}{3}.$

31) Dowieść, że: $\sqrt{a^2+1} = a + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} + \dots$

32) Wykazać, że n-tą wartość przybliżoną powyższego ułamka peryodycznego można sprowadzić do postaci:

$$\frac{P_n}{Q_n} = \sqrt{a^2+1} \cdot \frac{(a+\sqrt{a^2+1})^n + (a-\sqrt{a^2+1})^n}{(a+\sqrt{a^2+1})^n - (a-\sqrt{a^2+1})^n}.$$

33) Wykazać, że ułamek ciągły peryodyczny, złożony z n wyrazów kształtu: $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \dots + \frac{1}{q_n} + \frac{1}{q_1} + \dots$ można zamienić na ułamek peryodyczny jednowyrazowy w postaci:

$$\frac{1}{Q_{n-1}}\left\{P_{n-1} + \left[\frac{(-1)^{n-1}}{Q_n + Q_{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{Q_n + Q_{n-1}} + \dots\right]\right\}.$$

34) Wykazać, że licznik n-tej wartości przybliżonej ułamka ciągłego peryodycznego: $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots$ sprowadza się do postaci:

$$P_n = \left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} : \sqrt{5}$$

podającej t. z. n-tą liczbę Lame'go.

35) Wykazać, że n-ta liczba Lame'go P_n (ćw. 34.) podaje ilość wyrazów w liczniku n-tej wartości przybliżonej ułamka ciągłego: $\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} + \frac{p_3}{q_3} + \dots + \frac{p_n}{q_n} + \dots$

Wyznaczyć wartości następujących ułamków ciągłych:

36) $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \dots\right\}$. 37) $\frac{7}{5} + \frac{1}{5}\left\{\frac{1}{14} + \frac{1}{14} + \dots\right\}$.

38) $\frac{15}{8} - \frac{1}{8}\left\{\frac{1}{62} + \frac{1}{62} + \dots\right\}$. 39) $\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \dots\right\}$.

40) $4+\frac{1}{4}\dot{+}\frac{1}{4}\dot{+}\dots$ 41) $2+\frac{1}{19}\left\{12+\left[\frac{27}{100}\dot{+}\frac{27}{100}\dot{+}\dots\right]\right.$.

42) $3+\frac{2}{11}\left\{6+\left[\frac{8}{45}\dot{+}\frac{8}{45}\dot{+}\frac{8}{45}\dot{+}\dots\right]\right\}$. 43) $a+\frac{1}{1}\dot{+}\frac{1}{b}\dot{+}\frac{1}{a}\dot{+}\frac{1}{1}\dot{+}\frac{1}{b}\dot{+}\frac{1}{a}\dot{+}\dots$

44) **Dowieść**, że:

$$\frac{a+\frac{1}{1}\dot{+}\frac{1}{b}\dot{+}\frac{1}{a}\dot{+}\frac{1}{1}\dot{+}\frac{1}{b}\dot{+}\frac{1}{a}\dot{+}\dots}{b+\frac{1}{1}\dot{+}\frac{1}{a}\dot{+}\frac{1}{b}\dot{+}\frac{1}{1}\dot{+}\frac{1}{a}\dot{+}\frac{1}{b}\dot{+}\dots}=\frac{a+1}{b+1}.$$

45) **Dodatni pierwiastek równania** $3x^2+8x-7=0$, zamienić na ułamek ciągły.

46) **Dowieść**, że jeżeli w ułamku peryodycznym $\frac{p}{q}\dot{+}\frac{p}{q}\dot{+}\dots$ zastąpimy p przez $-p^2$, [pr]zez q^2+2p, to otrzymamy nowy ułamek peryodyczny, który przedstawia kwadrat [teg]o ułamka wzięty ze znakiem ujemnym.

47) **Dowieść**, że jeżeli w ułamku peryodycznym: $\frac{p}{q}\dot{+}\frac{p}{q}\dot{+}\dots$ zastąpimy p przez p^3 [p]rzez q^3+3pq, to otrzymamy nowy ułamek peryodyczny, który przedstawia sześcian [teg]o ułamka peryodycznego.

Rozwiązania XXXIV. 1) $\frac{P_n}{Q_n}=\frac{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+1}\right)^n-\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+1}\right)^n}{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+1}\right)^{n+1}-\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+1}\right)^{n+1}}$.

$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}=\frac{p^{n-1}q^{n-1}+\binom{2n-3}{1}p^{n-2}q^{n-2}+\dots}{p^n q^{n-1}+\binom{2n-2}{1}p^{n-1}q^{n-2}+\dots}$. 8) $\frac{P_n}{Q_n}=\frac{q\,p^{n-1}+\binom{n-2}{1}q^3p^{n-3}+\dots}{p^n+\binom{n-1}{1}q^2p^{n-2}+\dots}$.

$P_n=\frac{(q_n-q)(p_{n-1}-p)-(q_{n-1}-q)(p_n-p)}{(q_{n-2}-q)(p_{n-1}-p)-(q_{n-1}-q)(p_{n-2}-p)}$, $Q_n=\frac{(q_{n-2}-q)(p_n-p)-(q_n-q)(p_{n-2}-p)}{(q_{n-2}-q)(p_{n-1}-p)-(q_{n-1}-q)(p_{n-1}-p)}$.

$a_0=p_1$, $b_0=p_1p_2$, $a_r=p_{2r}+p_{2r+1}$, $b_{r-1}=p_{2r-1}p_{2r}$. 9) Między granicami: $\frac{p_1p_2\dots p_{n-m+1}}{Q_{n-m}Q_{n-m+1}}$

$\frac{p_1p_2\dots p_{n-m+1}}{Q_{n-m}(Q_{n-m+1}+p_{n-m+2}Q_{n-m})}$. 13)—17) zbieżny. 18) rozbieżny. 19) rozb. 20) zbieżny gdy $\alpha\leqq x^2$, rozbieżny, gdy $\alpha>x^2$. 21) zbieżny, gdy $\alpha\leqq 2$. 22) rozbieżny, gdy $\alpha>2$. 23) zbieżny. [Roz]bieżny. 36) $\sqrt{2}$. 37) $\sqrt{2}$. 38) $\sqrt{3}$. 39) $\sqrt{6}$. 40) $2+\sqrt{5}$. 41) $\sqrt{7}$. 42) $\sqrt{17}$. [44)] Dodatni pierwiastek równania: $(b+1)x^2-(ab+a+b-1)x=a+1$. 45) $\frac{1}{1}\dot{+}\frac{1}{2}\dot{+}\frac{1}{3}\dot{+}\frac{1}{1}\dot{+}\frac{1}{2}\dot{+}\frac{1}{3}\dot{+}\dots$

Literatura. J. Lieblein. Sammlung von Aufgaben aus der algebraischen Analysis. [Prag] 1867. J. A. Serret. Handbuch der höheren Algebra deutsch bearbeitet von G. Wert[heim], Leipzig 1868. Dr. Otto Stolz und Dr. J. Anton Gmeiner. Einleitung in die [Fun]ktionentheorie II. Abtheilung. Leipzig 1905.

Tematy do rozprawek naukowych:

1. Przekształcanie ułamków ciągłych.
2. Zbieżność ułamków ciągłych zwyczajnych.
3. Teorya ułamków ciągłych peryodycznych.

Wykład XXXV.

Przekształcanie szeregów i iloczynów nieskończonych na ułamki ciągłe nieskończone.

1. Przekształcanie szeregu nieskończonego na ułamek ciągły nieskończony. Ułamek ciągły nieskończony kształtu:

$$q_0 + \frac{p_1}{q_1} \dot{+} \frac{p_2}{q_2} \dot{+} \frac{p_3}{q_3} \dot{+} \dots \dot{+} \frac{p_n}{q_n} + \dots$$

możemy, jak wiadomo, zamienić na równoważny szereg nieskończony kształtu:

$$u_0 + u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{r-1} u_r + \dots$$

gdzie: $$u_0 = q_0,\ u_1 = \frac{p_1}{Q_1},\ u_r = \frac{p_1 p_2 \dots p_r}{Q_{r-1} Q_r},\ (r=2,\ 3 \dots).$$

Możemy zatem położyć:

$$\frac{P_n}{Q_n} = u_0 + u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n,\ \text{gdzie } n=1,\ 2,\ 3, \dots$$

Równania te mogą służyć naodwrót do zamiany szeregu na równoważny ułamek ciągły nieskończony, co się da nieskończenie wielu sposobami uczynić. Przyjmując na razie mianowniki Q_r wartości przybliżonych dowolnie, otrzymamy na wyznaczenie liczników częściowych wzory:

$$q_0 = u_0,\ p_1 = u_1 Q_1,\ p_2 = \frac{u_2 Q_2}{u_1},\quad p_3 = \frac{u_3 Q_3}{u_2 Q_1},$$

ogólnie: $$p_r = \frac{u_r Q_r}{u_{r-1} Q_{r-2}},\ (r=2,\ 3,\ 4, \dots), \tag{1}$$

przyczem $Q_0 = 1$, natomiast mianowniki częściowe będą określone wzorami:

$$q_1 = Q_1,\ q_2 = \frac{(u_1 - u_2) Q_2}{u_1 Q_1},\quad q_3 = \frac{(u_2 - u_3) Q_3}{u_2 Q_2}$$

ogólnie: $$q_r = \frac{(u_{r-1} - u_r) Q_r}{u_{r-1} Q_{r-1}},\ (r=2,\ 3,\ 4, \dots). \tag{2}$$

Obierzmy mianowniki Q_r wartości przybliżonych tak, aby częściowe liczniki i mianowniki szukanego ułamka ciągłego były funkcyami całkowitemi wyrazów u_r równoważnego szeregu.

W tym celu połóżmy: $Q_1 = 1,\ Q_2 = u_1,\ Q_r = u_1 u_2 \dots u_{r-1},\ (r=2,\ 3,\ 4, \dots)$.

Wskutek tego będziemy mieli:

$$p_1 = u_1,\ q_1 = 1,\ p_2 = u_2,\ q_2 = u_1 - u_2,\ p_r = u_{r-2} u_r,\ q_r = u_{r-1} - u_r,\ (r=3,\ 4,\ 5 \dots),$$

msamem wzór:

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\dots+(-1)^{n+1}u_n=u_0+\frac{u_1}{1}\dot{+}\frac{u_2}{u_1-u_2}\dot{+}\frac{u_1u_3}{u_2-u_3}\dot{+}\dots\dot{+}\frac{u_{n-2}\cdot u_n}{u_{n-1}-u_n} \quad (3)$$

ekształcający dany szereg na równoważny ułamek ciągły.

2. **Przekształcenie szeregu potęgowego na ułamek ciągły.** Chcąc dla ich szeregów otrzymać możliwie najprostsze ułamki ciągłe równoważne, yjmijmy najpierw, że:

$$u_0=0,\ u_r=\frac{a_r x^r}{b_r y^r},\ (r=1,\ 2,\ 3\dots).$$

Pod tem założeniem, na podstawie wzorów (1) i (2), otrzymujemy:

$$p_1=\frac{a_1x}{b_1y}Q_1,\ q_1=Q_1,\ p_r=\frac{a_r b_{r-1}x}{a_{r-1}b_r y}\cdot\frac{Q_r}{Q_{r-2}},\ q_r=\frac{a_{r-1}b_r y-a_r b_{r-1}x}{a_{r-1}b_r y}\cdot\frac{Q_r}{Q_{r-1}}.$$

Jeżeli więc przyjmiemy: $Q_1=b_1y$, ogólnie: $Q_r=a_{r-1}b_r y\,Q_{r-1}$, $(r=2,3,4\dots)$, otrzymamy przekształcenie w postaci:

$$\frac{a_1x}{b_1y}-\frac{a_2x^2}{b_2y^2}+\frac{a_3x^3}{b_3y^3}-\frac{a_4x^4}{b_4y^4}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{a_nx^n}{b_ny^n}=$$

$$=\frac{a_1x}{b_1y}\dot{+}\frac{a_2b_1^2xy}{a_1b_2y-a_2b_1x}\dot{+}\dots\dot{+}\frac{a_{n-2}a_nb_{n-1}^2xy}{a_{n-1}b_ny-a_nb_{n-1}x}. \quad (4)$$

Z wzoru tego otrzymujemy dla $y=1$, wzór:

$$\frac{a_1}{b_1}x-\frac{a_2}{b_2}x^2+\frac{a_3}{b_3}x^3-\frac{a_4}{b_4}x^4+\dots+(-1)^{n-1}\frac{a_n}{b_n}x^n=$$

$$=\frac{a_1x}{b_1}\dot{+}\frac{a_2b_1^2x}{a_1b_2-a_2b_1x}\dot{+}\dots\dot{+}\frac{a_{n-2}a_nb_{n-1}^2x}{a_{n-1}b_n-a_nb_{n-1}x}, \quad (5)$$

edstawiający zamianę dowolnego szeregu potęgowego o wykładnikach łkowitych na równoważny ułamek ciągły.

Dla $x=1$ otrzymujemy odpowiedni wzór dla szeregu potęgowego, upodkowanego według ujemnych potęg zmiennej niezależnej y w postaci:

$$\frac{a_1}{b_1}y^{-1}-\frac{a_2}{b_2}y^{-2}+\frac{a_3}{b_3}y^{-3}-\frac{a_4}{b_4}y^{-4}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{a_n}{b_n}y^{-n}=$$

$$=\frac{a_1}{b_1y}\dot{+}\frac{a_2b_1^2y}{a_1b_2y-a_2b_1}\dot{+}\dots\dot{+}\frac{a_{n-2}a_nb_{n-1}^2y}{a_{n-1}b_ny-a_nb_{n-1}}. \quad (6)$$

Jako szczególne przypadki tych wzorów wypływają, jeżeli położymy z $b_1=b_2=\dots=b_n=1$, to znowu $a_1=a_2=\dots=a_n=1$, wzory następujące:

$$a_1x-a_2x^2+a_3x^3-a_4x^4+\dots+(-1)^{n-1}a_nx^n=$$

$$=\frac{a_1x}{1}\dot{+}\frac{a_2x}{a_1-a_2x}\dot{+}\frac{a_1a_3x}{a_2-a_3x}\dot{+}\dots\dot{+}\frac{a_{n-2}a_nx}{a_{n-1}-a_nx}, \quad (7)$$

$$-\frac{x^2}{b_2}+\frac{x^3}{b_3}-\frac{x^4}{b_4}+\dots+(-1)^{(n-1)}\frac{x^n}{b_n}=\frac{x}{b_1}\dot{+}\frac{b_1^2x}{b_2-b_1x}\dot{+}\frac{b_2^2x}{b_3-b_2x}\dot{+}\dots\dot{+}\frac{b_{n-1}^2x}{b_n-b_{n-1}x}. \quad (8)$$

$$a_1y^{-1}-a_2y^{-2}+a_3y^{-3}-a_4y^{-4}+\dots+(-1)^{(n-1)}a_ny^{-n}=$$

$$=\frac{a_1}{y}\dot{+}\frac{a_2y}{a_1y-a_2}\dot{+}\frac{a_1a_3y}{a_2y-a_3}\dot{+}\dots\dot{+}\frac{a_{n-2}a_ny}{a_{n-1}y-a_n}$$

$$-\frac{y^{-2}}{b_2}+\frac{y^{-3}}{b_3}-\frac{y^{-4}}{b_4}+\dots+(-1)^{(n-1)}\frac{y^{-n}}{b_n}=\frac{1}{b_1y}\dot{+}\frac{b_1^2y}{b_2y-b_1}\dot{+}\frac{b_2^2y}{b_3y-b_2}\dot{+}\dots\dot{+}\frac{b_{n-1}^2y}{b_ny-b_{n-1}}$$

3. **Przyjmijmy, że w danym szeregu:**

$$u_0+u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n-1}u_n+\ldots$$

$$u_0=0,\ u_1=\frac{a_1x}{b_1y},\ u_r=\frac{a_1a_2\ldots a_rx^r}{b_1b_2\ldots b_ry^r},\ (r=2,\ 3,\ 4,\ldots),$$

wówczas mamy, na podstawie wzorów (1) i (2):

$$p_1=\frac{a_1x}{b_1x},\ q_1=Q_1,\ p_r=\frac{a_rx}{b_ry}\,\frac{Q_r}{Q_{r-2}},\ q_r=\frac{b_ry-a_rx}{b_ry}\,\frac{Q_r}{Q_{r-1}},\ (r=2,\ 3,\ 4,\ldots).$$

Przynależny ułamek ciągły otrzymuje tu najprostszą postać, położymy:

$$Q_1=b_1y,\quad Q_r=b_ry\,Q_{r-1},\ (r=2,\ 3,\ 4\ldots),$$

otrzymamy tedy odpowiedni wzór przekształcenia szeregu na ułamek w postaci:

$$\frac{a_1x}{b_1y}-\frac{a_1a_2x^2}{b_1b_2y^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{a_1a_2\ldots a_nx^n}{b_1b_2\ldots b_ny^n}=$$
$$=\frac{a_1x}{b_1y}\dot{+}\frac{a_2b_1xy}{b_2y-a_2x}\dot{+}\ldots\dot{+}\frac{a_nb_{n-1}xy}{b_ny-a_nx},$$

kładąc $a_1=a_2=\ldots=1$, otrzymujemy stąd wzór w najprostszej postaci:

$$\frac{x_1}{b_1}-\frac{x^2}{b_1b_2}+\frac{x^3}{b_1b_2b_3}-\frac{x^4}{b_1b_2b_3b_4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{b_1b_2\ldots b_n}=$$
$$=\frac{x_1}{b_1}\dot{+}\frac{b_1x}{b_2-x}\dot{+}\frac{b_2x}{b_3-x}\dot{+}\ldots\dot{+}\frac{b_{n-1}x}{b_n-x}.$$

Przykłady. 1) **Szereg wykładniczy e^x zamienić na ułamek ciągły.**
Mamy tu:

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}+\ldots$$

otrzymujemy zatem według wzoru (10) wprost żądane przekształcenie w postaci:

$$e^x=1+\frac{x}{1}\dot{-}\frac{x}{2+x}\dot{-}\frac{2x}{3+x}\dot{-}\ldots\dot{-}\frac{(n-1)x}{n+x}\dot{-}\ldots$$

ważne dla wszelkiej wartości zmiennej x.

2) Szereg logarytmiczny przekształcić na ułamek ciągły
Mamy tu dla $x|<1$, szereg:

$$\log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$$

otrzymujemy zatem według wzoru (8) odpowiedni ułamek ciągły:

$$\log(1+x)=\frac{x}{1}\dot{+}\frac{x}{2-x}\dot{+}\frac{2^2x}{3-2x}\dot{+}\frac{3^2x}{4-3x}\dot{+}\ldots\dot{+}\frac{n^2x}{(n+1)-nx}\dot{+}\ldots$$

zbieżny dla $|x|<1$, a rozbieżny wraz z szeregiem dla wszelkich innych zmiennej x.

3) Rozwinąć funkcyę $\sin x$ na ułamek ciągły.

Mamy tu: $\sin x=x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\ldots$

otrzymujemy zatem na podstawie wzoru (10) przekształcenie:

$$\sin x=\frac{x}{1}\dot{+}\frac{1.x^2}{2.3-x^2}\dot{+}\frac{2.3x^2}{4.5-x^2}\dot{+}\frac{4.5x^2}{6.7-x^2}\dot{-}\ldots$$

4. Przekształcanie ilorazu dwu szeregów potęgowych na ułamek

Niech będą $\mathfrak{P}_0(x)$ i $\mathfrak{P}_1(x)$ dwa szeregi potęgowe, uporządkowane pod kowitych potęg zmiennej x; niech będzie x wartością zmiennej, nale wspólnego zakresu zbieżności obu szeregów. Pod założeniem, że: $\mathfrak{P}$ możemy położyć:

$$\mathfrak{P}_0(x) = b_0\,\mathfrak{P}(x) + a_1 x \mathfrak{P}_2(x),$$

ie $b_0 = \frac{\mathfrak{P}_0(0)}{\mathfrak{P}_1(0)}$, spółczynnik a_1 może być jakąkolwiek liczbą różną od zera, $\mathfrak{P}_2(x)$ przedstawia nowy szereg potęgowy zmiennej x.

Jeżeli $\mathfrak{P}_2(0)$ nie jest zerem, możemy podobnie położyć:

$$\mathfrak{P}_1(x) = b_1\,\mathfrak{P}_2(x) + a_2 x\,\mathfrak{P}_3(x),$$

dnie:

$$\mathfrak{P}_n(x) = b_n\,\mathfrak{P}_{n+1}(x) + a_{n+1}\,x\,\mathfrak{P}_{n+2}(x),\quad (n=3,\ 4,\ldots),$$

sie pod założeniem, że $\mathfrak{P}_3(0)$, $\mathfrak{P}_4(0)$, .., są różne od zera, jest $b_n = \frac{\mathfrak{P}_n(0)}{\mathfrak{P}_{n+1}(0)}$, i spółczynniki $a_2, a_3, \ldots$, mogą być dowolnemi liczbami. Otrzymujemy tedy:

$$\frac{\mathfrak{P}_0(x)}{\mathfrak{P}_1(x)} = b_0 + \frac{a_1 x}{\mathfrak{P}_1(x) : \mathfrak{P}_2(x)}$$

$$\frac{\mathfrak{P}_1(x)}{\mathfrak{P}_2(x)} = b_1 + \frac{a_2 x}{\mathfrak{P}_2(x) : \mathfrak{P}_3(x)}$$

. . . .

$$\frac{\mathfrak{P}_n(x)}{\mathfrak{P}_{n+1}(x)} = b_n + \frac{a_{n+1} x}{\mathfrak{P}_{n+1}(x) : \mathfrak{P}_{n+2}(x)},$$

emsamem rozwinięcie kształtu:

$$\frac{\mathfrak{P}_0(x)}{\mathfrak{P}_1(x)} = b_0 + \frac{a_1 x}{b_1} \,\dot{+}\, \frac{a_2 x}{b_2} \,\dot{+} \ldots \dot{+}\, \frac{a_n x}{b_n} \,\dot{+}\, \frac{a_{n+1} x\,\mathfrak{P}_{n+2}(x)}{\mathfrak{P}_{n+1}(x)}.$$

Weźmy pod uwagę ułamek ciągły nieskończony, kształtu:

$$b_0 + \frac{a_1 x}{b_1} \,\dot{+}\, \frac{a_2 x}{b_2} \,\dot{+} \ldots \dot{+}\, \frac{a_n x}{b_n} \,\dot{+} \ldots \tag{11}$$

oznaczając jego n-tą wartość przybliżoną przez $\frac{P_n}{Q_n}$ i kładąc $\frac{\mathfrak{P}_n(x)}{\mathfrak{P}_{n+1}(x)} = F_n(x)$ zymujemy:

$$\frac{\mathfrak{P}_0(x)}{\mathfrak{P}_1(x)} = \frac{a_{n+1}\,x\,P_{n-1} + F_{n+1}(x).\,P_n}{a_{n+1}\,x\,Q_{n-1} + F_{n+1}(x).\,Q_n},$$

zarazem:

$$\frac{\mathfrak{P}_0(x)}{\mathfrak{P}_1(x)} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{a_{n+1}\,x\,Q_{n-1}}{a_{n+1}\,x\,Q_{n-1} + F_{n+1}(x)\,.\,Q_n}\left(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - \frac{P_n}{Q_n}\right). \tag{12}$$

Jeżeli przyjęty ułamek ciągły jest zbieżny, wówczas $\lim_{n=\infty}\left(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - \frac{P_n}{Q_n}\right) = 0$, iro zatem czynnik:

$$\frac{a_{n+1}\,x\,Q_{n-1}}{a_{n+1}\,x\,Q_{n+1} + F_{n+1}(x)\,Q_n},$$

zwzględnie wzięty jest dla wszelkich wartości n skończony, wówczas imy także:

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{\mathfrak{P}_0(x)}{\mathfrak{P}_1(x)} - \frac{P_n}{Q_n}\right) = 0,$$

tem:

$$\lim_{n=\infty}\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\mathfrak{P}_0(x)}{\mathfrak{P}_1(x)}.$$

10. Przekształcanie iloczynów nieskończonych na ułamki ciągłe i na-ajem. Zamianę iloczynu nieskończonego na równoważny ułamek ciągły

i nawzajem można uskutecznić albo wprost albo za pośrednictwem ı ważnego szeregu nieskończonego.

Niech będzie dany iloczyn nieskończony:

$$\prod_{r=1}^{r=\infty}\left(\frac{a_r}{b_r}\right)=\frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{a_2}{b_2}\cdots\frac{a_n}{b_n}\cdots$$

Połóżmy:

$$\frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{a_2}{b_2}\cdots\frac{a_n}{b_n}=\frac{P_n}{Q_n}=\frac{p_1}{q_1}\dot{+}\frac{p_2}{q_2}\dot{+}\dots\dot{+}\frac{p_n}{q_n},\quad (n=1,\,2,\,3,\dots),$$

natenczas otrzymujemy:

$$\frac{p_1}{q_1}=1,\quad \frac{p_2}{q_2}=-\frac{a_1-b_1}{a_1},\quad \frac{p_3}{q_3}=-\frac{(a_2-b_2)a_1b_1}{a_1a_2-b_1b_2},\quad \frac{p_4}{q_4}=-\frac{(a_1-b_1)(a_3-b_3)}{a_2a_3-b_2b_3}$$

ogólnie:

$$\frac{p_n}{q_n}=-\frac{(a_{n-3}-b_{n-3})(a_{n-1}-b_{n-1})\,.\,a_{n-2}\,.\,b_{n-2}}{a_{n-2}\,a_{n-1}-b_{n-2}\,b_{n-1}},\quad (n\geqq 4).$$

Wzory te prowadzą do rozwinięcia zbieżnego iloczynu nieskończ na równoważny ułamek ciągły.

Naodwrót otrzymujemy, na podstawie tożsamości:

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{P_1}{Q_1}\cdot\frac{P_2\,.\,Q_1}{P_1Q_2}\cdot\frac{P_3\,.\,Q_2}{P_2Q_3}\cdots\cdots\frac{P_n\,.\,Q_{n-1}}{P_{n-1}\,Q_n},$$

wzór:

$$\frac{p_1}{q_1}\dot{+}\frac{p_2}{q_2}\dot{+}\dots\dot{+}\frac{p_n}{q_n}\dot{+}\dots=\frac{P_1}{Q_1}\,\frac{P_2\,.\,Q_1}{P_1Q_2}\cdot\frac{P_3\,.\,Q_2}{P_2Q_3}\cdots\frac{P_{n+1}\,.\,Q_n}{P_n\,Q_{n+1}}\cdots$$

przedstawiający przekształcenie danego ułamka ciągłego na równo iloczyn nieskończony.

6. Przekształcenie iloczynu nieskończonego na ułamek ciągły średnictwem szeregu. Dany iloczyn nieskończony kształtu: $\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ n na podstawie tożsamości:

$$1\,.\,u_1u_2\dots u_n=1+(u_1-1)+u_1(u_2-1)+u_1u_2(u_3-1)+\dots+u_1u_2\dots u_{n-1}(u_n-$$

zamienić na równoważny szereg nieskończony:

$$\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=1+\frac{a_1-b_1}{b_1}+\frac{a_2-b_2}{b_2}\cdot\frac{a_1}{b_1}+\dots+\frac{a_n-b_n}{b_n}\cdot\frac{a_1a_2\dots a_{n-1}}{b_1b_2\dots b_{n-1}}+\dots$$

który przedstawiony w postaci:

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\dots+(-1)^{n-1}u_n,$$

zamienia się na ułamek ciągły kształtu:

$$\frac{u_1}{1}\dot{+}\frac{u_2}{u_1-u_2}\dot{+}\frac{u_1u_3}{u_2-u_3}\dot{+}\frac{u_2u_4}{u_3-u_4}\dot{+}\frac{u_3u_5}{u_4-u_5}\dot{+}\dots$$

otrzymujemy zatem wzór:

$$\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=1+\frac{a_1-b_1}{b_1}\dot{+}\frac{(a_2-b_2)a_1b_1}{a_1a_2-b_1b_2}\dot{+}\dots\dot{+}\frac{(a_{n-1}-b_{n-1})(a_{n+1}-b_{n+1})a_n\,b_n}{a_n\,a_{n+1}-b_n\,b_{n+1}}$$

przekształcający dany iloczyn nieskończony na ułamek ciągły.

N. p. *a*) Ułamek ciągły $1+\frac{1^2}{2}+\frac{3^2}{2}+\frac{5^2}{2}+\ldots$ można przedstawić w postaci iloczynu ...ńczonego: $\frac{1}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{10}{13}\cdot\frac{91}{76}\cdot\frac{684}{781}\ldots$

b) Iloczyn nieskończony: $\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{10}{11}\ldots$ zamienia się na ułamek ciągły

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1.2}{1}+\frac{2.3}{1}+\frac{5.6}{1}+\frac{6.7}{1}+\ldots$$

7. **Bezpośrednie rozwijanie danej funkcyi na ułamek ciągły.** Rozwi...e funkcyi $f(x)$ na ułamek ciągły jest częstokroć bardzo korzystne, jeżeli ...zi o wyznaczenie liczebnej wartości tej funkcyi dla pewnej wartości ...nej x. Wyznaczenie ułamka ciągłego równoważnego z daną funkcyą ...wogóle zagadnieniem nieoznaczonem, a staje się oznaczonem przy wy...e pewnego typu ułamków ciągłych. Załóżmy mianowicie, że:

$$f(x)=\frac{a_1}{1}+\frac{a_2x}{1}+\frac{a_3x}{1}+\ldots+\frac{a_nx}{1}+\ldots$$

...e $a_1, a_2, \ldots, a_n\ldots$ są spółczynnikami bliżej oznaczyć się mającymi.

Kładąc $x=0$ otrzymamy $f(0)=a_1$, spółczynnik a_1 przedstawia zatem ...tość funkcyi $f(x)$ w miejscu $x=0$.

Kładąc $f(x)=\frac{a_1}{1+y}$ otrzymujemy w zmiennej y funkcyę, która ma się ...z x stać razem. Funkcya ta przedstawia się w postaci $y=\frac{a_2x}{1+z}$, zatem: ...$=a_2$. Spółczynnik a_2 przedstawia zatem granicę stosunku $\frac{y}{x}$, gdy x dąży ...era. Zmienna z staje się określoną wzorem:

$$z=\frac{a_3x}{1+u},$$

...órego wynika, że $a_3=\left(\frac{z}{x}\right)_0\ldots$ Podobnie otrzymamy $a_4=\left(\frac{u}{x}\right)_0$ i t. d.

Spółczynniki $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n\ldots$ ułamka ciągłego kształtu:

$$\frac{a_1}{1}+\frac{a_2x}{1}+\frac{a_3x}{1}+\ldots+\frac{a_nx}{1}+\ldots$$

...zymujemy zatem z szeregu podstawień:

$$f(x)=\frac{a_1}{1+y},\quad y=\frac{a_2x}{1+z},\quad z=\frac{a_3x}{1+u}\ldots$$

...oro wyznaczymy wartość $f(x)$, $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{x}$, $\frac{u}{x}\ldots$

Przykład. Rozwiązać funkcyę $(1+x)^n$ na ułamek ciągły. Kładąc $x=0$, otrzymamy ...pierw $a_1=1$, zatem możemy położyć $(1+x)^n=\frac{1}{1+y}$ stąd dostajemy:

$$y=\frac{1-(1-x)^n}{(1+x)^n}.\quad \text{Dla } x=0 \text{ otrzymujemy } y_0=-n(1+x)^{n+1},$$

a więc $\left(\frac{y}{x}\right)_0=-n=a_2$. Możemy więc położyć:

$$(1+x)^n=\frac{1}{1-\frac{nx}{1+z}},\ \text{stąd dostajemy:}\ z=-\frac{nx(1+x)^n}{1-(1+x)^n}-1,$$

a stąd dla $x=0$ stosunek $\left(\frac{z}{x}\right)=\frac{n+1}{2}=a_3$, a więc:

$$(1+x)^n=\frac{1}{1}\,\dot{-}\,\frac{nx}{1}\dotplus\frac{\frac{n+1}{2}x}{1}\dotplus\ldots$$

wzór przydatny przy przybliżonem wyznaczaniu potęgi $(1+x)^n$ dla małych wartości zmiennej x.

Ćwiczenia XXXV.

1) Równanie $ax-by=1$ rozwiązać w liczbach całkowitych za pomocą ułamka ciągłego.

Rozwiązać podobnie równania:

2) $ax-by=c$. 3) $ax+by=c$.

4) Wykazać, że ułamek ciągły nieskończony: $\frac{1^p}{1}\dotplus\frac{2^p}{1}\dotplus\frac{3^p}{1}\dotplus\frac{4^p}{1}\dotplus\ldots$ jest zbieżny, gdy: $0\leqq p\leqq 2$.

5) Wykazać, że ułamek ciągły nieskończony: $\frac{x}{1}\dotplus\frac{x^2}{2}\dotplus\frac{x^3}{3}\dotplus\ldots$ jest zbieżny, gdy $0<x\leqq 1$.

6) Wykazać, że ułamek ciągły nieskończony: $\frac{1}{x}\dotplus\frac{1}{x^2}\dotplus\frac{1}{x^3}\dotplus\ldots$ jest zbieżny, gdy $x\geqq 1$, a oscylacyjnym, gdy $0<x<1$.

7) Wykazać, że ułamek ciągły nieskończony:

$$\frac{1}{1}\,\dot{-}\,\frac{1}{0}\,\dot{-}\,\frac{1}{1}\,\dot{-}\,\frac{4}{0}\,\dot{-}\,\frac{4}{1}\,\dot{-}\ldots\dot{-}\,\frac{n^2}{0}\,\dot{-}\,\frac{n^2}{1}\,\dot{-}\ldots$$

jest równoważny z szeregiem nieskończonym:

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}+\ldots$$

8) Wyznaczyć, ułamek ciągły nieskończony, który jest równoważny z szeregiem harmonicznym: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$

Wykazać, że:

9) $1\,\dot{-}\,\frac{1}{3}\,\dot{-}\,\frac{4}{5}\,\dot{-}\,\frac{9}{7}\,\dot{-}\ldots\dot{-}\,\frac{(n-1)^2}{2n-1}\,\dot{-}\ldots=0$. 10) $\frac{1}{1}\,\dot{-}\,\frac{1}{1}\dotplus\frac{1}{1}\,\dot{-}\,\frac{1}{1}\dotplus\ldots=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

11) $\frac{1.2}{3}\,\dot{-}\,\frac{1.2}{5}\,\dot{-}\,\frac{3.4}{7}\,\dot{-}\,\frac{3.4}{9}\,\dot{-}\,\frac{5.6}{11}\,\dot{-}\ldots=1$.

12) $\frac{4}{5}\,\dot{-}\,\frac{1.2}{7}\,\dot{-}\,\frac{5.6}{9}\,\dot{-}\,\frac{3.4}{11}\,\dot{-}\,\frac{7.8}{13}\,\dot{-}\,\frac{5.6}{15}\,\dot{-}\ldots=1$. 13) $2\,\dot{-}\,\frac{1}{2}\,\dot{-}\,\frac{1}{2}\,\dot{-}\,\frac{1}{2}\,\dot{-}\ldots=1$.

14) $1+\frac{2}{1}\dotplus\frac{2}{1}\dotplus\frac{2}{1}\dotplus\ldots=2$. 15) $\log 2=\frac{1}{1}\dotplus\frac{1}{1}\dotplus\frac{2^2}{1}\dotplus\frac{3^2}{1}\dotplus\ldots$

16) $\frac{\pi}{2}=\frac{1}{1}\dotplus\frac{1}{1}\dotplus\frac{1.2}{1}\dotplus\frac{2.3}{1}\dotplus\frac{3.4}{1}\dotplus\ldots$

17) $\frac{\pi}{4}=\frac{1}{1}\dotplus\frac{1}{3}\dotplus\frac{2^2}{5}\dotplus\frac{3^2}{7}\dotplus\frac{4^2}{9}\dotplus\ldots$ 18) $e=2+\frac{2}{2}\dotplus\frac{3}{3}\dotplus\frac{4}{4}\dotplus\ldots\dotplus\frac{n}{n}\dotplus\ldots$

19) $\frac{\log 2}{1-\log 2}=1\dotplus\frac{2^2}{1}\dotplus\frac{3^2}{1}\dotplus\frac{4^2}{1}\dotplus\frac{5^2}{1}\dotplus\ldots$

20) Wykazać, że ułamek ciągły zwyczajny: $q_0+\frac{1}{q_1}\dotplus\frac{1}{q_2}\dotplus\ldots\dotplus\frac{1}{q_n}$ jest tylko wtedy równy ułamkowi:

$$q_n+\frac{1}{q_{n-1}}\dotplus\frac{1}{q_{n-2}}\dotplus\ldots\dotplus\frac{1}{q_1}\dotplus\frac{1}{q_0},$$

skoro:

$$q_r=q_{n-r}\left(r=0,\,1,\,2,\ldots,\leqq\frac{n-1}{2}\right).$$

Taki ułamek ciągły nazywa się ułamkiem **odwrotnym**.

Wykazać, że:

21) $\frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} + \dots = \frac{x}{1-x} \dot{-} \frac{x(1-x^2)}{1-x^2} \dot{-} \frac{x^2(1-x^3)}{1-x^3} \dot{-} \frac{x^2(1-x^2)^2}{1-x^4} \dot{-} \dots$

22) $\dfrac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{16}} + \dots}{\frac{1}{1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^9} + \dots} = \frac{1}{x+1} \dot{-} \frac{x}{x^3+1} \dot{-} \frac{x^3}{x^5+1} \dot{-} \frac{x^5}{x^7+1} \dot{-} \dots$

Wykazać, że:

23) $u_0 + \sum_{r=1}^{r=n} (-1)^{r-1} u_r = u_0 + \frac{u_1}{1} \dot{+} \frac{u_2}{u_1 - u_2} \dot{+} \frac{u_1 u_3}{u_2 - u_3} \dot{+} \dots \dot{+} \frac{u_{n-2} u_n}{u_{n-1} - u_n} \dot{+} \dots$

24) $\sum_{r=1}^{r=n} (-1)^{r-1} a_r x^r = \frac{a_1 x}{1} \dot{+} \frac{a_2 x}{a_1 - a_2 x} \dot{+} \frac{a_1 a_3 x}{a_2 - a_3 x} \dot{+} \dots \dot{+} \frac{a_{n-2} a_n x}{a_{n-1} - a_n x} \dot{+} \dots$

25) $\sum_{r=1}^{r=n} (-1)^{r-1} \frac{x^r}{a^r} = \frac{x}{a_1} \dot{+} \frac{a_1^2 x}{a_2 - a_1 x} \dot{+} \frac{a_2^2 x}{a_3 - a_2 x} \dot{+} \dots \dot{+} \frac{a_{n-1}^2 x}{a_n - a_{n-1} x} \dot{+} \dots$

Wyprowadzić następujące rozwinięcia funkcyj na ułamki ciągłe nieskończone:

26) $\sin x = \frac{x}{1} \dot{+} \frac{x^2}{2.3 - x^2} \dot{+} \frac{2.3x^2}{4.5 - x^2} \dot{+} \dots \dot{+} \frac{(2n-2)(2n-1)x^2}{2n(2n+1) - x^2} \dot{+} \dots$

27) $\cos x = \frac{1}{1} \dot{+} \frac{x^2}{2 - x^2} \dot{+} \frac{1.2x^2}{3.4 - x^2} \dot{+} \dots \dot{+} \frac{(2n-3)(2n-2)x^2}{(2n-1)2n - x^2} \dot{+} \dots$

28) $\mathrm{tang}\, x = \frac{x}{1} \dot{-} \frac{x^2}{3} \dot{-} \frac{x^2}{5} \dot{-} \frac{x^2}{7} \dot{-} \frac{x^2}{9} \dot{-} \dots \dot{-} \frac{x^2}{(2n+1)} \dot{-} \dots$

29) $e^x = \frac{1}{1} \dot{-} \frac{x}{1} \dot{+} \frac{x}{2} \dot{-} \frac{x}{3} \dot{+} \frac{2x}{4} \dot{-} \frac{2x}{5} \dot{+} \frac{3x}{6} \dot{-} \frac{3x}{7} \dot{+} \dots \dot{+} \frac{nx}{2n} \dot{-} \frac{nx}{2n+1} \dot{+} \dots$

30) $\log(1+x) = \frac{x}{1} \dot{+} \frac{x}{2} \dot{+} \frac{x}{3} \dot{+} \frac{2x}{4} \dot{+} \frac{2x}{5} \dot{+} \dots \dot{+} \frac{nx}{2n} \dot{+} \frac{nx}{2n+1} \dot{+} \dots$

31) $\mathrm{arc\,tang}\, x = \frac{x}{1} \dot{+} \frac{x^2}{3} \dot{+} \frac{4x^2}{5} \dot{+} \frac{9x^2}{7} \dot{+} \frac{16x^2}{9} \dot{+} \dots \dot{+} \frac{n^2 x^2}{2n+1} \dot{+} \dots$

32) $\frac{x}{\log(1+x)} = 1 + \frac{x}{2-x} \dot{+} \frac{2^2 x}{3-2x} \dot{+} \frac{3^2 x}{4-3x} \dot{+} \dots \dot{+} \frac{n^2 x}{(n+1) - nx} \dot{+} \dots$

33) $\frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{x} \dot{-} \frac{\frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 3}}{x} \dot{-} \frac{\frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 5}}{x} \dot{-} \dots \dot{-} \frac{\frac{n \cdot n}{(2n-1)(2n+1)}}{x} \dot{-} \dots$

34) $\frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{x}{1} \dot{+} \frac{x^2}{3} \dot{+} \frac{x^2}{5} \dot{+} \frac{x^2}{7} \dot{+} \dots \dot{+} \frac{x^2}{2n-1} \dot{+} \dots$

35) **Wyprowadzić przekształcenie:**

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdots \frac{a_n}{b_n} = 1 + \frac{a_1 - b_1}{b_1} \dot{-} \frac{(a_2 - b_2) a_1 b_1}{a_1 a_2 - b_1 b_2} \dot{-} \dots \dot{-} \frac{(a_{n-1} - b_{n-1})(a_{n+1} - b_{n+1}) a_n b_n}{a_n a_{n+1} - b_n b_{n+1}}$$

36) **Zamienić na ułamek ciągły iloczyn nieskończony:**

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdots$$

37) **Okazać, że:**

$$\sqrt{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{11} \dots = 1 + \frac{1}{1} \dot{+} \frac{1 \cdot 2}{1} \dot{+} \frac{5 \cdot 3}{3} \dot{+} \frac{5 \cdot 6}{1} \dot{+} \frac{6 \cdot 7}{3} \dot{+} \frac{9 \cdot 10}{1} \dot{+} \dots$$

38) **Okazać, że:**

$$(1+qx)(1+q^2x)(1+q^3x)(1+q^4x)\dots = 1 + \frac{qx}{1-q} + \frac{q^3x^2}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^6x^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \dots$$

$$= 1 + \frac{qx}{1-q} \dot{-} \frac{q^2(1-q)x}{1-q^2+q^2x} \dot{-} \frac{q^3(1-q^2)x}{1-q^3+q^3x} \dot{-} \dots$$

39) Wykazać, że szereg $\frac{2}{1}-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\dots$ da się zamienić na równoważ mek ciągły nieskończony w postaci:

$$\frac{2}{1}+\frac{1^2.3}{1}+\frac{2^2.4}{1}+\frac{3^2.5}{1}+\dots$$

40) Jeżeli $x=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}-\frac{1}{d}-\frac{1}{e}-\frac{1}{y}$, okazać, że:

$$y=\frac{1}{e}-\frac{1}{a}-\frac{1}{c}-\frac{1}{b}-\frac{1}{a}-\frac{1}{x}.$$

Wykazać, że:

41) $\frac{1}{1}-\frac{2}{2}-\frac{3}{3}-\dots-\frac{n}{n}-\dots=0$

42) $\frac{2}{2}-\frac{3}{3}-\frac{4}{4}-\dots-\frac{n}{n}-\dots=\infty.$

43) $\frac{3}{3}-\frac{4}{4}-\frac{5}{5}-\dots-\frac{n}{n}-\dots=2.$

Wyprowadzić przekształcenia:

44) $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots=1+\frac{x}{1}-\frac{x}{2+x}-\frac{2x}{3+x}-\dots-\frac{(n-1)x}{n+x}-\dots$

45) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots=\frac{x}{1}+\frac{x}{2-x}+\frac{2^2x}{3-2x}+\frac{3^2x}{4-3x}+\dots$

46) $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots=\frac{x}{1}+\frac{x^2}{3-x}+\frac{3^2x^2}{5-3x}+\frac{5^2x^2}{7-5x}+\dots$

47) $1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{1}x^2+\dots=\frac{1}{1}-\frac{nx}{1}+\frac{\frac{n+1}{2}x}{1}+\frac{\frac{n-1}{2.3}x}{1}+\frac{\frac{2(n+2)}{3.4}x}{1}-\dots$

48) $\frac{1}{2.1!}+\frac{1}{2.2!}+\frac{1}{2.3!}+\dots=1+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{14}+\dots+\frac{1}{4n+2}+\dots$

49) Jeżeli $x=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}-\frac{1}{d}-\frac{1}{e}-\frac{1}{y}$

okazać, że: $y=\frac{1}{e}-\frac{1}{d}-\frac{1}{c}-\frac{1}{b}-\frac{1}{a}-\frac{1}{x}.$

50) Szereg hypergeometryczny kształtu:

$$1+\frac{\alpha}{\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\dots$$

zamienić na ułamek ciągły.

Rozwiązania XXXV. 1) $x=(-1)^{n-1}Q_{n-1}+bu$, $y=(-1)^{n-1}P_{n-1}+au$, gdz $=q_0+\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\dots+\frac{1}{q_n}$. 2) $x=(-1)^{n-1}c\,Q_{n-1}+bu$, $y=(-1)^{n-1}c\,P_{n-1}+au$. 3) $x=(-1)^{n-1}c\,Q_{n-1}-bu$, $y=(-1)^{n-1}c\,P_{n-1}+au$. 4—48) Wskazówki podane w wy 49) Crelle Journal, T. VI. str. 217. 50) $\frac{1}{1}-\frac{a_1x}{1}+\frac{a_2x}{1}+\dots$, gdzie $a_1=\frac{\alpha}{\gamma}$, $a_2=$

$$a_{2n+1}=\frac{(\alpha+n)(\gamma+n-\alpha)}{(\gamma+2n-1)(\gamma+2n)},\quad a_{2n+2}=\frac{(n+1)(\gamma+n-\alpha)}{(\gamma+2n)(\gamma+2n+1)}.$$

Literatura. Leonard Euler: Introductio in analysim infinitorum I, 1748. Po niemiecku wydał H. Maser, Berlin 1885. M. A. Stern: Lehrbuch der a schen Analysis. Leipzig 1860. Karl Hattendorf: Algebraische Analysis, ver 1877.

Tematy do rozprawek naukowych:

1. Przekształcanie szeregów nieskończonych na równoważne ułamki ciągłe.
2. Związki między nieskończonymi iloczynami i równoważnymi ułamkami ci
3. Rozwijanie funkcyj na ułamki ciągłe nieskończone.

Wykład XXXVI.

Zasady teoryi całek określonych.

1. Pojęcie całki określonej pojedyńczej. Niech będzie daną funkcya f) jednowartościowa i ciągła w zakresie od $x=a$, do $x=b$ posiadająca hodną:

$$\frac{dF(x)}{dx}=\frac{F(x+dx)-F(x)}{dx}=\lim_{h=0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$$

mież jednowartościową i ciągłą w zakresie (a, b), natenczas w tym zasie różniczka jej ma wartość:

$$dF(x)=F(x+dx)-F(x)=f(x)\,.\,dx \tag{1}$$

Podzielmy odstęp (a, b) na n równych części i połóżmy pod założem, że n dąży do nieskończoności, odstęp

$$\frac{b-a}{n}=dx$$

enczas, kładąc w równaniu 1) kolejno $x=a$, $a+dx$, $a+2dx$, $\cdots$ $a+(n-1)dx$ zymujemy równania następujące:

$$\begin{aligned}
&F(a+dx)-F(a)=f(a)dx\\
&F(a+2dx)-F(a+dx)=f(a+dx)\,dx\\
&F(a+3dx)-F(a+2dx)=f(a+2dx)\,dx\\
&.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\\
&F(a+ndx)-F(a+\overline{n-1}\,dx)=f(a+\overline{n-1}\,dx)
\end{aligned}$$

óre dodane do siebie dają równanie:

$$F(a+ndx)-F(a)=f(a)dx+f(a+dx)\,dx+\ldots+f(a+\overline{n-1}\,dx)\,dx$$

li:

$$F(b)-F(a)=\sum_{r=0}^{r=n-1}f(a+rdx)\,dx \quad . \tag{2}$$

Tem równaniem określona jest zmiana, jakiej funkcya $F(x)$ doznaje, eli zmienna niezależna x przechodzi od $x=a$ do $x=b$, a zmiana ta jest rażoną za pomocą wartości funkcyi pochodnej $f(x)$. Przy nieskończenie mącem n suma $\sum_{r=0}^{r=n-1} f(a+rdx)\,dx$ rozciąga się na wszystkie wartości zmien- x, leżące między granicami a i b, a każdy dodajnik przedstawia się postaci przyrostu kształtu $f(x)\,dx$. Równanie 2) przedstawia tedy zmianę

funkcyi $F(x)$, wywołaną przejściem zmiennej x od $x=a$ do $x=b$, jako sum nieskończenie wielu przyrostów kształtu $f(x)\,dx$ w postaci

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx \tag{3}$$

Taką sumę nieskończenie wielu różniczek nazywamy pojedyńczą całką określoną między granicami a i b i oznaczamy według Fourier'a symbolem:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

nazywając a dolną, b górną granicą, a różniczkę $f(x)\,dx$ elementem całki określonej $\int_a^b f(x)\,dx$

Pojedyńcza całka określona przedstawia się według tego wzoru w postaci:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \sum_{r=0}^{r=n-1} f(a+r\,dx)\,dx \tag{4}$$

czyli
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_{r=0}^{r=n-1} f\left(a+r\,\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n} \tag{4'}$$

albo też gdy położymy $\frac{b-a}{n}=h$ wzorem:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{h=0}\left[h\left\{f(x)+f(a+h)+\ldots+f(a+\overline{n-1}\,h)\right\}\right],$$

który podaje sposób bezpośredniego obliczenia danej całki określonej wymagającego dwu działań, a to (1) sumowania przyrostów i (2) przejścia do przypadku, w którym ilość przyrostów staje się nieskończenie wielką.

Różnicę $F(b)-F(a)$, przedstawiającą zmianę funkcyi $F(x)$, wywołaną zmianą zmiennej niezależnej x od $x=a$ do $x=b$ wyrażamy według Cauchy'ego znakiem:

$$F(b)-F(a)=\Big|_a^b F(x) \tag{5}$$

który wskazuje, że w funkcyi pierwotnej $F(x)$ należy wstawić najpierw górną granicę b, potem dolną a i od pierwszej wartości funkcyi pierwotnej odjąć drugą jej wartość.

Na podstawie powyższych znakowań otrzymujemy tedy z równania (3) wzór:

$$F(b)-F(a)=\Big|_a^b F(x)=\int_a^b f(x)\,dx \tag{6}$$

przedstawiający zmianę funkcyi pierwotnej w postaci całki określonej, wymagającej obliczenia sumy nieskończenie wielu przyrostów i nawzajem wzór:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big|_a^b F(x)=F(b)-F(a) \tag{7}$$

przedstawiający całkę określoną między granicami a i b, jako różnicę między wartościami funkcyi pierwotnej w miejscach a i b. Mając tedy obra-

ać **wartość** pojedyńczej całki określonej danemi granicami możemy, za- obliczania nieskończenie wielu jej elementów i następnie ich sumo- postąpić w ten sposób, że wyznaczymy do danej funkcyi pochodnej ej funkcyę pierwotną, czyli jej całką nieokreśloną: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, pnie wstawiamy w niej granice a i b, a otrzymane wartości funkcyi otnej od siebie odejmujemy.

2. Przykłady wyznaczania całek określonych pojedyńczych za pomocą nieokreślonych.

Korzystając z wzoru:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big|_a^b F(x) = F(b) - F(a)$$

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

ymujemy między innemi następujące wzory:

1. $$\int_a^b x^m\,dx = \Big|_a^b \frac{x^{m+1}}{m+1} = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$$

m $$\int_a^b x^m\,dx = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$$

2. $$\int_a^b \frac{dx}{x} = \Big|_a^b \log x = \log b - \log a = \log \frac{b}{a}$$

m $$\int_a^b \frac{dx}{x} = \log \frac{b}{a}$$

3. $$\int_\alpha^\beta a^x\,dx = \Big|_\alpha^\beta \frac{a^x}{\log a} = \frac{a^\beta}{\log a} - \frac{a^\alpha}{\log a}$$

m $$\int_\alpha^\beta a^x\,dx = \frac{a^\beta - a^\alpha}{\log a}$$

4. $$\int_a^b \sin x\,dx = \Big|_a^b -\cos x = -\cos b + \cos a$$

m $$\int_a^b \sin x\,dx = \cos a - \cos b.$$

5. $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \Big|_0^1 \text{arc sin } x = \text{arc sin } 1 - \text{arc sin } 0 = \frac{\pi}{2}$$

em $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

6. $$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \Big|_0^1 \text{arc tang } x = \text{arc tang } 1 - \text{arc tang } 0 = \frac{\pi}{4}$$

em $$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$$

3. Zasadnicze własności pojedyńczej całki określonej, oparte na wł... ściach całki nieokreślonej.

I. Jeżeli $\int f(x)\,dx = F(x)$ natenczas mamy:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big|_a^b F(x) = F(b) - F(a)$$

a zarazem:

$$\int_b^a f(x)\,dx = \Big|_b^a F(x) = F(a) - F(b) = -\left\{F(b) - F(a)\right\}$$

zatem:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

To znaczy: *Jeżeli w danej całce określonej przemienimy jej granice, ...czas zmieni się tylko znak całki, a nie zmieni się jej wartość bezwzględna.*

II. W szczególności, otrzymujemy:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

To znaczy: *Całka określona, w której dolna granica równa jest granicy ...nej, ma wartość zera.*

III. Z tożsamości:

$$F(b) - F(a) = [F(c) - F(c)] + [F(b) - F(a)] = [F(c) - F(a)] + [F(b) - F(c)],$$

która pod założeniem, że c jest liczbą, znajdującą się między granicami całki określonej kształtu $\int_a^b f(x)\,dx$, gdzie $\int f(x)\,dx = F(x)$, otrzymujemy w...

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

To znaczy: *Daną całkę określoną granicami a i b możemy rozłożyć na dwu całek określonych, z których pierwsza określona jest granicami a i c, dr... granicami c i b, gdzie c jest liczbą, leżącą między granicami a i b.*

Ogólnie, otrzymujemy wzór:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx \qquad (1\ldots$$

podający sposób rozkładania danej całki określonej granicami x_0 i x_n n... całek określonych kolejno granicami (x_0, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_{n-1}, x_n).

IV. Jeżeli $\int f(x)\,dx = F(x)$ natenczas $\int cf(x)\,dx = cF(x)$, gdzie liczba c j... stałym czynnikiem. Na podstawie pojęcia pojedyńczej całki określonej ot... mamy tedy:

$$\int_a^b cf(x)\,dx = \Big|_a^b cF(x) = c\,F(b) - c\,F(a) = c\,[F(b) - F(a)]$$

zatem:

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx \qquad (1\ldots$$

To znaczy: *W całce określonej może być czynnik stały wyłączony przed ... całkowania i nawzajem.*

V. Niech będą $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ dwie funkcye ciągłe i jednowartości... w granicach a i b tak że $\int \varphi(x)\,dx = \Phi(x)$, $\int \psi(x)\,dx = \Psi(x)$, natenczas:

$$\int[\varphi(x)+\psi(x)]dx=\int\varphi(x)\,dx+\int\psi(x)\,dx=\Phi(x)+\Psi(x)$$

...d otrzymujemy całkę określoną:

$$\int_a^b[\varphi(x)+\psi(x)]\,dx=\Big|_a^b[\Phi(x)+\Psi(x)]=\Big|_a^b\Phi(x)+\Big|_a^b\Psi(x)$$

...więc:

$$\int_a^b[\varphi(x)+\psi(x)]\,dx=\int_a^b\varphi(x)\,dx+\int_a^b\psi(x)\,dx \qquad (11)$$

To znaczy: *Całka określona sumy dwu funkcyj jest równa sumie całek okre...ych poszczególnych dodajników.*

Wzór ten możemy rozszerzyć na wszelką skończoną ilość dadajników.

4. Zmiana zmiennej niezależnej w danej całce określonej.

1. Jeżeli $\int f(x)\,dx=F(x)$, natenczas, zastępując zmienną niezależną x ...ez t otrzymujemy także wzór:

$$\int f(t)\,dt=F(t),$$

...e:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big|_a^b F(x)=F(b)-F(a)$$

...narazem:

$$\int_a^b f(t)\,dt=\Big|_a^b F(t)=F(b)-F(a)$$

...tem:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt \qquad (12)$$

To znaczy: *Wartość całki określonej nie zależy od znakowania zmiennej nie...żnej, w jej skład wchodzącej, jeżeli tylko granice całkowania nie zostały zmie...ne.*

2. Przyjmijmy teraz, że w całce określonej kształtu $\int_{x_0}^{x_1}f(x)\,dx$, mającej ...anice stałe x_0 i x_1, zmienimy zmienną x na zmienną t za pomocą pod...awienia:

$$x=\varphi(t),$$

...wczas otrzymamy całkę nieokreśloną kształtu:

$$\int f(x)dx=F(x)$$

postaci :

$$\int f(x)\,dx=\int f[\varphi(t)]\,.\,\varphi'(t)\,dt=F[\varphi(t)]$$

Całka określona kształtu $\int_{x_0}^{x_1}f(x)\,dx$ otrzymuje wartość:

$$\int_{x_0}^{x_1}f(x)\,dx=\Big|_{x_0}^{x_1}F(x)=F(x_1)-F(x_0)$$

Połóżmy tu na mocy podstawienia:

$x=\varphi(t)$, granice $x_0=\varphi(t_0)$, $x_1=\varphi(t_1)$, natenczas będzie:

$$\int_{x_0}^{x_1}f(x)\,dx=F[\varphi(t_1)]-F[\varphi(t_0)]$$

...że: $$F[\varphi(t_1)]-F[\varphi(t_0)]=\Big|_{t_0}^{t_1}F[\varphi(t)]=\int_{t_0}^{t_1}f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

...zeto otrzymujemy wzór:

$$\int_{t_0}^{t_1}f(x)\,dx=\int_{t_0}^{t_1}f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt \qquad (13)$$

To znaczy: *Zastępując w całce określonej zmienną x przez nową zmienną za pomocą podstawienia $x=\varphi(t)$, należy jako granice nowej całki dać takie wartości zmiennej za pomocą podstawienia, jakie odpowiadają dawnym granicom zmiennej x.*

Tak np. całka określona kształtu $\int_a^b f(x)dx$ otrzymuje wskutek podstawienia:

$$x=\frac{1}{t}, \text{ a więc } dx=-\frac{dt}{t^2}$$

granice zmiennej t, odpowiadające granicom a i b zmiennej x, w postaci $\frac{1}{a}$ i $\frac{1}{b}$, sprowadza się zatem do postaci:

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2}.$$

5. Metoda całkowania przez części w zastosowaniu do całek określonych.

Na podstawie wzoru całkowania przez części, przedstawiającego się w postaci:

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du$$

dochodzimy przy wyznaczaniu całki nieokreślonej kształtu: $\int f(x)\,dx$ do wzorów typu:

$$\int f(x)\,dx=\varphi(x)-\int\psi(x)\,dx$$

Niech będzie $\int f(x)\,dx=F(x)$, zaś $\int\psi(x)\,dx=\Psi(x)$, natenczas otrzymujemy funkcyę $F(x)$ przedstawioną w postaci:

$$F(x)=\varphi(x)-\Psi(x).$$

Połóżmy w niej raz $x=x_1$, potem $x=x_0$ i odejmijmy otrzymane wartości, a otrzymamy wzór:

$$F(x_1)-F(x_0)=\varphi(x_1)-\varphi(x_0)-[(\Psi x_1)-(\Psi x_0)]$$

czyli:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx=\varphi(x_1)-\varphi(x_0)-\int_{x_0}^{x_1}\psi(x)\,dx \tag{14}$$

Mając zatem wyznaczyć wartość danej całki określonej za pomocą metody całkowania przez części, należy tylko utworzyć różnicę miedzy wartościami, jakie w danych granicach otrzymuje część zcałkowana, a nową całkę wziąć między temi samemi granicami.

W szczególności otrzymujemy na tej podstawie wzór:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi'(x)\,dx=\Big|_a^b[f(x)\,\varphi(x)]-\int_a^b\varphi(x)f'(x)\,dx \tag{15}$$

który możemy stosować do wszelkich znanych wzorów redukcyjnych.

Mając np. wyznaczyć całkę określoną kształtu: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,dx$ z wzoru redukcyjnego:

$$\int\sin^m x\,dx=-\frac{\cos x\sin^{m-1}x}{m}+\frac{m-1}{m}\int\sin^{m-2}x\,dx$$

otrzymujemy stąd pod założeniem, że $m>1$ wzór:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,dx=-\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\sin^{m-1}x}{m}+\frac{m-1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m-2}x\,dx$$

a stąd:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx = \frac{m-1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x\,dx$$

Jeżeli wykładnik m jest liczbą parzystą: $m=2n$, natenczas otrzymujemy w dalszym ciągu:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} x\,dx = \frac{2n-3}{2n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-4} x\,dx$$

a w końcu:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{1}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} x = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

a więc ostatecznie wzór:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \tag{16}$$

Jeżeli wykładnik m jest nieparzysty: $m=2n+1$, to na mocy wzoru redukcyjnego:

$$\int \sin^{2n+1} x\,dx = -\frac{\cos x \sin^{2n} x}{2n+1} + \frac{2n}{2n+1}\int \sin^{2n-1} x\,dx$$

otrzymujemy wzór:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx = \frac{2n}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\,dx,$$

zapomocą którego dojdziemy w końcu do całek:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 1,$$

skąd dochodzimy wreszcie do wzoru:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}. \tag{16'}$$

6. Wzór Wallisa. Powyżej wyprowadzone wzory dozwalają przedstawić liczbę π w postaci iloczynu nieskończonego.

Jeżeli bowiem $0 < x < \frac{\pi}{2}$, tedy $0 < \sin x < 1$, przeto $\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x$,

zatem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\,dx$$

a więc:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1} < \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-1}$$

skąd otrzymujemy nierówność:

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}$$

a zatem wzór:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdots, \tag{17}$$

przedstawiający liczbę $\frac{\pi}{2}$ w postaci iloczynu nieskończonego, znany pod nazwą wzoru Wallis'a.

7. Całki określone z nieskończonemi granicami. Wprowadzając pojęcie całki określonej, kształtu: $\int_a^b f(x)\,dx$, wyszliśmy z założenia, że granice a i b są liczbami stałemi, skończonemi. Jeżeli granice a i b obie lub tylko jedna z nich są nieskończenie wielkie, a więc całka określona ma jeden z kształtów: $\int_a^\infty f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, tedy jej wartość stanowi granica, do której zdąża całka $\int_a^b f(x)\,dx$, jeżeli $\lim b=\infty$, lub $\lim a=-\infty$, lub wkońcu $\lim a=-\infty$, a $\lim b=+\infty$. Taka wartość graniczna istnieje tylko przy szczególnych postaciach funkcyi $f(x)$.

8. Przykłady. Znając całkę nieokreśloną $\int f(x)dx=F(x)+C$, możemy z wzoru $\int_a^b f(x)dx= =F(b)-F(a)$ łatwo poznać, czy dana całka określona z granicami a i b, dążącemi do nieskończoności, zdąża do pewnej granicy skończonej.

Przyjmijmy, że $f(x)=e^{-\lambda x}$. Mamy tedy $\int e^{-\lambda x}dx=-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}+C$, zatem:

$$\int_a^b e^{-\lambda x}dx=-\frac{1}{\lambda}\Big|_a^b e^{-\lambda x}=-\frac{1}{\lambda}\left(e^{-\lambda b}-e^{-\lambda a}\right)=\frac{e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}}{\lambda}.$$

Stąd otrzymujemy:

$$\int_0^b e^{-\lambda x}dx=\frac{1-e^{-\lambda b}}{\lambda}.$$

Jeżeli $\lambda>0$, tedy $\lim\limits_{b=\infty} e^{-\lambda b}=e^{-\infty}=0$; zatem $\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx=\lim\limits_{b=\infty}\left(\int_0^b e^{-\lambda x}dx\right)=\frac{1}{\lambda}$, jeżeli zaś $\lambda<0=-\alpha$, tedy $\lim\limits_{b=\infty} e^{-\lambda b}=\lim\limits_{b=\infty} e^{\alpha b}=e^{+\infty}=\infty$, zatem $\int_0^\infty e^{\alpha x}dx=\lim\limits_{b=\infty}\left[\int_0^b e^{\alpha x}dx\right]=\infty$.

Otrzymujemy tedy dla dodatniego α wartości:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha},\quad \int_0^\infty e^{\alpha x}dx=\infty.$$

2. Jeżeli $f(x)=\sin x$, tedy mamy $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$,

zatem
$$\int_a^b \sin x\,dx=-\cos b+\cos a$$

a stąd:
$$\int_0^b \sin x\,dx=1-\cos b.$$

Jeżeli b dąży do nieskończoności, wtedy $\cos b$ nie dąży do żadnej granicy, tylko waha się między $+1$ i -1, zatem całka $\int_0^\infty \sin x\,dx$ nie ma żadnej wartości oznaczonej, to samo dotyczy całki kształtu $\int_{-\infty}^0 \sin x\,dx$ lub $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,dx$.

3. Z całki nieokreślonej kształtu:

$$\int\frac{dx}{\lambda^2+x^2}=\frac{1}{\lambda}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{\lambda}+C$$

otrzymujemy całkę określoną:

$$\int_a^b\frac{dx}{\lambda^2+x^2}=\frac{1}{\lambda}\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{\lambda}$$

a stąd, przyjmując, że $\operatorname{arctang}\frac{x}{\lambda}$ leży między granicami $-\frac{\pi}{2}$ a $+\frac{\pi}{2}$, dostajemy wartości:

$$\int_0^b\frac{dx}{\lambda^2+x^2}=\frac{1}{\lambda}\operatorname{arc\,tang}\frac{b}{\lambda},$$

$$\int_0^\infty\frac{dx}{\lambda^2+x^2}=\frac{\pi}{2\lambda},\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\lambda^2+x^2}=\frac{\pi}{\lambda}.$$

4. Z całek kształtu:

$$\int e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx=-\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\cos\beta x-\beta\sin\beta x\right)$$

$$\int e^{-\alpha x}\sin\beta x\,dx = -\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\sin\beta x+\beta\cos\beta x\right)$$

założeniem, że $\alpha>0$ otrzymujemy:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2},\quad \int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin\beta x\,dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$$

9. Ocenianie całki określonej na podstawie funkcyi stojącej pod znakiem całkowania. Niech będzie daną do zbadania całka określona $\int_a^b f(x)\,dx$, tej odpowiednia całka nieokreślona $\int f(x)\,dx$ nie jest znaną. Przypuśćmy, funkcya $f(x)$ stojąca pod znakiem całkowania, od pewnego miejsca $x_0>0$ stale dodatnią, a dla $x=\infty$ otrzymujemy wartość równą zeru, jednakże że $\lim\limits_{x=\infty} x^n f(x)$ jest wartością skończoną, różną od zera.

Niech A będzie wartością od niej mniejszą, w tym przypadku będzie pewnego $x=x'$ począwszy:

$$x^n f(x)>A$$

ii:

$$f(x)>\frac{A}{x^n}$$

m:

$$\int_{x'}^b f(x)\,dx>A\int_{x'}^b\frac{dx}{x^n}.$$

Jeżeli $n \lesseqgtr 1$, wówczas:

$$\lim_{b=\infty}\int_{x'}^b\frac{dx}{x^n}=\lim_{b=\infty}\left|_{x'}^{b}\frac{1}{(1-n)x^{n-1}}\right.=\lim_{b=\infty}\left|_{x'}^{b}\frac{1-n}{x^{1-n}}\right.=+\infty,$$

m także:

$$\lim_{b=\infty}\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^{x'}f(x)\,dx+\lim_{b=\infty}\int_{x'}^b f(x)\,dx=+\infty.$$

Niech będzie B wartością mniejszą od $\lim\limits_{x=\infty} x^n f(x)$, natenczas będzie od nego $x=x'$ począwszy:

$$x^n f(x)<B,$$

więc:

$$f(x)<\frac{B}{x^n},$$

tem także:

$$\int_{x'}^b f(x)\,dx<B\int_{x'}^b\frac{dx}{x^n}.$$

Jeżeli $n>1$, natenczas wyrażenie:

$$\lim_{b=\infty}\int_{x'}^b\frac{dx}{x^n}=\lim_{b=\infty}\left|_{x'}^{b}\frac{1}{(1-n)x^{n-1}}\right.=\lim_{b=\infty}\left\{\frac{1}{(1-n)b^{n-1}}-\frac{1}{(1-n)x'^{n-1}}\right\}$$

ży do wartości skończonej $\frac{1}{(n-1)x'^{n-1}}$, a tem samem dąży także całka:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^{x'}f(x)\,dx+\int_{x'}^b f(x)\,dx,$$

a $b=\infty$ do granicy skończonej:

$$\lim_{b=\infty}\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^{x'}f(x)\,dx+\lim_{b=\infty}\int_{x'}^b f(x)\,dx.$$

Mamy zatem kryteryum:

Jeżeli funkcya $f(x)$ jest od pewnego $x=a$ począwszy stale dodatnią, a dla $x=+\infty$ otrzymuje wartość równą zeru, natenczas całka $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ma wartość skończoną, skoro $\lim_{x=\infty} x^n f(x)$ jest dla pewnego $n>1$ liczbą skończoną.

Np. Całka $\int_a^\infty \frac{f(x)}{\varphi(x)}dx$, gdzie $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ jest funkcyą wymierną ułamkową właściwą, ma tylko wówczas wartość skończoną oznaczoną, jeżeli mianownik jej $\varphi(x)$ jest przynajmniej o dwa stopnie rzędu wyższego jak licznik, gdyż tylko wówczas funkcya $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ jest dla $x=\infty$ wielkością nieskończenie małą rzędu od jedności wyższego.

Jeżeli funkcya ułamkowa $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ jest niewłaściwą, albo taką funkcyą właściwą, że mianownik jest tylko o jeden stopień wyższy od licznika, natenczas całka $\int_a^\infty \frac{f(x)}{\varphi(x)}dx$ jest nieskończoną. Na podstawie tego całka $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}$ ma wartość skończoną. W istocie:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\Big|_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{arc\,tang} x=\pi.$$

Analogiczne twierdzenie dotyczy przypadku, kiedy funkcya $f(x)$ jest stale ujemną.

10. Jeżeli funkcya $f(x)$ w granicach (a, ∞) zmienia swój znak, wówczas należy celem zbadania całki $\int_a^\infty f(x)\,dx$ podzielić odstęp (a, ∞) na części w tych miejscach, w których funkcya $f(x)$ zmienia swój znak. Odnośne wartości częściowe całki utworzą tedy w ogólności szereg nieskończony, a badanie całki sprowadza się do badania zbieżności odnośnego szeregu.

Chcąc np. zbadać całkę kształtu $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$, podzielmy odstęp całkowania $(0, \infty)$ na części $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, ...; odnośne wartości odnośnych całek częściowych: $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx$, ... $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}dx$, ... utworzą szereg $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ o wyrazach naprzemian dodatnich i ujemnych. Otrzymujemy:

$$a_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}dx,\quad a_{n+1}=\int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi}\frac{\sin x}{x}dx,$$

zatem:

$$|a_n|>|a_{n+1}|.$$

przyczem: $$|a_n|<\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{x},\quad \text{czyli } |a_n|<\log\frac{n+1}{n},\quad \text{a więc } \lim_{n=\infty}|a_n|=0.$$

Szereg $a_1+a_2+\ldots$ jest zatem zbieżnym. Zbieżność ta jest jednak warunkową, gdyż:

$$|a_n|=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx>\frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin x|\,dx,\quad \text{zatem } |a_n|>\frac{2}{(n+1)\pi}$$

$$|a_0|+|a_1|+\ldots+|a_n|>\frac{2}{\pi}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right),$$

a więc: $$\sum_{n=0}^{n=\infty}|a_n|=\infty.\quad \text{Jest więc } \int_0^\infty\frac{|\sin x|}{x}dx=\infty.$$

11. Całkowanie szeregów. Niech będzie daną funkcya $f(x)$, określona szeregiem jednostajnie zbieżnym:

$$f(x)=f_0(x)+f_1(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots,$$

w którym funkcye: $f_0(x)$, $f_1(x)$, ... są funkcyami ciągłemi w zakresie (a, b).

Połóżmy:

$$f(x)=f_0(x)+f_1(x)+\ldots+f_n(x)+R_n(x),$$

ie:

$$R_n(x)=f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\ldots$$

nczas otrzymamy:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f_0(x)\,dx+\ldots+\int_a^b f_n(x)dx+\int_a^b R_n(x)\,dx.$$

ojęcia szeregów jednostajnie zbieżnych wypływa, że od pewnego n począ-
y jest:

$$|R_n(x)|<\varepsilon,$$

ie ε jest dowolnie małą liczbą dodatnią, z czego wynika, że:

$$\left|\int_a^b R_n(x)\,dx\right|<\varepsilon\int_a^b dx,\quad\text{czyli}\quad \left|\int_a^b R_n(x)\,dx\right|<\varepsilon(b-a),$$

em:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f_0(x)\,dx+\int_a^b f_1(x)\,dx+\int_a^b f_2(x)\,dx+\ldots \tag{18}$$

To znaczy: *Jeżeli funkcya $f(x)$ da się przedstawić w postaci szeregu jedno-
nie zbieżnego w zakresie (a, b), to całkując w granicach (a, b), kolejne wyrazy
szeregu, otrzymujemy szereg zbieżny, którego wartość przedstawia całkę okre-
danej funkcyi, t. j. $\int_a^b f(x)\,dx$.*

12. Z tego twierdzenia wynika całkowalność szeregu potęgowego w gra-
ch zawartych w zakresie jego zbieżności.

Niech będzie tedy:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots,\quad\text{gdzie } |x|<\varrho,$$

teneczas, pod założeniem, że $|a|$ i $|b|<\varrho$, otrzymamy:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big|_a^b\left(a_0x+a_1\frac{x^2}{2}+\frac{a_2x^3}{3}+\ldots\right)=$$

$$=a_0(b-a)+\frac{a_1(b^2-a^2)}{2}+\frac{a_2(b^3-a^3)}{3}+\ldots$$

w szczególności dla $x<\varrho$,

$$\int_0^x f(x)\,dx=a_0x+\frac{a_1x^2}{2}+\frac{a_2x^3}{3}+\ldots \tag{19}$$

Przykłady:

1) $$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots\quad\text{dla } |x|<1,$$

em dla $|x|<1$ także:

$$\int_0^x\frac{dx}{1+x}=\log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

2) $$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots\quad\text{dla } |x|<1,$$

m dla takiego x będzie także:

$$\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}=\text{arc tang}\,x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$$

3) $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\left(1-x^2\right)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\ldots\quad\text{dla } |x|<1,$$

m, skoro $|x|<1$, jest także:

$$\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\text{arc sin}\,x=\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5}+\ldots$$

Ćwiczenia XXXVII.

1) Wykazać, że $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, skoro $dF(x) = f(x)\,dx$.

Wykazać, że pod warunkiem $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ zachodzą relacye:

2) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

3) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

4) $\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$.

5) $\int_a^b c f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$.

6) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b [f(x) + \varphi(x)]\,dx$.

7) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$, gdzie $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$.

8) $\int_a^b f(x)\,.\,\varphi'(x)\,dx = \Big|_a^b [f(x)\,.\,\varphi(x)] - \int_a^b \varphi(x) f'(x)\,dx$.

Wyprowadzić obok podane wartości całek określonych przy pomocy odpo\ całek nieokreślonych:

9) $\int_a^b \frac{dx}{x} = \log\frac{b}{a}$.

10) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}$.

11) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}$.

12) $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$.

13) $\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$.

14) $\int_0^\pi \sin x\,dx = 2$.

15) $\int_0^1 \sqrt{x(x-1)}\,dx = \frac{\pi}{8}$.

16) $\int_0^{\sqrt{a}} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{a}$.

17) $\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx = \frac{\pi}{3}$

18) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$.

19) $\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}$.

20) $\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}$.

21) $\int_0^\infty \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx = \frac{2}{3}\pi$.

22) $\int_0^1 x^m(\log x)^n\,dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$.

23) $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n!$

24) $\int_0^x \log x\,dx = x(\log x - 1)$.

25) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\,dx = -\frac{\pi}{2}\log 2$.

26) $\int_0^\infty x e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}$.

27) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x\,dx = \frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2m-1)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots 2m}\,\frac{\pi}{2}$.

28) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x\,dx = \frac{2\,.\,4\,.\,6\,.\ldots.\,2m}{3\,.\,5\,.\,7\,.\ldots.\,(2m+1)}$.

29) $\int_0^1 \frac{dx}{1-2\alpha x+x^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}$, jeżeli $\alpha^2 < 1$.

30) $\int_0^1 \frac{dx}{1-2\alpha x+x^2} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha^2-1}}\log(\alpha - \sqrt{\alpha^2-1})$, jeżeli $\alpha^2 > 1$.

31) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{1-2\alpha x+x^2} = \frac{1}{2}\log\left\{2(1-\alpha)\right\} + \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}$, jeżeli $\alpha^2 < 1$.

32) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{1-2\alpha x+x^2} = \frac{1}{2}\log\left\{2(1-\alpha)\right\} + \frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha^2-1}}\log(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})$, jeżeli $\alpha^2 > 1$.

33) $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-\alpha^2 x}{1-x}}\,dx = 1+\frac{1-\alpha^2}{2\alpha}\log\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$, jeżeli $\alpha < 1$.

34) $\int_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x}} = 2.\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

35) $\int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^n}\cdot\frac{\pi}{2}$.

36) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \frac{2}{9}\pi.\sqrt{3}$.

37) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

38) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x^{-1}}}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\sqrt{2}$.

39) $\int_0^1 \frac{(1-x)^n\,dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^n}\pi$.

40) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$.

41) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

42) $\int \frac{dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3}$.

43) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{3}{16}\pi$.

44) $\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^3} = \frac{\pi}{16}$.

45) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{\pi}{\beta}$.

46) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+e^{\alpha x}} = \frac{1}{\alpha}\log 2$.

47) $\int_0^\infty \frac{dx}{e^{\alpha x}+e^{-\alpha x}} = \frac{\pi}{4\alpha}$.

48) $\int_0^\infty \frac{e^{\alpha x}\,dx}{(e^{2\alpha x}+1)^2} = \frac{\pi-2}{8\alpha}$.

49) $\int_0^\infty \frac{e^{2\alpha x}\,dx}{(e^{\alpha x}+1)^3} = \frac{1-2\log 2}{2\alpha}$.

50) $\int_0^\infty \frac{dx}{(e^{\alpha\sqrt{x}}+e^{-\alpha\sqrt{x}})^2} = \frac{2\log 2}{\alpha^2}$.

51) $\int_0^\infty \frac{e^{\alpha\sqrt{x}}-e^{-\alpha\sqrt{x}}}{(e^{\alpha\sqrt{x}}+e^{-\alpha\sqrt{x}})^2}\,dx = \frac{\pi}{2\alpha}$.

52) $\int_0^1 \log(1-\sqrt{x}).dx = -\frac{3}{2}$.

53) $\int_1^e \frac{\log x\,dx}{(1+\log x)^2} = \frac{e}{2}-1$.

54) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\mathrm{tang}\,x}{\cos 2x}.\sin^2 x\,dx = \frac{3}{4}\log 2 - \frac{\pi}{8}$.

55) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos^3 x\,dx = \frac{1}{2}$.

56) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\mathrm{tang}^3 x}{\cos 2x}\cos^2 dx = \frac{3}{4}\log 2 + \frac{\pi}{8}$.

57) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,dx = \frac{1.3}{2.4}\frac{\pi}{2}$.

58) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{q\sin x-\cos x}{\sin x+q\cos x}\,dx = \log q$.

59) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,dx = \frac{2.4}{3.5}$.

60) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{p^2+q^2\sin^2 x} = \frac{\pi}{2p\sqrt{p^2+q^2}}$

61) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx = \frac{2}{3}$.

62) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{p^2-q^2\sin^2 x} = \frac{\pi}{2p\sqrt{p^2-q^2}}$

63) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{p^2\sin^2 x+q^2\cos^2 x} \quad \frac{\pi}{2pq}$.

64) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x\,dx}{p^2\sin^2 x+q^2\cos^2 x} = \frac{\pi}{2p(p+q)}$.

65) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos^2 x\,dx = \frac{2}{15}$.

66) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x\,dx}{p^2\sin^2 x+q^2\cos^2 x} = \frac{\pi}{2q(p+q)}$.

67) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^2} = \frac{1}{ab}$.

68) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\cos x-b\sin x}{(a\sin x+b\cos x)^2}\,dx = \frac{a-b}{ab}$.

69) $\int \frac{dx}{(\mathrm{tang}\,x+\mathrm{cotg}\,x)^2} = \frac{\pi}{16}$.

70) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x\,dx}{(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)^2} = \frac{\pi}{4a^3b}$

71) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x\,dx}{(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)^2} = \frac{\pi}{4ab^3}$.

72) $\int_0^\pi \frac{\sin x\,dx}{p^2+q^2\cos^2 x} = \frac{2}{pq}\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{q}{p}$.

73) $\int_0^\pi \sin mx.\sin nx\,dx = 0$, $(m \gtrless n)$.

74) $\int_0^\infty \sin(ax^2)\,dx = \int_0^\infty \cos(ax^2)\,dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2\pi}{a}}$.

75) $\int_0^x \sin(n+1)x\,.\,\sin^{n-1}x\,dx = \frac{1}{n}\sin^n x \sin nx$.

76) $\int_0^1 \text{arc sin}\, ax\,.\,dx = \text{arc sin}\, a - \frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}$

77) $\int_0^1 \text{arc cos}\, ax\,.\,dx = \text{arc cos}\, a + \frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}$.

78) $\int_0^1 \text{arc tang}\, ax\,.\,dx = \text{arc tang}\, a - \frac{\log(1+a^2)}{2a}$.

79) $\int_0^1 \text{arc cotg}\, ax\,.\,dx = \text{arc cotg}\, a + \frac{\log(1+a^2)}{2a}$.

80) $\int_0^1 \text{arc sin}(\sqrt{x})\,.\,dx = \int_0^1 \text{arc cos}(\sqrt{x})\,.\,dx = \frac{\pi}{4}$.

81) $\int_0^a \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}a^{2n}\,.\,\frac{\pi}{2}$.

82) $\int_0^a \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n+1}\cdot a^{2n+1}$.

83) $\int_0^a x^{2n}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\cdots\frac{2n-1}{2n+2}\cdot a^{2n+1}\,\frac{\pi}{2}$.

84) $\int_0^a x^{2n+1}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdots\frac{2n}{2n+3}\cdot a^{2n+3}$

85) $\int_0^\infty x^n a^{-x}\,dx = \frac{n!}{(\log a)^{n+1}}$.

86) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{\pi}{2}$.

87) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}x\,dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n+1}$.

88) $\int_0^\infty x^n e^{-mx}\,dx = \frac{n!}{m^{n+1}}$.

Wyprowadzić następujące rozwinięcia:

89) $\int_a^x \frac{e^x}{x}\,dx = \log\frac{x}{a} + \frac{x-a}{1\,.\,1!} + \frac{x^2-a^2}{2\,.\,2!} + \frac{x^3-a^3}{3\,.\,3!} + \cdots$

90) $\int_0^x \frac{\log(1+x)}{x}\,dx = \frac{x}{1^2} - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \cdots$

91) $\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx = x - \frac{x^3}{3\,.\,3!} + \frac{x^5}{5\,.\,5!} - \frac{x^7}{7\,.\,7!} + \cdots$

92) $\int_a^x \frac{\cos x}{x}\,dx = \log\frac{x}{a} - \frac{x^2-a^2}{2\,.\,2!} + \frac{x^4-a^4}{4\,.\,4!} - \frac{x^6-a^6}{6\,.\,6!} + \cdots$

93) $\int_0^x e^x x^{n-1}\,dx = \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{1!(n+1)} + \frac{x^{n+2}}{2!(n+2)} + \cdots$

Rozwiązania XXXVI. Wskazówki podane w wykładzie.

Literatura. Emanuel Czuber: Vorlesungen über Differential- und Integralr Zweiter Band, Leipzig 1898. Angelo Genocchi: Differentialrechnung und Grund Integralrechnung herausgegeben von Giuseppe Peano. Autorisirte deutsche Übe von G. Bohlmann und A. Schepp. Leipzig 1899.

Tematy do rozprawek naukowych:

1. Pojęcie całki określonej.
2. Bezpośrednie obliczanie i ocenianie wartości całek określonych.
3. Całkowanie szeregów nieskończonych i zastosowania.

Wykład XXXVII.

Znaczenie geometryczne całki pojedyńczej i przybliżone metody całkowania.

1. Krzywe różniczkowe i krzywe całkowe. Przedstawiając funkcyę $y=f(x)$ w postaci linii krzywej, możemy podobnie wykreślić jej funkcyę pochodną $f'(x)$, jako nową linię krzywą o równaniu $y=f'(x)$. Krzywą $y=f'(x)$ nazywamy krzywą różniczkową krzywej pierwotnej $y=f(x)$, a krzywę pierwotną $y=f(x)$ nazywamy krzywą całkową krzywej $y=f'(x)$.

2. Krzywę różniczkową $y=f(x)$ możemy w przybliżeniu wyznaczyć graficznie wprost z krzywej pierwotnej $y=f(x)$ na podstawie określenia: $\frac{df(x)}{dx}=$ $=f'(x)$, czyli na podstawie proporcyi: $\frac{df(x)}{dx}=\frac{f'(x)}{1}$, z której wynika, że wartość różniczki $df(x)$ danej funkcyi $f(x)$ w pewnem miejscu x ma się tak do stałej różniczki dx zmiennej niezależnej x, jak się ma wartość pochodnej $f'(x)$ w tem miejscu do przyjętej jednostki. Możemy zatem w pewnem miejscu x wykreślić wartość $f'(x)$, gdy dla przyjętej różniczki $dx=MR$ wykreślimy różniczkę $df(x)=RN$ (fig. 18) danej funkcyi, a następnie wykreślimy trójkąt ABP podobny do trójkąta MRN, pod warunkiem, że bok AB, odpowiadający bokowi $MR=dx$ będzie równy jednostce. Ponieważ atoli kąt NMR przedstawia kąt, jaki styczna w punkcie M tworzy z osią x-ów, przeto wystarczy na podstawie AB równej jednostce i równoległej do osi x-ów wykreślić kąt α, to znaczy wykreślić prostą AP równolegle do stycznej MN, w drugim końcu jednostki wykreślić do niej prostopadłą BP. Długość BP tej prostopadłej przedstawia tedy wartość pochodnej $f'(x)$ w miejscu x. Podobnie możemy przedstawić rysunkiem wartość pochodnej w każdem innem miejscu, a tem samem wykreślić dla danej krzywej jej krzywą różniczkową.

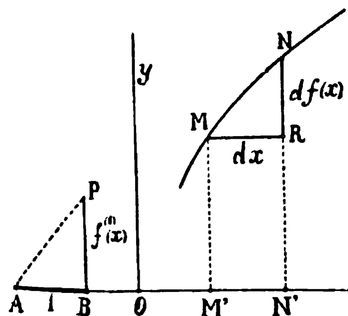


Fig. 18.

Konstrukcyę możemy wykonać przy pomocy stosownego diagramu. W tym celu dzielimy powierzchnię, zawartą między krzywą pierwotną $O\,7$ a osią x-ów za pomocą rzędnych na paski o stosownej szerokości (fig. 19). Zewnątrz kreślimy jednostkę AO, w jej końcu O prostopadłą do AO,

a z punktu A prostą równoległą do stycznej w przyjętym punkcie. Prosta ta przetnie prostopadłą w pewnym jej punkcie, a długość tej prostopadłej będzie rzędną krzywej różniczkowej $O'7'$. Tak postępujemy z każdym punktem krzywej pierwotnej, aż otrzymamy rzędną ostatniego punktu szukanej krzywej różniczkowej.

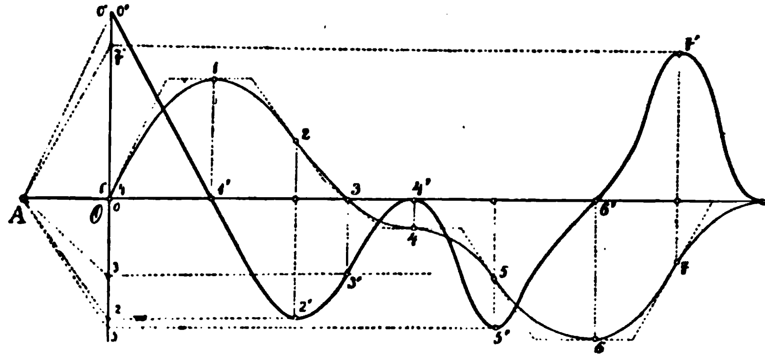


Fig. 19.

3. Mając daną krzywą $y=f(x)$ możemy analogicznie wykreślić jej krzywą całkową $y=F(x)$, określoną warunkiem $\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$, czyli proporcyą: $\frac{dF(x)}{dx}=\frac{f(x)}{1}$. W tym celu dzielimy powierzchnię zawartą między daną krzywą $y=f(x)$ a osią x-ów na paski stosownej szerokości, obieramy jednostkę AO i kreślimy prostopadłą w punkcie O. Na tej prostopadłej odcinamy rzędną przyjętego punktu danej krzywej np. $O1'$. Prosta $A1'$ wskazuje tedy kierunek stycznej w punkcie $1'$ krzywej całkowej, odpowiadającym punktowi 1 danej krzywej różniczkowej. Przyjąwszy dowolnie punkt O' na prostej OO' jako odpowiadający pierwszemu punktowi O danej krzywej możemy już za pomocą stycznych przedstawić krzywą jako obraz funkcyi $F(x)$ pierwotnej względem funkcyi $f(x)$, czyli **k r z y w ą c a ł k o w ą** danej krzywej $y=f(x)$, jak to wskazuje fig. 20.

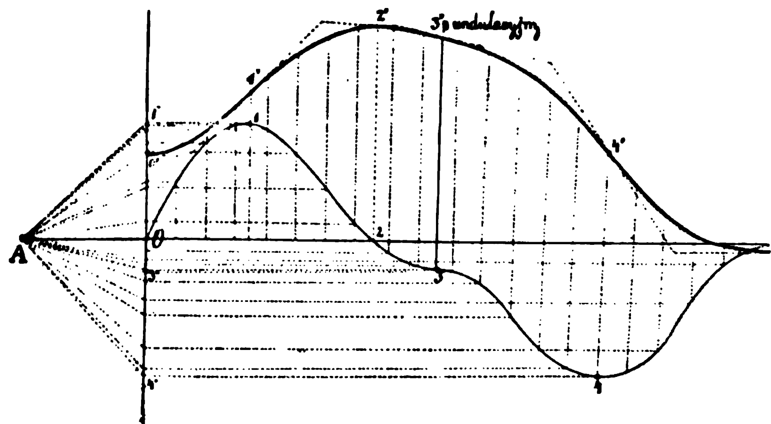


Fig. 20.

4. Całkowanie graficzne. Bezpośrednie wykreślanie krzywej całkowej odpowiadającej danej krzywej różniczkowej nazywamy **c a ł k o w a n i e m**

graficznem. Mając np. daną prostą MN jako krzywą różniczkową znajdziemy jako krzywą całkową parabolę. Prostej $y=x$ jako krzywej różniczkowej odpowiadają parabole o równaniu: $y=\frac{1}{2}x^2+C$, gdzie C jest stałą dowolną jako jej krzywe całkowe.

Przyrządy służące do rysowania krzywych całkowych, gdy dane są krzywe różniczkowe nazywamy integrafami.

Jednym z takich jest integraf Abakanowicza, opisany w dziele: Les integraphes par Bruno Abdank-Abakanowicz. Paryż 1886.

5. Znaczenie geometryczne całki określonej. Niech odpowiada równaniu $y=f(x)$, w którem $f(x)$ jest funkcyą ciągłą, pewna krzywa MN (fig. 21), a odstępowi (a, b) odcinek AB na osi x-ów. Podzielmy odcinek AB na części w punktach $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, gdzie $x_0=a$, $x_n=b$ i wykreślmy w punktach podziału rzędne $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$, natenczas powierzchnia $AMNB$, zawarta między krzywą MN, osią x-ów i dwiema rzędnemi końcowemi $MA=y_0=f(x_0)=f(a)$ i $NB=y_n=f(x_n)=f(b)$, rozpadnie się na poszczególne części w kształcie trapezów. Niech będzie $PQP'Q'$ jednym z tych trapezów, odpowiadający punktom $P(x_r, y_r)$ i $Q(x_{r+1}, y_{r+1})$ krzywej $y=f(x)$, natenczas będzie $P'Q'=x_{r+1}-x_r$, $P'P=y_r=f(x_r)$, $Q'Q=y_{r+1}=f(x_{r+1})$. Powierzchnia tego trapezu leży widocznie między powierzchniami A_r i A_{r+1} dwu prostokątów wykreślonych nad odcinkiem $P'Q'=x_{r+1}-x_r$, z których jeden ma wysokość $PP'=y_r=f(x_r)$, drugi zaś wysokość $QQ'=y_{r+1}=f(x_{r+1})$, a więc między liczbami:

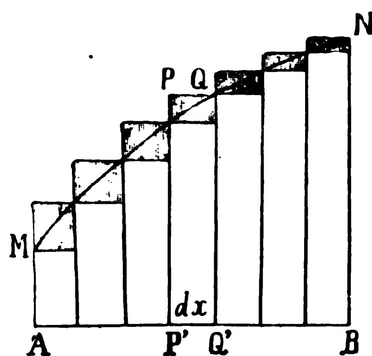


Fig. 21.

$$A_r=(x_{r+1}-x_r)\,y_r=(x_{r+1}-x_r)f(x_r) \text{ i } A_{r+1}=(x_{r+1}-x_r)\,y_{r+1}=(x_{r+1}-x_r)f(x_{r+1}),$$

otrzymamy tedy dwie sumy, jedną:

$$A'=\sum A_r=\sum_{r=0}^{r=n-1}(x_{r+1}-x_r)\,y_r=\sum_{r=0}^{r=n-1}(x_{r+1}-x_r)f(x_r),$$

przedstawiający sumę powierzchni prostokątów wewnętrznych, fig. 22, drugą:

$$A''=\sum A_{r+1}=\sum_{r=0}^{r=n-1}(x_{r+1}-x_r)\,y_{r+1}=\sum_{r=0}^{r=n-1}(x_{r+1}-x_r)f(x_{r+1}),$$

przedstawiający sumę powierzchni prostokątów zewnętrznych fig. 23. Po-

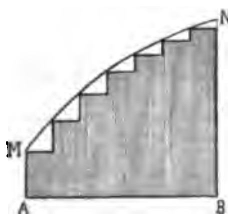


Fig. 22.

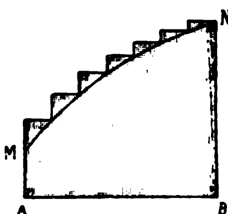


Fig. 23.

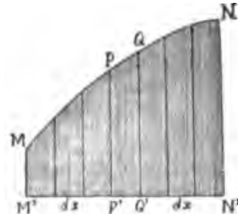


Fig. 24.

wierzchni $AMNB$ odpowiadać będą tedy liczby A zawarte między temi sumami, które w miarę powiększania ilości punktów podziału (fig. 24) zbliżają się coraz bardziej do granicy $A=\int_a^b y\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$.

Całka określona kształtu: $\int_a^b f(x)\,dx$ *przedstawia więc powierzchnię* za-
między krzywą o równaniu $y=f(x)$, *osią x-ów i rzędnemi w punktach* $x=a$ i

6. Wyznaczanie wartości całki określonej odpowiada zatem zad
geometrycznemu obliczania powierzchni linii krzywej.

Jeżeli wartości $f(x_r)$, $f(x_{r+1})$ są liczbami ujemnemi, natenczas pod
żeniem, że wartości $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ są uporządkowane rosnąco, a więc
nice $(x_{r+1}-x_r)$ są dodatnie, iloczyny $(x_{r+1}-x_r)f(x_r)$ i $(x_{r+1}-x_r)f(x_{r+1})$ pr
stawiają ujemne wartości odnośnych prostokątów. Skoro zatem kr
w obrębie odstępu (a, b) wznosi się częściowo nad, a częściowo pod
x-ów, natenczas całka określona $\int_a^b f(x)\,dx$ przedstawia w granicy sumę
braiczną dodatnich i ujemnych powierzchni odnośnych prostokątów.

7. **Uwaga**. Że suma powierzchni prostokątów wewnętrznych i zewnętrznych
wzroście ilości punktów podziału dąży do tej samej granicy niezależnie od rozmiesz
tych punktów, możemy dowieść za pomocą następujących rozważań:

Niech będą $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ spółrzędne punktów podziału odstępu (a, b), przy
$x_0=a$, $x_n=b$, a zarazem $x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n$, natenczas wartościami funkcyi $y=f(x)$ p
stawiającej daną krzywą będą kolejno $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$. Weźmy pod u
odstęp (x_{r-1}, x_r), któremu odpowiada element krzywej $y=f(x)$, ograniczony rzędnemi: f
i $f(x_r)$, natenczas otrzymamy prostokąt wewnętrzny o powierzchni $(x_r-x_{r-1})f$
i zewnętrzny o powierzchni $(x_r-x_{r-1})f(x_r)$. Przyjmijmy, że między rzędnemi punktów
elementu krzywej jest m_r rzędną najmniejszą, a M_r rzędną największą; zastępując
$y_1=f(x_1), y_2=f(x_2), \ldots, y_n=f(x_n)$ przez rzędne najmniejsze $m_1, m_2, \ldots, m_n$ odnośnych odst

otrzymamy sumę: $$A'=\sum_{r=1}^{r=n}(x_r-x_{r-1})\,m_r$$

która będzie mniejszą od sumy: $$A=\sum_{r=1}^{r=n}(x_r-x_{r-1})f(x_r).$$

bo jej dodajniki są mniejsze od odpowiednich dodajników sumy A; zastępując zaś w s
A wartości $y_r=f(x_r)$, $(r=1, 2, \ldots, n)$ przez największe rzędne M_r $(r=1, 2, \ldots, n)$ odnoś
odstępów, otrzymamy sumę:

$$A''=\sum_{r=1}^{r=n}(x_r-x_{r-1})\,M_r \text{ większą od } A. \text{ Będzie więc } A'<A<A''.$$

Jeżeli teraz m jest najmniejszą, a M największą rzędną krzywej $y=f(x)$ w odst
(a, b), to zastępując rzędne najmniejsze m_r $(r=1, 2, \ldots n)$ przez m, otrzymamy:

$$A'=\sum_{r=1}^{r=n}(x_r-x_{r-1})\,m_r > m\sum_{r=1}^{r=n}(x_r-x_{r-1})$$

czyli $A'>m(b-a)$, zastępując podobnie rzędne największe M_r $(r=1, 2, \ldots, n)$ prze
otrzymamy:

$$A''=\sum_{r=1}^{r=n}(x_r-x_{r-1})\,M_r < M\sum_{r=1}^{r=n}(x_r-x_{r-1}) \quad \text{czyli } A''<M(b-a).$$

Otrzymujemy zatem nierówności: $m(b-a)<A'<A<A''<M(b-a)$

Pomyślmy sobie, że pomiędzy punkty podziału $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ odstępu (a, b) pow
wiamy nowe punkty i wykreślimy w nich nowe rzędne krzywej $y=f(x)$, to pozn
z łatwością, że suma A' będzie coraz bardziej rosła, podczas gdy suma A'' będzie coraz b
dziej malała, przyczem suma A' będzie zawsze mniejsza od sumy A''.

Różnica między sumami A' i A'', opartemi na pewnym podziale odstępu (a, b), pr

stawia się w postaci: $$A''-A'=\sum_{r=1}^{r=n}(x_r-x_{r-1})(M_r-m_r).$$

Różnicę między największą a najmniejszą rzędną krzywej w pewnym odstępie nazywamy **chwiejnością** krzywej w tymże odstępie. Kładąc $M_r - m_r = \sigma_r$ otrzymamy:

$$A'' - A' = \sum_{r=1}^{r=n} (x_r - x_{r-1})\sigma_r.$$

Oznaczmy przez σ największą z wartości $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r$, to będzie widocznie:

$$A'' - A' < \sigma \sum_{r=1}^{r=n} (x_r - x_{r-1}), \text{ czyli } A'' - A' < (b-a)\sigma.$$

Zwiększając ilość podziałów danego odstępu, możemy liczbę σ zrobić mniejszą od wszelkiej dowolnie małej liczby, obie sumy A' i A'' dążą więc do jednakowej granicy, a do tej granicy dąży także suma, między nimi leżąca:

$$A = \sum_{r=1}^{r=n} (x_r - x_{r-1}) f(x_r),$$

a granicą tą jest powierzchnia A krzywej, przedstawiona całką określoną

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \sum_{r=1}^{r=n} (x_r - x_{r-1}) f(x_r).$$

8. Metody bezpośredniego obliczania wartości całek określonych. Obliczanie danej całki określonej sprowadza się do obliczania powierzchni linii krzywej. Metody obliczania powierzchni linij krzywych mogą więc zarazem posłużyć do przybliżonego obliczania całek określonych. Dzieląc powierzchnię krzywej $y = f(x)$ za pomocą rzędnych równoległych na elementa, możemy jej powierzchnię A określić w dwojaki sposób:

albo: $$A = \lim_{n=\infty} \sum_{r=1}^{r=n} (x_r - x_{r-1}) f(x_{r-1}) = \int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

albo: $$A = \lim_{n=\infty} \sum_{r=1}^{r=n} (x_r - x_{r-1}) f(x_r) = \int_a^b f(x)\,dx \tag{2}$$

używając do obliczania powierzchni elementów w pierwszym przypadku rzędnych początkowych, a w drugim rzędnych końcowych poszczególnych elementów. Używając do obliczania powierzchni poszczególnych elementów, odpowiadających odstępom $(a, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_{n-1}, b)$, pewne rzędne pośrednie $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$ odpowiadające odcinkom $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$,

a więc: $\eta_1 = f(\xi_1), \; \eta_2 = f(\xi_2), ..., \eta_n = f(\xi_n)$,

gdzie: $a < \xi_1 < x_1, \; x_1 < \xi_2 < x_2, ..., x_{n-1} < \xi_n < b$,

czyli: $\xi_r = x_{r-1} + \theta_r (x_r - x_{r-1})$, przyczem $0 < \theta_r < 1$,

możemy także powierzchnię A krzywej $y = f(x)$ przedstawić w postaci:

$$A = \lim_{n=\infty} \sum_{r=1}^{r=n} (x_r - x_{r-1}) f(\xi_r) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{3}$$

Jeżeli rzędne równoległe $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ odpowiadające punktom $a, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, b$ są zarazem równoodległe, a więc skoro:

$$x_1 - a = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = ... = b - x_{n-1} = h,$$

czyli: $x_1 = a + h, \; x_2 = a + 2h, ..., x_r = a + rh$, gdzie $h = \frac{b-a}{n}$,

wówczas otrzymujemy na obliczenie powierzchni A wzory:

1) $$A = \lim_{n=\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{r=1}^{r=n} f\left[a + (r-1)\frac{b-a}{n}\right] = \lim_{h=0} h \sum_{r=1}^{r=n} f\left[a + (r-1)h\right] = \lim_{h=0} h \sum_{r=1}^{r=n} y_{r-1}$$

$$2)\quad A=\lim_{n=\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{r=1}^{r=n}f\left(a+r\frac{b-a}{n}\right)=\lim_{h=0}h\sum_{r=1}^{r=n}f(a+rh)=\lim h\sum_{r=1}^{r=n}y_r$$

$$3)\quad A=\lim_{n=\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{r=1}^{r=n}f\left[a+(r-\theta_r)\frac{b-a}{n}\right]=\lim_{h=0}h\sum_{r=1}^{r=n}f[a+(r-\theta_r)h]=$$

$$=\lim_{h=0}h\sum_{r=1}^{r=n}\eta_r,\quad 0<\theta_r<1,$$

zależnie od tego czy w poszczególnych elementach używamy do oblic ich powierzchni rzędnych początkowych czy rzędnych końcowych cz jakichkolwiek rzędnych pośrednich.

9. Przykłady bezpośredniego obliczania całek określonych.

1) Obliczyć bezpośrednio całkę $\int_a^b x^2\,dx$, czyli powierzchnię krzywej $y=x^2$, w cach od $x=a$ do $x=b$.

Według wzoru: $$\int_a^b f(x)dx=\lim_{r=\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{r=1}^{r=n}f\left(a+(r-1)\frac{b-a}{n}\right).$$

otrzymujemy tu:

$$\int_a^b x^2\,dx=\lim_{n=\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{r=1}^{r=n}\left(a+(r-1)\frac{b-a}{n}\right)^2=$$

$$=\lim_{n=\infty}\left\{\frac{b-a}{n}\left[a^2+\left(a+\frac{b-a}{n}\right)^2+\left(a+2\frac{b-a}{n}\right)^2+\ldots+\left(a+\overline{n-1}\,\frac{b-a}{n}\right)^2\right]\right.$$

Wykonawszy wskazane działania otrzymamy:

$$\frac{b-a}{n}\sum_{r=1}^{r=n}\left(a+(r-1)\frac{b-a}{n}\right)^2=\frac{b-a}{n}\left\{na^2+\frac{2a(b-a)}{n}\sum_{r=1}^{r=n}(r-1)+\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\sum_{r=1}^{r=n}(r-1)^2\right\},$$

a że: $$\sum_{r=1}^{r=1}(r-1)=1+2+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2},$$

$$\sum_{r=1}^{r=n}(r-1)^2=1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6},$$

przeto będzie:

$$\frac{b-a}{n}\sum_{r=1}^{r=n}\left\{a+(r-1)\frac{b-a}{n}\right\}^2=\frac{b-a}{n}\left\{na^2+a(b-a)(n-1)+(b-a)^2\frac{(n-1)(2n-1)}{6n}\right\}=$$

$$=(b-a)\left\{a^2+a(b-a)\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{(b-a)^2}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\right\},$$

zatem:

$$\lim_{n=\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{r=1}^{r=n}\left\{a+(r-1)\frac{b-a}{n}\right\}^2=(b-a)\left\{a^2+a(b-a)+\frac{(b-a)^2}{3}\right\}=$$

$$=(b-a)\left\{ab+\frac{(b-a)^2}{3}\right\}=\frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3}=\frac{b^3-a^3}{3},$$

czyli: $$\int_a^b x^2\,dx=\frac{b^3-a^3}{3},$$

zgodnie z wynikiem otrzymanym za pośrednictwem całki nieokreślonej w postaci:

$$\int_a^b x^2\,dx=\left|\frac{x^3}{3}\right|_a^b=\frac{b^3-a^3}{3}.$$

2) Obliczyć bezpośrednio całkę określoną $\int_a^b e^x dx$, czyli powierzchnią logarytmiki $y = e^x$ w granicach od $x = a$ do $x = b$. Mamy tu pod założeniem $nh = b - a$,

$$\int_a^b e^x dx = \lim_{h=0} h \left\{e^a + e^{a+h} + \ldots + e^{a+(n-1)h}\right\},$$

że:

$$h\left\{e^a + e^{a+h} + \ldots + e^{a+(n-1)h}\right\} = h e^a \left\{1 + e^h + e^{2h} + \ldots + e^{(n-1)h}\right\} =$$

$$= h e^a \frac{e^{nh} - 1}{e^h - 1} = \frac{h}{e^h - 1}(e^{nah} - e^a) = \frac{h e^a}{e^h - 1}(e^{b-a} - 1) = \frac{h}{e^h - 1}(e^b - e^a),$$

przeto:

$$\int_a^b e^x dx = \lim_{h=0} \frac{h}{e^h - 1}(e^b - e^a) = e^b - e^a \lim_{h=0} \frac{h}{e^h - 1}$$

stąd ze względu na to, że $\lim_{h=0} \frac{h}{e^h - 1} = 1$, otrzymujemy: $\int_a^b e^x dx = e^b - e^a$.

3) Obliczyć bezpośrednio całkę określoną $\int_a^b \sin x\, dx$, czyli powierzchnię sinusoidy $y = \sin x$ w granicach od $x = a$ do $x = b$.

Mamy tu:

$$\int_a^b \sin x\, dx = \lim_{h=0} h \sum_{r=0}^{r=n-1} \sin(a + rh),$$

a że:

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} \sin(a + rh) = \frac{1}{2\sin\frac{h}{2}} \sum_{r=0}^{r=n-1} 2\sin(a + rh) \cdot \sin\frac{h}{2} =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{h}{2}} \sum_{r=0}^{r=n-1} \left\{\cos\left(a + \frac{2r-1}{2}h\right) - \cos\left(a + \frac{2r+1}{2}h\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{h}{2}} \left\{\cos\left(a - \frac{h}{2}\right) - \cos\left(a + \frac{2n-1}{2}h\right)\right\} = \frac{1}{\sin\frac{h}{2}} \sin\left(a + \frac{n-1}{2}h\right) \cdot \sin\frac{nh}{2},$$

przeto:

$$\int_a^b \sin x\, dx = \lim_{h=0} \frac{h}{\sin\frac{h}{2}} \cdot \sin\left\{a + \frac{n-1}{2}h\right\} \sin\frac{nh}{2}.$$

Mając na uwadze, że $nh = b - a$, a więc $a + \frac{n-1}{2}h = a + \frac{nh}{2} - \frac{h}{2} = a + \frac{b-a}{2} - \frac{h}{2} = \frac{a+b}{2} - \frac{h}{2}$, otrzymujemy z powyższego wzoru:

$$\int_a^b \sin x\, dx = \lim_{h=0} \frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}} \cdot 2\sin\left(\frac{a+b}{2} - \frac{h}{2}\right)\sin\frac{a-b}{2},$$

a że: $\lim_{h=0} \frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}} = 1$; $\lim_{h=0} 2\sin\left(\frac{a+b}{2} - \frac{h}{2}\right)\sin\frac{a-b}{2} = 2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} = \cos a - \cos b$,

przeto otrzymujemy ostatecznie:

$$\int_a^b \sin x\, dx = \cos a - \cos b$$

zgodnie z wzorem pośrednim:

$$\int_a^b \sin x\, dx = \Big|_a^b (-\cos x) = -\cos b + \cos a.$$

10. Przybliżone metody obliczania powierzchni zastosowane do przybliżonych metod obliczania całek określonych. Przyjmując we wzorach poda-

nych w art. 8. liczbę n dostatecznie wielką (ale nie nieskończenie wielką) a zatem liczbę $h=\frac{b-a}{n}$ dostatecznie małą, (ale nie nieskończenie małą, czyli nie równą zeru), otrzymamy dla obliczenia powierzchni, względnie dla obliczenia całki określonej wzory przybliżone w postaci:

$$A=\int_a^b f(x)\,dx=h\sum_{r=1}^{r=n} f(a+(r-1)h)=h[f(a)+f(a+h)+\ldots+f(b-h)] \qquad (4)$$

względnie:

$$A=\int_a^b f(x)\,dx=h\sum_{r=1}^{r=n} f(a+rh)=h[f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(b)] \qquad (5)$$

które dają wyniki tem dokładniejsze, im mniejszy odstęp h, czyli większą liczba n podziałów.

Oznaczając rzędne krzywej $y=f(x)$ odpowiadające odcinkom a, $a+h$, ..., $a+rh$, ..., b, przez y_0, y_1, ..., y_r, ..., y_n przedstawiamy powyższe wzory w postaci:

$$A=\int_a^b f(x)\,dx=h(y_0+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}) \qquad (4')$$

względnie:

$$A=\int_a^b f(x)\,dx=h(y_1+y_2+\ldots+y_n) \qquad (5')$$

11. Wzór trapezowy przybliżonego obliczania całek określonych. Używając powyższych wzorów do przybliżonego obliczania powierzchni z jednej strony krzywolinijnie ograniczonej, poznamy z łatwością, że otrzymamy tu raz za małą, a raz za wielką wartość. Bardziej przybliżony wzór otrzymamy, przyjmując w każdym z trapezów (fig. 25), na które powierzchnia przez równoległe rzędne została podzieloną, rzędną środkową: $\eta_r=\frac{y_{r-1}+y_r}{2}$, otrzymamy tedy wzór przybliżony na powierzchnię:

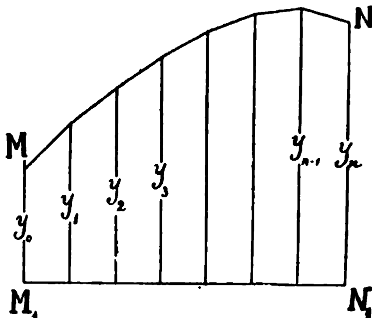


Fig. 25.

$$A=h(\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_n),$$

czyli:

$$A=h\left[\frac{y_0+y_1}{2}+\frac{y_1+y_2}{2}+\ldots+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right],$$

a stąd t. zw. wzór trapezowy:

$$A=h\left[\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right] \qquad (6)$$

używany w geodezyi przy obliczaniu powierzchni parcel z jednej strony krzywolijnie ograniczonych.

Stosując ten wzór do obliczania wartości całki określonej kształtu: $\int_a^b f(x)\,dx$ i kładąc $b-a=nh$, przedstawimy go w postaci:

$$\int_a^b f(x)\,dx=h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(b-h)\right] \qquad (6')$$

12. Powyższy wzór możemy także w inny sposób przedstawić. Podzielmy nianowicie odstęp (a, b) na parzystę ilość $(2n)$ równych części, połóżmy $\frac{b-a}{2n}=h$ i wyznaczmy tylko rzędne nieparzyste $y_1, y_3, \ldots, y_{2n-1}$, natenczas, uważając powierzchnię jako podzieloną na n trapezów o szerokości $2h$, otrzymamy wzór przybliżony na powierzchnię w postaci:

$$A=2h(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1}) \qquad (7)$$

a stąd analogiczny wzór przybliżony na obliczenie całki określonej w postaci:

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{n}[f(a+h)+f(a+3h)+\ldots+f(a+(2n-1)h)] \qquad (7')$$

13. **Wzór Simpsona.** Podzielmy powierzchnię krzywej MN fig. 26. za pomocą rzędnych $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$ równoległych i równooddalonych na $2n$ części o szerokości $h=\frac{b-a}{2n}$. Przeprowadźmy przez trzy punkta po sobie następujące $M(0, y_0)$, $M'(h, y_1)$, $M''(2h, y_2)$ parabolę o równaniu:

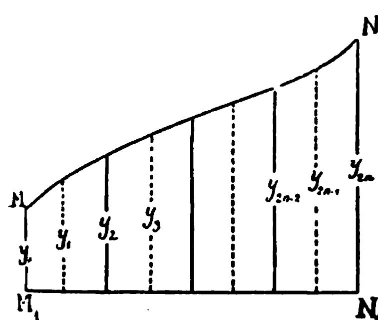


Fig. 26.

$$y=\alpha x^2+\beta x+\gamma,$$

to na wyznaczenie niewiadomych spółczynników α, β, γ otrzymujemy trzy równania warunkowe:

$$y_0=\gamma,\ y_1=\alpha h^2+\beta h+\gamma,\ y_2=4\alpha h^2+2\beta h+\gamma.$$

Powierzchnia części powierzchni (y_0, y_2), ograniczonej tą parabolą, osią x-ów i rzędnemi y_0 i y_2 otrzymuje wartość:

$$\int_0^{2h} y\,dx=\int_0^{2h}(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\,dx=\Big|_0^{2h}\left(\frac{\alpha x^3}{3}+\frac{\beta x^2}{2}+\gamma x\right)=\frac{8\alpha h^3}{3}+\frac{4\beta h^2}{2}+2\gamma h,$$

czyli:

$$\int_0^{2h} y\,dx=\frac{h}{3}(8\alpha h^2+6\beta h+6\gamma),$$

a że: $8\alpha h^2+6\beta h+6\gamma=\gamma+4(\alpha h^2+\beta h+\gamma)+(4\alpha h^2+2\beta h+\gamma)=y_0+4y_1+y_2$,

przeto powierzchnia jednej części o szerokości $2h$, ograniczonej parabolą i dwiema rzędnemi przedstawia się w postaci:

$$(y_0, y_2)=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2).$$

Na tej podstawie otrzymujemy kolejno powierzchnie poszczególnych n części, z których każda ma szerokość $2h$, wyznaczone wzorami:

$$(y_0, y_2)=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)$$

$$(y_2, y_4)=\frac{h}{3}(y_2+4y_3+y_4)$$

. . . .

$$(y_{2n-2}, y_{2n})=\frac{h}{3}(y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n}),$$

skąd otrzymujemy na wyznaczenie całkowitej powierzchni wzór przybliżony

$$A=\frac{h}{3}\left[y_0+y_{2n}+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1})+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2})\right] \qquad (8)$$

znany pod nazwą wzoru Simpsona.

Uważając rzędne: $y_0, y_1, \ldots, y_{2n}$ jako wartości funkcyi: $y=f(x)$, gdy $x=a$, $a+h, \ldots, a+(2n-1)h$, b, a więc kładąc:

$$y_0=f(a),\ y_1=f(a+h),\ y_2=f(a+2h), \ldots, y_{2n-1}=f[a+(2n-1)h],\ y_{2n}=f(b),$$

gdzie $h=\frac{b-a}{2n}$, otrzymamy wzór Simpsona, podający przybliżoną wartość całki określonej w postaci:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{2n}\left[f(a)+f(b)+4\{f(a+h)+\ldots+f(a+(2n-1)h)\}+\right.$$
$$\left.+2\{f(a+2h)+\ldots+f(a+(2n-2)h\}\right]. \qquad (9)$$

14. Uogólnienie wzoru Simpsona. Postępowanie przy wyprowadzaniu wzoru Simpsona, polegające na tem, że zamiast uważać łuki danej krzywej za linie proste, zastępujemy je łukami parabol zwróconych w kierunku rzędnych, możemy uogólnić w ten sposób, że daną krzywą, której powierzchnię obliczyć mamy, zastępujemy przez krzywą prostszą, któraby miała z daną krzywą pewną ilość punktów wspólnych.

Jako takie krzywe prostsze wskazane są krzywe paraboliczne o równaniach:

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n,$$

każda taka krzywa jest wyznaczona $(n+1)$ punktami. Obierzmy tedy na danej krzywej $(n+1)$ punktów (x_0, y_0), $(x_1, y_1), \ldots, (x_r, y_r), \ldots, (x_n, y_n)$, to otrzymamy na wyznaczenie krzywej parabolicznej przez te punkta przechodzącej według wzoru Lagrange'a (patrz T. I. str. 419) wzór:

$$y=\sum_{r=0}^{r=n} y_r\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{r-1})(x-x_{r+1})\ldots(x-x_n)}{(x_r-x_0)(x_r-x_1)\ldots(x_r-x_{r-1})(x_r-x_{r+1})\ldots(x_r-x_n)},$$

który, gdy położymy $(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)=\psi(x)$, przedstawia się w postaci:

$$y=\sum_{r=0}^{r=n}\frac{\psi(x)}{\psi'(x_r)(x-x_r)}y_r;$$

otrzymamy tedy na wyznaczenie powierzchni danej krzywej $y=f(x)$ wzór przybliżony:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{r=0}^{r=n} y_r\int_a^b\frac{\psi(x)\,dx}{\psi'(x_r)(x-x_r)}=\sum_{r=0}^{r=n} A_r y_r$$

czyli:

$$\int_a^b f(x)\,dx=y_0\int_a^b\frac{\psi(x)}{\psi'(x_0)(x-x_0)}dx+y_1\int_a^b\frac{\psi(x)}{\psi'(x_1)(x-x_1)}dx+\ldots+y_n\int_a^b\frac{\psi(x)}{\psi'(x_n)(x-x_n)}dx,$$

a więc:

$$\int_a^b f(x)\,dx=A_0y_0+A_1y_1+\ldots+A_ny_n,$$

gdzie spółczyniki A_0, $A_1, \ldots, A_n$ są wartościami powyższych całek określonych, a więc zależnemi od podziału odstępu (a, b).

Zazwyczaj przyjmuje się punkta podziału w równych odstępach: $x_1-x_0=x_2-x_1=\ldots=x_n-x_{n-1}=h=\frac{b-a}{n}$, mamy tedy $x_r=x_0+rh$, a powyższy wzór sprowadza się tedy do postaci:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{r=0}^{r=n} y_r\int_a^b\frac{\psi(x)}{\psi'(a+rh)(x-a-rh)}dx. \qquad (10)$$

15. Średnia wartość funkcyi w danym odstępie. Niech m przedstawia miejszą, a M największą wartość funkcyi $f(x)$ w odstępie (a, b), innemi y niech m przedstawia najmniejszą, a M największą rzędną krzywej $f(x)$ w odstępie od $x=a$ do $x=b$, tedy każda powierzchnia oparta na akolwiek podziale odstępu (a, b) będzie miała taką wartość A, że:

$$(b-a)\,m < A < (b-a)\,M,$$

ięc także w przypadku, gdy: $A=\int_a^b f(x)\,dx$

ie:

$$(b-a)\,m < \int_a^b f(x)\,dx < (b-a)\,M,$$

n:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,\mu \qquad (11)$$

μ jest pewną liczbą między m i M zawartą.

To znaczy: *Między najmniejszą wartością m, a największą wartością M, funkcya $f(x)$ w odstępie (a, b) przyjmuje, leży koniecznie pewna liczba μ taka,* $f(x)\,dx=(b-a)\,\mu$.

Liczba μ będzie widocznie wartością funkcyi $f(x)$ w pewnem miejscu m między a i b. Oznaczmy to miejsce przez $a+\theta(b-a)$, gdzie $0<\theta<1$. dzie $\mu=f[a+\theta(b-a)]$, a wzór (11) możemy przedstawić w postaci:

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\,f[a+\theta(b-a)] \qquad (12)$$

Liczbę μ możemy także przedstawić w postaci:

$$\mu=\lim_{n=\infty}\frac{f(a)+f(a+h)+\ldots+f(b-h)}{n}, \text{ gdzie } h=\frac{b-a}{n}$$

ywamy ją z tego powodu średnią wartością funkcyi $f(x)$ w odie od $x=a$ do $x=b$.

Na jej wyznaczenie otrzymujemy tedy na podstawie (11) wzór:

$$\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \qquad (13)$$

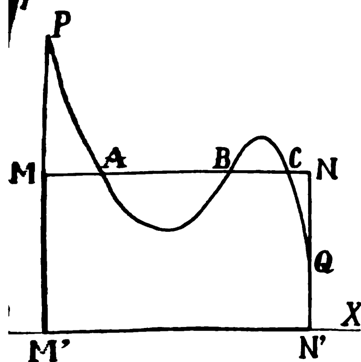


Fig. 27.

Jeżeli $f(x)$ przedstawia rzędną krzywej PQ, odpowiadającą odcinkowi x, to liczba μ przedstawia średnią rzędną krzywej PQ, a zarazem wysokość prostokąta, opartego na podstawie $M'N'=b-a$, mającego tę samą powierzchnię, co krzywa $PQM'N'$ (fig. 27). Zastępując we wzorze:

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\,f[a+\theta(b-a)]$$

dx przez $\varphi(x)\,dx$, zatem $\int_a^b dx=(b-a)$ przez: $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ otrzymujemy wzór:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=f[a+\theta(b-a)]\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

uogólnienie wzoru 13.

16. Reszta szeregu Taylora w postaci całki określonej. Resztę R_n szeregu Taylora: $f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)+R_n$ możemy przedstawić w postaci całki określonej.

Połóżmy bowiem:

$$F(z)=f(x-z)+zf'(x-z)+\frac{z^2}{2!}f''(x-z)+\ldots+\frac{z^n}{n!}f^{(n)}(x-z), \qquad (a)$$

tedy różniczkując tę funkcyę podług z znajdujemy:

$$F'(z)=-\frac{z^n}{n!}f^{(n+1)}(x-z)$$

ztąd otrzymujemy:

$$\int_a^h F'(x)\,dx=-\frac{1}{n!}\int_a^h z^n f^{(n+1)}(x-z)\,dz \qquad (b)$$

A że:
$$\int_0^h F'(x)\,dx=\Big|_0^h F(x)=F(h)-F(0),$$

a na mocy podstawienia (a) mamy:

$$F(h)=f(x-h)+hf'(x-h)+\frac{h^2}{2!}f''(x-h)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x-h),\quad F(0)=f(x),$$

przeto otrzymujemy z (b) równość:

$$f(x-h)+hf'(x-h)+\frac{h^2}{2!}f''(x-h)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x-h)-f(x)=-\frac{1}{n!}\int_0^h z^n f^{(n+1)}(x-z)\,d$$

Zastępując w niej x przez $x+h$ dostajemy:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)+\frac{1}{n!}\int_0^h z^n f^{(n+1)}(x+h-z)\,dz$$

przeto wzór:
$$R_n=\frac{1}{n!}\int_0^h z^n f^{(n+1)}(x+h-z)\,dz \qquad (14)$$

przedstawiający resztę szeregu Taylora w postaci całki określonej.

Stosując do całki określonej $\int_0^h z^n f^{(n+1)}(x+h-z)\,dz$ twierdzenie o średnie wartości (art. 15. str. 895) otrzymujemy:

$$\frac{1}{n}\int_0^h z^n f^{(n+1)}(x+h-z)\,dz=\Theta^n h^n f^{(n+1)}(x+h-\Theta h),\ \text{gdzie}\ \Theta<1,$$

zatem:

$$R_n=\int_0^h z^n f^{(n+1)}(x+h-z)\,dz=\frac{\Theta^n h^{n+1}}{n!}f^{(n+1)}(x+h-\Theta h)$$

czyli po podstawieniu $1-\Theta$, zamiast Θ: $R_n=\frac{h^{n+1}}{n!}(1-\Theta)^n f^{(n+1)}(x+\Theta h)$,

t. zw. resztę Cauchy'ego (tom I. str. 520).

Stosując zaś do powyższej całki wzór ogólny:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=f[a+\Theta(b-a)]\int_a^b\varphi(x)\,dx,$$

otrzymujemy:

$$\int_0^h z^n f^{(n+1)}(x+h-z)\,dz=f^{(n+1)}(x+h-\Theta h)\int_0^h z^n\,dz=\frac{h^{n+1}}{n+1}f^{(n+1)}(x+h-\Theta h),\quad \Theta<1,$$

zatem:
$$R_n=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x+h-\Theta h),$$

czyli kładąc $1-\Theta=\Theta_1$:
$$R_n=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x+\Theta_1 h),$$

t. zw. resztę Lagrange'a (T. I. str. 519).

Ćwiczenia XXXVII.

Wyznaczyć tak krzywe różniczkowe, jak i krzywe całkowe, zarówno rachunkiem jak **drogą graficzną** dla krzywych o równaniach:

1) $y=\frac{1}{2}x^2$. 2) $y=\frac{1}{8}x^3$. 3) $y=\frac{1}{4}x^4$, 4) $y=2x^{1/2}$,

5) $y=\frac{2}{3}x^{3/2}$, 6) $y=\frac{1}{x}$, 7) $y=e^x$, 8) $y=\log x$,

9) $y=\sin x$, 10) $y=\cos x$, 11) $y=\operatorname{tang} x$, 12) $y=\operatorname{cotg} x$.

Wykreślić krzywe różniczkowe następujących linij:

13) linii prostej, 14) koła, 15) ellipsy, 16) hiperboli, 17) paraboli.

Wykreślić krzywą całkową, przechodzącą przez dany punkt a odpowiadającą:

18) linii prostej, 19) kołu, 20) ellipsie, 21) hyperboli, 22) paraboli.

Wykreślić następujące krzywe i obliczyć powierzchnie zawarte między niemi a osią **w granicach** od $x=0$ do $x=1$:

24) $y=\frac{1}{1+x^2}$, 25) $y=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$, 26) $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 27) $y=\sqrt{1-x^2}$,

28) $y=x\sqrt{1-x^2}$, 29) $y=x^2\sqrt{1-x^2}$, 30) $y=x^3\sqrt{1-x^2}$,

31) $y=\frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}$, 32) $y=\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}$, 33) $y=x\log x$,

34) $y=x^2\log x$, 35) $y=1+x-x^2+x^3$.

Wykreślić następujące krzywe i obliczyć powierzchnie zawarte między niemi a osią **w granicach** od $x=0$ do $x=\infty$:

36) $y=\frac{1}{a^2+x^2}$, 37) $y=e^{-x}$, 38) $y=e^{-x}\sin x$, 39) $y=e^{-x}\cos x$,

40) $y=e^{-2x}\sin x$, 41) $y=xe^{-x}\sin x$, 42) $y=e^{-ax}$, 43) $y=xe^{-x}$,

44) $y=x^2e^{-x}$.

Wykreślić następujące krzywe i obliczyć powierzchnie zawarte między niemi a osią **w granicach** od $x=0$ do $x=\frac{\pi}{2}$:

45) $y=\sin x$, 46) $y=\cos x$, 47) $y=\sin^2 x$, 48) $y=\cos^2 x$,

49) $y=\sin^3 x$, 50) $y=\cos^3 x$, 51) $y=\frac{1}{1+\sin^2 x}$, 52) $y=\frac{1}{(1+\sin^2 x)^2}$,

53) $y=\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$, 54) $y=\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}$.

Obliczyć wartości następujących całek określonych i podać ich znaczenie geometryczne:

55) $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2}}$, 56) $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, 57) $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$,

58) $\int_a^{2a} \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$, 59) $\int_0^{2a}\sqrt{2ax-x^2}\,dx$, 60) $\int_0^{2a} x\sqrt{2ax-x^2}\,dx$,

61) $\int_0^{2a} x^2\sqrt{2ax-x^2}\,dx$, 62) $\int_0^a \frac{x^2\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}}\,dx$, 63) $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$,

64) $\int_0^a \frac{x^{5/2}}{\sqrt{a-x}}\,dx$, 65) $\int_0^{2a}\frac{x\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$, 66) $\int_0^a \frac{(a^2-c^2x^2)\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$,

67) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos^3 x\,dx$, 68) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\cos^4 x}$, 69) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}$,

70) $\int_0^1 \frac{dx}{1+2x\cos\alpha+x^2}$, 71) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+2x\cos\alpha+x^2}$, 72) $\int_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)(c^2+x^2)}$,

Wykazać, że:

73) $\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx = \frac{n(n-1)(n-2)\dots 1}{(m+1)(m+2)\dots(m+n-1)}$,

74) $\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = \frac{2.4.6\dots 2n}{3.5.7\dots(2n+1)}$, 75) $\int_0^1 \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n}\,\frac{\pi}{2}$.

76) $\int_0^1 \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2.4.6\dots 2n}{3.5.7\dots(2n+1)}$, 77) $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1.3.5\dots(2n-3)}{2.4.6\dots(2n-2)}\cdot\frac{\pi}{2}$,

78) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1}x\cos^n x\,dx = \frac{2.4.6\dots 2m}{(n+1)(n+3)\dots(n+2m+1)}$,

79) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}x\cos^{2n-1}x\,dx = \frac{1.2.3\dots(m-1)}{n(n+1)\dots(n+m+1)}$,

80) $\lim_{n=\infty}\left\{\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\dots+\frac{n}{2n^2}\right\}=\frac{\pi}{4}$,

81) $\lim_{n=\infty}\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right\}=\frac{\pi}{2}$.

Wyprowadzić następujące wzory przybliżone na wyznaczanie całek określonych i podać ich znaczenie geometryczne:

82) $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left\{f(a)+2f(a+h)+\dots+2f(b-h)+f(b)\right\}$,

83) $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left\{f(a)+f(b)+4[f(a+h)+f(a+3h)+\dots+f(b-h)]+\right.$

$\left.+2[f(a+2h)+f(a+4h)+\dots+f(b-2h)]\right\}$.

85) **Wykreślić krzywą $y=\frac{1}{x}$ i obliczyć jej powierzchnię w granicach $x=1$ do $x=2$ za pomocą wzoru trapezowego i wzoru Simpsona przy użyciu 12-tu rzędnych równoodległych.**

Za pomocą wzoru Simpsona obliczyć z dokładnością na 3 miejsca dziesiętne wartości następujących całek określonych, a wynik uzmysłowić rysunkiem:

85) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$, 86) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, 87) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, 88) $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$,

89) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,dx}{\sin x}$, 90) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}}$.

Wykazać, że:

91) $\frac{\pi}{2} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} < \frac{\pi}{2\sqrt{1-k^2}}$, 92) $0 < \int_0^1 x^2 e^{-x^2}\,dx < \frac{1-e}{2e}$,

93) **Jeżeli $g(x)$ jest funkcyą całkowitą stopnia najwyżej trzeciego, wykazać, że:**

$$\int_a^b g(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[g(a)+4g\left(\frac{a+b}{2}\right)+g(b)\right].$$

Wyprowadzić następujące wzory przybliżone:

94) $\int_a^b y\,dx = \frac{b-a}{6}(y_0+4y_1+y_2)$, 95) $\int_a^b y\,dx = \frac{b-a}{8}(y_0+3y_1+3y_2+y_3)$,

96) $\int_a^b y\,dx = \frac{b-a}{90}\left\{7y_0+13y_1+11y_2+32y_3+7y_4\right\}$,

97) $\int_a^b y\,dx = A_0y_0+A_1y_1+\dots+A_ny_n$,

gdzie: $A_r = \int_a^b \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{r-1})(x-x_{r+1})\dots(x-x_n)\,dx}{(x_r-x_0)(x_r-x_1)\dots(x_r-x_{r-1})(x_r-x_{r+1})\dots(x_r-x_n)}$.

98) **Wykreślić krzywą $y=\sqrt{\frac{4-x^2}{1-x^2}}$ i obliczyć za pomocą wzoru Simpsona jej powierzchnię A w granicach od $x=0$ do $x=1$.**

Wyznaczyć średnią wartość funkcyi $f(x)$ w odstępie (a, b), jeżeli:

99) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}}$, $a=0$, $b=4$, 100) $f(x)=\frac{1}{1+\alpha^2 \operatorname{tang}^2 x}$, $a=0$, $b=\frac{\pi}{2}$,

101) $f(x)=\sin^2 x$, $a=0$, $b=\frac{\pi}{2}$, 102) $f(x)=(\cos 2x)^{3/2} . \cos x$, $a=-\frac{\pi}{4}$, $b=\frac{\pi}{4}$.

103) Podzieliwszy średnicę półkola o promieniu r na części nieskończenie małe między sobą równe, znaleźć średnią arytmetyczną odpowiednich rzędnych.

Rozwiązania XXXVII. 2) fig. 29. 6) fig. 31, 8) fig. 34, 9) fig. 30), 13) fig. 28, 14) fig. 32. 18) fig. 28. 19) fig. 33. 24) $\frac{\pi}{4}$. 25) 2. 26) $\frac{\pi}{2}$. 27) $\frac{\pi}{4}$. 28) $\frac{1}{3}$. 29) $\frac{\pi}{16}$.

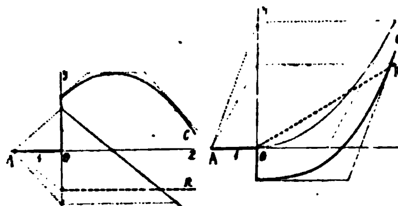
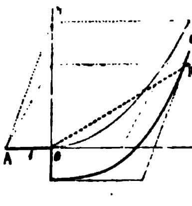
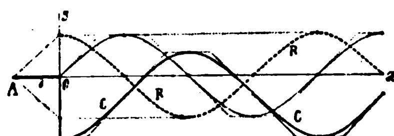




Fig. 28. Fig. 29. Fig. 30.

30) $\frac{2}{15}$. 31) $\frac{3\pi}{16}$. 32) $\frac{8}{15}$. 33) $-\frac{1}{4}$. 34) $-\frac{1}{9}$. 35) $\frac{17}{12}$. 36) $\frac{\pi}{2a}$. 37) 1. 38) $\frac{1}{2}$.

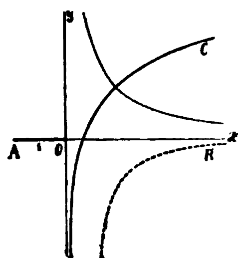
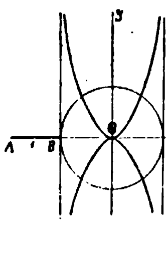
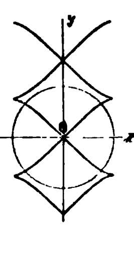
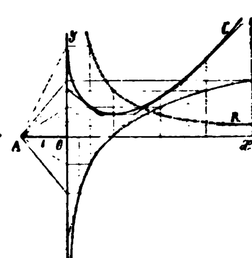





Fig. 31. Fig. 32. Fig. 33. Fig. 34.

39) $\frac{1}{2}$. 40) $\frac{1}{5}$. 41) $\frac{1}{2}$. 42) $\frac{1}{a}$. 43) 1. 44) 2. 45) 1. 46) 1. 47) $\frac{\pi}{4}$. 48) $\frac{\pi}{4}$.

49) $\frac{2}{3}$. 50) $\frac{2}{3}$. 51) $\frac{\pi}{4}$. 52) $\frac{5\pi}{32}$. 53) $\frac{\pi}{4}$. 54) $\frac{\pi^2}{4}$. 55) $3\sqrt[3]{b-a}$. 56) π.

57) $\log \frac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a}$. 58) $\log\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$. 59) $\frac{\pi a^2}{2}$. 60) $\frac{\pi a^3}{2}$. 61) $\frac{7\pi a^5}{8}$. 62) $\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\right)a^2$.

63) π. 64) $\frac{5a^3\pi}{16}$. 65) $a\pi$. 66) $\frac{a^2\pi}{2}\left(1-\frac{c^2}{2}\right)$. 67) $\frac{3}{10}\left(e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$. 68) $\frac{4}{3}$. 69) $\sqrt{2}-1$.

70) $\frac{\alpha}{2\sin\alpha}$. 71) $\frac{\alpha}{\sin\alpha}$. 72) $\frac{\pi}{2ab(a+b)}$. 80) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. 81) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

84) $\log 2 = 0·69315...$ 85) 0·693... 86) 0·785.. 87) 0·514... 88) 0·747... 89) 0·814... 90) 1·854...

93) Przyjąwszy $n=6$, otrzymujemy $A=2·984924$. 99) $\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)$. 100) $\frac{1}{1+\alpha}$. 101) $\frac{1}{2}$.

102) $\frac{3}{8}\sqrt{2}$. 103) $\frac{\pi}{4}r$.

Literatura. Br. Abdank-Abakanowicz. Les integraphes, la courbe integrale et les applications. Paris 1866. Dr. Ludwig Kiepert: Grundriss der Differential und Integralrechnung II. Theil. Integralrechnung. Hannover 1900. Chr. Nehl: Über graphische Integration und ihre Anwendung in der graphischen Statik. Leipzig 1885. Benjamin Wiliamson: An elementary treatise on the integral calculus. London 1875.

Tematy do rozpraw naukowych:

1) Przybliżone metody obliczania całek określonych.
2) Teorya całkowania graficznego z zastosowaniami.
3) Wyprowadzenie szeregu Taylora metodą średniej wartości funkcyj.

Wykład XXXVIII.

Powierzchnie jako obrazy geometryczne funkcyj dwu zmiennych niezależnych.

1. Obraz geometryczny funkcyi dwu zmiennych niezależnych. Niech będzie daną zmienna z, jako funkcya dwu zmiennych niezależnych x i y w postaci:

$$z=f(x, y) \tag{1}$$

to możemy ją sobie uzmysłowić geometrycznie punktami (x, y, z) w przestrzeni. W tym celu przyjmujemy na x i y pewne wartości, które uważamy jako dwie spółrzędne punktu P przestrzeni, a z danego równania (1) wyznaczamy wartość na z, którą uważamy jako trzecią spółrzędną tegoż punktu. Odcinając tedy (fig. 35) $OP_x=x$, $P_xP'=y$, $P'P=z$, otrzymamy pewien punkt P w przestrzeni, którego spółrzędne sprawdzają dane równanie. Przyjmując rozmaite inne wartości na x i y i wyznaczając z danego równania odpowiednie wartości na z poznamy, że otrzymujemy w ogólności ∞^2 punktów przestrzeni, które utworzą pewną formę dwuwymiarową w przestrzeni, zwaną p o w i e r z c h n i ą o równaniu $z=f(x, y)$.

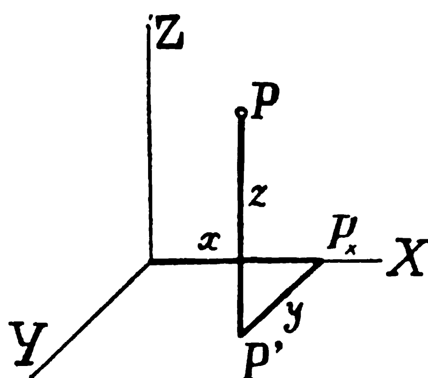


Fig. 35.

A zatem: *Wszelka funkcya dwu zmiennych niezależnych x, y, innemi słowy wszelkie równanie o trzech zmiennych x, y, z przedstawia pewną powierzchnię w przestrzeni.*

Nawzajem: *Każdej powierzchni odpowiada pewna funkcya dwu zmiennych niezależnych x, y, czyli pewne równanie o trzech zmiennych x, y, z, które nazywamy równaniem tej powierzchni.*

2. Kształt powierzchni określonej danem równaniem. Ażeby sobie wyrobić wyobrażenie o kształcie powierzchni, określonej danem równaniem $z=f(x, y)$, badamy przekroje tej powierzchni płaszczyznami spółrzędnemi, jako też płaszczyznami do nich równoległemi.

I tak, kładąc $z=0$ otrzymamy przekrój danej powierzchni płaszczyzną (poziomą) XOY, określony równaniem $f(x, y)=0$. Kładąc zaś $z=h$ otrzymamy przekrój danej powierzchni płaszczyzną równoległą do płaszczyzny (poziomej) XOY w oddaleniu h, określony równaniem $f(x, y)=h$.

Kładąc $y=0$ otrzymamy przekrój danej powierzchni płaszczyzną (pio-ną) ZOX, określony równaniem: $z=f(x, 0)$, a dla $y=k$ otrzymamy przekrój powierzchni płaszczyzną równoległą do płaszczyzny (pionowej) ZOX w od-ie równym k, określony równaniem $z=f(x, k)$. Kładąc wreszcie $x=0$ ymamy przekrój danej powierzchni płaszczyzną (boczną) ZOY, określony aniem $z=f(0, y)$, a dla $x=l$, otrzymamy przekrój tej powierzchni pła-yzną równoległą do płaszczyzny (bocznej) ZOY w odstępie równym l, ślony równaniem $z=f(l, y)$. W ten sam sposób możemy zbadać kształt ierzchni określonej równaniem uwikłanem w postaci:

$$F(x, y, z)=0 \qquad (2)$$

Wyznaczywszy przekroje równoległe do jednej z płaszczyzn współrzędych rowadzone w równych odstępach stosownie dobranych możemy za po-ą tak otrzymanych krzywych przekrojów sporządzić model powierzchni em równaniem określonej.

3. Przykłady badania kształtu powierzchni określonej równaniem wyraźnem. Zbadać ałt powierzchni określonej równaniem $z=xy$. Przekrój tej powierzchni płaszczyzną ową $z=0$ przedstawia się równaniem $xy=0$ i składa się z dwu prostych $x=0$

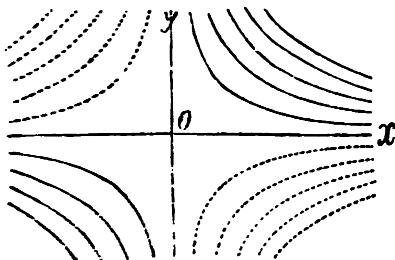


Fig. 36.

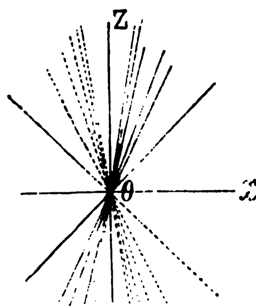


Fig. 37.

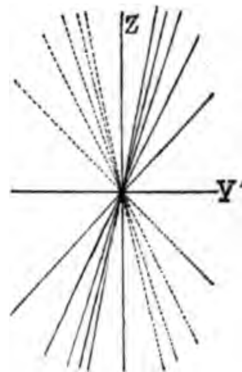


Fig. 38.

osi y-ów i $y=0$, t. j. osi x-ów, przekrój równoległy do płaszczyzny XOY w odstępie h określa się równaniem $xy=h$ i przedstawia hyperbolę równoboczną odniesioną do OX i OY jako asymptot (fig. 36). Przekrój tej powierzchni płaszczyzną pionową $y=0$ śla się równaniem $z=0$, przedstawiając oś x-ów, przekrój równoległy do XOZ w od-pie $y=k$ określa się równaniem $z=kx$ i przedstawia prostą nachyloną do osi x-ów kątem α, dla którego tang $\alpha=k$ (fig. 37).

Przekrój danej powierzchni płaszczyzną boczną $x=0$ określa się równaniem $z=0$ i przedstawia oś y-ów, przekrój równoległy do YOZ w odstępie $x=l$ określa się równaniem $z=ly$ i przedstawia prostą nachyloną do osi y-ów pod kątem β, dla którego tang $\beta=l$ (fig 38). Przekroje danej powierzchni płaszczyznami równoległemi do płaszczyzny XOY są więc hyperbolami równobocznemi, przekroje równoległe do płaszczyzn XOZ i YOZ są zaś liniami prostemi. Powierzchnia ma więc na sobie dwa szeregi prostych, z których jeden szereg jest równoległy do płaszczyzny pionowej ZOX, drugi do płaszczyzny ZOY, może więc stać przez ruch prostej, po dwu prostych wichrowatych równoległych do płaszczyzny X jak OA i BP, równolegle do płaszczyzny ZOY. Na fig. 39. przedstawioną jest ta

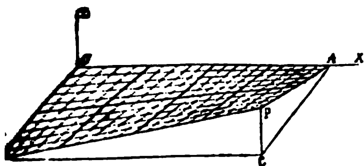


Fig. 39.

powierzchnia nad prostokątem $OACB$. Jeżeli wymiarami tego prostokąta są $OA=a$, $OB=b$, natenczas wysokość punktu P, t. j. $PC=ab$.

4. Przykłady badania kształtu powierzchni określonych równaniami uwikłanemi.

a) **Równanie:** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. **Ellipsoida.**

Przekroje tej powierzchni płaszczyznami równoległemi do płaszczyzny XOY w odstępach $z=h$ określone są równaniami:

$$z=h,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2},$$

czyli:

$$z=h,\quad \frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}=1,$$

są więc ellipsami o półosiach: $A=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$, $B=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$

które są największe dla $h=0$, przyjmują wartości a i b, są rzeczywistemi, jak długo $h<c$, a stają się dla $h=c$ punktami.

Przekroje równoległe do płaszczyzny XOZ określone są równaniami:

$$y=k,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{b^2}$$

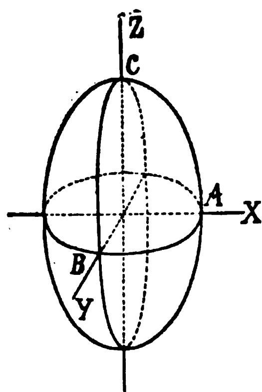


Fig. 40.

czyli:

$$y=k,\quad \frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{k^2}{b^2}\right)}+\frac{y^2}{c^2\left(1-\frac{k^2}{b^2}\right)}=1,$$

są więc również ellipsami o półosiach:

$a\sqrt{1-\frac{k^2}{b^2}}$ i $c\sqrt{1-\frac{k^2}{b^2}}$, które dla $k=0$ przyjmują wartości a i c; są rzeczywiste, gdy $k<b$, a stają się zerami dla $k=b$.

Wreszcie przekroje równoległe do płaszczyzny YOZ określone są równaniami:

$$x=l,\quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{l^2}{a^2},$$

czyli:

$$x=l,\quad \frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{l^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{l^2}{a^2}\right)}=1,$$

są więc znowu ellipsami o półosiach: $b\sqrt{1-\frac{l^2}{a^2}}$, $c\sqrt{1-\frac{l^2}{a^2}}$, które dla $l=0$ przyjmują wartości b i c, są rzeczywiste, gdy $l<a$, a stają się zerami, gdy $l=a$.

Równanie $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ przedstawia więc powierzchnię, której przekroje płaszczyznami spółrzędnemi są ellipsami o osiach $2a$, $2b$, $2c$. Nazywamy ją przeto e l l i p s o i d ą t r ó j o s i o w ą (fig. 40).

Gdy $a=b$, otrzymujemy ellipsoidę o równaniu $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, zwaną e l l i p s o i d ą o b r o t o w ą; gdy $a=b=c$ sprowadza się równanie ellipsoidy do postaci:

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

i przedstawia k u l ę o promieniu a.

Szczególny przypadek ellipsoidy trójosiowej przedstawia równanie kształtu:

$$\frac{x^2}{\alpha a^2}+\frac{y^2}{\alpha b^2}+\frac{z^2}{\alpha c^2}=1,\quad \text{czyli}\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\alpha,$$

gdy $\alpha=0$. Otrzymujemy wtedy równanie postaci:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0,$$

przedstawiające ellipsoidę o osiach równych zeru, czyli p u n k t jako szczególną odmianę ellipsoidy.

Gdy $\alpha = -1$ otrzymujemy równanie $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$, któremu nieodpowiada żaden rzeczywisty punkt w przestrzeni. Powierzchnię taką złożoną z samych punktów urojonych nazywamy ellipsoidą urojoną.

β) **Równanie** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. **Hyperboloida o jednej powłoce.**

Przekroje tej powierzchni płaszczyznami równoległemi do płaszczyzny XOY określa się równaniami:

$$z=h,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2},$$

czyli:

$$z=h,\quad \frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}=1,$$

więc ellipsami o półosiach: $a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$ i $b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$, które dla $h=0$ przyjmują wartości a, b i rosną ze wzrostem h w nieskończoność.

Przekroje równoległe do płaszczyzny XOZ są określone równaniami:

$$y=k,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{b^2},$$

czyli:

$$y=k;\quad \frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{k^2}{b^2}\right)}-\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{k^2}{b^2}\right)}=1,$$

więc hyperbolami o półosiach: $a\sqrt{1-\frac{k^2}{b^2}}$ i $c\sqrt{1-\frac{k^2}{b^2}}$, które dla $k=0$ przyjmują wartości a i c, dla $k=b$ stają się zerami, sprowadzając hyperbolę do pary prostych; dla $k>b$ oś rzeczywista hyperboli otrzymuje kierunek osi z-ów, a oś druga kierunek osi x-ów. Przekroje równoległe do płaszczyzny YOZ są określone równaniami:

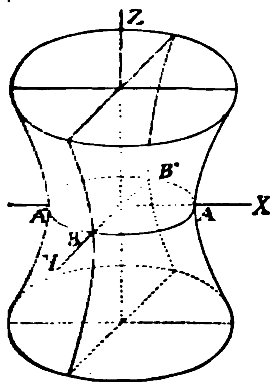


Fig. 41.

$$x=l,\quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{l^2}{a^2},$$

czyli: $x=l,\quad \frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{l^2}{a^2}\right)}-\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{l^2}{a^2}\right)}=1$

i są znowu hyperbolami o półosiach:

$$b\sqrt{1-\frac{l^2}{a^2}}\quad \text{i}\quad c\sqrt{1-\frac{l^2}{a^2}}$$

które dla $l=0$ przyjmują wartości b i c, a dla $l=a$ stają się zerami. Dla $l>a$ oś rzeczywista i urojona hyperboli przemieniają się kierunkami.

Równanie $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ przedstawia powierzchnię, której przekroje płaszczyznami równoległemi do płaszczyzn spółrzędnych są ellipsami lub hyperbolami, rozciągającą się w kierunku osi z-ów w nieskończoność (fig. 41). Nazywamy ją hyperboloidą elliptyczną o jednej powłoce.

Gdy $a=b$ otrzymujemy hyperboloidę o równaniu:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

utworzoną przez obrót hyperboli (a, b) około osi urojonej, a zwaną hyperboloidą obrotową o jednej powłoce. Gdy $a=b=c$, otrzymujemy równanie $x^2+y^2-z^2=a^2$ przedstawiające powierzchnię powstałą przez obrót hyperboli równobocznej około jej osi urojonej, zwaną hyperboloidą obrotową równoboczną o jednej powłoce.

Szczególny przypadek hyperboloidy trójosiowej o jednej powłoce przedstawia równanie kształtu:

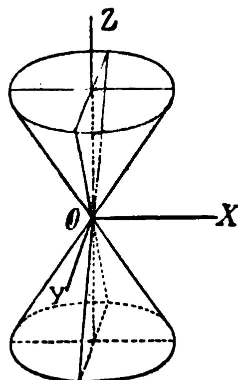


Fig. 42.

$$\frac{x^2}{\alpha^2 a^2}+\frac{y^2}{\alpha^2 b^2}-\frac{z^2}{\alpha^2 c^2}=1,$$

czyli:
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\alpha^2,$$

gdy $\alpha=0$. Otrzymujemy wtedy równanie postaci:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

przedstawiające, jako hyperboloidę jednopowłokową o osiach równych zeru, stożek elliptyczny, którego oś wpada w oś z-ów (fig. 42).

γ) **Równanie** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. **Hyperboloida o dwóch powłokach.**

Przekroje tej powierzchni płaszczyznami równoległemi do płaszczyzny XOY określają się równaniami:

$$z=h,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2},$$

czyli:
$$z=h,\quad \frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}-\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}=1,$$

są więc hyperbolami o półosiach $a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$ i $b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$, które dla $h=0$ otrzymują wartości najmniejsze a i b i rosną wraz z h w nieskończoność.

Przekroje równoległe do płaszczyzny ZOX określone są równaniami:

$$y=k,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1+\frac{k^2}{b^2}$$

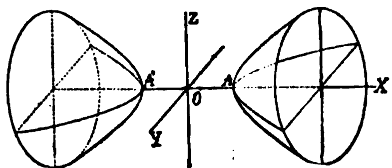


Fig. 43.

czyli:
$$y=k,\quad \frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{k^2}{b^2}\right)}-\frac{z^2}{c^2\left(1+\frac{k^2}{b^2}\right)}=1,$$

są więc hyperbolami o półosiach $a\sqrt{1+\frac{k^2}{b^2}}$ i $c\sqrt{1+\frac{k^2}{b^2}}$, które dla $k=0$ otrzymują wartości najmniejsze a i b i rosną także wraz z k w nieskończoność.

Przekroje równoległe do płaszczyzny YOZ są określone równaniami:

$$x=l,\quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{l^2}{a^2}-1,$$

czyli:
$$x=l,\quad \frac{y^2}{b^2\left(\frac{l^2}{a^2}-1\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(\frac{l^2}{a^2}-1\right)}=1$$

i są, gdy $l<a$, ellipsami urojonemi, stają się dla $l=a$ punktami, a są dopiero dla $l>a$ ellipsami rzeczywistemi, których osie wraz z l rosną w nieskończoność. Powierzchnia ma kształt na fig. 43 przedstawiony i nazywa się h y p e r b o l o i d ą e l i p t y c z n ą o d w u p o w ł o k a c h.

Gdy $b=c$, sprowadza się dane równanie do postaci: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$ i przedstawia powierzchnię, powstałą przez obrót hyperboli (a, b) około osi rzeczywistej, zwaną h y p e r b o l o i d ą o b r o t o w ą o d w u p o w ł o k a c h. Gdy $a=b=c$ otrzymujemy równanie $x^2-y^2-z^2=a^2$ przedstawiające h y p e r b o l o i d ę o b r o t o w ą r ó w n o b o c z n ą o d w u p o w ł o k a c h.

Szczególny przypadek hyperboloidy trójosiowej o dwu powłokach przedstawia równa-kształtu:

$$\frac{x^2}{\alpha^2 a^2} - \frac{y^2}{\alpha^2 b^2} - \frac{z^2}{\alpha^2 c^2} = 1,$$

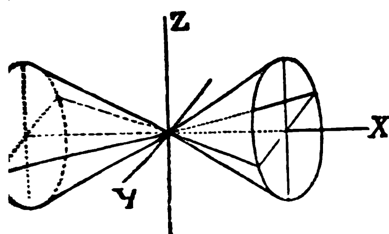


Fig. 44.

czyli: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \alpha^2$, gdy $\alpha = 0$.

Otrzymujemy wtedy równanie postaci:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

przedstawiające stożek elliptyczny, którego oś wpada w oś x-ów (fig. 44).

δ) **Równanie** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$. **Paraboloida elliptyczna.**

Przekroje tej powierzchni płaszczyznami równoległemi do płaszczyzny XOY określą się równaniami:

$$z = h, \quad \frac{x^2}{2a^2 h} + \frac{y^2}{2b^2 h} = 1,$$

więc ellipsami o półosiach $a\sqrt{2h}$ i $b\sqrt{2h}$. Ellipsy te są dla $h = 0$ punktami i rosną z h nieograniczenie, są zaś dla $h < 0$ urojone. Powierzchnia wznosi się więc tylko płaszczyzną XOY.

Przekroje równoległe do płaszczyzny XOZ określone są równaniami:

$$y = k, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} = 2z,$$

czyli:

$$y = k, \quad x^2 = 2a^2\left(z - \frac{k^2}{2b^2}\right)$$

więc przystającemi parabolami o parametrze $2a^2$, mającemi osie zwrócone w kierunku dodatniej osi z-ów, a wierzchołki odległe od płaszczyzny XOY o $z = \frac{k^2}{2b^2}$.

Przekroje równoległe do płaszczyzny ZOY określone są równaniami:

$$x = l, \quad \frac{l^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

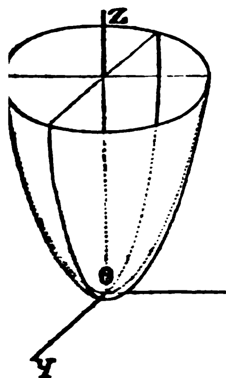


Fig. 45.

czyli:

$$x = l, \quad y^2 = 2b^2\left(z - \frac{l^2}{2a^2}\right)$$

są więc znowu parabolami przystającemi o parametrze $2b^2$, mającemi osie zwrócone w kierunku dodatniej osi z-ów, a wierzchołki odległe od płaszczyzny XOY o $z = \frac{l^2}{2a^2}$. Powierzchnia ta ma kształt podany na fig. 45 i zowie się paraboloidą elliptyczną.

Może ona powstać z przekrojów widocznie w dwojaki sposób, albo 1) przez ruch zmiennej ellipsy, która swemi wierzchołkami porusza się po dwu parabolach, mających wspólną oś, a leżących w dwu płaszczyznach do siebie prostopadłych, albo 2) przez ruch stałej paraboli, która porusza się swoim wierzchołkiem po obwodzie innej paraboli, pozostając w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny tej paraboli i mając oś zwróconą w kierunku osi tejże paraboli. Jeżeli $a = b$ sprowadza się dane równanie do postaci:

$$x^2 + y^2 = 2a^2 z$$

przedstawia powierzchnię, powstałą przez obrót paraboli $x^2 = 2a^2 z$ około jej osi, zwaną paraboloidą obrotową. Szczególny przypadek paraboloidy elliptycznej przedstawia równanie kształtu:

$$\frac{x^2}{\alpha^2 a^2} + \frac{y^2}{\alpha^2 b^2} = 2z, \quad \text{czyli:} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\alpha^2 z, \text{ gdy } \alpha = 0.$$

Otrzymujemy wtedy równanie postaci $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$, które uważane jako równanie o 3-ch zmiennych, przedstawia oś z-ów, a więc linię prostą, jako odmianę paraboloidy elliptycznej.

ε) **Równanie** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$. **Paraboloida hyperboliczna.** Przekroje tej powierzchni płaszczyznami równoległemi do płaszczyzny XOY określają się równaniami:

$$z=h, \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2h,$$

czyli:

$$z=h, \qquad \frac{x^2}{2a^2h}-\frac{y^2}{2b^2h}=1,$$

są więc hyperbolami o półosiach: $a\sqrt{2h}$ i $b\sqrt{2h}$, które dla $h=0$ przechodzą w dwie osie o równaniach $\frac{x}{a}=\pm\frac{y}{b}$. Nad, względnie pod płaszczyzną XOY przedstawiają się te hyperbole jako hyperbole sprzężone o asymptotach $\frac{x}{a}=\pm\frac{y}{b}$ (fig. 46).

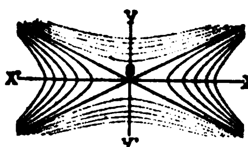


Fig. 46.

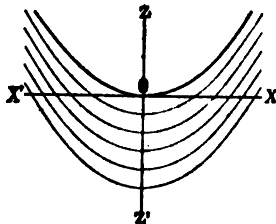


Fig. 47.

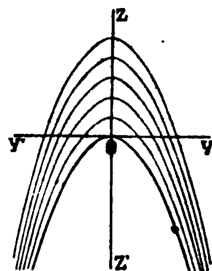


Fig. 48.

Przekroje równoległe do płaszczyzny XOZ określone są równaniami:

$$y=k, \qquad x^2=2a^2\left(z+\frac{k^2}{2b^2}\right),$$

są więc parabolami przystającemi o parametrze $2a^2$, mającemi osie zwrócone w kierunku osi z-ów, a wierzchołki pod płaszczyzną XOY w oddaleniu $z=\frac{k^2}{2b^2}$. Dla $k=0$ mamy parabolę $x^2=2a^2z$, jako przekrój płaszczyzną XOZ (fig. 47).

Przekroje równoległe do płaszczyzny ZOY określone są równaniami:

$$x=l, \qquad y^2=-2b^2\left(z-\frac{l^2}{2a^2}\right)$$

są parabolami przystającemi o parametrze $2b^2$, mającemi osie zwrócone w ujemnym kierunku osi OZ, a wierzchołki nad płaszczyzną XOY w oddaleniu $z=\frac{l^2}{2a^2}$. Dla $l=0$ otrzymujemy parabolę $y^2=-2b^2z$ jako przekrój płaszczyzną YOZ (fig. 48).

Powierzchnia określona równaniem $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ ma więc kształt podany na fig. 49 i nazywa się paraboloidą hyperboliczną, albo powierzchnią siodełkowatą. Może ona, jak widoczna z przekrojów, powstać w ten sposób, że parabola porusza się po innej paraboli, pozostając w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny tej paraboli i mając oś zwróconą w kierunku przeciwnym osi tejże paraboli. Jeżeli $a=b$, sprowadza się dane równanie do postaci:

$$x^2-y^2=2a^2z$$

i przedstawia paraboloidę hyperboliczną równoboczną.

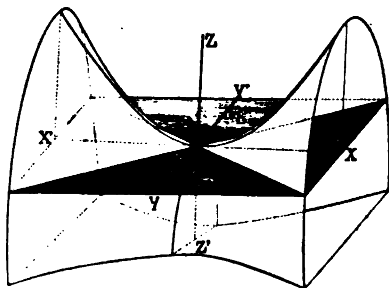


Fig. 49.

Zmieniając w tym przypadku układ płaszczyzn spółrzędnych w ten sposób, że zatrzymując oś z-ów

jmiemy za płaszczyzny XOZ i YOZ płaszczyzny dwójsieczne danego układu, czyli mi słowy obracając dany układ około osi z-ów o kąt 45°, otrzymamy wzory przekształcenia spółrzędnych danych (x, y, z) na nowe (x', y', z') w postaci:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y'), \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y'), \quad z = z'.$$

Równanie $x^2 - y^2 = 2a^2z$ sprowadza się wskutek tego przekształcenia, jeżeli znaki zbyteczne opuścimy, do postaci:

$$\frac{1}{2}(x+y)^2 - \frac{1}{2}(x-y)^2 = 2a^2z, \text{ czyli } 2xy = 2a^2z, \text{ t. j. } xy = a^2z.$$

łąc $\frac{1}{a^2} = c$, otrzymujemy równanie paraboloidy hyperbolicznej równobocznej przeroje do takiego układu w postaci: $z = cxy$, uzmysłowionej na figurze 39.

Szczególny przypadek paraboloidy hyperbolicznej przedstawia równanie kształtu:

$$\frac{x^2}{\alpha^2 a^2} - \frac{y^2}{\alpha^2 b^2} = 2z, \text{ czyli } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2\alpha^2 z, \text{ gdy } \alpha = 0.$$

zymamy wtedy równanie postaci $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, które uważano jako równanie o 3 zmiennych x, y, z, przedstawia dwie płaszczyzny $\frac{x}{a} = \pm\frac{y}{b}$ przecinające się wzdłuż osi z-ów, odmianę paraboloidy hiperbolicznej.

5. **Kształt powierzchni, określonej równaniem o dwu zmiennych, uważanem za równanie trzech zmiennych.** Jeżeli równanie o dwu zmiennych x i y kształtu $y = f(x)$ lub kształtu $F(x, y) = 0$, przedstawiające pewną krzywą na płaszczyźnie XOY uważamy za równanie o trzech zmiennych x, y, z, natenczas należy w każdym punkcie krzywej, wykreślonej płaszczyźnie XOY wykreślić równoległą do osi z-ów, a na tej równoległej odciąć dowolną wysokość z. Wszystkie punkta każdej z tych prostych równoległych czynią tedy dość danemu równaniu. Wszystkie te proste tworzą powierzchnię walcową, której kierownicą jest dana krzywa na płaszczyźnie XOY, a której tworzące są równoległe do osi z-ów.

Wszelkie równanie o dwu zmiennych uważane za równanie o trzech zmiennych przedstawia powierzchnię walcową o tworzącej równoległej do jednej z osi układu.

Tak np. równanie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, uważane jako równanie powierzchni, przedstawia walec eliptyczny (fig. 50) równanie $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ walec hyperboliczny (fig. 51), równanie

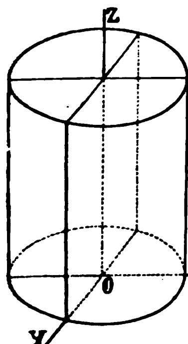


Fig. 50.

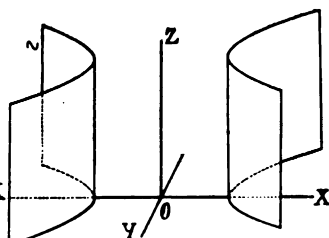


Fig. 51.

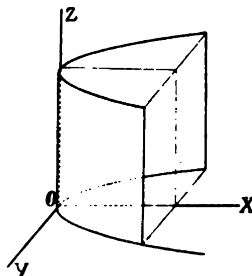


Fig. 52.

$= 2px$ walec paraboliczny (fig. 52). Kierownice tych walców leżą na płaszczyźnie XOY, tworzące są równoległe do osi OZ.

Jeżeli w równaniu brakuje zmiennej y, tedy równanie ma kształt $F(x, z) = 0$ i przedstawia walec równoległy do osi y-ów; tak samo równanie kształtu $F(y, z) = 0$ przedstawia walec równoległy do osi x-ów.

Tak np. równania: $x^2+y^2 = a^2$, $y^2+z^2 = a^2$, $y^2+z^2 = a$ przedstawiają proste walce kołowe o promieniu a, z których pierwszy jest oparty o płaszczyznę XOY, drugi o XOZ, trzeci o YOZ.

6. Znaczenie geometryczne pochodnych cząstkowych w danym punkcie powierzchni. Niech będzie dany punkt $P(x, y, z)$ na powierzchni $z=f(x, y)$; zmieniając x o dx, bez zmiany drugiej zmiennej niezależnej y zmienimy wartość funkcyi $z=f(x, y)$ o $d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx = p dx$, gdzie $p = \frac{\partial z}{\partial x}$.

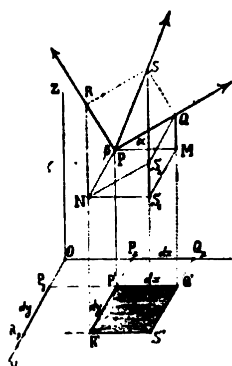


Fig. 53.

Spółrzędnym $x+dx$, y, $z+pdx$ odpowiadać będzie tedy na powierzchni $z=f(x, y)$ punkt Q (fig. 53), przyczem $MQ = d_x z = pdx$, jeżeli $PM = P'Q' = P_x Q_x = dx$. Z trójkąta PQM otrzymamy tedy $MQ = PM$ tang QPM, zatem $d_x z = dx \,.\, \text{tang}\, \alpha$, a więc $\frac{d_x z}{dx} = \text{tang}\, \alpha$, czyli $p = \frac{\partial z}{\partial x} = \text{tang}\, \alpha$, gdzie $\alpha = \measuredangle QNM$, przedstawia kąt, jaki prosta PQ tworzy z osią x-ów.

Zmieniając zaś y o dy, bez zmiany zmiennej niezależnej x, zmienimy wartość z o $d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy = q dy$, gdzie $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. Otrzymujemy tedy nowy punkt R powierzchni $z=f(x, y)$ o spółrzędnych x, $y+dy$, $z+qdy$, gdzie $RN = d_y z = qdy$, jeżeli $PN = P'R' = dy$. Z trójkąta RPN prostokątnego przy N otrzymamy $RN = PN \,.\, \text{tang}\, RPN$, czyli $d_y z = dy \,.\, \text{tang}\, \beta$, gdzie $\beta = \measuredangle RPN$ przedstawia kąt, jaki prosta PR tworzy z osią y-ów, a więc $\frac{d_y z}{dy} = \text{tang}\, \beta$, czyli $q = \frac{\partial z}{\partial y} = \text{tang}\, \beta$.

Proste PQ i PR, łączące punkt P z punktami sąsiedniemi Q i R, z których pierwszy leży na przekroju powierzchni $z=f(x, y)$ płaszczyzną równoległą do płaszczyzny XOZ, drugi R na przekroju powierzchni płaszczyzną równoległą do płaszczyzny YOZ, są dwiema stycznemi do powierzchni przez punkt P przechodzącemi, jedna PQ równoległa do XOZ, druga PR równoległa do YOZ.

Wartości pochodnych cząstkowych $\frac{\partial z}{\partial x} = p$ *i* $\frac{\partial z}{\partial y} = q$ *w danym punkcie powierzchni* $z=f(x, y)$, *przedstawiają zatem tangensy kątów, jakie styczne w tym punkcie do przekrojów powierzchni płaszczyznami równoległemi do płaszczyzn XOZ i YOZ poprowadzone, tworzą z osiami x-ów, względnie y-ów.*

Różniczki cząstkowe $d_x z = pdx$ i $d_y z = qdy$ przedstawiają nieskończenie małe zmiany spółrzędnej z punktu powierzchni, wywołane zmianami nieskończonemi spółrzędnej x o dx, względnie spółrzędnej y o dy. Równoczesna zmiana x o dx i y o dy wywołuje zmianę z o dz, gdzie dz jest zupełną różniczką funkcyi $z=f(x, y)$, określoną wzorem:

$$dz = d_x z + d_y z = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy, \quad \text{czyli} \quad dz = pdx + qdy. \tag{3}$$

Jeżeli powierzchnia określona jest równaniami kształtu $F(x, y, z) = 0$, tedy mamy:
$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0,$$

zatem pochodne cząstkowe:
$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \tag{4}$$

Płaszczyzna styczna w danym punkcie powierzchni. Określając styczną do powierzchni w danym punkcie $P(x, y, z)$, jako prostą, łączącą ten punkt z punktem sąsiednim $S(x+dx, y+dy, z+dz)$, gdzie $dz=pdx+qdy$, otrzymamy równanie stycznej, jako równanie prostej, przez dwa punkta $P(x, y, z)$ i $S(x+dx, y+dy, z+pdx+qdy)$ przechodzącej w postaci:

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{pdx+qdy}.$$

Kładąc $\frac{dy}{dx}=\lambda$, gdzie λ przedstawia tangens kąta, jaki rzut $P'S'$ stycznej na płaszczyznę XOY tworzy z osią x-ów, otrzymamy powyższe równanie stycznej w postaci:

$$\frac{X-x}{1}=\frac{Y-y}{\lambda}=\frac{Z-z}{p+q\lambda}$$

lub:

$$X-x=\frac{1}{p+q\lambda}(Z-z),\qquad Y-y=\frac{\lambda}{p+q\lambda}(Z-z),$$

gdzie λ jest dowolnym parametrem.

Przez każdy punkt $P(x, y, z)$ powierzchni przechodzi więc nieskończenie wiele prostych stycznych do powierzchni. Każdą poszczególną styczną określa pewna wartość parametru $\lambda=\frac{dy}{dx}$.

Wyrugowawszy z powyższych dwu równań parametr λ, w ten sposób, że pomnożymy pierwsze równanie przez p, drugie przez q i tak przekształcone równania do siebie dodamy, otrzymujemy równanie:

$$p(X-x)+q(Y-y)=(Z-z),$$

lub:

$$p(X-x)+q(Y-y)-(Z-z)=0,$$

które jest pierwszego stopnia ze względu na spółrzędne bieżące X, Y, Z, a więc równaniem płaszczyzny przez punkt $P(x, y, z)$ przechodzącej.

A zatem: *Wszystkie styczne w danym punkcie powierzchni leżą na jednej płaszczyźnie.*

Płaszczyznę tą nazywamy płaszczyzną styczną w danym punkcie powierzchni.

Równanie płaszczyzny stycznej w danym punkcie $P(x, y, z)$ powierzchni $z=f(x, y)$ przedstawia się więc w postaci:

$$p(X-x)+q(Y-y)-(Z-z)=0 \tag{5}$$

gdzie $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$ przedstawiają wartości pochodnych cząstkowych w danym punkcie powierzchni. Jeżeli równanie powierzchni dane jest w postaci $F(x, y, z)=0$, tedy mamy:

$$p=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}},\qquad q=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

zatem równanie płaszczyzny stycznej w danym punkcie $P(x, y, z)$ powierzchni $F(x, y, z)=0$ przedstawia się w postaci:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0. \tag{6}$$

Oznaczmy przez α, β, γ kąty, jakie pion płaszczyzny stycznej z osiami układu, to otrzymamy na ich wyznaczenie na podstawie nia (5) wzory:

$$\frac{\cos\alpha}{p} = \frac{\cos\beta}{q} = \frac{\cos\gamma}{-1} = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}},$$

a z równania (6) wzory:

$$\frac{\cos\alpha}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\cos\beta}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\cos\gamma}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}.$$

8. **Przykłady.** 1) Płaszczyzna styczna do powierzchni $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ w punkcie

przedstawia się, wobec tego, że: $p = \frac{2x}{a^2}$, $q = \frac{2y}{b^2}$, równaniem:

$$\frac{2x}{a^2}(X-x) + \frac{2y}{b^2}(Y-y) - (Z-z) = 0,$$

czyli:

$$\frac{2Xx}{a^2} + \frac{2Yy}{b^2} - Z + z - \frac{2x^2}{a^2} - \frac{2y^2}{b^2} = 0,$$

Na podstawie równania powierzchni, ze względu na to, że $\frac{2x^2}{a^2} + \frac{2y^2}{b^2} = 2z$ c jemy ostatecznie równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $P(x, y, z)$ powierzchni: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ w postaci:

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} - \frac{Z+z}{2} = 0.$$

2) Płaszczyzna styczna w punkcie $P(x, y, z)$ powierzchni:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ przedstawia się, wobec tego, że: $F = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$,

$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}$, $\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{2z}{c^2}$, równaniem w postaci:

$$\frac{2x}{a^2}(X-x) + \frac{2y}{b^2}(Y-y) + \frac{2z}{c^2}(Z-z) = 0,$$

czyli:

$$\frac{2xX}{a^2} + \frac{2yY}{b^2} + \frac{2zZ}{c^2} = \frac{2x^2}{a^2} + \frac{2y^2}{b^2} + \frac{2z^2}{c^2} = 2,$$

z którego otrzymujemy ostatecznie równanie:

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} + \frac{Zz}{c^2} = 1,$$

jako równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $P(x, y, z)$ ellipsoidy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} =$

9. **Powierzchnie różniczkowe danej powierzchni.** Uważając w pochodnych cząstkowych $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ i $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ funkcyi $z = f(x, y)$, które są cyami zmiennych niezależnych x i y, a więc $p = f'_x(x, y)$, $q = f'_y(x, y$ spółrzędne z punktów powierzchni, otrzymamy równania:

$$z = f'_x(x, y), \qquad z = f'_y(x, y),$$

przedstawiające nowe powierzchnie, które nazywamy powierzchı różniczkowemi danej powierzchni $z = f(x, y)$.

Danej powierzchni odpowiadają wedle tego dwie powierzchnie ró kowe. Wysokości z jednej z nich przedstawiają wartości pochodnej cz wej $p = \frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{tang}\alpha$; drugiej — wartości pochodnej cząstkowej $q = \frac{\partial z}{\partial y} =$ t

Tak np. powierzchni $z=xy$ odpowiadają powierzchnie różniczkowe $z=y$ $z=x$, które są płaszczyznami dwójsiecznemi układu, z których pierwsza zechodzi przez oś x-ów, druga przez oś y-ów.

10. Powierzchnie całkowe danej powierzchni. Funkcyi $z=f(x, y)$ odpoadają dwie całki pojedyńcze:

$$1) \quad \int z\,dx=\int f(x, y)\,dx=F_1(x, y)+\varphi(y)$$

$$2) \quad \int z\,dy=\int f(x, y)\,dy=F_2(x, y)+\psi(x)$$

lzie funkcye $F_1(x, y)$ i $F_2(x, y)$, zwane cząstkowemi całkami głównemi funki $f(x, y)$, są takiemi najprostszemi funkcyami zmiennych x i y, że:

$$\frac{\partial F_1(x, y)}{\partial x}=f(x, y), \quad \text{a} \quad \frac{\partial F_2(x, y)}{\partial y}=f(x, y),$$

ś $\varphi(y)$ i $\psi(x)$ są dowolnemi funkcyami jednej tylko zmiennej y lub x, nadto jedna całka podwójna kształtu:

$$3) \quad \iint z\,dx\,dy=\iint f(x, y)\,dx\,dy=F(x, y)+\varphi(x)+\psi(y),$$

dzie funkcya $F(x, y)$, zwana podwójną całką główną funkcyi $f(x, y)$, jest ką najprostszą funkcyą zmiennych niezależnych x i y, że:

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y\,\partial x}=f(x, y),$$

$\varphi(x)$ i $\psi(y)$ są dowolnemi funkcyami, każda jednej tylko zmiennej x lub y. 'rzedstawiając obrazy tych całek, będących funkcyami dwu zmiennych nieależnych x i y, jako powierzchnie w przestrzeni, otrzymujemy nowe układy owierzchni, zwanych p o w i e r z c h n i a m i c a ł k o w e m i powierzchni $z=f(x, y)$.

Ograniczając się do głównych powierzchni całkowych odróżnimy trzy odzaje powierzchni całkowych danej powierzchni $z=f(x, y)$:

1) powierzchnię całkową o równaniu:

$$z=\int f(x, y)\,dx=F_1(x, y), \tag{10}$$

rzedstawiającą wysokościami z swych punktów wartości całki cząstkoej według zmiennego x w danem miejscu (x, y),

2) powierzchnię całkową o równaniu:

$$z=\int f(x, y)\,dy=F_2(x, y) \tag{11}$$

rzedstawiającą wysokościami z swych punktów wartości całki cząstkoej według zmiennego y w danem miejscu (x, y),

3) powierzchnię całkową o równaniu:

$$z=\iint f(x, y)\,dx\,dy=F(x, y), \tag{12}$$

rzedstawiającą wysokościami z swych punktów wartości całki podwójnej anej funkcyi w danem miejscu (x, y).

11. Całki określone cząstkowe $\int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\,dx$ i $\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\,dy$. Wychoząc z pojęcia pojedyńczej całki określonej otrzymujemy tu następujące rartości:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\,dx=\Big|_{x_1}^{x_2}[F_1(x, y)+\varphi(y)]=F_1(x_2, y)-F_2(x_1, y),$$

$$\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\,dy=\Big|_{y_1}^{y_2}[F_2(x, y)+\psi(x)]=F_2(x, y_2)-F_2(x, y_1).$$

naczenie geometryczne tych całek określonych wypływa bezpośrednio ze naczenia geometrycznego całki pojedyńczej, jako wielkości powierzchni danej inii krzywej.

Przecinając powierzchnię $z=f(x, y)$ płaszczyzną równoległą do płaszczyzny ZOX w pewnym odstępie $OB=y$ otrzymamy przekrój $PQBS'$ (fig. 54), określony równaniem $z=f(x, y)$, odniesionem do układu $Z'BX'$, gdzie y ma pewną przyjętą wartość stałą OB. Wielkość powierzchni A_y, ograniczonej krzywą przekroju PQ, osią BX' i wysokościami PP' i QQ' w miejscach x_1 i x_2 wyprowadzonemi, przedstawia się w postaci:

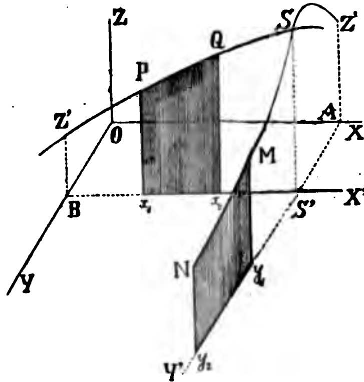


Fig. 54.

$$A_y=\int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\, dx. \qquad (13)$$

Przecinając powierzchnię $z=f(x, y)$ płaszczyzną równoległą do płaszczyzny ZOY w odstępie $OA=x$, otrzymamy przekrój $MNAY'$ (fig. 54), określony równaniem $z=f(x, y)$, odniesionem do układu $Z'AY'$, gdzie x ma pewną przyjętą wartość stałą OA. Wielkość powierzchni A_x, ograniczonej krzywą przekroju NM, osią AY' i wysokościami MM' i NN' w miejscach y_1 i y_2 wyprowadzonemi, przedstawia się znowu w postaci:

$$A_x=\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy. \qquad (14)$$

Całki określone $\int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\, dx$ i $\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy$ wyznaczają zatem wielkości przekrojów danej powierzchni $z=f(x, y)$, równoległych do płaszczyzn spółrzędnych XOZ, względnie YOZ, w przyjętych granicach.

Tak otrzymamy np. dla powierzchni $z=xy$, powierzchnię przekroju równoległego do płaszczyzny ZOX w odległości y określoną wzorem:

$$A_y=\int_{x_1}^{x_2} xy\, dx=y\int_{x_1}^{x_2} x\, dx=y\Big|_{x_1}^{x_2}\frac{x^2}{2}=\frac{y(x_2{}^2-x_1{}^2)}{2},$$

powierzchnię zaś przekroju równoległego do YOZ w odległości x w postaci:

$$A_x=\int_{y_1}^{y_2} xy\, dy=x\int_{y_1}^{y_2} y\, dy=x\Big|_{y_1}^{y_2}\frac{y^2}{2}=\frac{x(y_2{}^2-y_1{}^2)}{2}.$$

Ćwiczenia XXXVIII.

Zbadać kształt powierzchni określonych następującemi równaniami i przedstawić ich obrazy w stosownych granicach:

1) $z=xy^2$, 2) $z=x^2y$, 3) $z=x^2y^2$, 4) $z=xy^3$, 5) $z=x^3y$, 6) $z=xe^y$, 7) $z=ye^x$, 8) $z=\sqrt{xy}$, 9) $z=x\sqrt{y}$, 10) $z=y\sqrt{x}$, 11) $z=xy^{3/2}$, 12) $z=yx^{3/2}$, 13) $z=x\log y$, 14) $z=y\log x$, 15) $z=x\sin y$, 16) $z=x^2\sin y$, 17) $z=x\log y$, 18) $z=x^2\operatorname{tang} y$, 19) $z=x^2+y^2$, 20) $z=x^2-y^2$, 21) $z=x^2+y^2-2x$, 22) $z=x^2-y^2-2x$, 23) $x^2+y^2+z^2=1$, 24) $x^2+y^2-z^2=1$, 25) $x^2-y^2-z^2=1$, 26) $-x^2+y^2+z^2=1$, 27) $x^2-y^2+z^2=1$, 28) $-x^2-y^2+z=1$, 29) $-x^2+y^2-z^2=1$, 30) $x^2+y^2-z^2=0$, 31) $x^2+4y^2+9z^2-36=0$, 32) $x^2+4y^2-9z^2-36=0$, 33) $x^2-4y^2-9z^2-36=0$, 34) $x^2-4y^2-9z^2=0$, 35) $x^2+y^2-e^{2z}=0$, 36) $x^2+y^2-\sin^2 z=0$.

Wyprowadzić równanie płaszczyzny stycznej w danym punkcie x, y, z powierzchni i wyznaczyć jej odległość od początku układu, jeżeli powierzchnia określona jest równaniem:

37) $x^2+y^2+z^2=a^2$, 38) $x^2+y^2-z^2=a^2$, 39) $x^2-y^2-z^2=a^2$, 40) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, 41) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, 42) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, 43) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2z=0$, 44) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-2z=0$.

45) Wyrachować odcinki, jakie płaszczyzna styczna w punkcie x, y, z powierzchni: **$,z) = 0$ wyznacza na osiach układu**

Wyznaczyć odcinki w zad. 45 określone:

46) dla elipsoidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, 47) dla kuli: $x^2+y^2+z^2=a^2$.

48) Na danej powierzchni $F(x, y, z)=0$ wyznaczyć punkt, w którym płaszczyzna **na wyznacza na osiach układu** równe odcinki.

Wyznaczyć położenie punktu zad. 48) określonego:

49) na ellipsoidzie $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, 50) na kuli $x^2+y^2+z^2=a^2$.

51) Wyznaczyć kąty, jakie płaszczyzna w punkcie x, y, z powierzchni $z=f(x, y)$ **ży** z płaszczyznami spółrzędnemi. Przykład $z=xy$.

52) To samo dla powierzchni, danej równaniem: $f(x, y, z)=0$. Przykład $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

53) Na powierzchni $z=f(x, y)$ wyznaczyć punkta, w których płaszczyzny styczne **ównoległe** do danej płaszczyzny $Ax+By+Cz+D=0$. Przykład $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$.

54) To samo dla powierzchni danej równaniem $F(x, y, z)=0$. Przykład $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

55) Wyznaczyć kąt, jaki płaszczyzna styczna w punkcie x, y, z, powierzchni $z=f(x, y)$ **ży** z promieniem tego punktu. Przykład $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$.

56) To samo dla powierzchni $F(x, y, z)=0$. Przykład $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

57) Wyznaczyć odległość płaszczyzny stycznej w punkcie x, y, z powierzchni $z=f(x, y)$ **unktu** początkowego i zbadać kiedy ta odległość jest największą lub najmniejszą **ykład** $z=1-x^2+y^2$.

58) To samo dla powierzchni: $F(x, y, z)=0$. Przykład $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

59) Wyznaczyć pierwsze powierzchnie różniczkowe i pierwsze powierzchnie całkowe **nej** powierzchni $z=f(x, y)$. Przykład $z=xy$.

60) To samo dla powierzchni $F(x, y, z)=0$. Przykład: $x^2+y^2+z^2-a^2=0$.

61) Zbadać powierzchnię $z=\frac{1}{\sqrt{x(y-x)}}$ i wyznaczyć wielkość przekroju tej powierz- **i** płaszczyzną równoległą do XOZ w odległości w granicach od $x=0$ do $x=y$.

62) Wykreślić powierzchnię $z=\sqrt{xy}$ i obliczyć jej przekrój płaszczyzną $y=\beta$ w gra**ch** od $x=0$ do $x=a$.

63) Jakie znaczenie ma całka określona $\int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\,dx$, a jakie całka $\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\,dy$, od**nie** do powierzchni $z=f(x, y)$.

Wyprowadzić następujące całki i uzmysłowić geometrycznie w myśl zag. 63:

64) $\int_0^x (y^2-x^2)\,dx=\frac{1}{3}x(3y^2-x^2)$. 65) $\int_0^y \frac{x^2+y^2}{y^2}\,dx=\frac{4}{3}y$.

66) $\int_0^x \sqrt{y^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{y^2-x^2}+\frac{y^2}{2}\arcsin\frac{x}{y}$.

67) $\int_y^x \sqrt{x^2-y^2}\,dx=\frac{x\sqrt{x^2-y^2}}{2}-\frac{y^2}{2}\log\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{y}$.

68) $\int_0^y \sqrt{4y^2+x^2}\,dy=\frac{y}{2}\sqrt{4y^2+x^2}+\frac{x^2}{4}\log\frac{2y+\sqrt{4y^2+x^2}}{x}$.

69) $\int_0^x e^{\frac{2x}{y}}\,dx=\frac{y}{2}(1-e^{\frac{2x}{y}})$. 70) $\int_0^x (e^{\frac{x}{y}}-e^{-\frac{x}{y}})\,dx=y(e^{\frac{x}{y}}-e^{-\frac{x}{y}})$.

Wyznaczyć wielkość przekroju równoległego do płaszczyzny XOZ w odstępie $y>0$ **granicach od** $x=0$ do $x=\infty$ dla następujących powierzchni:

71) $z=e^{-xy}$, 72) $z=e^{-xy}\cos x$, 73) $z=e^{-xy}\sin x$, 74) $z=\frac{x^2+y^2}{x^4+x^2+1}$.

75) $z = \frac{1}{x^2+y^2}$, 76) $z = \frac{1}{1+x^2y^2}$, 77) $z = x e^{-xy}$, 78) $z = x^2 e^{-xy}$,

79) $z = \frac{1}{(x+y)^2}$, 80) $z = \frac{e^{-x} - e^{-xy}}{x}$, 81) $z = e^{-xy} \sin x$, 82) $z = e^{-xy} x^2 \sin x$.

Wyznaczyć wielkość przekroju równoległego do płaszczyzny XOZ w odstępie $x > 0$, dla następujących powierzchni:

83) $z = x^2 y$ w granicach y_1 i y_2.

84) $z = \sqrt{1+(\log x)^2} \cdot x^y$ w granicach od $y_1 = 0$ do $y_2 = y$.

85) $z = \sqrt{1+x+y}$ w granicach od $y_1 = 0$ do $y_2 = 3 - y$.

86) $z = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ w granicach od $y_1 = 0$ do $y_2 = \sqrt{x(a-x)}$.

Rozwiązania XXXVIII. 1) fig. 55. 3) fig. 56. 7) fig. 57. 8) fig. 58. 14) fig. 60. 15) fig. 59. 14) fig. 60. 19) Paraboloida obrot. 20) Paraboloida hyperboliczna. 21) Por. 19.

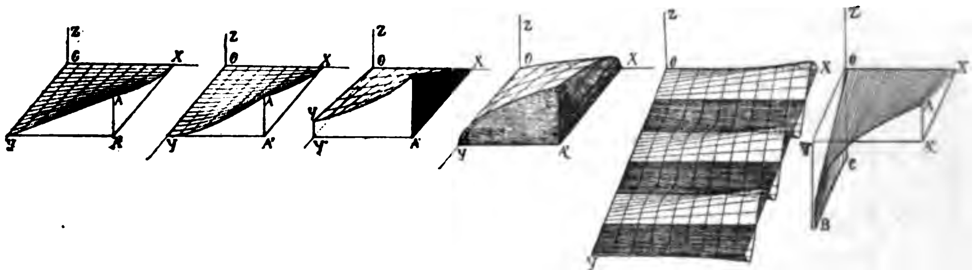


Fig. 55. Fig. 56. Fig. 57. Fig. 58. Fig. 59. Fig. 60.

22) Por. 20. 23) Kula. 24) Hyperboloida obrotowa o 1 powłoce, o osi OZ. 25) Hyperboloida obrotowa o 2 powłokach, o osi OX. 26)—27) Por. 24. 28)—29) Por. 25. 30) Stożek obrotowy o osi OZ. 31) Ellipsoida trójosiowa. 32) Hyperboloida o 1 powłoce. 33) Hyperboloida o 2 powłokach. 34) Stożek elliptyczny. 35) Pow. powstała przez obrót logarytmiki. 36) Pow. powstała przez obrót sinusoidy. 37) $Xx + Yy + Zz = a^2$.

38)—44) $\frac{\partial F}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y-y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z-z) = 0$, $\left(x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z}\right) : \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$.

48) $F = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z}$, 51) $\frac{\cos\alpha}{p} = \frac{\cos\beta}{q} = \frac{\cos\gamma}{-1} = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$. 53) $\frac{p}{A} = \frac{q}{B} = \frac{-1}{C}$.

54) $\frac{\partial F}{\partial x} : A = \frac{\partial F}{\partial y} : B = \frac{\partial F}{\partial z} : C$. 55) $\sin\omega = (px+qy-z) : \sqrt{(x^2+y^2+z)(p^2+q^2+1)}$. 61) π. 62) $\frac{2}{3} a^{3/2} \beta^{1/2}$.

71) $\frac{1}{y}$. 72) $\frac{y}{y^2+1}$. 73) $\frac{1}{y^2+1}$. 74) $\frac{y^2+1}{2\sqrt{3}}$. 75) $\frac{\pi}{2y}$. 76) $\frac{\pi}{2y}$. 77) $\frac{1}{y^2}$. 78) $\frac{2}{y^3}$. 79) $\frac{1}{y}$.

80) $\log y$. 81) $\frac{2y}{(y+1)^2}$. 82) $\frac{2(3y^2-1)}{(y^2+1)^3}$. 83) $\frac{1}{2} + \frac{x^{2y_1} - x^{2y_2}}{\log x}$. 84) $\sqrt{1+(\log x)^2} \cdot \frac{x^y}{\log x} = 1$.

85) $\frac{2}{3}\left[8 - \sqrt{(1+y)^3}\right]$. 86) $\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}$.

Literatura. W. Folkierski: Zasady rachunku różniczkowego i całkowego z zastosowaniami. 2 tomy. Paryż 1870—1873. F. H. Grelle: Leitfaden zu den Vorträgen über höhere Mathematik am königlichen Politechnikum zu Hannover. Hannover, 1871. Dr. Władysław Zajączkowski: Geometryja analityczna. Warszawa, 1884.

Tematy do rozpraw naukowych.

1) Kształt i własności powierzchni określonych równaniem: $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0$.
2) Kształt i własności powierzchni określonych równaniem: $Ax^2 + By^2 + 2Cz = 0$.
3) Powierzchnie różniczkowe i powierzchnie całkowe danej powierzchni.

Wykład XXXIX.

Całki określone podwójne, potrójne i wielokrotne.

1. Pojęcie całki określonej podwójnej. Niech będzie daną funkcya $f(x, y)$ dwu zmiennych niezależnych x i y, skończona i ciągła w zakresie od $x=a$ do $x=b$ i od $y=\alpha$ do $y=\beta$, a więc w zakresie określonym relacyami: $a\leqq x\leqq b$, $\alpha\leqq y\leqq\beta$, gdzie a, b, α i β są pewnemi liczbami stałemi. Całkując ją cząstkowo względem zmiennej niezależnej x w granicach od $x=a$ do $x=b$, uważając drugą zmienną y za stałą, otrzymujemy całkę określoną kształtu: $\int_a^b f(x, y)\,dx$, która będzie przedstawiała nową funkcyę $\varphi(y)$ zmiennej niezależnej y, ciągłą i skończoną w granicach od $y=\alpha$ do $y=\beta$.

Całkując funkcyę $\varphi(y)=\int_a^b f(x, y)\,dx$, podług y w granicach od $y=\alpha$ do $y=\beta$, otrzymujemy całkę określoną kształtu:

$$\int_\alpha^\beta \varphi(y)\,dy=\int_\alpha^\beta\left(\int_a^b f(x, y)\,dx\right)dy.$$

Całkując zaś daną funkcyę $f(x, y)$ cząstkowo najpierw względem zmiennej niezależnej y w granicach od $y=\alpha$ do $y=\beta$, uważając zmienną x za stałą, otrzymujemy całkę określoną kształtu: $\int_\alpha^\beta f(x, y)\,dy$, która będzie przedstawiała pewną funkcyę $\psi(x)$ zmiennej niezależnej x, ciągłą i skończoną w granicach od $x=a$ do $x=b$.

Całkując funkcyę: $\psi(x)=\int_\alpha^\beta f(x, y)\,dy$, podług x w granicach od $x=a$ do $x=b$ otrzymamy całkę określoną kształtu:

$$\int_a^b \psi(x)\,dx=\int_a^b\left(\int_\alpha^\beta f(x, y)\,dy\right)dx.$$

Całkę określoną kształtu:

$$\int_\alpha^\beta\left(\int_a^b f(x, y)\,dx\right)dy,$$

lub:

$$\int_a^b\left(\int_\alpha^\beta f(x, y)\,dy\right)dx,$$

nazywamy *całką określoną podwójną*. Opuszczając nawiasy, należałoby zastosować znakowanie skrócone:

$$\int_a^b\left(\int_\alpha^\beta f(x, y)\,dy\right)dx=\int_a^b\int_\alpha^\beta f(x, y)\,dy\,dx, \tag{1}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left(\int_{a}^{b} f(x, y)\,dx\right)dy = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{a}^{b} f(x, y)\,dx\,dy$$

któreby wskazywało porządek podwójnego całkowania funkcyi $f(x, y)$, w wszym przypadku najpierw podług y w granicach (α, β), potem pod w granicach (a, b), w drugim porządek odwrotny.

Powszechnie przyjęte zostało jednak znakowanie dla całek określ podwójnych.:

$$\int_{a}^{b}\int_{\alpha}^{\beta} f(x, y)\,dx\,dy$$

w tej myśli, że pierwszy z brzegu znak całkowania $\int_a^b$ stosuje się do wszej napisanej różniczki dx, a drugi znak całkowania $\int_\alpha^\beta$ do drugiej czki dy.

2. Porządek całkowania podwójnego przy stałych granicach cał nia. Załóżmy, że:

$$\int f(x, y)\,dy = f_1(x, y), \qquad \int f_1(x, y)\,dx = f_2(x, y),$$

zaś:

$$\int f(x, y)\,dx = F_1(x, y), \qquad \int F_1(x, y)\,dy = F_2(x, y),$$

wówczas otrzymamy:

$$\int_a^b\int_\alpha^\beta f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b\left(\int_\alpha^\beta f(x, y)\,dy\right)dx = \int_a^b \Big|_\alpha^\beta f_1(x, y)\,dx =$$

$$= \int_a^b \Big(f_1(x, \beta) - f_1(x, \alpha)\Big)\,dx = \int_a^b f_1(x, \beta)\,dx - \int_a^b f_1(x, \alpha)\,dx =$$

$$= \Big|_a^b f_2(x, \beta) - \Big|_a^b f_2(x, \alpha) = f_2(b, \beta) - f_2(a, \beta) - f_2(b, \alpha) + f_2(a, \alpha),$$

zaś:

$$\int_\alpha^\beta\int_a^b f(x, y)\,dy\,dx = \int_\alpha^\beta\left(\int_a^b f(x, y)\,dx\right)dy = \int_\alpha^\beta \Big|_a^b F_1(x, y)\,dy =$$

$$= \int_\alpha^\beta \Big(F_1(b, y) - F_1(a, y)\Big)\,dy = \int_\alpha^\beta F_1(b, y)\,dy - \int_\alpha^\beta F_1(a, y)\,dy =$$

$$= \Big|_\alpha^\beta F_2(b, y) - \Big|_\alpha^\beta F_2(a, y) = F_2(b, \beta) - F_2(b, \alpha) - F_2(a, \beta) + F_2(a, \alpha).$$

Ponieważ jednak:

$$F_2(x, y) = f_2(x, y) + \varphi(x) + \psi(y),$$

przeto:

$$F_2(b, \beta) - F_2(b, \alpha) - F_2(a, \beta) + F_2(a, \alpha) = f_2(b, \beta) - f_2(b, \alpha) - f_2(a, \beta) + f_2(a, \alpha$$

zatem:

$$\int_a^b\int_\alpha^\beta f(x, y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta\int_a^b f(x, y)\,dy\,dx$$

To znaczy: *Porządek podwójnego całkowania danej funkcyi dwu zmi niezależnych w granicach stałych jest zupełnie dowolny i nie wpływa na wyn*

3. Znaczenie geometryczne całki określonej podwójnej. Niech wiada równaniu $z = f(x, y)$ pewna powierzchnia, odstępowi (a, b) odcin osi x-ów, zaś odstępowi (α, β) odcinek na osi y-ów, natenczas zak $a \lesseqgtr x \lesseqgtr b$, $\alpha \lesseqgtr y < \beta$, odpowiadać będzie pewien prostokąt $A'B'C'D'$ n szczyżnie XOY (fig. 61), jako rzut części $ABCD$ powierzchni, przeds

jącej w tym zakresie funkcyę $z=f(x, y)$ Całkując funkcyę $f(x, y)$ przy pewnem stałem x ze względu na y między granicami α i β, otrzymujemy całkę określoną kształtu: $\int_\alpha^\beta f(x, y)\,dy$, przedstawiającą powierzchnię przekroju $EFF'E'$, poprowadzonego w odstępie x równolegle do płaszczyzny YOZ, a więc:

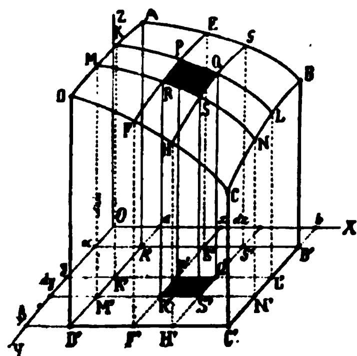


Fig. 61.

$$\int_\alpha^\beta f(x, y)\,dy = \text{Pow}\,(EFF'E') = A_x.$$

$$\text{Iloczyn:} \qquad dx\int_\alpha^\beta f(x, y)\,dy = A_x\,dx,$$

przedstawia tedy objętość walca równoległego do osi x-ów, którego podstawą jest przekrój A_x, a wysokością dx.

Całkując otrzymaną funkcyę A_x podług x otrzymamy całkę podwójną:

$$\int_a^b\left(\int_\alpha^\beta f(x, y)\,dy\right)dx = \int_a^b A_x\,dx, \qquad (4)$$

która przedstawia sumę objętości tych walców, a więc całą objętość bryły $ABCDA'B'C'D'$, opartej na prostokącie $A'B'C'D'$.

Przy zmienionym porządku całkowania otrzymamy tę samą objętość, jako sumę objętości walców, których podstawami są przekroje powierzchni $z=f(x, y)$ równoległe do płaszczyzny XOZ, a których osie są równoległe do osi y-ów.

A zatem: *Całka określona podwójna kształtu* $\int_\alpha^\beta\int_a^b f(x, y)\,dx\,dy$ *przedstawia objętość bryły zawartej między powierzchnią o równaniu* $z=f(x, y)$, *płaszczyzną* XOY *i czterema płaszczyznami, z których dwie są równoległe do płaszczyzny* XOZ *w odstępach* α *i* β, *a dwie do płaszczyzny* YOZ *w odstępach* a *i* b.

4. Całka określona podwójna jako granica sumy podwójnej. Niech będzie daną funkcya $f(x, y)$ skończona ciągła w zakresach $a\overline{\gtrless}x\overline{\gtrless}b$ i $\alpha\overline{\gtrless}y\overline{\gtrless}\beta$. Podzielmy odstęp (a, b) zmiennej niezależnej x na n części za pomocą wartości: $x_1, x_2,\dots, x_{n-1}$; a odstęp (α, β) drugiej zmiennej y na m części za pomocą wartości: $y_1, y_2,\dots, y_{m-1}$ i oznaczmy:

$$x_1-a=h_1,\ x_2-x_1=h_2,\dots,\ x_r-x_{r-1}=h_r,\dots,\ b-x_{n-1}=h_n$$
$$y_1-\alpha=k_1,\ y_2-y_1=k_2,\dots,\ y_r-y_{r-1}=k_r,\dots,\ \beta-y_{m-1}=k_m.$$

Geometrycznie znaczy to, że prostokąt $A'B'C'D'$ (fig. 62) na płaszczyźnie XOY za pomocą równoległych do osi x-ów i y-ów rozkładamy na mn prostokątów o wymiarach h_r i k_s, $(r=1, 2,\dots, n,\ s=1, 2,\dots, m)$.

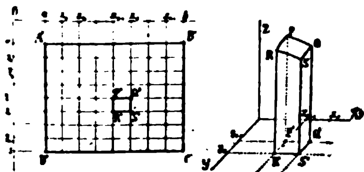


Fig 62. Fig. 63.

Weźmy pod uwagę iloczyn kształtu:

$$h_rk_sf(x_{r-1}, y_{s-1}) = (x_r-x_{r-1})(y_s-y_{s-1})f(x_{r-1}, y_{s-1}) \quad (5)$$

przedstawiający objętość graniastosłupa (fig. 63) o podstawie h_rk_s i o wysokości równej: $f(x_{r-1}, y_{s-1})$ i utwórzmy sumę takich iloczynów, t. j. sumę objętości takich graniastosłupów, przyjmując dla r wartości od 1 do n,

a dla s od 1 do m, przyczem $x_0=a$, $x_n=b$, $y_0=\alpha$, $y_n=\beta$, natenczas otrzymamy sumę podwójną, kształtu:

$$V=\sum_{r=1}^{r=n}\sum_{r=1}^{s=m} h_r k_s f(x_{r-1}, y_{s-1}), \tag{6}$$

którą możemy rozwinąć w sumy częściowe, uporządkowane podług h w postaci:

$$V=h_1\{k_1 f(a, \alpha)+k_2 f(a, y_1)+\ldots+k_m f(a, y_{m-1})\}+$$
$$+h_2\{k_1 f(x_1, \alpha)+k_2 f(x_1, y_1)+\ldots+k_m f(x_1, y_{m-1})\}+$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+h_n\{k_1 f(x_{n-1}, \alpha)+k_2 f(x_{n-1}, y_1)+\ldots+k_m f(x_{n-1}, y_{m-1})\}.$$

Weźmy pod uwagę sumę częściową $(r+1)$-szego wiersza, przedstawiającą się w postaci:

$$h_{r+1}\{k_1 f(x_r, \alpha)+k_2 f(x_r, y_1)+\ldots+k_m f(x_r, y_{m-1})\},$$

to suma ta przedstawia sumę objętości graniastosłupów zawartych między dwiema płaszczyznami równoległemi do płaszczyny XOZ, mającemi odstęp h_{r+1}. W przypadku gdy różnice k_1, k_2 ..., k_m nieograniczenie maleją, dążąc do zera, suma ujęta w nawiasie $\{\ \}$ dąży do granicy $\int_\alpha^\beta f(x_r, y)\,dy$, przedstawiającej powierzchnię przekroju równoległego do płaszczyzny YOZ w odstępie x_r, możemy zatem położyć:

$$k_1 f(x_r, \alpha)+k_2 f(x_r, y_1)+\ldots+k_m f(x_r, y_{m-1})=\int_\alpha^\beta f(x_r, y)\,dx+\eta_{r-1},$$

gdzie η_{r-1} staje się wraz z różnicami k_r, ostatecznie zerem.

Połóżmy: $$\int_\alpha^\beta f(x_r, y)\,dy=\varphi(x_r),$$

a otrzymamy:

$$V=h_1\{\varphi(a)+\eta_1\}+h_2\{\varphi(x_1)+\eta_2\}+\ldots+h_n\{\varphi(x_{n-1})+\eta_n\},$$

a więc:

$$V=h_1\varphi(x)+h_2\varphi(x_1)+\ldots+h_n\varphi(x_{n-1})+h_1\eta_1+h_2\eta_1+\ldots+h_n\eta_n,$$

czyli: $$V=\sum_{r=1}^{r=n} h_r\varphi(x_{r-1})+\sum_{r=1}^{r=n} h_r\eta_r, \tag{7}$$

Jeżeli odstępy h_r maleją nieograniczenie, tedy: $\lim\limits_{n=\infty}\sum_{r=1}^{r=n} h_r\eta_r=0$,

$$\lim_{n=\infty}\sum_{r=1}^{r=n} h_r\varphi(x_{r-1})=\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

zatem otrzymujemy ostatecznie:

$$\lim V=\lim\sum_{r=1}^{r=n}\sum_{s=1}^{s=m} h_r k_s f(x_{r-1}, y_{s-1})=\int_a^b\left(\int_\alpha^\beta f(x, y)\,dy\right)dx. \tag{8}$$

Wyznaczając wartość sumy V kolumnami, otrzymujemy:

$$V=k_1\sum_{r=1}^{r=n} h_r f(x_{r-1}, \alpha)+k_2\sum_{r=1}^{r=n} h_r f(x_{r-1}, y_1)+\ldots+k_m\sum_{r=1}^{r=n} h_r f(x_{r-1}, y_{m-1}),$$

a że: $$\lim_{n=\infty}\sum_{r=1}^{r=n} h_r f(x_{r-1}, y_s)=\int_a^b f(x, y_s)\,dx,$$

przeto otrzymujemy ostatecznie:

$$\lim V = \lim \sum_{s=1}^{s=m} \sum_{r=1}^{r=n} k_s h_r f(x_{r-1}, y_{s-1}) = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy$$

zatem:

$$V = \int_a^b \int_\alpha^\beta \int f(x, y)\, dx\, dy = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(x, y)\, dy\, dx. \qquad (9)$$

Całka określona podwójna przedstawia się więc jako granica sumy podwójnej iloczynów kształtu $f(x, y) h k = f(x, y) \Delta x \Delta y$ w zakresach (a, b) i (α, β). Geometrycznie iloczyny te, podają objętości graniastosłupów o podstawie $hk = \Delta x \Delta y$, a o wysokości równej wysokości punktu P powierzchni: $z = f(x, y)$, którego rzutem na płaszczyznę XOY jest jeden z wierzchołków podstawy $\Delta x \Delta y$, a granicą tej sumy jest objętość graniastosłupa opartego na prostokącie $ABCD$, a ograniczonego powierzchnią $z = f(x, y)$.

5. **Uwaga**. Że suma objętości graniastosłupów przy wzroście ilości punktów podziału dąży do tej samej granicy niezależnie od rozmieszczenia tych punktów, możemy dowieść na podstawie następujących rozważań:

Połóżmy:

$$V = \sum_{r=1}^{r=n} \sum_{s=1}^{s=m} (x_r - x_{r-1})(y_s - y_{s-1})\, f(x_r, y_s),$$

Weźmy pod uwagę prostokąt częściowy $(x_r - x_{r-1})(y_s - y_{s-1})$ i przyjmijmy, że m_{rs} jest najmniejszą, a M_{rs} największą wartością funkcyi $z = f(x, y)$ w obrębie tego prostokąta, niech przedstawia dalej m najmniejszą, a M największą wartość z w całym zakresie (a, b) i (α, β).

Oznaczmy przez V' wartość sumy podwójnej, odpowiadającą wysokościom m_{rs}, a przez V'' wartość, odpowiadającą wysokościom M_{rs}, otrzymamy nierówności:

$$(b - a)(\beta - \alpha) m < V' < V < V'' < (b - a)(\beta - \alpha) M,$$

przyczem:

$$V'' - V' = \sum_{r=1}^{r=n} \sum_{s=1}^{s=m} (x_r - x_{r-1})(y_s - y_{s-1})(M_{rs} - m_{rs}) \qquad (10)$$

Zwiększając ilość prostokątów częściowych możemy wymiary $x_r\ x_{r-1}$ i $y_s - y_{s-1}$ zrobić mniejszemi od dowolnie małej liczby η, a przeto także różnicę $M_{rs} - m_{rs} = \sigma_{rs}$, zwaną chwiejnością powierzchni $z = f(x, y)$ nad prostokątem $(x_r - x_{r-1})(y_s - y_{s-1})$, uczynić dowolnie małą. Oznaczmy przez σ największą z wartości σ_{rs}, tedy otrzymamy:

$$V' - V'' < (b - a)(\beta - \alpha) . \sigma. \qquad (11)$$

Ponieważ liczbę σ możemy przez zwiększanie ilości prostokątów częściowych zrobić dowolnie małą, przeto widzimy, że sumy V'' i V' dążą do jednakowej granicy, a do tej także dążyć musi suma V między niemi leżąca. Granicą tą jest objętość V przedstawiona całką określoną podwójną:

$$V = \int_a^b \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dx\, dy.$$

6. Całki określone podwójne o zmiennych granicach całkowania. Pojęcie całki podwójnej określonej kształtu:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dx\, dy,$$

w której granice całkowania x_1 i x_2 odnoszą się do zmiennej x, a y_1 i y_2 do y, możemy oznaczyć, przyjmując zakres całkowania tak, żeby granice pierwszego całkowania były funkcyami drugiej zmiennej, a granice drugiego liczbami stałemi. Przyjmując $y_1 = \varphi_1(x)$, jako granice pierwszego całkowania $y_2 = \varphi_2(x)$, a jako granice drugiego: $x_1 = a$, $x_2 = b$, otrzymamy całkę podwójną określoną kształtu:

$$\int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \qquad (12)$$

Jeżeli $\int f(x, y)\,dy = \Phi(x, y)$, natenczas otrzymujemy jako wynik pierwszego całkowania:

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy = \Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \Phi(x, y) = \Phi[x, \varphi_2(x)] - \Phi[x, \varphi_1(x)].$$

Dana całka podwójna określona przedstawia się wobec tego w postaci całki pojedyńczej wzorem:

$$\int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b (\Phi[x, \varphi_2(x)] - \Phi[x, \varphi_1(x)])\,dx \tag{13}$$

Przyjąwszy zaś, że pierwsze całkowanie dotyczy zmiennej x w granicach zmiennych $x_1 = f_1(y)$, $x_2 = f_2(y)$, a drugie podług y w granicach stałych $y_1 = \alpha$, $y_2 = \beta$ otrzymujemy całkę podwójną kształtu:

$$\int_\alpha^\beta \int_{f_1(y)}^{f_2(y)} f(x, y)\,dy\,dx = \int_\alpha^\beta dy \int_{f_1(y)}^{f_2(y)} f(x, y)\,dx. \tag{14}$$

Jeżeli $\int f(x, y)\,dx = F(x, y)$, natenczas otrzymujemy jako wynik pierwszego całkowania:

$$\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y)\,dx = \Big|_{f_1(x)}^{f_2(x)} F(x, y) = F[f_2(y), y] - F[f_1(y), y],$$

a całkę podwójną przedstawioną wzorem w postaci:

$$\int_\alpha^\beta \int_{f_1(y)}^{f_2(y)} f(x, y)\,dy\,dx = \int_\alpha^\beta (F[f_2(y), y] - F[f_1(y), y])\,dy. \tag{15}$$

7. Znaczenie geometryczne podwójnej całki określonej przy zmiennych granicach całkowania w powyższy sposób wybranych jest bezpośrednio widoczne. Jeżeli bowiem dana funkcya $z = f(x, y)$ przedstawia powierzchnię ciągłą w granicach, związanych relacyą $\varphi(x, y) = 0$, a więc nie w obrębie pewnego prostokąta (a, b) i (α, β), lecz na obwodzie pewnej linii krzywej na płaszczyźnie XOY położonej (fig. 64), a krzywa ta ma tę własność, że wszelka poprzeczna równoległa osi y ów przecina ją tylko w dwóch punktach $y_1 = \varphi_1(x)$ i $y_2 = \varphi_2(x)$, wówczas zaczynając całkowanie od zmiennej y w granicach y_1 i y_2 przy stałem x, obliczamy powierzchnię A_x przekroju równoległego do ZOY (fig. 64) w granicach $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, gdzie $y_1 = \varphi_1(x)$ i $y_2 = \varphi_2(x)$ są równaniami górnego i dolnego ograniczenia podstawy, wypływającemi z równania $\varphi(x, y) = 0$. Otrzymamy tedy $A_x = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy$. Powierzchnia ta pomnożona przez dx przedstawia objętość warstwy walcowej danej powierzchni w odstępie x o szerokości dx. Drugiemu całkowaniu podług zmiennej x kształtu $\int A_x\,dx$ odpowiada tedy sumowanie objętości tych warstw, a tu już muszą być granice stałe $x_1 = a$, $x_2 = b$.

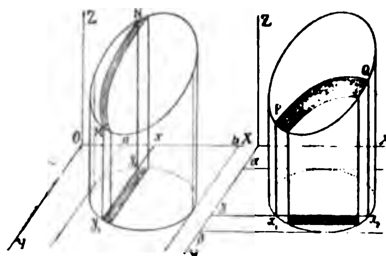


Fig. 64. Fig. 65.

Jeżeli zaczniemy zaś całkowanie od zmiennej y przy stałem y (fig. 65), obliczymy najpierw powierzchnię A_y przekroju równoległego do ZOX w granicach $x_1 = f_1(y)$ i $x_2 = f_2(y)$ podług wzoru $A_y = \int_{f_1(y)}^{f_2(y)} f(x, y)\,dx$. Iloczynowi $A_y dy$ odpowiada tedy objętość warstwy walcowej w odstępie y, a drugie całko-

wanie podług zmiennej x, oznacza tedy sumowanie tychże warstw w granicach już stałych $y_1=\alpha$, $y_2=\beta$, określonych podstawą $\varphi(x, y)=0$.

8. Całka określona podwójna o zmiennych granicach przedstawia w myśl powyższego objaśnienia objętość bryły walcowej opartej na danej krzywej, jako podstawie, zawartą między daną powierzchnią a płaszczyzną poziomą.

Zmiana porządku całkowania wywołuje tu zmianę granic, granice pierwszego całkowania są bowiem zawsze zmienne, a to są pewnemi funkcyami drugiej zmiennej, granice drugiego są zawsze stałe, a oba rodzaje granic należy w każdym przypadku wyznaczyć z równania $\varphi(x, y)=0$, określającego podstawę, czyli rzut tej bryły na płaszczyznę XOY.

9. Całki określone potrójne. Jeżeli do funkcyi $f(x, y, z)$ trzech zmiennych x, y, z zastosujemy najpierw całkowanie według zmiennej z w granicach z_1 i z_2, które mogą być stałe lub zmienne zależne od dwu pozostałych zmienych x, y, a następnie do tak otrzymanego wyniku, przedstawiającego się w postaci pewnej funkcyi zmiennych x i y, zastosujemy całkowanie według zmiennej y w granicach y_1 i y_2, które znowu mogą być albo stałe albo zmienne zależne od pozostałej zmiennej x, a w końcu do nowego wyniku, przedstawiającego się w postaci pewnej funkcyi zmiennej x zastosujemy ostatecznie całkowanie podług zmiennej x w granicach stałych x_1, x_2, natenczas tak określoną całkę kształtu:

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

nazywamy całką określoną potrójną.

Trzymając się zasady, że pierwsze całkowanie może się odbywać w granicach zależnych od dwu pozostałych zmiennych, drugie w granicach zależnych od pozostałej trzeciej zmiennej, a trzecie w granicach stałych możemy zachować jakikolwiek porządek całkowania, zmieniając stosownie granice całkowania. Przy stałych granicach całkowania jest porządek całkowania jak przy całce podwójnej zupełnie obojętny.

10. Całka potrójna jako granica sumy. Jeżeli dana funkcya $f(x, y, z)$ jest funkcyą jednowartościową w zakresie określonym granicami stałemi (x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2), przedstawiającym się geometrycznie w postaci równoległościanu o krawędziach równoległych do osi układu, a mających wymiary x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1, natenczas podzieliwszy odstęp (x_1, x_2) na m części punktami $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}$, odstęp (y_1, y_2) na n części punktami $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$, odstęp (z_1, z_2) na r części punktami $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{r-1}$, utworzymy potrójną sumę iloczynów, kształtu:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=m}\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}(\xi_\mu-\xi_{\mu-1})(\eta_\nu-\eta_{\nu-1})(\zeta_\varrho-\zeta_{\varrho-1})f(\xi_{\mu-1}, \eta_{\nu-1}, \zeta_{\varrho-1}),$$

gdzie: $\xi_0=x_1$, $\xi_m=x_1$, $\eta_0=y_1$, $\eta_n=y_2$, $\zeta_0=z_1$, $\zeta_r=z_2$, natenczas zauważymy, że ta suma przy wzroście liczb m, n, r, a zarazem przy zmniejszaniu się różnic $\xi_\mu-\xi_{\mu-1}$, $\eta_\nu-\eta_{\nu-1}$, $\zeta_\varrho-\zeta_{\varrho-1}$ dążyć będzie do pewnej granicy, podobnie jako suma podwójna art. 4, a tę granicę oznaczoną symbolem:

$$S=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \tag{16}$$

otrzymamy, jeżeli do funkcyi $f(x, y, z)$ zastosujemy trzy kolejne całkowania w pewnym z sześciu możliwych porządków sumowania.

Oddzielając poszczególne całkowania i przyjąwszy np. jako pierwsze całkowanie podług z, drugie podług y, trzecie podług x, przedstawiamy tę całkę potrójną w postaci:

$$S=\int_{x_1}^{x_2} dx\int_{y_1}^{y_2} dy\int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)\,dz.$$

To potrójne sumowanie może odbyć się także w granicach zmiennych wyznaczonych np. pewną zamkniętą powierzchnią o równaniu: $F(x, y, z)=0$. o której przypuszczamy, że każda prosta równoległa do osi układu przecina ją tylko w dwóch punktach.

Zaczynając sumowanie podług zmiennej z, otrzymujemy z równania $F(x, y, z)=0$ dwie wartości z_1 i z_2 jako funkcye zmiennych x i y. Niech będzie $z_1=\varphi_1(x, y)$, $z_2=\varphi_2(x, y)$, tedy pierwsze całkowanie daje całkę określoną:

$$\int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz,$$

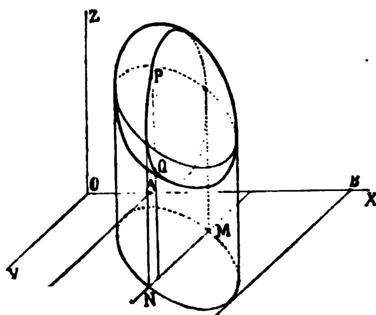


Fig. 66.

dwu zmiennych x i y, przedstawiającą granicę sumy pojedyńczej:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)\,dz, \text{ od } Q \text{ do } P \text{ (fig. 66).}$$

Niech będzie krzywa C rzutem powierzchni $F(x, y, z)=0$ na płaszczyznę XOY. Krzywa ta obejmować będzie rzuty tych punktów powierzchni $F(x, y, z)=0$, w których płaszczyzny styczne są prostopadłe do płaszczyzny XOY, czyli równoległe do osi z-ów. Spółrzędne tych punktów czynią zadość warunkowi: $\frac{\partial F}{\partial z}=0$. Wyrugowawszy zatem zmienną z z równań $F(x, y, z)=0$ i $\frac{\partial F}{\partial z}=0$, otrzymujemy równanie krzywej C w postaci $\Phi(x, y)=0$. Z tego równania możemy dla pewnego x według założenia otrzymać dwie wartości na y. Niech będą $y_1=\psi_1(x)$, $y_2=\psi_2(x)$ rzędne punktów krzywej C, należące do odciętej x, natenczas drugie całkowanie podług zmiennej y, odbywa się wzdłuż prostej MN i daje całkę określoną podwójną:

$$\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy\int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz.$$

Trzecie całkowanie podług zmiennej x musi już być określone stałemi granicami $x_1=a$, $x_2=b$, odpowiadającemi prostej AB i prowadzi do ostatecznego wyniku:

$$S=\int_a^b dx\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy\int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz. \tag{17}$$

Zakres całki określonej potrójnej obejmuje geometrycznie wszystkie punkta pewnej przestrzeni trójwymiarowej, samą wartość całki potrójnej nie możemy już uzmysłowić geometrycznie, analogicznie do uzmysłowień całki podwójnej przez objętość, całce potrójnej tak pojętej odpowiadałaby bowiem pojemność pewnej formy czterowymiarowej.

11. Pojęcie całki wielokrotnej. Formalne tworzenie całek określonych podwójnych i potrójnych może być z łatwością zastosowane do funkcyi n zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Niech będzie daną funkcya $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, jednowartościowa i skończona w pewnym zakresie, wyznaczonym bądź to granicami stałemi, bądź to granicami zmiennemi, określonemi za pomocą równania $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$. Stosując do tejże funkcyi kolejne całkowania podług n zmiennych w pewnym obranym porządku np. $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1$, otrzymujemy całkę określoną n-krotną, w postaci:

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \,..\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} dx_{n-1} \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_n,$$

która powstaje także jako granica n-krotnej sumy iloczynów kształtu:

$$\sum_{(r)} (x_1^{(s_1)} - x_1^{(s_1-1)})(x_2^{(s_2)} - x_2^{(s_2-1)}) \ldots (x_n^{(s_n)} - x_n^{(s_n-1)}) f(x_1^{s_1-1}, \ldots x_n^{(s_n-1)}),$$

jeżeli różnice $x_1^{(s_1)} - x_r^{(s_r-1)}$, $(r=1, 2, \ldots, n)$ nieograniczenie maleją.

12. Całki n-krotne i ich szczególne przypadki, całki liniowe, powierzchniowe i przestrzeniowe. Zakres całki n-krotnej obejmuje punkta przestrzeni n-wymiarowej, ograniczone formą $(n-1)$-wymiarową o równaniu $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$, przyczem dla każdego punktu $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ przestrzeni n-wymiarowej tworzy się iloczyn $dx_1 \,.\, dx_2 \ldots dx_n$ i danej funkcyi $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ spółrzędnych tego punktu i wykonywa n-krotne sumowanie tego iloczynu dla wszelkich punktów w zakresie $F(x_1, x_2, .., x_n) \leq 0$.

W tem rozumieniu jest taka suma n-krotna całką n-krotną odniesioną do pewnej części przestrzeni n-wymiarowej. W szczególności nazywamy w tem rozumieniu całkę pojedyńczą: $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$, dotyczącą funkcyi jednej zmiennej: $y=f(x)$, a więc punktów $P(x)$ na osi x-ów, ograniczoną punktami x_1 i x_2 tejże, całką liniową; całkę podwójną: $\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\,dy$, dotyczącą funkcyi dwu zmiennych $z=f(x, y)$, a więc punktów $P(x, y)$ płaszczyzny na polu ograniczonem krzywą $F(x, y)=0$ nazywamy całką powierzchniową; a całkę potrójną trzech zmiennych: $\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)\,dz$, dotyczącą funkcyi $u=f(x, y, z)$, a więc punktów $P(x, y, z)$ przestrzeni w obszarze ograniczonym powierzchnią $F(x, y, z)=0$ nazywamy całką przestrzenną.

Nazwy te tem się tłumaczą, że zakres całkowania przy całce liniowaj uzmysławia się odcinkiem linii prostej, przy całce powierzchniowej częścią płaszczyzny, ograniczoną prostokątem lub dowolną krzywą, a przy całce przestrzennej częścią przestrzeni, ograniczoną równoległościanem lub dowolną powierzchnią.

Ćwiczenia XXXIX.

Sprawdzić wartości następujących całek określonych podwójnych i uzmysłowić je geometrycznie, objętościami:

1) $\int_0^a dy \int_0^a x\,dx = \frac{a^2 a}{2}$.

2) $\int_0^{x_1} \int_0^{y_1} xy\,dx\,dy = \frac{x_1^2 y_1^2}{4}$.

3) $\int_a^b \int_\alpha^\beta \frac{dx\,dy}{xy} = \log \frac{b}{a} \,.\, \log \frac{\beta}{\alpha}$.

4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx\,dy = \frac{\pi}{2}$.

5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 y\, dy = \frac{\pi^2}{16}$.

6) $\int_0^1 dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 y + x^2 \sin^2 y}\, dy = \frac{\pi^2}{8}$.

7) $\int_0^{x_1}\int_0^{y_1} \sqrt{a^2+x^2}\, dx\, dy = \frac{y_1}{2}\left(x_1\sqrt{a^2+x_1^2} + x_1{}^2 \log \frac{x_1+\sqrt{a^2+x_1{}^2}}{a}\right)$.

8) $\int_0^1 dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 y + x^2 \sin^2 y}\, dy = \frac{2}{3}$.

9) $\int_0^1 x^2 dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 y + x^2 \sin^2 y}\, dy = \frac{3\pi^2}{64}$.

10) $\int_0^{\pi} dy \int_0^{2\pi} \sin x \cos^2 x\, dx = \frac{4}{3}\pi$.

11) $\int_b^a \int_a^b \frac{dx\, dy}{\sqrt{x^2+y^2+c^2}} = \frac{1}{c} \operatorname{arc\,tang} \frac{ab}{c\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

12) $\int_0^5 dy \int_0^{5-y} \sqrt{4+x+y}\, dx = \frac{16}{15}$.

13) $\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{ax-x^2}} (x^2+y^2)\, dy = \frac{3a^4\pi}{64}$.

14) $\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2} = \frac{2}{3}a^3$.

15) $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{a\, dx\, dy}{\sqrt{a^2-x^2}} = a^2$.

16) $\int_0^a \int_0^{\frac{bx}{a}} \sqrt{b^2 - \frac{a^2 y^2}{x^2}}\, dx\, dy = \frac{ab^2\pi}{8}$.

17) $\int_0^{x_1}\int_0^{y_1} x\sqrt{a^2-x^2}\, dx\, dy = \frac{y_1}{3}\,[a^3 - (a^2-x_1{}^2)^{3/2}]$

18) $\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{-(1+x^2)y^2} y\, dy = \frac{\pi}{4}$.

19) $\int_0^a \int_{\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,.\, dx\, dy = \frac{2a^3}{9}$.

20) $\int_0^a \int_0^{mx} (px^2+qy^2)\, dx\, dy = \frac{m}{12}(3p+m^2 q)a^4$.

21) $\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{1-x^2-y^2}\, dx\, dy = \frac{5\sqrt{2}-4}{24}\pi$.

22) $\int_0^a \int_{\sqrt{y(a-y)}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \frac{a\, dx\, dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = a^2$.

23) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a\cos y} x\,(a^2-x^2)^{1/2}\, dx\, dy = \frac{a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)$.

24) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a\cos y} \frac{a\, x\, dx\, dy}{\sqrt{a^2-x^2}} = a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$.

25) $\int_0^a \int_0^{\sqrt{ax-x^2}} \frac{a\, dx\, dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$.

26) $\int_0^a \int_0^b \frac{dx\, dy}{\sqrt{x^2+y^2+c^2}} = \frac{1}{c} \operatorname{arc\,tang} \frac{ab}{c\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

27) $\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy = \pi$.

Sprawdzić wartości następujących całek potrójnych:

28) $\int_0^{2\pi} dz \int_0^b dy \int_0^{\frac{az}{b}} x^3\, dx = \frac{\pi a^4 - b}{10}$.

29) $\int_0^1 \int_{-x}^{+x} \int_{-\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}}^{+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}} dx\, dy\, dz = \frac{\pi}{2}$.

30) $\int_0^{2\pi} dz \int_0^{\beta} dy \int_0^{2a\cos y} x^2 \sin y\, dx = \frac{4}{3} a^3 \pi (1-\cos^4 \beta)$.

31) $\int_0^a dx \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} dy \int_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)} (\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2)\, dz = \frac{3}{5} - \frac{\alpha a^2+\beta b^2+\gamma c^2}{abc}$.

32) $\int_0^a \int_0^x \int_0^{x+y} e^{x+y+z}\, dx\, dy\, dz = \frac{e^{4a}}{8} - \frac{3e^{2a}}{4} e^a - \frac{3}{8}$.

33) $\int_0^{2\pi} dz \int_0^{\pi} dy \int_0^{a(1+\cos y)} x^2 \sin y\, dx = \frac{8\pi a^3}{3}$.

34) $\int_0^{2\pi} dz \int_0^{\pi} \sin y\, dy \int_0^a x^2\, dx = \frac{4\pi a^3}{3}$.

35) $\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} (1-x^2)\sqrt{1-y^2}\, dx\, dy\, dz = \frac{4\pi}{3}$.

36) $\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} x^2(1-x^2)\sqrt{1-y^2}\, dx\, dy\, dz = \frac{4\pi}{15}$.

37) $\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}(1-x^2)x^2\sqrt{1-y^2}\,dx\,dy\,dz=\frac{4\pi}{15}.$

38) $\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^2(1-y^2)\sqrt{1-y^2z^2}\,dx\,dy\,dz=\frac{4\pi}{15}.$

39) $\int_0^{2a}d\alpha\int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{+\sqrt{ax-x^2}}dx\int_{\alpha x}^{\beta x}dz=2(\beta-\alpha)\frac{\pi a^3}{2}.$

40) $\int_0^{2\pi}dz\int_0^{\frac{\pi}{2}}dy\int_0^{\sqrt{\cos y}}x^2\sin y\,dx=\frac{4\pi}{15}.$

41) Obliczyć za pomocą całki podwójnej objętość bryły ograniczonej powierzchnią $\sqrt{x-y^2}$, płaszczyznami $x=y\sqrt{a}$, i $x=a$, tudzież płaszczyznami $y=0$ i $y=\sqrt{a}$, opartej o płaszczyznę poziomą $z=0$.

42) Wyznaczyć objętość bryły ograniczonej powierzchnią $z=Ax^2+By^2$, płaszczyzną $y=\frac{b}{a}x$, płaszczyzną $x=a$ i płaszczyzną poziomą $z=0$.

43) Jaką objętość ma bryła zawarta między powierzchnią $z=\alpha x^2+\beta y^2$, płaszczyzną $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ i płaszczyznami spółrzędnemi.

44) Obliczyć za pomocą całki podwójnej powierzchnię ograniczoną kołem $(x-a)^2+y^2=a^2$ i parabolą $y^2=ax$.

45) Wyznaczyć kształt powierzchni określonej równaniem: $z=\frac{y\sqrt{a^2-x^2}}{c}$ i obliczyć objętość zawartą między nią powierzchniami spółrzędnemi i płaszczyznami: $y=c$ i $x=a$.

Wyznaczyć wartości następujących całek określonych:

46) $\int_0^a\int_0^c\frac{y\sqrt{a^2-x^2}}{c}\,dy\,dx.$

47) $\int_0^a\int_0^{\sqrt{ax-x^2}}\frac{a\,dy\,dx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$

48) $\int_0^a\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy.$

49) $\int_0^c\int_0^{2\sqrt{ax}}\sqrt{4bx-\frac{b}{a}y^2}\,dx\,dy$

50) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{2c\cos y}\frac{x^2}{2a}\,dy\,dx.$

51) $\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$

52) $\int_0^{2\pi}dy\int_0^\infty e^{-x^2}x\,dx.$

53) $\int_0^{x_1}\int_0^{y_1}(1-\sqrt{xy})\,dx\,dy.$

54) $\int_0^{x_1}\int_0^{y_1}\frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}\,dx\,dy.$

55) $\int_0^{\frac{a}{\beta}}\int_\alpha^{\frac{a-\beta x}{\alpha}}\frac{a\,dx\,dy}{\sqrt{a^2-(\alpha x+\beta y)^2}}$

56) $\int_0^a\int_0^{a+\sqrt{a^2-y^2}}\sqrt{a^2-(x-\sqrt{a^2-y^2})^2}\,dx\,dy.$

57) $\int_0^{\frac{a}{\cos\alpha}}\int_0^{(a-x\cos\alpha)\cos\alpha}\frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-(x\cos\alpha+y\sin\alpha)^2}}.$

58) Na prostokącie o wierzchołkach $A(x_1, y_1)$, $B(x_1, y_2)$, $C(x_2, y_1)$, $D(x_2, y_2)$ oparty jest graniastosłup ograniczony powierzchnią $z=xy$, okazać, że jego objętość:

$=\frac{1}{4}(x_2-x_1)(y_2-y_1)(z_1+z_2+z_3+z_4).$

Podać znaczenie geometryczne następujących całek określonych podwójnych, zmieniając porządek całkować, wykazać, że:

59) $\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}f(x, y)\,dx\,dy=\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}f(x, y)\,dy\,dx.$

60) $\int_0^{2a}\int_{\frac{x^2}{4a}}^{2a-x}f(x, y)\,dx\,dy=\int_0^a\int_0^{2\sqrt{ay}}f(x, y)\,dy\,dx+\int_a^{3a}\int_0^{3a-y}f(x, y)\,dy\,dx.$

61) $\int_0^1\int_x^{x(2-x)} f(x, y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_{1-\sqrt{1-y}}^{y} f(x, y)\,dy\,dx.$

62) $\int_0^a\int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{x+2a} f(x, y)\,dx\,dy = \int_0^a\int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{a} f(x, y)\,dy\,dx +$

$+ \int_0^{2a}\int_0^a f(x, y)\,dy\,dx + \int_{2a}^{3a}\int_{y-2a}^{a} f(x, y)\,dy$

63) $\int_0^a\int_0^{\frac{b}{b+x}} f(x, y)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{b}{b+a}}\int_0^a f(x, y)\,dy\,dx + \int_{\frac{b}{b+a}}^{1}\int_0^{\frac{b(1-y)}{y}} f(x, y)\,dy\,dx.$

64) Podać znaczenie geometryczne całki potrójnej: $\int_0^a\int_0^x\int_0^y dx\,dy\,dz = \frac{a^3}{6}$ i wyzı granice odpowiadające wszelkim zmianom porządku całkowania.

65) Okazać, że $\int_0^a dx\int_0^x dy\int_0^y f(x, y, z)\,dz = \int_0^a dy\int_y^a dx\int_0^y f(x, y, z)\,dz =$

$= \int_0^a dy\int_0^y dz\int_y^a f(x, y, z)\,dy = \int_0^a dz\int_z^a dy\int_y^a f(x, y, z)\,dx =$

$= \int_0^a dx\int_0^x dz\int_0^x f(x, y, z)\,dy = \int_0^a dz\int_z^a dx\int_z^x f(x, y, z)\,dy.$

Rozwiązania XXXIX. 3) fig. 67. 8) fig. 68. 16) fig. 69. 11) i 25) fig. 70.

41) $\int_0^{\sqrt{a}}\int_{y\sqrt{a}}^{a} \sqrt{x-y^2}\,dy\,dx = \frac{7a^3\pi}{64}$. 42) $\int_0^a\int_0^{\frac{b}{a}x} (Ax^2+By^2)\,dx\,dy = \frac{1}{4}ab(Aa^2+\frac{1}{3}Bb^2$

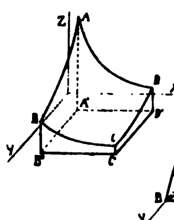


Fig. 67.

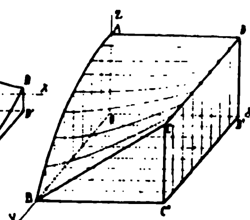


Fig. 68.

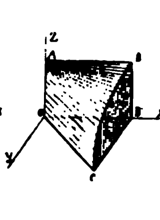


Fig. 69.

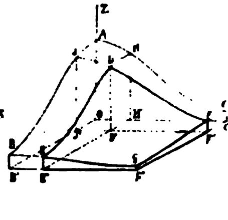


Fig. 70.

43) $\int_0^a\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} (\alpha x^2+\beta y^2)\,dx\,dy = \frac{1}{12}ab\,(\alpha a^2+\beta b^2).$ 44) $\int_0^a\int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{\frac{y^2}{a}} dx\,dy = \frac{\pi a^2}{4} -$

45) $\int_0^a\int_0^c \frac{y\sqrt{a^2-x^2}}{c}\,dy\,dx = \frac{\pi a^2 c}{8}.$ 46) $\frac{\pi a^2 c}{8}.$ 47) $\frac{\pi a^2}{2}.$ 48) $\frac{abc\pi}{6}.$

49) $\frac{\pi c^2\sqrt{ab}}{2}.$ 50) $\frac{3\pi c^4}{8a}.$ 51) $\frac{\pi}{4}.$ 52) $\pi.$ 53) $x_1 y_1\,[1+\frac{4}{9}\sqrt{x_1 y_1}]$.

54) arc tang $(x_1\ y_1)$. 55) $\frac{a^2}{\alpha\beta}.$ 56) $\frac{2}{3}(3\pi+8)a^3.$ 57) $\frac{a^2}{\sin\alpha\cos\alpha}.$

Literatura. Ernesto Cesaro: Elementares Lehrbuch der algebraischen An und der Infinitesimalrechnung, deutsch herausgegeben von Dr. Gerhard Kowalewski. zig 1904. Dr. Schnuse: Die Grundlehren der höheren Analysis Zweiter Theil Int rechnung. Braunschweig 1858. I. Todhunter: A treatise on the integral calculu its applications. London 1886.

Tematy do rozprawek naukowych:

1) Różniczkowanie i całkowanie całek określonych.
2) Całki określone podwójne, ich powstawanie i przekształcanie.
3) Przekształcanie całek określonych potrójnych i wielokrotnych.

Wykład XL.

Różniczkowanie, całkowanie i przekształcanie całek określonych.

1. Różniczkowanie całki określonej względem zmiennych granic. Niech ędzie daną całka określona $\int_a^b f(x)\,dx$, w której granice a i b są zmienne. łóżmy, że $\int f(x)\,dx = F(x)$, więc $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$, wówczas:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big|_a^b F(x) = F(b) - F(a) \tag{1}$$

Przyjmując, że granica górna b jest zmienną, a dolna a stałą:

trzymujemy: $$\frac{d}{db}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{dF(b)}{db}, \text{ a że } \frac{dF(b)}{db} = f(b),$$

rzeto: $$\frac{d}{db}\int_a^b f(x)\,dx = f(b). \tag{2}$$

To znaczy: *Pochodna całki określonej ze względu na górną granicę b jest ówna wartości, jaką otrzymuje funkcya $f(x)$, stojąca pod znakiem całkowania, gdy niej za zmienną x podstawimy górną granicę b.*

Przyjmując, że w danej całce określonej granica górna b jest stałą, granica dolna a zmienną, otrzymujemy na podstawie (1) pochodną względem a w postaci:

$$\frac{d}{da}\int_a^b f(x)\,dx = -\frac{dF(a)}{da}, \quad \text{a że: } \frac{dF(a)}{da} = f(a),$$

atem: $$\frac{d}{da}\int_a^b f(x)\,dx = -f(a). \tag{3}$$

To znaczy: *Pochodna całki określonej ze względu na dolną granicę jest równa wartości, jaką otrzymuje wzięta z przeciwnym znakiem funkcya $f(x)$, stojąca pod znakiem całkowania, gdy w niej za zmienną x podstawimy granicę dolną.*

Jeżeli obie granice a i b są zmienne, wtedy otrzymamy zupełną różniczkę danej całki określonej:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

w postaci: $$d\int_a^b f(x)\,dx = \frac{dF(b)}{db}\,db - \frac{dF(a)}{da}\,da,$$

czyli:
$$d\int_a^b f(x)\,dx = f(b).db - f(a).da.$$

Jeżeli obie granice są funkcyami pewnego zmiennego paramet wówczas otrzymujemy pochodną całki określonej względem tego paraı w postaci:

$$\frac{d}{da}\int_a^b f(x)\,dx = f(b).\frac{db}{da} - f(a).\frac{da}{da}.$$

2. **Różniczkowanie całki określonej ze względu na zmienny par znajdujący się pod znakiem całkowania.** Całka określona pojedyńcza (łych granicach a i b, kształtu: $\int_a^b f(x, \alpha)\,dx$, zawierająca pod znakiem (wania zmienny parametr α określa pewną funkcyę tegoż paramet Oznaczmy ją przez $F(\alpha)$, a więc połóżmy:

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\,dx.$$

Nadajmy zmiennej α przyrost $\Delta\alpha$, natenczas otrzymamy:

$$F(\alpha+\Delta\alpha) = F(\alpha) + \Delta F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha+\Delta\alpha)\,dx,$$

a stąd:
$$\Delta F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha+\Delta\alpha)\,dx - \int_a^b f(x, \alpha)\,dx,$$

czyli:
$$\Delta F(\alpha) = \int_a^b [f(x, \alpha+\Delta\alpha) - f(x, \alpha)]\,dx,$$

a więc:
$$\frac{\Delta F(\alpha)}{\Delta\alpha} = \int_a^b \frac{f(x, \alpha+\Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha}\,dx.$$

Jeżeli $\Delta\alpha$ maleje nieograniczenie, dążąc do zera, natenczas mamy

$$\lim_{\Delta\alpha=0} \frac{\Delta F(\alpha)}{\Delta\alpha} = \frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = F'(\alpha),$$

$$\lim_{\Delta\alpha=0} \frac{f(x, \alpha+\Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha} = \frac{df(x, \alpha)}{d\alpha} = f'_\alpha(x, \alpha),$$

otrzymujemy zatem wzór:

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = \int_a^b \frac{df(x, \alpha)}{d\alpha}\,dx,$$

czyli:
$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x, \alpha)\,dx = \int_a^b \frac{df(x, \alpha)}{d\alpha}.dx$$

To znaczy: *Całkę określoną pojedyńczą o stałych granicach, zawierając znakiem całkowania parametr zmienny, różniczkujemy ze względu na ten par różniczkując ze względu na ten parametr wprost funkcyę stojącą pod znakie kowania.*

Stosując do danej całki różniczkowanie n-krotne według parame otrzymujemy wzór ogólny:

$$\frac{d^n}{d\alpha^n}\int_a^b f(x, \alpha)\,dx = \int_a^b \frac{d^n f(x, \alpha)}{d\alpha^n}\,dx$$

ważny, gdy granice a i b są stałe, względnie od parametru α niezależ

3. Różniczkowanie całek określonych o zmiennych granicach całkowania. Jeżeli w danej całce określonej $\int_a^b f(x, \alpha)\,dx$, zawierającej pod znakiem całkowania zmienny parametr α, granice całkowania a i b są również zmienne, wówczas dana całka jest funkcyą złożoną zmiennych α, a i b; możemy więc położyć:

$$\int_a^b f(x, \alpha)\,dx = F(\alpha, a, b).$$

Zupełna różniczka tej funkcyi przedstawia się w postaci:

$$dF(\alpha, a, b) = \frac{\partial F}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial F}{\partial a} da + \frac{\partial F}{\partial b} db.$$

Jeżeli przytem a i b są funkcyami parametru α, np $a = \varphi_1(\alpha)$, $b = \varphi_2(\alpha)$, wówczas otrzymujemy z powyższego wzoru pochodną względem α postaci:

$$\frac{dF(\alpha, a, b)}{d\alpha} = \frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial a}\cdot\frac{da}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial b}\cdot\frac{db}{d\alpha}.$$

Ale: $\quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = \int_a^b \frac{df(x, \alpha)}{d\alpha} dx, \qquad \frac{\partial F}{\partial a} = -f(a, \alpha), \qquad \frac{\partial F}{\partial b} = f(b, \alpha),$

zatem otrzymujemy ostatecznie wzór:

$$\frac{d}{d\alpha}\left[\int_a^b f(x, \alpha)\,dx\right] = \int_a^b \frac{df(x, \alpha)}{d\alpha} dx - f(a, \alpha)\frac{da}{d\alpha} + f(b, \alpha)\frac{db}{d\alpha}, \tag{7}$$

podający pochodną całki określonej względem parametru, znajdującego się pod znakiem całkowania, jeżeli granice całkowania są funkcyami tego parametru.

Na podstawie powyższego wzoru możemy otrzymać wyższe pochodne danej całki określonej, wzięte względem parametru α. Mianowicie otrzymujemy stąd drugą pochodną:

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}\left[\int_a^b f(x, \alpha)\,dx\right] = \int_a^b \frac{d^2 f(x, \alpha)}{d\alpha^2} dx - f(a, \alpha)\frac{d^2 a}{d\alpha^2} - \frac{df(a, \alpha)}{da}\left(\frac{da}{d\alpha}\right)^2 -$$
$$- 2\frac{df(a, \alpha)}{d\alpha}\cdot\frac{da}{d\alpha} + f(b, \alpha)\frac{d^2 b}{d\alpha^2} + \frac{df(b, \alpha)}{db}\left(\frac{db}{d\alpha}\right)^2 + 2\frac{df(b, \alpha)}{d\alpha}\cdot\frac{db}{d\alpha},$$

a stąd pochodne dalsze.

4. Zastosowanie prawideł różniczkowania całek określonych. Na podstawie prawideł różniczkowania całek określonych w stałych granicach całkowania możemy ze znanej całki określonej, zawierającej pod znakiem całkowania, dowolny parametr wyprowadzić szereg nowych całek określonych. Tak otrzymamy np. z całki:

$$a) \qquad \int_0^1 x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1},$$

w której α jest parametrem zmiennym, różnym od -1, drogą różniczkowania podług α, kolejno wzory:

$$\int_0^1 x^\alpha . \log x\,dx = -\frac{1}{(\alpha+1)^2}$$

$$\int_0^1 x^\alpha (\log x)^2\,dx = \frac{1.2}{(\alpha+1)^3}, \qquad \int_0^1 x^\alpha (\log x)^3\,dx = -\frac{3!}{(\alpha+1)^4}$$

ogólnie:
$$\int_0^1 x^a (\log x)^n dx = \frac{d^n}{d a^n}\left(\frac{1}{a+1}\right) = \frac{(-1)^n n!}{(a+1)^{n+1}}. \tag{8}$$

β) Z całki:
$$\int_0^\infty e^{-ax} dx = \frac{1}{a},$$

gdzie $a > 0$, otrzymujemy drogą różniczkowania podług a wzory:
$$\int_0^\infty x e^{-ax} dx = \frac{1}{a^2}, \quad \int_0^\infty x^2 e^{-ax} dx = \frac{1.2}{a^3},$$

ogólnie wzór:
$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} da = (-1)^n \frac{d^n}{da^n}\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{n!}{a^{n+1}}. \tag{9}$$

γ) Z całki:
$$\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2a}, \quad \text{gdzie } a > 0,$$

otrzymamy na podstawie n-krotnego różniczkowania podług parametru a wzór:
$$\int_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n+1}} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} \cdot \frac{\pi}{2a^{2n+1}}. \tag{10}$$

δ) Z całki:
$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos b\,x\,dx = \frac{a}{a^2+b^2},$$

otrzymamy na podstawie n-krotnego różniczkowania podług parametru a wzór:
$$\int_0^\infty e^{-ax} x^n \cos b\,x\,dx = (-1)^n \frac{d^n}{da^n}\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right). \tag{11}$$

Uważając zaś parametr b za zmienny i różniczkując daną całkę n-krotnie podług b, otrzymujemy wzór:
$$\int_0^\infty e^{-ax} x^n \cos\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right) dx = \frac{d^n}{db^n}\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right). \tag{12}$$

5. Całkowanie pojedyńczej całki określonej ze względu na parametr zmienny, znajdujący się pod znakiem całkowania. Jeżeli całka określona między stałemi granicami a i b zawiera pod znakiem całkowania pewien parametr zmienny α, tedy jej wartość jest funkcyą tego parametru.

Przyjmując, że funkcya $f(x, \alpha)$ jest ze względu na x funkcyą ciągłą między granicami a i b, a ze względu na zmienny parametr α między granicami α_1 i α_2, stałemi, względnie niezależnemi od a i b, natenczas, kładąc $f(x, \alpha) = \frac{d\varphi(x, \alpha)}{d\alpha}$, otrzymamy:
$$\int_a^b f(x, \alpha) dx = \int_a^b \frac{d\varphi(x, \alpha)}{d\alpha} dx,$$

a więc, korzystając z prawidła różniczkowania całek określonych, dostajemy wzór:
$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \left[\int_a^b f(x, \alpha) dx\right] = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \left[\int_a^b \frac{d\varphi(x, \alpha)}{d\alpha} dx\right] =$$
$$= \int_a^b dx \left[\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\varphi(x, \alpha)}{d\alpha} d\alpha\right] = \int_a^b dx \left[\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x, \alpha) d\alpha\right],$$

czyli:
$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \left[\int_a^b f(x, \alpha) dx\right] = \int_a^b dx \left[\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x, \alpha) d\alpha\right]. \tag{13}$$

To znaczy: *Całkę określoną granicami stałemi całkujemy w pewnych granicach stałych ze względu na parametr, całkując funkcyę stojącą pod znakiem całkowania względem tegoż parametru.*

6. Prawidło całkowania całek określonych może być, zarówno jak prawidło różniczkowania, użyte do obliczania nowych całek określonych.

Tak otrzymamy np. z całki określonej:

$$\alpha)\qquad \int_0^1 x^{a-1}\,dx=\frac{1}{a},$$

całkując ją ze względu na a w granicach a_0 i a_1 całkę określoną:

$$\int_0^1 dx\int_{a_0}^{a_1} x^{a-1}\,da=\int_{a_0}^{a_1}\frac{da}{a},$$

a że:

$$\int_0^1 dx\int_{a_0}^{a_1} x^{a-1}\,da=\int_0^1 dx\left|_{a_0}^{a_1}\frac{x^{a-1}}{\log x}\right.=\int_0^1\frac{x^{a_1-1}-x^{a_0-1}}{\log x}\,dx,$$

zaś:

$$\int_{a_0}^{a_1}\frac{da}{a}=\log\frac{a_1}{a_0},$$

przeto, otrzymujemy wzór:

$$\int_0^1\frac{x^{a_1-1}-x^{a_0-1}}{\log x}\,dx=\log\frac{a_1}{a_0}.\tag{14}$$

Kładąc $a_1=a+1$, $a_0=1$ otrzymujemy stąd: $\int_0^1\frac{x^a-1}{\log x}dx=\log(a+1)$.

β) Podobnie otrzymamy z całki określonej:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,dx=\frac{1}{a},\qquad a>0,$$

wzór:

$$\int_0^\infty\frac{e^{-a_0x}-e^{-a_1x}}{x}\,dx=\log\frac{a_1}{a_0}.\tag{15}$$

Kładąc $a_0=1$, $a_1=a$, otrzymujemy stąd całkę określoną:

$$\int_0^\infty\frac{e^{-x}-e^{-ax}}{x}\,dx=\log a.$$

7. Zastosowanie prawideł różniczkowania i całkowania całek określonych do wyznaczania niektórych całek. Prawidła różniczkowania i całkowania całek określonych mogą być użyte do wyznaczania niektórych całek określonych, jeżeli nie znamy odnośnych całek nieokreślonych. Mając całkę określoną kształtu:

$$I=\int_a^b f(x,a)\,dx,$$

otrzymujemy na podstawie prawidła różniczkowania:

$$\frac{dI}{da}=\int_a^b\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}\,dx=\int_a^b f'_a(x,a)\,dx.$$

Gdybyśmy więc byli w stanie wyznaczyć drogą bezpośrednią całkę kształtu:

$$\int_a^b f'_a(x,a)\,dx=\varphi'(a),$$

wówczas wyznaczenie danej całki I sprowadza się do wyznaczania całki kształtu: $\int\varphi'(a)\,da+C$, przyczem stała C może być na tej zasadzie wyznaczoną, że musi mieć jednakową wartość dla każdego a.

8. Przykłady. 1) Wyznaczyć całkę kształtu:

$$I=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx.$$

Mamy tu $f(x,\alpha)=e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\partial f}{\partial\alpha}=-e^{-\alpha x}\sin x$, a obie te funkcy w obszarze od $x=0$ do $x=\infty$ skończone i ciągłe.

Jest więc:

$$\frac{dI}{d\alpha}=-\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\,dx.$$

Kładąc: $e^{-\alpha x}=u$, $du=-\alpha e^{-\alpha x}dx$, $\sin x\,dx=dv$, $v=-\cos x$, przedstawimy otrzymaną całkę w postaci:

$$\int e^{-\alpha x}\sin x\,dx=-e^{-\alpha x}\cos x-\alpha\int e^{-\alpha x}\cos x\,dx,$$

skąd ze względu na to, że:

$$\int e^{-\alpha x}\cos x\,dx=e^{-\alpha x}\sin x+\alpha\int e^{-\alpha x}\sin x\,dx,$$

otrzymujemy wzór:

$$\int e^{-\alpha x}\sin x\,dx=-e^{-\alpha x}(\cos x+\alpha\sin x)-\alpha^2\int e^{-\alpha x}\sin x\,dx,$$

a więc: $$(1+\alpha^2)\int e^{-\alpha x}\sin x\,dx=e^{-\alpha x}(\cos x+\alpha\sin x),$$

a stąd: $$\int e^{-\alpha x}\sin x\,dx=-\frac{e^{-\alpha x}(\cos x+\alpha\sin x)}{1+\alpha^2}$$

zatem: $$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\,dx=-\Big|_0^\infty\frac{e^{-\alpha x}(\cos x+\alpha\sin x)}{1+\alpha^2}=\frac{1}{1+\alpha^2}.$$

Mamy więc: $$\frac{dI}{d\alpha}=-\frac{1}{1+\alpha^2},\quad\text{zatem:}$$

$$I=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx=-\int\frac{d\alpha}{1+\alpha^2}=-\operatorname{arc\,tg}\alpha+C.$$

Dla wyznaczenia stałej C przyjmijmy $\alpha=\infty$, wówczas mamy $e^{-\infty}$ zatem także: $\left(\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx\right)_{\alpha=\infty}=0$, a więc równanie: $0=-\operatorname{arctg}\infty+C$

czyli: $$0=-\frac{\pi}{2}+C,\qquad\text{zatem: } C=\frac{\pi}{2}.$$

Wobec tego otrzymujemy wartość danej całki określonej przedsta wzorem:

$$I=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tang}\alpha=\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{\alpha},$$

czyli ostatecznie:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx=\operatorname{arctang}\frac{1}{\alpha}.$$

9. Kładąc $\alpha=0$, otrzymujemy z wzoru (16) ważny wzór:

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.$$

Zastępując x przez ax, gdzie $a>0$, zatem dx przez adx, otrzymamy wzór:

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Zastępując a przez $-a$, otrzymujemy:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(-ax)}{x} dx = -\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} dx = -\frac{\pi}{2}.$$

Całka określona kształtu: $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} dx$, przedstawia więc taką funkcyę

metru a, która dla $a>0$ ma stale wartość $\frac{\pi}{2}$, a dla $a<0$ stale war-

$-\frac{\pi}{2}$, dla $a=0$ ma wartość równą zeru.

10. Wyznaczanie całek określonych pojedyńczych za pomocą całek po-nych. W szczególnych przypadkach możemy daną całkę określoną poje-czą, której całki nieokreślonej nie znamy, wyznaczyć tą drogą, że z danej i, wprowadzając stosownie pewien parametr zmienny, tworzymy całkę wójną, której obliczenie można wykonać przez zmianę porządku całko-ia lub stosowne przekształcenie.

Przykład. Wyznaczyć całkę kształtu:

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx,$$

ną całką Laplace'a.

Zastępując w tej całce x przez ax, zatem dx przez adx, otrzymujemy:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^\infty e^{-a^2x^2} a\, dx.$$

Pomnożywszy obie strony równości przez e^{-x^2} i całkując je podług a granicach od $a=0$ do $a=\infty$, dostajemy równość:

$$\int_0^\infty e^{-a^2} da \,.\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^\infty e^{-a^2} da \,.\int_0^\infty e^{-a^2x^2} a\, dx,$$

li:

$$I^2 = \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-a^2(1+x^2)} a\, da.$$

Uwzględniając, że całka nieokreślona:

$$\int e^{-a^2(1+x^2)} a\, da = -\frac{1}{2(1+x^2)} e^{-a^2(1+x^2)} + C,$$

tem całka określona:

$$\int_0^\infty e^{-a^2(1+x^2)} a\, da = \frac{1}{2(1+x^2)},$$

zymujemy powyższą równość w postaci:

$$I^2 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\Big|_0^\infty \operatorname{arc\,tang} x = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

ęc: $I^2 = \frac{\pi}{4}$, zatem: $I = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$,

li:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}. \qquad (18)$$

Zastępując x przez ax, zatem dx przez adx, otrzymujemy stąd:

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\, a\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

zatem:

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\, dx = \frac{1}{2a}\sqrt{\pi},$$

jako ogólniejszy wzór całki Laplace'a.

Różniczkując powyższą całkę n-krotnie względem a i dzieląc przez a, otrzymujemy wzór:

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\, x^{2n}\, dx = \frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^{n+1}\,.\,a^{2n+1}}.$$

11. Przykłady mieszane. 1) Wyznaczyć całkę określoną kształtu

$$I = \int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\, dx.$$

Mamy tu:

$$\frac{dI}{da} = \int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\,.\,-\frac{2a}{x^2}\, dx.$$

Połóżmy $\frac{a}{x} = z$, a więc $\frac{adx}{x^2} = -dz$, tedy otrzymamy:

$$\frac{dI}{da} = 2\int_{-\infty}^0 e^{-\left(z^2+\frac{a^2}{z^2}\right)}\, dz = -2\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\, dx = -2I,$$

zatem:

$$\frac{dI}{da} = -2I,$$

a więc:

$$\frac{dI}{I} = -2da,$$

skąd otrzymujemy: $\log I = -2a + C$, zatem: $I = C.e^{-2a}$,

czyli:

$$\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)} dx = Ce^{-2a}.$$

Dla $a=0$ otrzymujemy stąd: $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = C$,

a że, jak w art. 10 wykazano: $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$,

zatem stałą:

$$C = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

a więc szukana całka ma wartość:

$$\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.\,e^{-2a}.$$

2) Wyznaczyć całkę kształtu:

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos a\,x\, dx.$$

Mamy tu:

$$\frac{dI}{da} = \int_0^\infty -xe^{-x^2} \sin a\,x\, dx,$$

a że na podstawie metody całkowania przez części:

$$\int_0^\infty -xe^{-x^2} \sin a\,x\, dx = \Big|_0^\infty \left(\frac{1}{2}\, e^{-x^2} \sin a\,x\right) - \frac{a}{2}\int_0^\infty e^{-x^2} \cos a\,x\, dx = -\frac{a}{2}\, I$$

: $$\frac{dI}{da} = -\frac{a}{2} I, \quad \text{czyli:} \quad \frac{dI}{I} = -\frac{1}{2} a\, da,$$

n: $$\log I = -\frac{a^2}{4} + C, \quad \text{czyli:} \quad I = C . e^{-\frac{a^2}{4}}$$

Dla $a=0$ mamy: $I_0 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, zatem stała: $C = I_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$,

ęc: $$I = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos ax\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} . e^{-\frac{a^2}{4}}. \tag{22}$$

Zastąpmy w powyższej całce a przez $\frac{b}{a}$, a x przez az, pod założeniem, >0, to otrzymamy:

$$\int_0^\infty e^{-a^2 z^2} \cos bz . a\, dz = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{b^2}{4a^2}}$$

, pisząc znowu x zamiast z i dzieląc obustronnie przez a, otrzymujemy :

$$\int_0^\infty e^{-a^2 x^2} \cos bx\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{b^2}{4a^2}}, \quad \text{ważny, gdy } a > 0.$$

Uwzględniając, że funkcya stojąca pod znakiem całkowania nie zmie- się, gdy x zastąpimy przez $-x$, czyli że jest funkcyą parzystą, otrzy- y:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{b^2}{4a^2}}. \tag{23}$$

12. Przekształcanie całek określonych podwójnych. Jeżeli w całce okre- ej podwójnej: $\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dx\, dy$, w której granice na x i y są albo stałe związane pewną relacyą: $F(x, y)=0$, wprowadzić mamy nowe zmienne , które ze zmiennemi x i y związane są równaniami:

$$\varphi_1(x, y, u, v)=0, \qquad \varphi_2(x, y, u, v)=0,$$

dy zachodzą między różniczkami tych zmiennych relacye:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi_1}{\partial u} du + \frac{\partial\varphi_1}{\partial v} dv = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi_2}{\partial u} du + \frac{\partial\varphi_2}{\partial v} dv = 0.$$

Ponieważ różniczki dx i dy są od siebie niezależne, przeto, chcąc wyra- dy przez dv, musimy przyjąć $dx=0$ i następnie, uważając dv za stałe razić dx przez du. Otrzymamy tedy:

$$dy = \frac{\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\frac{\partial\varphi_2}{\partial v} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}}{\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial u} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}} dv = \frac{\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(u, v)}}{\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(y, u)}} dv$$

$$dx = \frac{\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial u} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}}{\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}} du = \frac{\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(y, u)}}{\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x, y)}} du$$

zatem:

$$dx\,dy=\frac{\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\frac{\partial\varphi_2}{\partial v}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}}{\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}}du\,dv=\frac{\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(u,v)}}{\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(x,y)}}du\,dv=\frac{J_1}{J_2}du\,dv=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}du\,dv=J\,du\,dv$$

gdzie J_1 jest Jakobianem funkcyj φ_1 i φ_2 względem zmiennych u i v, Jakobianem tych funkcyj względem x i y, a J Jakobianem przekształcen (Por. wykład XXV). Dana całka określona podwójna sprowadza się więc podstawie tego przekształcenia do postaci:

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}f(x,y)\,dx\,dy=\int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2}f(x,y).J\,du\,dv, \tag{24}$$

gdzie w funkcyi $f(x,y)$ i jej Jakobianie zmienne x, y mają być wyrażone prz zmienne u i v na podstawie danych związków, a nowe granice całkowan wynikają z danego równania: $F(x,y)=0$. Jeżeli zmienne x i y podane jako wyraźne funkcye zmiennych u i v w postaci: $x=f_1(u,v)$, $y=f_2(u,v)$,

tedy: $$J_1=\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial f_2}{\partial v}-\frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial f_2}{\partial u}=J,\quad J_2=1,$$

a dana całka sprowadza się do postaci określonej wzorem:

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}f(x,y)\,dx\,dy=\int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2}f(f_1,f_2)\left(\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial f_2}{\partial v}-\frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial f_2}{\partial u}\right)du\,dv=\int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2}f(f_1,f_2)\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u,v)}du\,dv$$

gdzie granice całkowania u_1, u_2, v_1, v_2 wyznaczone są danym zakresem.

13. Znaczenie geometryczne przekształcania całek podwójnych. Całk podwójną $\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}f(x,y)\,dx\,dy$ możemy sobie uzmysłowić geometrycznie jak objętość powierzchni: $z=f(x,y)$, ograniczonej graniastosłupem opartym o pła szczyznę XOY lub pewną powierzchnię walcową o równaniu $F(x,y)=0$. Dana całka występuje tu jako granica sumy graniastosłupów o podstawi prostokątnej $\Delta x.\Delta y$ i wysokości z. Zakres całkowania, obejmujący wnętrz krzywej określonej równaniem: $F(x,y)=0$, został więc podzielony na pro stokąty za pomocą prostych równoległych do osi OX i OY.

Wprowadzając nowe zmienne u i v na podstawie wzorów przekształ cenia: $x=f_1(u,v)$, $y=f_2(u,v)$, wprowadzamy podział danego zakresu za pomocą dwu szeregów linij krzywych, określonych równaniami $x=f_1(u,v)$, $y=f_2(u,v)$. Równania krzywych jednego szeregu otrzymamy z danych równań prze wyrugowanie parametru zmiennego v; — drugiego przez wyrugowanie para metru zmiennego u. Krzywe te nazywamy krzywemi parametrowemi, a war tości u i v, które danemu punktowi $P(x,y)$ odpowiadają, nazywamy p a r a m e t r a m i albo też s p ó ł r z ę d n e m i p a r a m e t r o w e m i (k r z y w o l i n i j n e m i) tegoż punktu.

Prostokąt ograniczony punktami $P(x,y)$, $Q(x+dx,y)$, $R(x,y+dy)$, $S(x+dx,y+dy)$ (fig. 71) przejdzie wskutek przekształcenia $x=f_1(u,v)$, $y=f_2(u,v)$ na prostokąt o spółrzędnych:

$$P(f_1,f_2),\quad Q'\left(f_1+\frac{\partial f_1}{\partial u}du,\ f_2+\frac{\partial f_2}{\partial u}du\right),\quad R'\left(f_1+\frac{\partial f_1}{\partial v}dv,\ f_2+\frac{\partial f_2}{\partial v}dv\right),$$

$$S'\left(f_1+\frac{\partial f_1}{\partial u}du+\frac{\partial f_1}{\partial v}dv,\ f_2+\frac{\partial f_2}{\partial u}du+\frac{\partial f_2}{\partial v}dv\right)$$ (fig. 72).

Powierzchnię prostokąta $PQ'R'S'$ możemy uważać za podwójną po-rzchnię trójkąta $PQ'R'$, na jej wyznaczenie otrzymujemy zatem wzór:

Fig. 71. Fig. 72.

$$\begin{vmatrix} f_1, & f_2, & 1 \\ f_1+\frac{\partial f_1}{\partial u}du, & f_2+\frac{\partial f_2}{\partial u}du, & 1 \\ f_1+\frac{\partial f_1}{\partial v}dv, & f_2+\frac{\partial f_2}{\partial v}dv, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}du, & \frac{\partial f_2}{\partial u}du \\ \frac{\partial f_1}{\partial v}dv, & \frac{\partial f_2}{\partial v}dv \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}, & \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_1}{\partial v}, & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{vmatrix} du\,dv = J\,du\,dv. \quad (25)$$

Iloczyn $J\,du\,dv$ przedstawia zatem powierzchnię prostokąta krzywo-nego wywołanego nowym podziałem zakresu całkowania (fig. 72).

Całka przekształcona przedstawia tę samą objętość opartą tylko na ym podziale zakresu całkowania.

14. Przykład. Przekształcić całkę podwójną kształtu: $\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dx\,dy$ **pomocą podstawienia** $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

Uważając x i y jako spółrzędne prostokątne, a r i φ jako spółrzędne biegunowe punktu P płaszczyzny XOY, otrzymamy nowy podział zakresu całkowania, przedstawiony pękiem promieni z punktu O wychodzących i układem kół współśrodkowych. Jakobian przekształcenia otrzymuje tu wartość:

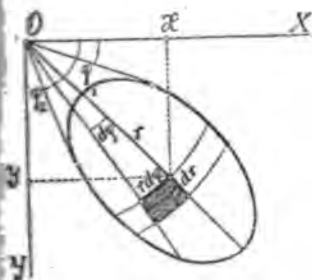


Fig. 73.

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}, & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi}, & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi, & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi, & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Element, odpowiadający temu przekształceniu, ma wielkość $J\,dr\,d\varphi = r\,dr\,d\varphi$. W istocie edstawia się on w postaci czworokąta $PRSQ$, który jest wycinkiem pier-enia kołowego o wymiarach $PQ=dr$, $PR=r\,d\varphi$ (fig. 73) i ma powierzchnię: $.dr = r\,dr\,d\varphi$.

Przekształcenie danej całki przedstawia się zatem wzorem:

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dx\,dx = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r_1}^{r_2} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,r\,d\varphi\,dr, \quad (26)$$

zie pierwsze całkowanie podług r odbywa się dla pewnego φ od $r_1=OM$ $r_2=ON$, a granice następnego wyznaczone są stycznemi poprowadzonemi krzywej C, przedstawiającej zakres całkowania.

15. W szczególności skoro $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$, a granice całkowania okre-ne są kołem o promieniu R, o równaniu $x^2+y^2=R^2$, otrzymujemy całkę eśloną:

$$\int_{x_1}^{x_2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{R} e^{-r^2}\,r\,dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \Big|_0^R -\frac{e^{-r^2}}{2} = \int_0^{2\pi} d\varphi\,\frac{1-e^{-R^2}}{2} = \pi(1-e^{-R^2})$$

Gdy zakres całkowania obejmuje całą płaszczyznę XOY, natencz mamy $R=\infty$, a zarazem $x_1=-\infty$, $x_2=+\infty$ $y_1=-\infty$, $y_2=+\infty$, zatem otrzymujemy całi określoną kształtu:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\pi, \qquad (27)$$

jako objętość zawartą między powierzchni $z=e^{-(x^2+y^2)}$ i płaszczyzną XOY (fig. 74).

Powyższy wzór możemy przedstawić w p staci:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy=\pi,$$

skąd ze względu na to, że:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy,$$

Fig. 74. Fig. 75.

otrzymujemy: $\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right]^2=\pi$, zatem: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$,

wzór przedstawiający powierzchnię zawartą między krzywą Laplace'a $y=e^{-x^2}$, a osią x-ów.

Równanie $z=e^{-(x^2+y^2)}$ przedstawia powierzchnię, powstałą przez obró krzywej Laplace'a położonej na płaszczyźnie XOZ (fig. 75) o równaniu $z=e^{-x^2}$ na około osi z-ów.

16. Przekształcanie całki określonej potrójnej. Mając do całki określo nej potrójnej kształtu: $\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} f(x,\,y,\,z)\,dx\,dy\,dz$, której granice dotycz przestrzeni ograniczonej daną powierzchnią $F(x,\,y,\,z)=0$, wprowadzić now zmienne u, v, w na podstawie wzorów:

$$\varphi_1(x,\,y,\,z,\,u,\,v,\,w)=0,\ \varphi_2(x,\,y,\,z,\,u,\,v,\,w)=0,\ \varphi_3=(x,\,y,\,z,\,u,\,v,\,w)=0,$$

znajdziemy jak w art. 12:

$$dx\,dy\,dz=\frac{J_1}{J_2}\,du\,dv\,dw=J\,du\,dv\,dw,$$

gdzie J_1 jest Jakobianem funkcyi φ_1, φ_2, φ_3 względem zmiennych u, v, w: J_2 takimże Jakobianem względem zmiennych x, y, z, a więc:

$$J_1=\frac{\partial(\varphi_1,\,\varphi_2,\,\varphi_3)}{\partial(u,\,v,\,w)},\qquad J_2=\frac{\partial(\varphi_1,\,\varphi_2,\,\varphi_3)}{\partial(x,\,y,\,z)}$$

W przypadku gdy wzory przekształceń przedstawiają się równaniami wyraźnemi: $x=f_1(u,\,v,\,w)$, $y=f_2(u,\,v,\,w)$, $z=f_3(u,\,v,\,w)$,

otrzymamy: $J_1=\dfrac{\partial(f_1,\,f_2,\,f_3)}{\partial(u,\,v,\,w)}$, $J_2=1$,

zatem:
$$dx\,dy\,dz=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial u}, & \dfrac{\partial f_1}{\partial v}, & \dfrac{\partial f_1}{\partial w}\\[2mm] \dfrac{\partial f_2}{\partial u}, & \dfrac{\partial f_2}{\partial v}, & \dfrac{\partial f_2}{\partial w}\\[2mm] \dfrac{\partial f_3}{\partial u}, & \dfrac{\partial f_3}{\partial v}, & \dfrac{\partial f_3}{\partial w}\end{vmatrix}\,du\,dv\,dw=J\,du\,dv\,dw,$$

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2}\int_{w_1}^{w_2} f(f_1,f_2,f_3)\,J\,du\,dv\,dw, \quad (28)$$

granice całkowania względem nowych zmiennych u, v, w dotyczą su danego równaniem $F(f_1, f_2, f_3)=0$.

Całka przekształcona obejmuje geometrycznie ten sam zakres przestrzeni, sumowanie oparte jest tylko o inny podział tej przestrzeni. Jeżeli elementem pierwotnego podziału był prosty równoległościan prostokątny $PQRS$ o wymiarach dx, dy, dz (fig. 76), to elementowi temu odpowiada w całce przekształconej element $PQ'R'S'$ ograniczony w ogólności powierzchniami krzywemi, który w granicy może być uważany jako równoległościan skośny (fig. 77). Objętość jego jest równa sześciokrotnej objętości ostrosłupa $S'P'Q'R'$, zatem wyraża się ostatecznie wyznacznikiem trzeciego rzędu:

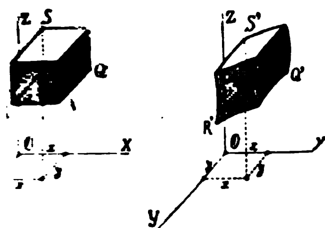


Fig. 76.

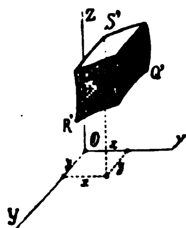


Fig. 77.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}du, & \frac{\partial f_1}{\partial v}dv, & \frac{\partial f_1}{\partial w}dw \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}du, & \frac{\partial f_2}{\partial v}dv, & \frac{\partial f_2}{\partial w}dw \\ \frac{\partial f_3}{\partial u}du, & \frac{\partial f_3}{\partial v}dv, & \frac{\partial f_3}{\partial w}dw \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}, & \frac{\partial f_1}{\partial v}, & \frac{\partial f_1}{\partial w} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}, & \frac{\partial f_2}{\partial v}, & \frac{\partial f_2}{\partial w} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u}, & \frac{\partial f_3}{\partial v}, & \frac{\partial f_3}{\partial w} \end{vmatrix} du\,dv\,dw = J\,du\,dv\,dw.$$

W szczególności, jeżeli spółrzędne prostokątne x, y, z punktu zastąspółrzędnemi sferycznemi r, θ, φ, gdzie r przedstawia promień punktu, , jaki promień ten tworzy z osią z-ów, a φ kąt, jaki rzut promienia aszczyznę XOY tworzy z osią x-ów, otrzymujemy wzory przekształcenia:

$$x=r\sin\theta\cos\varphi, \quad y=r\sin\theta\sin\varphi, \quad z=r\cos\theta.$$

Jakobian przekształcenia przedstawia się tu w postaci:

$$J=\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi, & \sin\theta\sin\varphi, & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\varphi, & r\cos\theta\sin\varphi, & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi, & r\sin\theta\cos\varphi, & 0 \end{vmatrix}$$

muje zatem wartość:

$$J=r^2\sin\theta,$$

element $dx\,dy\,dz$ przekształca się na element $r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$. Element ten jest ograniczony powierzchniami kul o promieniach r i $r+dr$, dwiema powierzchniami stożkowemi o osi z-ów pod kątem θ i $\theta+d\theta$ i dwiema płaszczyznami przechodzącemi przez oś z-ów, a nachylonemi do płaszczyzny XOZ pod kątami φ i $\varphi+d\varphi$. Element ten ma więc kształt wycinka pierścienia kulistego (fig. 78) o wymiarach:

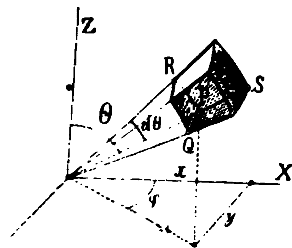


Fig. 78.

$$PQ=r\,d\theta, \quad PR=r\sin\theta\,d\varphi \quad \text{i} \quad PS=dr,$$

zatem jego objętość jest w istocie równa:

$$r\,d\theta \cdot r\sin\theta\,d\varphi \cdot dr = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi.$$

Według tego przekształcenia otrzymamy np. całkę potrójną:

$$I=\int_{-a}^{+a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{+\sqrt{a^2-x^2}}\int_{-\sqrt{a^2-x^2-y}}^{+\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dx\, dy\, dz=\int_0^a\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi=$$

$$\int_0^a r^2\, dr\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi=\frac{a^3}{3}.2.2\pi=\frac{4}{3}a^3\pi.$$

17. Przekształcanie całki określonej wielokrotnej odbywa się w sı analogiczny do przekształcania całek podwójnych i potrójnych. Jeżeli nowicie w całce określonej wielokrotnej:

$$\int_{a_1}^{a_2}\dots\int_{n_1}^{n_2} f(x_1,\ x_2,\dots,x_n)\, dx_1\, dx_2\dots dx_n,$$

której granice związane są relacyami $F(x_1,\ x_2,\dots,x_n)=0$ wprowadzić ch nowe zmienne $u_1,\ u_2,\dots,u_n$ na podstawie wzorów przekształcenia:

$$x_1=f_1(u_1\ u_2,\dots,u_n),\quad x_2=f_2(u_1,\ u_2,\dots,u_n),\ \dots,\ x_n=f_n(u_1,\ u_2,\dots,u_n),$$

wtedy otrzymamy w myśl art. 19 str. 421 iloczyn:

$$dx_1\, dx_2\dots dx_n=J\, du_1\, du_2\dots du,$$

gdzie J jest Jakobianem przekształcenia, przedstawiającym się w pc wyznacznika funkcyjnego n-go rzędu kształtu:

$$J=\left|\frac{\partial f_i}{\partial u_r}\right|\qquad (i,\ r=1,\ 2,\dots,n),$$

Otrzymujemy tedy:

$$\int_{(x_1)}\int_{(x_2)}\dots\int_{(x_n)} f(x_1,\ x_2,\dots,x_n)\, dx_1\, dx_2\dots dx_n=$$

$$=\int_{(u_1)}\int_{(u_2)}\dots\int_{(u_n)} f(f_1,f_2,\dots,f_n)\left|\frac{\partial f_i}{\partial u_r}\right|.du_1\, du_2\dots du_n.$$

Ćwiczenia XL.

1) Wykazać, że:

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x,\alpha)dx=\int_a^b\frac{d f(x,\alpha)}{dx}dx+\frac{db}{d\alpha}f(b,\alpha)-\frac{da}{d\alpha}f(a,\alpha)$$

i zaznaczyć możliwe przypadki, dotyczące granic a i b i parametru α.

2) Wykazać, że skoro granice a i b są od α niezależne, natenczas:

$$\frac{d^n}{d\alpha^n}\int_a^b f(x,\alpha)dx=\int_a^b\frac{d^n f(x,\alpha)}{d\alpha^n}dx.$$

3) Wyprowadzić prawidło całkowania całek określonych przedstawione wzorı

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha\left[\int_a^b f(x,\alpha)dx\right]=\int_a^b\left[\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x,\alpha)d\alpha\right]dx,$$

Wyprowadzić następujące całki określone, a z nich nowe na podstawie pı różniczkowania, całkowania i przekształcania całek określonych:

4) $\int_0^1 x^{\alpha-1}dx=\frac{1}{\alpha}$.

5) $\int_0^1 x^{\alpha-1}\log x\, dx=-\frac{1}{\alpha^2}$.

6) $\int_0^1 x^{\alpha-1}(\log x)^2 dx=\frac{2!}{\alpha^3}$.

7) $\int_0^1 x^{\alpha-1}(\log x)^3 dx=-\frac{3!}{\alpha^4}$.

8) $\int_0^1 x^{\alpha-1}(\log x)^4 dx=\frac{4!}{\alpha^5}$.

9) $\int_0^1 x^{\alpha-1}(\log x)^m dx=(-1)^\alpha\frac{n!}{\alpha^{m+1}}$.

10) $\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}-1}{\log x}\,dx = \log \alpha.$

11) $\int_0^1 \left(\frac{x^{\alpha}-1}{x(\log x)^2} - \frac{\alpha}{\log x}\right)dx = \alpha(\log \alpha - 1).$

12) $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}.$

13) $\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-\alpha x}\,dx = \frac{(n-1)!}{\alpha^n}.$

14) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}-e^{-\alpha x}}{x}\,dx = \log \alpha.$

15) $\int_0^{\infty} \left(\frac{\alpha e^{-x}}{x} - \frac{1-e^{-\alpha x}}{x^2}\right)dx = \alpha(\log \alpha - 1).$

16) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\,dx = \log \frac{\beta}{\alpha}.$

17) $\int_0^{\alpha} \left(\frac{\alpha}{e^{\alpha x}-e^{-\alpha x}} - \frac{\beta}{e^{\beta x}-e^{-\beta x}}\right)\frac{dx}{x} = \frac{\beta-\alpha}{2}\log 2.$

18) $\int_a^b e^{\alpha x}\,dx = \frac{e^{\alpha b}-e^{\alpha a}}{\alpha}.$

19) $\int_0^1 e^{\alpha x}\,dx = \frac{e^{\alpha}-1}{\alpha}.$

20) $\int_0^1 \frac{x^m-x^n}{\log x}\,dx = \log \frac{m+1}{n+1}.$

21) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}.$

22) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n(n-1)!}\,\frac{\pi}{a^{2n-1}}.$

23) $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\cos x\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+1}.$

24) $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\sin x\,dx = \frac{1}{\alpha^2+1}.$

25) $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\,x\sin x\,dx = \frac{2\alpha}{(\alpha^2+1)^2}.$

26) $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\,x\cos x\,dx = \frac{\alpha^2-1}{(\alpha^2+1)^2}.$

27) $\int_0^{\infty} e^{-x}\cos \alpha x\,dx = \frac{1}{\alpha^2+1}.$

28) $\int_0^{\infty} e^{-x}\sin \alpha x\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+1}.$

29) $\int_0^{\pi} e^{-\alpha x}\cos bx\,dx = -\frac{\alpha}{\alpha^2+b^2}(e^{-\alpha\pi}\cos b\pi - 1).$

30) $\int_0^{\pi} e^{-\alpha x}\sin bx\,dx = -\frac{b}{\alpha^2+b}(1-e^{\alpha\pi}\cos b\pi).$

31) $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\sin bx\,dx = \frac{b}{\alpha^2+b^2}.$

32) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos bx\,dx = \frac{1}{2}\log\frac{\beta^2+b^2}{\alpha^2+b^2}.$

33) $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx = \operatorname{arctang}\frac{1}{\alpha}.$

34) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin bx\,dx = \operatorname{arctang}\frac{\beta}{b} - \operatorname{arctang}\frac{\alpha}{b}.$

35) $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\cos bx\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+b^2}.$

36) $\int_0^{\infty} \frac{x\cos \alpha x}{b^2+x^2}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{x\sin \alpha x}{b^2+x^2} = \frac{\pi}{2b}e^{-b\alpha}.$

37) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\alpha^2\cos^2 x + \beta^2\sin^2 x} = \frac{\pi}{2\alpha\beta}.$

38) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x\,dx}{(\alpha^2\cos^2 x+\beta^2\sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{4\alpha^3\beta}.$

39) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x\,dx}{(\alpha^2\cos^2 x+\beta^2\sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{4\alpha\beta^3}.$

40) $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$

41) $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\frac{1-\cos bx}{x}\,dx = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{b^2}{\alpha^2}\right).$

42) $\int_0^{\infty} e^{-\alpha^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}.$

43) $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin bx}{x}\,dx = \operatorname{arctang}\frac{b}{\alpha}.$

44) $\int_0^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1-2\alpha^2\cos x+\alpha^4}} = \frac{2}{\alpha^2}.$

45) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(\alpha^2\cos^2 x+\beta^2\sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{4\alpha\beta}\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right).$

46) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$

47) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(\alpha^2\cos^2 x+\beta^2\sin^2 x)^3} = \frac{\pi}{16\alpha\beta}\left(\frac{3}{\alpha^4}+\frac{2}{\alpha^2\beta^2}+\frac{3}{\beta^4}\right).$

48) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\alpha^2\sin^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha^2+1}}.$

49) $\int_0^{\infty} \frac{x\cos \alpha x}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{x\sin \alpha x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-\alpha},$

50) $\int_0^{\infty} x^{2n}e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^{n+1}}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2n+1}}}.$

51) $\int_0^{\alpha} \frac{dx}{(\alpha x+\beta)^2} = \frac{1}{\alpha\beta}.$

52) $\int_0^\infty x^2 e^{-a^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2^2 a^3}$. 53) $\int_0^\infty x^{2n} e^{-a^2x^2}dx = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^{n+1}}\frac{\sqrt{\pi}}{a^{2n+1}}$.

54) $\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a}$. 55) $\int_0^\infty e^{-x^2}\cos ax\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{a^2}{4}}$.

56) $\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos bx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{b^2}{4a^2}}$. 57) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2x^2}\cos bx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{-\frac{b^2}{4a^2}}$.

58) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2x^2-bx}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{\frac{b^2}{4a^2}}$ 59) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2x^2-bx}\cos cx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{\frac{b^2-c^2}{4a^2}}\cos\frac{bc}{2a^2}$.

60) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2x^2-bx}\sin cx\,dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{\frac{b^2-c^2}{4a^2}}\sin\frac{bc}{2a^2}$. 61) $\int_0^\infty x^4 e^{-a^2x^2}dx = \frac{1.3\sqrt{\pi}}{2^3.a^5}$.

62) $\int_0^\infty \sin(a^2x^2)dx = \int_0^\infty \cos(a^2x^2)dx = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. 63) $\int_0^\pi \frac{dx}{a\cos x+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{1-a^2}}$.

64) $\int_0^\infty \cos(x^2).\cos 2ax\,dx = \sin\left(\frac{\pi}{4}+a^2\right)\sqrt{\pi}$. 65) $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}$.

66) $\int_0^\infty \sin(x^2).\cos 2ax\,dx = \sin\left(\frac{\pi}{4}-a^2\right)\sqrt{\pi}$. 67) $\int_0^1\left(\log\frac{1}{x}\right)^n x^{a-1}dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$.

68) $\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\left(e^{ax}+e^{-ax}\right)dx = e^{a^2}\sqrt{\pi}$. 69) $\int_0^\infty \frac{\log(1+a^2x^2)}{b^2+x^2}dx = \frac{\pi}{b}\log(1+ab)$.

70) $\int_0^\infty x^{2n}e^{-a^2x^2}\cos bx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\frac{d^{2n}}{db^{2n}}\left(e^{-\frac{b^2}{4a^2}}\right)$. 71) $\int_0^\infty \frac{\text{arc tang}\,ax}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}\log(1+a)$.

72) $\int_0^\infty x^{2n-1}e^{-a^2x}\sin bx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\frac{d^{2n-1}}{db^{2n-1}}\left(e^{-\frac{b^2}{4a^2}}\right)$. 73) $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$.

74) $\int_0^\infty e^{-\beta^2x^2}\left(e^{2ax}+e^{-2ax}\right)dx = \frac{2\sqrt{\pi}}{\beta}e^{\frac{a^2}{\beta^2}}$. 75) $\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

76) $\int_0^\pi \frac{dx}{\cos x}\log(a\cos x+1) = \frac{\pi}{2}\text{arc}\sin a$.

77) Przekształcić całkę pojedyńczą, kształtu: $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ za pomocą podstawienia: $= x+\sqrt{1+x^2}$ i wykazać, że: $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int_1^{1+\sqrt{2}}\frac{dt}{t}$.

78) Wykazać, że, kładąc $x=\sin\varphi$, otrzymamy:

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

79) Wykazać, że, zastępując zmienne x i y, na mocy podstawienia: $x=r\cos\varphi$ $y=r\sin\varphi$, otrzymamy przekształcenie:

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r_1}^{r_2}f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,r\,d\varphi\,dr.$$

Przy pomocy podstawienia $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ wykazać, że:

80) $\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(ax+by)^2}dx\,dy = \frac{1}{2ab}$. 81) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy = \pi$.

82) $\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+2xy\cos a+y^2)}dx\,dy = \frac{a}{2\sin a}$.

83) $\int_0^a\int_0^b \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2+c^2)^{3/2}} = \frac{1}{c} \operatorname{arc\,tang} \frac{ab}{c\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$

84) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a\,dx\,dy}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}(x^2+y^2+b^2)^{1/2}} = \frac{2\pi}{a+b}.$

85) Wykazać, że, kładąc $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $t = \frac{y}{x}$, otrzymamy przekształcenie:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-r^2} \frac{r\,dr\,dt}{1+t^2}.$$

86) Wykazać, że, podstawiając $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, otrzymamy przekształcenia:

$$\int_0^a dy \int_{\sqrt{y(a-y)}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{a\sin\varphi}^{a} \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}} = \int_0^a \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}} \int_0^{\arcsin\frac{r}{a}} d\varphi.$$

87) Wykazać, że wprowadzając w miejsce x i y zmienne u i v na podstawie wzorów $x = u$, $y = uv$ otrzymamy:

$$\int_0^a\int_0^{a-x} dx\,dy = \int_0^1\int_0^a u\,dv\,du.$$

88) Jeżeli $x = \frac{v}{1+u}$, $y = xu$, okazać, że wówczas:

$$\int_0^a\int_0^x dx\,dy = \int_0^1\int_0^{a(1+u)} \frac{v\,du\,dv}{(1+u)^3}.$$

89) Jeżeli $x+y+z = u$, $x+y = uv$, $y = uvw$ okazać, że:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty dx\,dy\,dz = \int_0^\infty\int_0^1\int_0^1 u^2 v\,du\,dv\,dw.$$

90) Jeżeli podstawimy $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$, okazać, że:

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} dx\,dy\,dz = \int_{r_1}^{r_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi.$$

Rozwiązania XL. Wskazówki podane wykładzie.

Literatura. I. Bertrand: Traité de calcul différentiél et de calcul integral. T. II. [cal]cul intégral. Intégrales définies et indefiniès. Paris 1870. I. A. Serret: Lehrbuch der [Dif]ferential- und Integralrechnung, deutsch bearbeitet von Georg Bohlmann. II Band Inte[gral]rechnung. Leipzig 1899.

Tematy do rozprawek naukowych.

1. Metody obliczania całek określonych.
2. Całka Laplace'a i jej zastosowania.
3. Zastosowanie szeregów w obliczaniu całek określonych.

Wykład XLI.

Zastosowanie całek określonych do krzywych płaskich.

1. **Kwadratura krzywych płaskich.** Obliczanie powierzchni A (*area*) pola płaskiego krzywolinijnie ograniczonego nazywamy kwadraturą krzywej płaskiej.

Obliczanie to możemy wykonywać, albo 1) za pomocą całki pojedyńczej, albo 2) za pomocą całki podwójnej. W pierwszym przypadku wyobrażamy sobie pole, którego powierzchnię A mamy wyznaczyć, podzielone na elementa nieskończenie małe rzędu pierwszego dA, t. j. na takie elementa dwuwymiarowe, których jeden wymiar jest skończony, a drugi nieskończenie mały. W drugim przypadku wyobrażamy sobie pole podzielone na elementa nieskończenie małe drugiego rzędu, d^2A t. j. na takie elementa dwuwymiarowe, których oba wymiary są nieskończenie małe.

Elementami płaskiemi nieskończenie małemi rzędu pierwszego są np.:

α) prostokąty o wymiarach y i dx, a więc o wielkości $dA=ydx$ (fig. 79);

β) równoległoboki o bokach y i dx i kącie γ, zawartym między tymi bokami, a więc o wielkości $dA=\sin\gamma.y.dx$ (fig. 80);

γ) wycinki kołowe o promieniu r i kącie $d\varphi$, a więc o wielkości: $dA=r\,d\varphi.\frac{r}{2}=\frac{1}{2}r^2d\varphi$ (fig. 81);

δ) pierścienie kołowe o szerokości dr, a więc o wielkości $dA=2\pi r.dr$, lub ich wycinki, odpowiadające kątowi środkowemu φ, a więc o wielkości $dA=r\,d\varphi dr$.

Elementami płaskiemi nieskończenie małemi rzędu drugiego są np.:

α) prostokąty o wymiarach dx i dy, a więc o wielkości $d^2A=dxdy$ (fig. 85);

β) równoległoboki o wymiarach dx i dy i kącie γ zawartym między tymi bokami, a więc o wielkości $d^2A=\sin\gamma.dx.dy$ (fig. 86);

γ) wycinki pierścienia kołowego o promieniu r, a szerokości dr, odpowiadające kątowi środkowemu $d\varphi$, a więc o wielkości $d^2A=r\,d\varphi\,dr$ (fig. 87).

2. **Zastosowanie całek określonych pojedyńczych w kwadraturze linii krzywej.** Niech będzie $y=f(x)$ równaniem krzywej, odniesionej do układu prostokątnego, wtedy element powierzchni dA, zawarty między daną krzywą, dwiema sąsiedniemi rzędnemi jej punktów i osią x-ów, otrzymuje wartość:

$$dA=y\,dx,$$

zatem powierzchnia zawarta między krzywą, osią x-ów i dwiema rzędnemi w miejscach końcowych x_1 i x_2 (fig. 79) wyprowadzonemi przedstawi się wzorem:

$$A=\int_{x_1}^{x_2} y\,dx=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx, \qquad (1)$$

który jest zasadniczym wzorem kwadratury krzywych płaskich, odniesionych do układu prostokątnego.

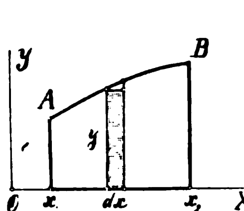


Fig. 79.

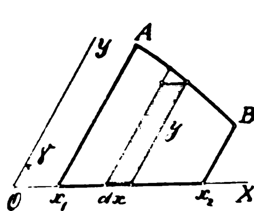


Fig. 80.

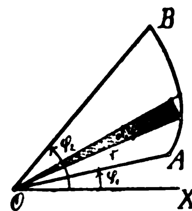


Fig. 81.

Jeżeli równanie $y=f(x)$ krzywej odniesione jest do układu ukośnokątnego o kącie osiowym γ (fig. 80), wtedy otrzymujemy element $dA=\sin\gamma . y . dx$ i odnośny wzór na powierzchnię:

$$A=\sin\gamma\int_{x_1}^{x_2} y\,dx. \qquad (2)$$

Jeżeli krzywa określona jest równaniem biegunowem kształtu $r=f(\varphi)$, natenczas za element powierzchni możemy uważać wycinek koła o promieniu r, odpowiadający kątowi środkowemu $d\varphi$, a więc o wielkości $dA=\frac{1}{2}r^2 d\varphi$, otrzymujemy tedy wzór na powierzchnię ograniczoną krzywą $r=f(\varphi)$ i dwoma promieniami końcowymi nachylonymi do osi biegunowej pod kątami φ_1 i φ_2 (fig. 81) w postaci:

$$A=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\,d\varphi. \qquad (3)$$

3. Jeżeli pole zawarte jest między dwiema krzywemi, natenczas powierzchnię jego możemy przedstawić w postaci różnicy dwóch pojedyńczych całek określonych.

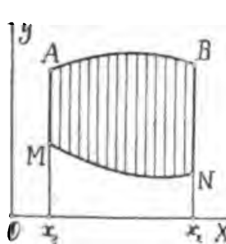


Fig. 82.

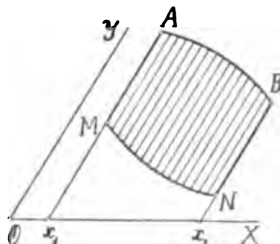


Fig. 83.

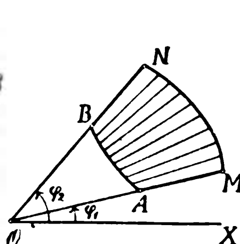


Fig. 84.

W szczególności, jeżeli równania tych krzywych odniesione są do układu prostokątnego (fig. 82) postaci $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, otrzymujemy wzór:

$$A=\int_{x_1}^{x_2} f_1(x)\,dx-\int_{x_1}^{x_2} f_2(x)\,dx=\int_{x_1}^{x_2}[f_1(x)-f_2(x)]\,dx. \qquad (4)$$

Analogiczny wzór dla układu ukośnokątnego (fig. 83) ma kształt:

$$A=\sin\gamma\int_{x_1}^{x_2}[f_1(x)-f_2(x)]\,dx, \qquad (5)$$

a dla układu biegunowego (fig. 84):

$$A=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\{[f_1(\varphi)]^2-[f_2(\varphi)]^2\}\,d\varphi. \quad (6)$$

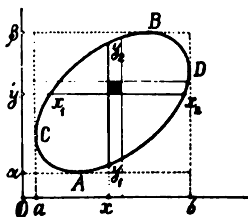
4. **Zastosowanie całek określonych podwójnych w kwadraturze krzywej.** Niech będzie $F(x, y)=0$ równaniem krzywej, odniesionem do uk… prostokątnego, natenczas używając elementów nieskończenie małych d… giego rzędu w postaci prostokątów $dx\,dy$, otrzymamy na wyznaczenie j… powierzchni (fig. 85) wzór:

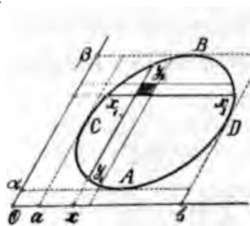
$$A=\int_a^b\int_{y_1}^{y_2}dx\,dy=\int_a^b dx\int_{f_1(x)}^{f_2(x)}dy, \quad (7)$$

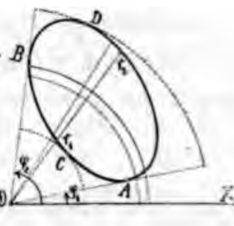
względnie:

$$A=\int_\alpha^\beta\int_{x_1}^{x_2}dy\,dx=\int_\alpha^\beta dy\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)}dx \quad (8)$$

gdzie y_1 i y_2 są funkcyami zmiennej x, a x_1 i x_2 funkcyami zmiennej


Fig. 85.


Fig. 86.


Fig. 87.

wynikającemi z równania krzywej: $F(x, y)=0$, przyczem a i b wyrażają gr… niczne wartości na x, a α i β graniczne wartości na y. Przy funkcyach wi… lowartościowych należy zakres całkowania stosownie podzielić.

W układzie ukośnokątnym (fig. 86) otrzymujemy analogiczny wz… kształtu:

$$A=\sin\gamma\int_a^b\int_{y_1}^{y_2}dx\,dy=\sin\gamma\int_a^b dx\int_{f_1(x)}^{f_2(x)}dy, \quad (9)$$

względnie:

$$A=\sin\gamma\int_\alpha^\beta\int_{x_1}^{x_2}dy\,dx=\sin\gamma\int_\alpha^\beta dy\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)}dx. \quad (10)$$

Jeżeli krzywa odniesiona do układu biegunowego (fig. 87) ma równanie $F(r, \varphi)=0$, gdzie $r_1=f_1(\varphi)$, $r_2=f_2(\varphi)$, natenczas otrzymamy wzór:

$$A=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r_1}^{r_2}r\,d\varphi\,dr=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int_{r_1}^{r_2}r\,dr. \quad (11)$$

5. **Przykłady.** α) **Kwadratura ellipsy:** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Mamy tu $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, zatem: $A_{0\,..\,x}=\frac{b}{2}\int_0^x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$, a że:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a},$$ zatem otrzymujemy:

$$A_{0\dots x}=\frac{b}{a}\Big|_0^x\left(\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right)$$

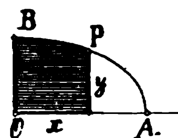
czyli:

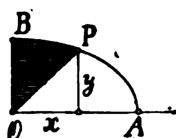
$$A_{0\dots x}=\frac{bx\sqrt{a^2-x^2}}{2a}+\frac{ab}{2}\arcsin\frac{x}{a}.$$

Wprowadzając spółrzędne x, y punktu końcowego P, otrzymujemy stąd:

$$A_{0\dots x}=\frac{xy}{2}+\frac{ab}{2}\arcsin\frac{x}{a}, \quad (12)$$

jako wzór na powierzchnię wycinka elliptycznego $OP'PB$ (fig. 88) Ponieważ powierzchnia trójkąta $OP'P = \frac{yx}{2}$, przeto otrzymamy (fig. 89) powierzchnię wycinka elliptycznego: $OPB = \frac{ab}{2} \arcsin \frac{x}{a}$. Dla $x = a$ wynika stąd powierzchnia ćwierci elipsy: $OAB = \frac{ab}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$, a zatem powierzchnia elipsy o półosiach a i b przedstawia się wzorem $A = ab\pi$.


Fig. 88.


Fig. 89.

Dla $a = b$ otrzymujemy powierzchnię koła $A = a^2\pi$. Przy użyciu całek podwójnych przedstawia się powierzchnia elipsy w postaci całki:

$$A = \int_{-a}^{+a} dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy = 4\int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy = ab\pi,$$

lub:

$$A = \int_{-b}^{+b} dy \int_{-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}}^{+\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}} dx = 4\int_0^b dy \int_0^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}} dx = ab\pi.$$

β) **Kwadratura hyperboli** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Mamy tu $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, zatem:

$$A_{a\ldots x} = \frac{b}{a}\int_a^x \sqrt{x^2-a^2}\,dx,$$

a że: $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\log\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}$

przeto: $A_{a\ldots x} = \frac{b}{a}\left(\frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\log\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)$.

Wprowadzając spółrzędne końcowego punktu P, (fig. 90) otrzymujemy stąd:

$$A_{a\ldots x} = \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2}\log\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \qquad (13)$$

wzór na powierzchnię odcinka hyperbolicznego $AP'P$.

Fig. 90.

Ponieważ powierzchnia trójkąta $OP'P = \frac{xy}{2}$, przeto otrzymujemy wzór na powierzchnię wycinka hyperbolicznego OAP w postaci:

$$OAP = \frac{ab}{2}\log\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

W przypadku hyperboli równobocznej $a = b = 1$, mamy równanie $x^2 - y^2 = 1$, zatem:

$$OAP = \frac{1}{2}\log(x+\sqrt{1-x^2}).$$

Oznaczmy $OAP = \frac{u}{2}$, to otrzymujemy $u = \log(x+\sqrt{1-x^2})$, a stąd $x+\sqrt{1-x^2} = e^u$,

zatem $x - \sqrt{1-x^2} = e^{-u}$, a więc $x = \frac{e^u + e^{-u}}{2} = \cos\text{hip}\, u$,

zaś: $$y = \sqrt{1-x^2} = e^u - x = e^u - \frac{e^u + e^{-u}}{2} = \frac{e^u - e^{-u}}{2},$$

więc: $$y = \frac{e^u - e^{-u}}{2} = \sin\text{hip}\, u.$$

Spółrzędne x i y punktu hyperboli równobocznej o półosi równej 1 przedstawiają zatem funkcye hyperboliczne cos hip i sin hip połowy wycinka hyperbolicznego, opartego na łuku AP hyperboli.

γ) **Kwadratura paraboli** $y^2 = 2px$. Mamy tu $y = \sqrt{2px}$, zatem:

$$A_{0\ldots x} = \int_0^x \sqrt{2px}\,dx = \sqrt{2p}\int_0^x x^{1/2}\,dx = \sqrt{2p}\,\frac{2}{3}\,x^{3/2} = \frac{2}{3}\,x\sqrt{2px}.$$

Wprowadzając spółrzędne x i y punktu końcowego P paraboli (fig. 91), otrzymamy:

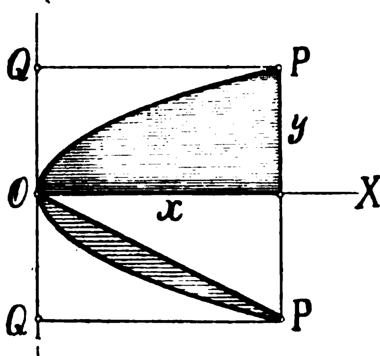


Fig. 91.

$$A_{a \ldots x} = \frac{2}{3} xy, \tag{14}$$

jako wzór na powierzchnię odcinka parabolicznego $OP'P$.

Ponieważ powierzchnia trójkąta $OP'P = \frac{xy}{2}$, przeto otrzymujemy wzór na powierzchnię odcinka parabolicznego, zawartego między łukiem OP a cięciwą OP paraboli w postaci:

$$A = \frac{2}{3} xy - \frac{xy}{2}, \text{ zatem } A = \frac{xy}{6}.$$

6. Rektyfikacya linii krzywej. Wyznaczanie długości łuku pewnej linii krzywej, którą uważamy za granicę długości wielokąta weń wpisanego, nazywamy rektyfikacyą linii krzywej.

Elementem łuku krzywej $y = f(x)$ odniesionej do układu prostokątnego jest $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + y'^2}$, zatem otrzymujemy wzór na długość s łuku

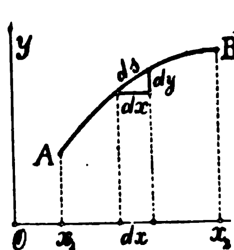


Fig. 92.

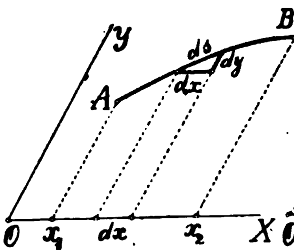


Fig. 93.

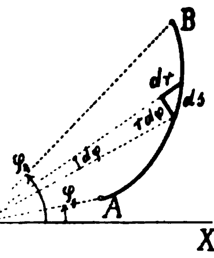


Fig. 94.

krzywej $y = f(x)$ w granicach od $x = x_1$ do $x = x_2$ (fig. 92) w postaci całki określonej pojedyńczej:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \tag{15}$$

Jeżeli krzywa $y = f(x)$ odniesiona jest do układu ukośnokątnego o kącie osiowym γ (fig. 93), wtedy otrzymujemy element łuku:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + 2\, dx\, dy \cos\gamma} = dx\sqrt{1 + y'^2 + 2y' \cos\gamma},$$

zatem wzór:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2 + 2y' \cos\gamma} . dx. \tag{16}$$

Przy użyciu równania biegunowego $r = f(\varphi)$ mamy (fig. 94):

$$ds^2 = r^2\, d\varphi^2 + dr^2,$$

a więc
$$ds = \sqrt{r^2\, d\varphi^2 + dr^2} = d\varphi \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2},$$

czyli: $ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi$, zatem długość łuku krzywej $r = f(\varphi)$ w granicach od $\varphi = \varphi_1$ do $\varphi = \varphi_2$ wyznacza się wzorem:

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{[f(\varphi)]^2 + [f'(\varphi)]^2}\, d\varphi. \tag{17}$$

Jeżeli krzywa odniesiona do układu prostokątnego dana jest dwoma równaniami o parametrze t, w postaci:

$$x=f(t), \qquad y=\varphi(t),$$

wtedy mamy: $dx=f'(t)\,dt, \quad dy=\varphi'(t)dt. \quad y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\varphi'(t)}{f'(t)},$

Skoro zatem t_1 i t_2 są granicami na t, odpowiadającemi wartościom krańcowym x_1 i x_2 zmiennej x, tedy otrzymujemy na rektyfikacyę krzywej wzór postaci:

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{[f'(t)]^2+[\varphi'(t)]^2}\,dt. \tag{18}$$

7. Przykłady. α) **Rektyfikacya ellipsy** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Mamy tu:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, \qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$1+y'^2=1+\frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}=\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)}.$$

Zakładając, że $a>b$, połóżmy $a^2-b^2=c^2$, $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{c}{a}=\varepsilon$, gdzie $\varepsilon<1$, otrzymujemy:

$1+y'^2=\frac{a^2-\varepsilon^2x^2}{a^2-x}$, zatem różniczkę łuku ellipsy w postaci: $ds=\sqrt{\frac{a^2-\varepsilon^2x^2}{a^2-x^2}}dx$, a więc łuk ellipsy w granicach od $x=0$ do x przedstawia się całką eliptyczną:

$$s=\int_0^x\sqrt{\frac{a^2-\varepsilon^2x^2}{a^2-x^2}}\,dx.$$

Kładąc $x=a\sin\varphi$, a więc $y=b\cos\varphi$, gdzie φ przedstawia kąt, jaki promień OP' koła wykreślonego nad osią wielką ellipsy, odpowiadający punktowi P odcinka x, tworzy z osią małą fig. 95, otrzymujemy:

$$dx=a\cos\varphi\,d\varphi, \quad a^2-\varepsilon^2x^2=a^2(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi), \quad a^2-x^2=a^2\cos^2\varphi,$$

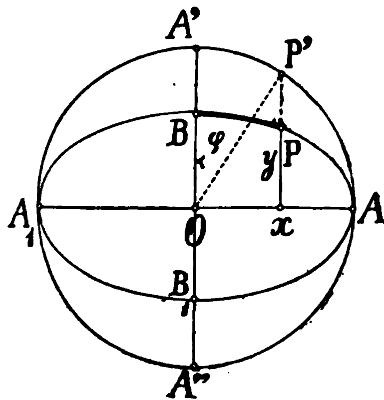


Fig. 95.

przeto: $s=a\int_0^\varphi\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}\,.\,d\varphi.$

Otrzymaną całkę możemy rozwinąć według potęg mimośrodu ε. Mamy bowiem:

$$\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}=1-\frac{\varepsilon^2}{2}\sin^2\varphi-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{4}\sin^4\varphi-\frac{1.3}{2.4}\frac{\varepsilon^6}{6}\sin^6\varphi-$$
$$-\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}\cdot\frac{\varepsilon^{2n}}{2n}\sin^{2n}\varphi-\ldots$$

przeto dostajemy:

$$s=a\int_0^\varphi\Big\{1-\frac{\varepsilon^2}{2}\sin^2\varphi-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^4}{4}\sin^4\varphi-\ldots$$
$$-\frac{1.3..(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}\frac{\varepsilon^{2n}}{2n}\sin^{2n}\varphi-\ldots\Big\}d\varphi, \tag{19}$$

wzór, który możemy użyć do przybliżonego obliczania długości łuku ellipsy, odpowiadającego pewnemu kątowi φ.

Dla ellipsy, której mimośród jest ułamkiem stosunkowo małym np. $\varepsilon<\frac{1}{2}$, otrzymujemy:

$$s=a\int_0^\varphi\Big(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\sin^2\varphi\Big)d\varphi=\int_0^\varphi\Big[1-\frac{\varepsilon^2}{4}(1-\cos^2\varphi)\Big]d\varphi,$$

a stąd wzór przybliżony:

$$s_{a..\varphi}=a\Big[\varphi-\frac{\varepsilon^2}{4}\Big(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big)\Big],$$

czyli:
$$s_0 \ldots \varphi = a\left[\left(1-\frac{\varepsilon^2}{4}\right)\varphi+\frac{\varepsilon^2}{8}\sin 2\varphi\right], \tag{20}$$
w kole jest $\varepsilon = 0$, zatem $s = a\varphi$.

Dla ćwiartki ellipsy mamy $\varphi = \frac{\pi}{2}$,
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi\, d\varphi = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\,\frac{\pi}{2},$$
a więc:
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\left\{1-\frac{\varepsilon^2}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon^4}{4}\cdot\frac{1.3}{2.4}-\ldots-\frac{1.3\ldots(2n-3)\,\varepsilon^{2n}}{2.4\ldots(2n-2)\,2n}\cdot\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}-\ldots\right\},$$
zatem:
$$s = \frac{a\pi}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2-\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\cdot\frac{\varepsilon^4}{3}-\ldots-\left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)^2\frac{\varepsilon^{2n}}{2n-1}-\ldots\right\},$$
obwód całkowity ellipsy o mimośrodzie ε przedstawia się więc wzorem:
$$O = 2a\pi\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{\varepsilon^2}{1}-\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{\varepsilon^4}{3}-\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\frac{\varepsilon^6}{5}-\ldots-\left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n-2)}\right)^2\frac{\varepsilon^{2n}}{2n-1}-\ldots\right\}. \tag{21}$$
Dla $\varepsilon = 0$ otrzymujemy obwód koła $O = 2a\pi$.

β) **Rektyfikacya hyperboli:** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Mamy tu:
$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{bx}{a\sqrt{x^2-a^2}},$$
$$1+y'^2 = 1+\frac{b^2x^2}{a^2(x^2-a^2)} = \frac{(a^2+b^2)x^2-a^4}{a^2(x^2-a^2)}.$$
Kładąc $a^2+b^2=c^2$, $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\varepsilon>1$, otrzymujemy: $1+y'^2=\frac{\varepsilon^2x^2-a^2}{x^2-a^2}$, zatem łuk hyperboli w granicach $x=a$ do x przedstawiony całką elliptyczną:
$$s = \int_a^x \sqrt{\frac{\varepsilon^2x^2-a^2}{x^2-a^2}}\,dx.$$
Uwzględniając, że $x < a$, połóżmy $x = a\sec\varphi$, a otrzymamy $y = b\tang\varphi$.
$$dx = \frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi,$$
przeto:
$$s = a\int_0^{\varphi}\sqrt{\varepsilon^2-\cos^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = a\varepsilon\int_0^{\varphi}\left(1-\frac{\cos^2\varphi}{\varepsilon^2}\right)^{1/2}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$$
czyli:
$$s = a\varepsilon\int_0^{\varphi}\left\{1-\frac{\cos^2\varphi}{2\varepsilon^2}-\frac{1}{2}\,\frac{\cos^4\varphi}{4\varepsilon^4}-\ldots-\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}\cdot\frac{\cos^{2n}\varphi}{2n\,\varepsilon^{2n}}-\ldots\right\}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}, \tag{22}$$
wzór, którego możemy użyć do przybliżonego obliczenia łuku hyperboli, odpowiadającego pewnemu kątowi φ. Kąt φ otrzymujemy, kreśląc z punktu P styczną do koła o promieniu równym a, promień OM punktu styczności M na kole, tworzy wtedy z osią x-ów kąt φ (fig 96).

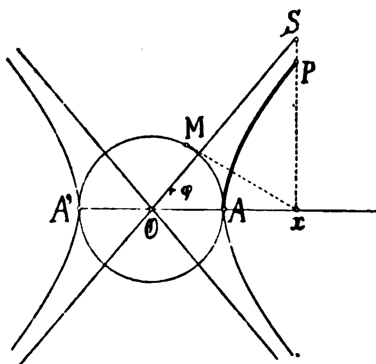


Fig. 96.

Dla hyperboli, w której mimośród ε jest tak wielkim, że możemy szereg przerwać na wyrażeniu zawierającym $\frac{1}{\varepsilon^2}$, otrzymamy na wyznaczenie długości łuku hyperboli wzór przybliżony:
$$s = a\varepsilon\int_0^{\varphi}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}-\frac{1}{2\varepsilon^2}\right)d\varphi,$$
czyli: $s = a\varepsilon\left(\tang\varphi-\frac{\varphi}{2\varepsilon^2}\right)$, gdzie $\varphi = \arccos\frac{a}{x}$.

Oznaczmy przez α kąt nachylenia asymptoty do osi x-ów, a przez S punkt asymptoty powiadający odciętej x, natenczas otrzymamy:

$$OS = x \sec\alpha = x\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \varepsilon x = a\varepsilon \sec\varphi,$$

zeto różnica pomiędzy długością odcinka OS asymptoty a łukiem AP hyperboli przedawi się w postaci:

$$S - AP = a\varepsilon\left\{\sec\varphi - \text{tang}\,\varphi + \int_0^{\varphi}\left(\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{2}\frac{\cos^2\varphi}{4\varepsilon^4} + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}\frac{\cos^{2n-2}\varphi}{2n\varepsilon^{2n}} + \ldots\right)d\varphi\right\}.$$

Kątowi $\varphi = \frac{\pi}{2}$ odpowiada punkt nieskończenie daleki hyperboli. Dla tego punktu ist:

$$\left(\sec\varphi - \text{tang}\,\varphi\right)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{0} = \left(\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0.$$

ıtem·

$$\lim_{x=\infty}(OS-AP) = a\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{2}\frac{\cos^2\varphi}{4\varepsilon^4} + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}\frac{\cos^{2n-2}\varphi}{2n\varepsilon^{2n}} + \ldots\right\}d\varphi =$$

$$= \frac{a}{\varepsilon}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\cos^2\varphi}{4\varepsilon^2} + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}\frac{\cos^{2n-2}\varphi}{2n\varepsilon^{2n-2}} + \ldots\right\}d\varphi,$$

że:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}\varphi\,d\varphi = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots2n}\cdot\frac{\pi}{2},$$

rzeto otrzymujemy wzór:

$$\lim_{x=\infty}(OS-AP) = \frac{a\pi}{2\varepsilon}\left\{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{4\varepsilon^2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{1}{6\varepsilon^4} + \ldots + \left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots2n}\right)^2\cdot\frac{1}{(2n+2)\varepsilon^{2n}} + \ldots\right\},$$

nay pod nazwą wzoru Lauden'a, dowodzący, że różnica między odcinkiem OS asymptoty, a odpowiednim łukiem AP hyperboli dąży do granicy skończonej.

γ) **Rektyfikacya paraboli** $y^2 = 2px$. Mamy tu $2y\,dy = 2p\,dx$, zatem:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{p}, \qquad ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{1}{p}\sqrt{y^2+p^2}\,dy,$$

zatem długość łuku paraboli w granicach od $y = 0$ do pewnego y przedstawia się w postaci całki oznaczonej:

$$s = \frac{1}{p}\int_0^y\sqrt{y^2+p^2}\,dy,$$

a że:

$$\int\sqrt{y^2+p^2}\,dy = \frac{y\sqrt{y^2+p^2}}{2} + \frac{p^2}{2}\log(y+\sqrt{y^2+p^2}),$$

przeto otrzymujemy wzór:

$$S_{0\ldots y} = \frac{y\sqrt{y^2+p^2}}{2p} + \frac{p}{2}\log\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p},$$

czyli:

$$S_{0\ldots y} = \frac{p}{2}\left\{\frac{y}{p}\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}} + \log\left(\frac{y}{p} + \sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}\right)\right\}$$

Fig. 97.

Zastępując rzędną y punktu końcowego P (fig. 97) przez jego odcinek x, otrzymamy odnośny wzór w postaci:

$$S_{0\ldots x} = \frac{p}{2}\left\{\sqrt{\frac{2x}{p}}\sqrt{1+\frac{2x}{p}} + \log\left(\sqrt{\frac{2x}{p}} + \sqrt{1+\frac{2x}{p}}\right)\right\}. \qquad (23)$$

8. **Kubatura powierzchni obrotowych.** Jeżeli krzywa $y = f(x)$ obraca się około osi x-ów, natenczas utworzy powierzchnię obrotową, dla której dana krzywa jest południkiem. Punkt $P(x, y)$ krzywej opisuje wskutek obrotu koło o powierzchni: $A_x = \pi y^2$, zatem objętość warstwy opartej na tem kole

a mającej grubość dx (fig. 98), przedstawiającej element objętości V powsta[łej] w ten sposób powierzchni obrotowej, będ[zie] wyznaczona różniczką: $dV = \pi y^2 dx$

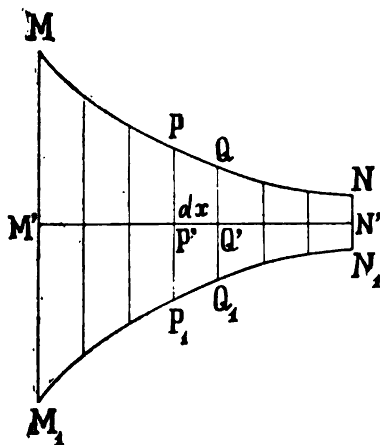


Fig. 98.

Cała objętość, zawarta między dw[oma] przekrojami odpowiadającymi odc[iętym] kom x_1 i x_2 będzie zatem przedstawio[na] całką określoną:

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx = \pi \int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2 dx. \quad (24)$$

9. Przykłady. α) **Kubatura ellipsoidy obr[o]towej.** Niech będzie daną ellipsa o równani[u] $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Obracając ją około osi x-ów (fig. 99), otrz[y]mamy element objętości:

$$dV = \pi y^2 dx = \pi \cdot \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)dx,$$

zatem objętość warstwy ellipsoidy obrotowej w granicach od $x = 0$ do pewnego x będ[zie] przedstawiona wzorem:

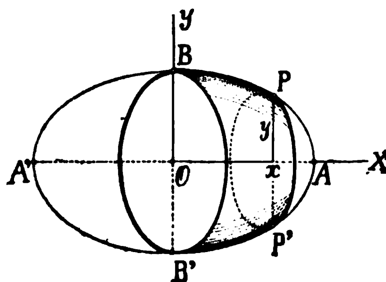


Fig. 99.

$$V_{0 \dots x} = \pi \frac{b^2}{a^2} \int_0^x (a^2 - x^2) dx,$$

czyli: $$V_{0 \dots x} = \frac{\pi b^2 x}{a^2}\left(a^2 - \frac{x^2}{3}\right).$$

Dla $x = a$ wynika stąd objętość połow[y] ellipsoidy obrotowej:

$$V_{0 \dots a} = \frac{2}{3} ab^2 \pi,$$

a zatem objętość całej ellipsoidy obrotowej:

$$V = \frac{4}{3} ab^2 \pi. \quad (25)$$

Jeżeli obrót ellipsy odbywa się około osi małej $2b$, natenczas otrzymamy podobni[e] objętość ellipsoidy obrotowej spłaszczonej, czyli t. zw. sferoidu: $V = \frac{4}{3} a^2 b \pi$. Dla $a =$ [b] otrzymujemy objętość kuli: $V = \frac{4}{3} a^3 \pi$.

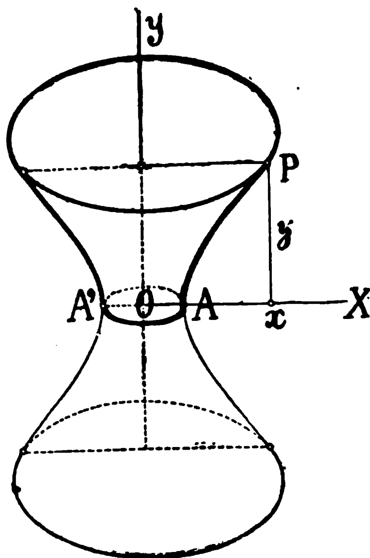


Fig. 100.

β) **Kubatura hyperboloidy obrotowej o jednej i dw[óch] powłokach.** Jeżeli hyperbola: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ obraca si[ę] około osi urojonej y-ów, otrzymujemy hyperboloidę obro[to]wą o jednej powłoce. Element objętości, zawart[y] między dwiema płaszczyznami prostopadłemi do osi obrotowej w odstępie dy, otrzymuje wartość:

$$dV = \pi x^2 dy,$$

a stąd otrzymujemy objętość warstwy w granicach od $y_1 = 0$ do $y_2 = y$ (fig. 100), określoną wzorem:

$$V_{0 \dots y} = \pi \int_0^y x^2 dy.$$

Mamy tu: $x^2 = \frac{a^2}{b^2}(y^2 + b^2)$, przeto:

$$V_{0 \dots y} = \pi \frac{a^2}{b^2} \int_0^y (y^2 + b^2) dy = \frac{\pi a^2}{b^2}\left(\frac{y^3}{3} + b^2 y\right),$$

czyli: $$V_{0 \dots y} = \pi \cdot \frac{a^2 y}{b^2}\left(b^2 + \frac{y^2}{3}\right). \quad (26)$$

Dla $y = b$ otrzymujemy stąd: $V_{0 \dots b} = \frac{4}{3} a^2 b \pi$.

Jeżeli hyperbola: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ obraca się około osi rzeczywistej x-ów, powstaje hyper-ɔida obrotowa o dwu powłokach (fig. 101). Element objętości, zawarty między dwiema

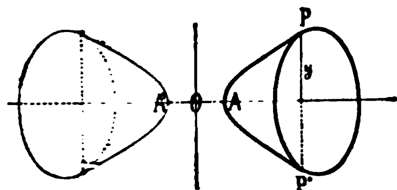


Fig. 101.

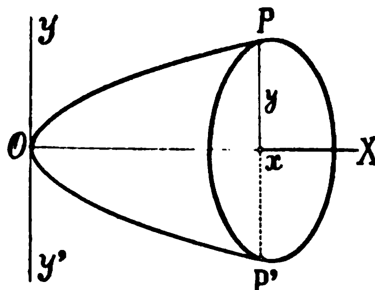


Fig. 102.

ɩszczyznami prostopadłemi do osi x-ów ma tu wartość: $dV = \pi y^2 dx$, gdzie: $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$, tem objętość warstwy w granicach od $x_1 = a$ do $x_2 = x$ przedstawia się wzorem:

$$V_{a \dots x} = \frac{\pi b^2}{a^2} \int_a^x (x^2 - a^2) dx,$$

ąd otrzymujemy:

$$V_{a \dots x} = \frac{\pi b^2}{a^2} \left(\frac{x^3}{3} - a^2 x - \frac{a^3}{3} + a^3 \right),$$

yli:

$$V_{a \dots x} = \frac{\pi}{3} \frac{b^2}{a^2} (x^2 + ax - 2a^2)(x - a). \qquad (27)$$

γ) **Kubatura paraboloidy obrotowej.** Z równania paraboli $y^2 = 2px$ otrzymujemy objęść bryły powstałej przez obrót tej paraboli dokoła osi x-ów, czyli objętość paraboloidy ɪrotowej (fig. 102) w granicach od $x_1 = 0$ do $x_2 = x$ z wzoru:

$$V_{0 \dots x} = \pi \int_0^x 2px\, dx = 2p\pi \int_0^x x\, dx = \pi p x^2.$$

'prowadzając spółrzędne x i y końcowego punktu paraboli, otrzymamy stąd:

$$V_{0 \dots x} = y^2 \pi \cdot \frac{x}{2}. \qquad (28)$$

Objętość paraboloidy obrotowej jest więc równa połowie objętości walca, który ma nią tę samą podstawę i wysokość.

10. Komplanacya powierzchni obrotowych. Obliczanie powierzchni danej ɔowierzchni nazywamy komplanacyą tejże powierzchni. Jeżeli krzywa $y = f(x)$ obraca się około osi x-ów (fig. 103), wtedy element ds jej łuku, opisze powierzchnię, którą możemy uważać za pobocznicę stożka ściętego, którego średni przekrój jest kołem o promieniu y, a długość krawędzi równa ds. Element dF pobocznicy odnośnej powierzchni obrotowej otrzymuje zatem wartość:

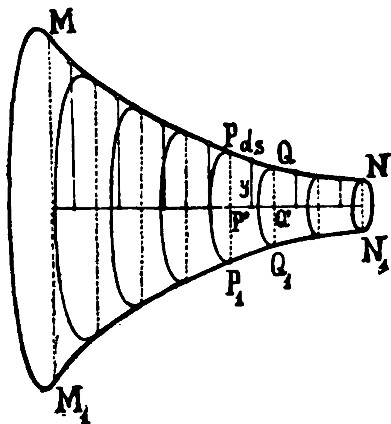


Fig. 103.

$$dF = 2\pi y \cdot ds = 2\pi y \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

skąd dostajemy powierzchnię, zawartą między przekrojami prostopadłemi do osi x-ów, przeprowadzonemi w miejscach x_1 i x_2 wyrażoną wzorem:

$$F = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} dx = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \qquad (29)$$

11. Przykłady. *α*) **Komplanacya ellipsoidy obrotowej.** Z równania ellipsy:
obracającej się na około osi x-ów, otrzymujemy:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}},\qquad \frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x}}$$

przeto pobocznica ellipsoidy obrotowej w granicach od $x_1=0$ do $x_2=x$ (fig. 9
wia się całką określoną:

$$F_{0\dots x}=2\pi\frac{b}{a^2}\int_0^x\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}\,dx.$$

Celem wyznaczenia otrzymanej całki odróżnimy dwa przypadki $a<b$ i
wiadające dwom rodzajom ellipsoidy obrotowej, t. j. wydłużonej i spłaszcz
mując $a>b$, a więc ellipsoidę wydłużoną, położmy: $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{c}{a}=\varepsilon$, gdzie ε
mamy:

$$F_{0\dots x}=2\pi\frac{b}{a}\int_0^x\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}\,dx.$$

Używając podstawienia $\varepsilon x=z$, a więc: $dx=\frac{1}{\varepsilon}dz$, otrzymamy:

$$F_{0\dots x}=2\pi\frac{b}{\varepsilon a}\int_0^{\varepsilon x}\sqrt{a^2-z^2}\,dz,$$

a że:

$$\int\sqrt{a^2-z^2}\,dz=\frac{z\sqrt{a^2-z^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{z}{a}+C,$$

a więc:

$$\int_0^{\varepsilon x}\sqrt{a^2-z^2}\,dz=\frac{\varepsilon x\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{\varepsilon x}{a},$$

przeto otrzymujemy wzór:

$$F_{0\dots x}=\frac{\pi b}{\varepsilon a}\left(\varepsilon x\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}+a^2\arcsin\frac{\varepsilon x}{a}\right),$$

Kładąc tu $x=a$ i mnożąc wynik przez 2, otrzymamy pobocznicę całę
wydłużonej:

$$F=2\pi ab\left(\sqrt{1-\varepsilon^2}+\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}\right).$$

skąd dla $a=b$, a więc $\varepsilon=0$, wobec $\sqrt{1-\varepsilon^2}=1$; $\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}=1$ wypada wzór
chnię kuli: $F=4a^2\pi$.

Przyjmując $a<b$, a więc ellipsoidę spłaszczoną, położmy: $\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}=$
mamy:

$$F_{0\dots x}=2\pi\frac{b}{a}\int_0^x\sqrt{a^2+\varepsilon^2x^2}\,dx,$$

skąd, podstawiając $\varepsilon x=az$, $dx=\frac{a}{\varepsilon}dz$, otrzymamy:

$$F_{0\dots x}=2\pi\frac{b}{\varepsilon a}\int_0^{\frac{\varepsilon x}{a}}\sqrt{1+z^2}\,dz,$$

a że:

$$\int\sqrt{1+z^2}\,dz=\frac{z\sqrt{1+z^2}}{2}+\frac{1}{2}\log(z+\sqrt{1+z^2})+C,$$

przeto:

$$F_{0\dots x}=ab\pi\left[\frac{x}{a}\sqrt{1+\frac{\varepsilon^2x^2}{a^2}}+\frac{1}{\varepsilon}\log\left(\frac{\varepsilon x}{a}+\sqrt{1+\frac{\varepsilon^2x^2}{a^2}}\right)\right].$$

Kładąc $x=a$ i mnożąc wynik przez 2, otrzymujemy powierzchnię całe
spłaszczonej, wyrażoną wzorem:

$$F=2ab\pi\left[\sqrt{1+\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon}\log(\varepsilon+\sqrt{1+\varepsilon^2})\right].$$

omplanacya hyperboloidy obrotowej o jednej i o dwu powłokach. Z równania $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, otrzymamy:

$$\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}, \qquad x = \frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}, \qquad \frac{x\,dx}{a^2} - \frac{y\,dy}{b^2} = 0, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y}.$$

hyperbolę około osi y-ów otrzymujemy hyperboloidę o jednej powłoce, której nia ograniczona równoleżnikami $y_1 = 0$ i $y_2 = y$ (fig. 100), przedstawia się wzorem:

$$_{..y} = 2\pi\int_0^y x\,ds, \quad \text{gdzie } x\,ds = \frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}\sqrt{\frac{a^4y^2}{b^4x^2}+1}\,dy = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{(a^2+b^2)y^2+b^4}{b^2}}\,dy.$$

óżmy: $\frac{a^2+b^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2} = \varepsilon^2$, gdzie $\varepsilon > 1$, tedy otrzymamy: $x\,ds = \frac{a}{b}\sqrt{b^2+\varepsilon^2y^2}\,dy$,

$$F_{0\ldots y} = \frac{2a\pi}{b}\int_0^y\sqrt{b^2+\varepsilon^2y^2}\,dy = 2a\pi\int_0^y\sqrt{1+\left(\frac{\varepsilon y}{b}\right)^2}\,dy,$$

$$F_{0\ldots y} = \frac{2ab\pi}{\varepsilon}\int_0^{\frac{\varepsilon y}{b}}\sqrt{1+z^2}\,dz,$$

$$F_{0\ldots y} = ab\pi\left[\frac{y}{b}\sqrt{1+\frac{\varepsilon^2y^2}{b^2}} + \frac{1}{\varepsilon}\log\left(\frac{\varepsilon y}{b} + \sqrt{1+\frac{\varepsilon^2y^2}{b^2}}\right)\right]. \tag{32}$$

racając hyperbolę: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ około osi x-ów, otrzymujemy hyperboloidę obrodwu powłokach. Elementem jej powierzchni jest $dF = 2\pi y\,ds$, gdzie:

$$y\,ds = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\sqrt{1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}}\,dx = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{(a^2+b^2)x^2-a^4}{a^2}}\,dx.$$

ladąc: $\frac{a^2+b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} = \varepsilon^2$, otrzymamy: $y\,ds = \frac{b}{a}\sqrt{\varepsilon^2x^2-a^2}\,dx$, zatem powierzchnia od $x_1 = a$ do $x_2 = x$ (fig. 101) będzie określona wzorem:

$$F_{a\ldots x} = \frac{2b\pi}{a}\int_0^x\sqrt{\varepsilon^2x^2-a^2}\,dx,$$

o otrzymujemy:

$$F_{\ldots x} = \frac{2ab\pi}{a}\int_0^{\frac{\varepsilon x}{a}}\sqrt{z^2-1}\,dz = \frac{2ab\pi}{\varepsilon}\Big|_0^{\frac{\varepsilon x}{a}}\left\{\frac{z\sqrt{z^2-1}}{2} + \frac{1}{2}\log(z-\sqrt{z^2-1})\right\},$$

ostatecznie:

$$F_{0\ldots x} = ab\pi\left\{\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\varepsilon^2x^2}{a^2}-1} - \sqrt{\varepsilon^2-1} + \frac{1}{\varepsilon}\log\frac{\frac{\varepsilon x}{a} - \sqrt{\frac{\varepsilon^2x^2}{a^2}-1}}{\varepsilon-\sqrt{\varepsilon^2-1}}\right\}. \tag{33}$$

) **Komplanacya paraboloidy obrotowej.** Jeżeli paraboloida $y^2 = 2px$ obraca się około x, wówczas powstaje paraboloida obrotowa, której element powierzchni:

$$dF = 2\pi y\,ds = 2\pi.\sqrt{2px}.\sqrt{1+\frac{p}{2x}}\,dx = 2\pi\sqrt{2px+p^2}\,dx.$$

ć powierzchni tejże paraboloidy obrotowej w granicach od $x_1 = 0$ do $x_2 = x$ (fig. 102) awia się wobec tego wzorem:

$$F_{0\ldots x} = 2\pi\int_0^x\sqrt{2px+p^2}\,dx = 2\pi\sqrt{p}\int_0^x(2x+p)^{1/2}\,dx,$$

$$\int_0^x(2x+p)^{1/2}\,dx = \Big|_0^x\frac{(2x+p)^{3/2}}{3} = \frac{(2x+p)^{3/2}}{3} - \frac{p^{3/2}}{3},$$

otrzymujemy: $F_{0\ldots x} = 2\pi\sqrt{p}\left\{\frac{(2x+p)^{3/2}}{3} - \frac{p^{3/2}}{3}\right\}$, czyli:

$$F_{0\ldots x} = \frac{2}{3}\pi\sqrt{p}\left\{(2x+p)^{3/2} - p^{3/2}\right\}. \tag{34}$$

Wprowadzając w ten wzór, zamiast odcinka x, rzędną y punktu końcowego paraboli my:

$$F_{0\ldots y} = \frac{2\pi}{3p}\left\{(y^2+p^2)^{3/2} - p^3\right\}. \tag{35}$$

12. Momenta statyczne łuków i pól płaskich. Momentem statycznym dM elementu dm jakiejkolwiek formy geometrycznej względem linii prostej lub punktu nazywamy iloczyn z wielkości dm tegoż elementu i jego odległości ϱ od tejże prostej lub punktu, zatem $dM = \varrho dm$. Momentem statycznym całej formy jest tedy suma momentów statycznych wszystkich jej elementów, więc $M = \int \varrho dm$. Na płaszczyźnie mamy elementa liniowe i elementa powierzchniowe, zatem odróżniamy momenta statyczne łuku i momenta statyczne pól.

13. Moment statyczny łuku względem prostej. Oznaczmy przez dM_s moment statyczny elementu ds łuku krzywej $y=f(x)$ względem osi x-ów, natenczas mamy według określenia:

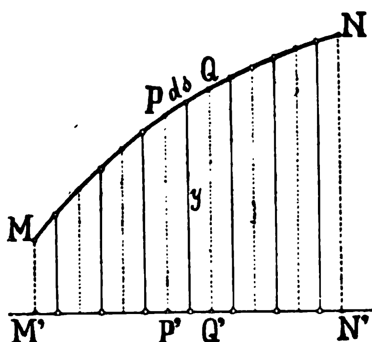


Fig. 104.

$$dM_s = y \, . \, ds = y\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

skąd dostajemy:

$$M_s = \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx, \quad (36)$$

wzór podający moment łuku krzywej $y=f(x)$ względem osi x-ów w granicach od $x=x_1$ do $x=x_2$. Analogicznie otrzymamy moment statyczny łuku krzywej $y=f(x)$ względem osi y-ów w postaci: $M_s = \int_{y_1}^{y_2} x\sqrt{1+x'^2}\,dy$.

Moment statyczny łuku względem początku układu określi znowu wzór:

$$M_s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{x^2+y^2}\,ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

14. Moment statyczny powierzchni zamkniętej względem linii prostej. Elementa powierzchni mogą być elementami nieskończenie małemi rzędu pierwszego lub rzędu drugiego.

Jeżeli jako element pola weźmiemy element nieskończenie mały rzędu drugiego: $d^2A = dx \, . \, dy$, natenczas moment tego elementu względem osi x-ów będzie również nieskończenie małym rzędu drugiego. Oznaczmy go przez d^2M_a, a otrzymamy:

$$d^2 M_a = y \, . \, dx\, dy,$$

skąd otrzymujemy:

$$M_a = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} y\,dx\,dy \quad (37)$$

wzór na wyznaczenie momentu pola dowolnie ograniczonego. Przyjmując jako element pola element nieskończenie mały rzędu pierwszego kształtu: $dA = y\,dx$ (fig. 105) otrzymujemy jego moment dM_a względem osi x-ów określony wzorem:

$$dM_a = \int_0^y y\,dx\,dy = dx\int_0^y y\,dy = \frac{1}{2}\,y^2\,dx,$$

czyli wzorem: $dM_a = y\,dx \, . \, \frac{y}{2}$, który w ogólności dowodzi, że moment statyczny prostokąta względem jego podstawy jest równy jego powierzchni pomnożonej przez pół wysokości.

ymujemy zatem: $M_a = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2 dx$

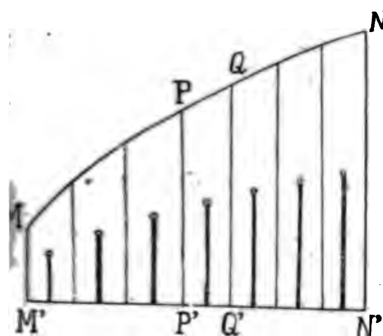


Fig. 105.

wzór, podający moment pola zawartego między krzywą $y=f(x)$ a osią x-ów w granicach od $x=x_1$ do $x=x_2$ (fig 105).

11. Moment statyczny dM_a elementu $y\,dx$ względem osi y-ów określi zaś wzór: $dM_a = xy\,dx$, stąd otrzymujemy:

$$M_a = \int_{x_1}^{x_2} xy\,dx \qquad (38)$$

wzór podający moment statyczny względem osi y-ów pola ograniczonego krzywą $y=f(x)$, osią x-ów i dwiema rzędnemi w punktach x_1 i x_2 wyprowadzonemi.

Moment statyczny M_a pola dowolnie ograniczonego względem początku **adu wyznacza** wzór:

$$M_a = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy, \qquad (39)$$

ry przy użyciu spółrzędnych biegunowych r, φ sprowadza się do postaci:

$$M_a = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r_1}^{r_2} r\,.\,r d\varphi\,dr = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r_1}^{r_2} r^2 d\varphi\,dr. \qquad (40)$$

12. Środki ciężkości łuków i pól płaskich. Środkiem ciężkości formy **metrycznej nazywamy** punkt, który ma tę własność, że moment statyczny tego punktu skupiającego w sobie wielkość całej formy jest równy momentowi statycznemu tejże formy. Oznaczmy przez η_s odległość środka ciężkości S łuku s od osi x-ów (fig. 106), to otrzymamy na jej wyznaczenie wzór:

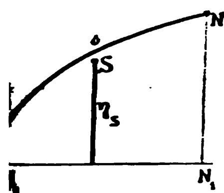


Fig. 106.

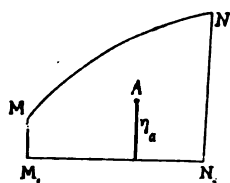


Fig. 107.

$s\,.\,\eta_s = M_s$, przeto:

$$\eta_s = \frac{M_s}{s} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} y\,ds}{\int_{x_1}^{x_2} ds} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,.\,dx}{\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx}. \qquad (41)$$

Odległość ξ_s środka ciężkości S łuku s od osi y-ów określi analogicznie **ór**:

$$\xi_s = \frac{\int_{x_1}^{x_2} x\,.\,ds}{\int_{x_1}^{x_2} ds} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} x\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,.\,dx}. \qquad (41')$$

Oznaczmy przez ξ_a, η_a, spółrzędne środka ciężkości pola A dowolnie **aniczonego** (fig. 107), to otrzymamy według określenia:

$A\,.\,\xi_a = (M_a)_y$, $A\,.\,\eta_a = (M_a)_x$, przeto wzory:

$$\xi_a = \frac{(M_a)_y}{A} = \frac{\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} x\,dx\,dy}{\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} dx\,dy}, \qquad \eta_a = \frac{(M_a)_x}{A} = \frac{\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} y\,dx\,dy}{\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} dx\,dy}, \qquad (42)$$

które, dla pola ograniczonego krzywą $y=f(x)$, osią x-ów i dwiema rzędnemi w punktach x_1 i x_2 wyprowadzonemi, sprowadzają się do postaci:

$$\xi_a = \frac{\int_{x_1}^{x_2} xy\,dx}{\int_{x_1}^{x_2} y\,dx}, \qquad \eta_a = \frac{\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx}{\int_{x_1}^{x_2} y\,dx}, \tag{43}$$

13. Wzory Guldin'a. Zestawiając wzory kubatury i komplanacyi powierzchni obrotowych, wyprowadzone w art. 10. i 11. w postaci:

$$V = \pi\int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx, \qquad F = 2\pi\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

z wzorami na środki ciężkości łuków i pól wyprowadzonemi w art. 12 w postaci:

$$\eta_a = \frac{\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx}{\int_{x_1}^{x_2} y\,dx} = \frac{\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx}{A}, \qquad \eta_s = \frac{\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx}{s},$$

czyli:

$$\int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx = 2A\eta_a, \qquad \int_{x_1}^{x} y\sqrt{1+y'^2}\,dx = s.\eta_s, \tag{44}$$

otrzymamy wzory:

$$V = A.2\pi\,\eta_a, \qquad F = s.2\pi\,\eta_s,$$

znane pod nazwą wzorów Guldin'a, wypowiadających następujące dwa twierdzenia:

1) *Objętość bryły powstałej przez obrót pola A jest równa iloczynowi powierzchni tego pola i obwodu koła opisanego przez środek ciężkości tego pola.*

2) *Powierzchnia powstała przez obrót łuku jest równa iloczynowi długości tego łuku i obwodu koła opisanego przez środek ciężkości tegoż łuku.*

14. Momenta bezwładności łuków i pól płaskich. Momentem bezwładności dI elementu dm formy geometrycznej względem prostej lub punktu nazywamy iloczyn z wielkości dm tegoż elementu i kwadratu jego odległości ϱ od tejże prostej, względnie od tegoż punktu, zatem $dI=\varrho^2 dm$.

Momentem bezwładności I całej formy geometrycznej nazywamy tedy sumę momentów bezwładności wszystkich jej elementów, jest więc $I=\int\varrho^2 dm$.

Na płaszczyźnie odróżniamy elementa liniowe i elementa powierzchniowe, zatem mamy momenta bezwładności łuków i momenta bezwładności pól płaskich.

15. Moment bezwładności łuku. Oznaczmy przez dI_s moment bezwładności elementu ds łuku krzywej $y=f(x)$ względem osi x-ów, natenczas mamy według określenia, kładąc $\varrho=y$, wzór:

$$dI_s = y^2\,ds = y^2\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

zatem moment bezwładności I łuku s, w granicach od $x=x_1$ do $x=x_2$, względem osi x-ów przedstawia się wzorem:

$$I_s = \int_{x_1}^{x_2} y^2\sqrt{1+y'^2}\,dx. \tag{45}$$

Analogicznie otrzymamy moment bezwładności tegoż łuku względem osi y-ów w postaci:

$$I_s = \int_{x_1}^{x_2} x^2 \sqrt{1+y'^2}\, dx.$$

Moment bezwładności tegoż łuku względem początku układu określi natomiast wzór:

$$I_s = \int_{x_1}^{x_2} \varrho^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} (x^2+y^2)\sqrt{1+y'^2}\, dx.$$

16. Moment bezwładności pola. Przyjmując jako element pola element nieskończenie mały rzędu drugiego kształtu: $d^2A = dx\,dy$, otrzymujemy moment bezwładności tego elementu względem osi x-ów jako wielkość nieskończenie małą drugiego rzędu $d^2 I_a$, określoną wzorem:

$$d^2 I_a = y^2 . dx\, dy,$$

stąd otrzymujemy:

$$I_a = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} y^2\, dx\, dy \qquad (46)$$

wzór na wyznaczenie momentu bezwładności pola dowolnie ograniczonego. Przyjmując jako element pola element nieskończenie mały pierwszego rzędu kształtu $dA = y\,dx$, otrzymujemy jego moment bezwładności względem osi x-ów, również nieskończenie mały pierwszego rzędu, określony wzorem:

$$dI_a = \int_0^y y^2\, dx\, dy = dx\int_0^y y^2\, dy = \frac{y^3}{3}\, dx,$$

który dowodzi, że moment bezwładności elementu prostokątnego $y\,dx$ względem osi x-ów, jako jego podstawy, jest równy $\frac{y^3}{3} dx = y\,dx . \frac{y^2}{3}$, t. j. iloczynowi powierzchni tego prostokąta i trzeciej części kwadratu jego wysokości. Otrzymujemy zatem:

$$I_a = \frac{1}{3}\int_{x_1}^{x_2} y^3\, dx = \frac{1}{3}\int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^3\, dx \qquad (47)$$

wzór podający moment bezwładności pola zawartego między krzywą $y=f(x)$ i osią x-ów w granicach od $x=x_1$ do $x=x_2$.

17. Przykłady a) **Moment bezwładności powierzchni trójkąta względem jego podstawy.** Niech będzie dany trójkąt ABC o podstawie a i wysokości h. Dzieląc jego powierzchnię za pomocą prostych równoległych do podstawy na elementa nieskończenie małe pierwszego rzędu o powierzchni $l . dy$, otrzymujemy moment bezwładności takiego elementu ze względu na podstawę trójkąta określony wzorem:

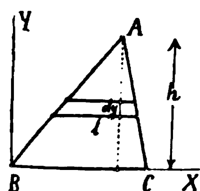


Fig. 108.

$$dI_a = l . dy . y^2,$$

skąd, ze względu na to, że:

$$l : a = (h-y) : h, \quad \text{a więc:} \quad l = \frac{a(h-y)}{h},$$

otrzymujemy:

$$dI_a = \frac{a(h-y)}{h} y^2\, dy,$$

a więc:

$$I_a = \frac{a}{h}\int_0^h (h-y)y^2\, dy = \frac{a}{h}\Big|_0^h \left(\frac{hy^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right) = \frac{a}{h}\left(\frac{h^4}{3} - \frac{h^4}{4}\right), \quad \text{czyli:} \quad I_a = \frac{ah^3}{12}.$$

β) **Moment bezwładności powierzchni koła względem jego średnicy.** Dzieląc powierzchnię koła na elementa równoległe do jego średnicy $2r$, otrzymamy:

$$dI_a = 2x \, . \, dy \, . \, y^2,$$

skąd, ze względu na to, że: $x = \sqrt{r^2 - y^2}$ otrzymujemy:

$$dI_a = 2y^2 \sqrt{r^2 - y^2} \, dy, \text{ zatem:}$$

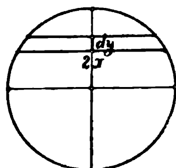


Fig. 109.

$$I_a = \int_{-r}^{+r} 2y^2 \sqrt{r^2 - y^2} \, dy = 4 \int_0^r y^2 \sqrt{r^2 - y^2} \, dy,$$

a że:

$$\int_0^r y^2 \sqrt{r^2 - y^2} \, dy =$$

$$= \frac{1}{8} \Big|_0^r [y^4 \arcsin \frac{y}{r} - r(r^2 - 2y^2) \sqrt{r^2 - y^2}] = \frac{1}{8} \cdot \frac{r^4 \pi}{2} = \frac{r^4 \pi}{16},$$

więc:

$$I_a = \frac{r^4 \pi}{4}.$$

γ) **Moment bezwładności koła względem jego środka.** Chcąc wyznaczyć moment bezwładności powierzchni koła względem jego środka, czyli względem prostej, przechodzącej przez środek koła, a prostopadłej do jego płaszczyzny, możemy podzielić powierzchnię koła za pomocą kół współśrodkowych na elementa o powierzchni $2\pi\rho \, . \, d\rho$. Moment bezwładności takiego elementu względem środka koła będzie:

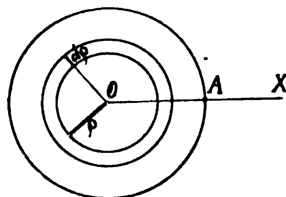


Fig. 110.

$$dI_a = 2\pi\rho \, . \, d\rho \, . \, \rho^2 = 2\pi\rho^3 d\rho,$$

zatem:

$$I_a = \int_0^r 2\pi \rho^3 d\rho = \frac{r^4 \pi}{2}.$$

18. Potencyał łuku i pola płaskiego. Potencyałem dU elementu dm formy geometrycznej ze względu na pewien punkt P nazywamy iloczyn wielkości elementu i odwrotnej wartości odległości tego elementu od punktu P, zatem $dU = \frac{dm}{r}$. Sumę tych iloczynów, obejmującą wszystkie elementa danej formy, nazywamy potencyałem tej formy ze względu na przyjęty punkt, zatem $U = \int \frac{dm}{r}$. Niech będą a, b spółrzędne danego punktu P, a x, y spółrzędne punktu formy, to ich odległość:

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Elementowi ds łuku krzywej $y = f(x)$ odpowiada zatem ze względu na punkt $P(a, b)$ potencyał:

$$dU_s = \frac{ds}{r} = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} dx,$$

zatem potencyał łuku tego w granicach od $x = x_1$ do $x = x_2$ ze względu na punkt $P(a, b)$ przedstawia całka określona:

$$U_s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \, dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + [f'(x)]^2}{(x-a)^2 + [f(x) - b]^2}} \, dx. \qquad (48)$$

Elementowi powierzchniowemu $dx \, dy$ odpowiada ze względu na punkt $P(a, b)$ potencyał:

$$d^2 U_a = \frac{dx \, dy}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}},$$

zatem potencyał pola płaskiego ograniczonego krzywą $y=f(x)$, osią x-ów i dwiema rzędnemi w punktach x_1 i x_2 wyprowadzonemi, przedstawia się wzorem:

$$U_a=\int_{x_1}^{x_2}\int_0^{f(x)}\frac{dx\,dy}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}},$$

ogólnie dla jakiegokolwiek ograniczenia w postaci $F(x,y)=0$ potencyał pola ze względu na punkt $P(a,b)$ będzie oznaczony wzorem:

$$U_a=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\frac{dx\,dy}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}},\qquad(49)$$

gdzie granice x_1. x_2, y_1, y_2 wyznacza się z równania krzywej $F(x,y)=0$, pole ograniczającej.

19. Przyciąganie punktu przez łuki lub pola płaskie. Wielkością przyciągania dW danego punktu wywołanego przez element dm formy geometrycznej nazywamy iloczyn z wielkości elementu dm i odwrotnej wartości z kwadratu odległości r tego elementu od danego punktu P, zatem $dW=\frac{dm}{r^2}$. Sumę tych iloczynów obejmującą wszystkie elementa danej formy ze względu na dany punkt P nazywamy wielkością przyciągania danego punktu przez daną formę geometryczną $W=\int\frac{dm}{r^2}$. Niech będą a, b spółrzędne danego punktu P, a x, y spółrzędne danego punktu formy geometrycznej, to kwadrat ich odległości: $r^2=(x-a)^2+(y-b)^2$.

Element ds łuku krzywej $y=f(x)$ wywiera przeto na punkt $P(a,b)$ przyciąganie o wielkości:

$$dW_s=\frac{ds}{(x-a)^2+(y-b)^2}=\frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{(x-a)^2+[f(x)-b)]^2},$$

zatem przyciąganie wywarte na tenże punkt przez łuk s, ograniczony rzędnemi odpowiadającemi odcinkom x_1 i x_2, otrzymuje wielkość:

$$W_s=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{(x-a)^2+(y-b)^2}.\qquad(50)$$

Element powierzchniowy $dx\,dy$ przyciąga punkt $P(a,b)$ siłą o wielkości:

$$dW_a=\frac{dx\,dy}{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

zatem wielkość przyciągania wywieranego przez pole ograniczone krzywą: $y=f(x)$, osią x-ów i rzędnemi w punktach x_1, x_2 wykreślonemi, na dany punkt $P(a,b)$ wyrazi się wzorem:

$$W_a=\int_{x_1}^{x_2}\int_0^{f(x)}\frac{dx\,dy}{(x-a)^2+(y-b)^2}.\qquad(51)$$

Ćwiczenia LXI.

Wykazać, że: 1) powierzchnia odcinka elipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ w granicach od $x_1=0$ do $x_2=x$ wyznacza się wzorem:

$$A_{0\dots x}=\frac{b}{a}\left\{\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right\}=\frac{xy}{2}+\frac{ab}{2}\arcsin\frac{x}{a}.$$

2) Powierzchnia odcinka hyperboli: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ w granicach od $x_1=a$ do $x_2=x$ wyznacza się wzorem:

$$A_{0\ldots x}=\frac{b}{a}\left\{\frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2}-\frac{a^2}{2}\log\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)\right\}=\frac{xy}{2}-\frac{ab}{2}\log\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right).$$

3) Powierzchnia paraboli $y^2=2px$ w granicach od $x_1=0$ do $x_2=x$ wyznacza się wzorem:

$$A_{0\ldots x}=\frac{2}{3}x\sqrt{2px}=\frac{2}{3}xy.$$

Wykreślić następujące linie i wyznaczyć ich powierzchnie w granicach od $x_1=0$ do $x_2=x$:

4) $y=ax$, 5) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, 6) $x^2+y^2=a^2$, 7) $x^2+y^2-2ax=0$, 8) $y^2=ax$.

9) $y=e^x$ (logarytmika), 10) $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ (linia łańcuchowa).

11) Wykazać, że odcinek elipsy (a, b) ograniczony prostą, przechodzącą przez punkty $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(y_2, y_2)$ elipsy ma powierzchnię:

$$A=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)+\frac{ab}{2}\left(\arcsin\frac{x_2}{a}-\arcsin\frac{x_1}{a}\right).$$

12) Wykazać, że wycinek ellipsy (a, b), ograniczony promieniami łączącemi środek ellipsy z punktami $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$, ma powierzchnię:

$$A=\frac{ab}{2}\left(\arcsin\frac{x_2}{a}-\arcsin\frac{x_1}{a}\right).$$

13) Wykazać, że powierzchnię krzywej: $r=\frac{p}{1-\cos\varphi}$ w granicach od $\varphi=0$ do $\varphi_2=\varphi$ określa wzór:

$$A_{0\ldots\varphi}=\frac{p^2}{4}\left[\frac{1}{3\operatorname{tang}^3\frac{\varphi}{2}}+\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}}\right].$$

14) Wykazać, że łuk paraboli $y^2=2px$ w granicach od $y_1=0$ do $y_2=y$ wyznacza wzór:

$$S_{0\ldots y}=\frac{y}{2p}\sqrt{p^2+y^2}+\frac{p}{2}\log\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}.$$

15) Wykazać, że łuk krzywej $r=a(1+\cos\varphi)$ w granicach od $\varphi_1=0$ do $\varphi_2=\varphi$ ma długość: $S_{0\ldots\varphi}=4a\sin\frac{\varphi}{2}$, a więc dla $\varphi=\pi$, długość $4a$.

16) Wyznaczyć objętość warstwy sferycznej powstałej przez obrót łuku koła $x^2+y^2=a^2$ około osi x-ów w granicach od x_1 do x_2.

17) Wyznaczyć objętość bryły powstałej przez obrót logarytmiki $y=ae^{-\frac{x}{a}}$ około osi x-ów w granicach od $x_1=0$ do $x_2=\infty$.

18) Wykazać, że objętość odcinka sferycznego o wysokości h określa się wzorem:

$$V=h^2\pi\left(a-\frac{h}{3}\right).$$

19) Wykazać, że objętość stożka powstałego przez obrót prostej $y=x\operatorname{tang}\alpha$ w granicach od $x=0$ do $x=h$ ma wartość:

$$V=\frac{h}{3}.\pi h^2\operatorname{tang}^2\alpha=\frac{h}{3}r^2\pi,\text{ gdzie } r=h\operatorname{tang}\alpha.$$

20) Obliczyć pobocznicę powierzchni powstałej przez obrót prostej $y=a$ około osi x-ów w granicy od x_1 do x_2.

21) Obliczyć pobocznicę stożka powstałego przez obrót prostej $y=x\operatorname{tang}\alpha$ około osi x-ów w granicach od x_1 do x_2.

22) Wykazać, że pobocznica paraboloidy obrotowej powstałej przez obrót paraboli $y^2=2px$ około osi x-ów w granicach od $x_1=0$ do $x_2=x$ określa wzór:

$$F=\frac{2}{3}\pi\sqrt{p}\left\{(2x+p)^{3/2}-p^{3/2}\right\}.$$

23 Wyprowadzić wzory na pobocznicę ellipsoid obrotowych:

α) wydłużonej $a>b$:

$$F=2ab\pi\left\{\sqrt{1-\varepsilon^2}+\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}\right\},\quad \text{gdzie } \varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}<1,$$

β) spłaszczonej $a<b$:

$$F=2ab\pi\left\{\sqrt{1+\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon}\log(\varepsilon+\sqrt{1+\varepsilon^2})\right\},\quad \text{gdzie } \varepsilon=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}<1.$$

24) Wyprowadzić wzór na pobocznicę odcinka hyperboloidy obrotowej o jednej powłoce, powstałej przez obrót hyperboli: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ około osi y-ów:

$$F=ab\pi\left\{\frac{y}{b}\sqrt{1+\frac{\varepsilon^2y^2}{b^2}}+\frac{1}{\varepsilon}\log\left(\frac{\varepsilon y}{b}+\sqrt{1+\frac{\varepsilon^2y^2}{b^2}}\right)\right\},\quad \text{gdzie } \varepsilon=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

25) Wyprowadzić wzór na pobocznicę odcinka hyperboloidy obrotowej o dwu powłokach, powstałej przez obrót hyperboli: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ około osi x-ów:

$$F=ab\pi\left\{\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\varepsilon^2x^2}{a^2}-1}-\sqrt{\varepsilon^2-1}+\frac{1}{\varepsilon}\log\frac{\frac{\varepsilon x}{a}-\sqrt{\frac{\varepsilon^2x^2}{a^2}-1}}{\varepsilon-\sqrt{\varepsilon^2-1}}\right\},\quad \text{gdzie } \varepsilon=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$

26) Wyznaczyć moment bezwładności trójkąta prostokątnego o przyprostokątniach x i y względem przyprostokątni x.

27) Wykazać, że moment bezwładności koła: $x^2+y^2=r^2$ względem jego średnicy: $d=2r$ ma wartość: $I_a=\frac{\pi d^4}{64}$.

28) Wykazać, że powierzchnia ellipsy o równaniu: $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$ ma wartość $\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$.

29) Za pomocą całki podwójnej wyznaczyć powierzchnię A ellipsy:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1 \text{ i wykazać, że } A=ab\pi.$$

Wykazać, że stosując całki określone do prostej $y=x$ w granicach (x_1, x_2), otrzymujemy:

30) $A=\frac{x_1+x_2}{2}(x_2-x_1)$, 31) $S=(x_2-x_1)\sqrt{2}$, 32) $V=\frac{\pi}{3}(x_2^3-x_1^3)$,

33) $F=\pi\sqrt{2}(x_2^2-x_1^2)$, 34) $M_s=\frac{\sqrt{2}(x_2^2-x_1^2)}{2}$, 35) $M_a=\frac{x_2^3-x_1^3}{6}$,

36) $I_s=\sqrt{2}\cdot\frac{x_2^3-x_1^3}{6}$, 37) $I_a=\frac{x_2^4-x_1^4}{12}$, 38) $\eta_s=\frac{y_1+y_2}{2}$,

39) $\eta_a=\frac{x_2^2+x_1x_2+x_1^2}{3(x_2+x_1)}$.

Zastosować całki określone do paraboli $y=x^2$ i wykazać, że w granicach od $x_1=0$ do $x_2=x$ otrzymujemy:

40) $A=\frac{x^3}{3}$, 41) $S=\frac{x\sqrt{1+4x^2}}{2}+\frac{1}{4}\log(2x+\sqrt{1+4x^2})$, 42) $V_{0\ldots x}=\frac{\pi x^5}{5}$,

43) $V_{0\ldots y}=\frac{\pi y^2}{2}$, 44) $F=\frac{\pi}{8}\left\{(8x^3+x)\sqrt{1+4x^2}-\frac{1}{2}\log(2x+\sqrt{1+4x^2})\right\}$,

45) $M_s=\frac{1}{16}\left\{x(1+8x^2)\sqrt{1+4x^2}-\frac{1}{2}\log(2x+\sqrt{1+4x^2})\right\}$,

46) $M_a=\frac{x^5}{10}$, 47) $I_s=\frac{1}{6\,.\,4^6}(u^6+u^{-6})+\frac{5}{2\,.\,4^6}(u^4+u^{-4})-\frac{49}{2\,.\,4^6}(u^2+u^{-2})+\frac{19}{4}\log u$,

gdzie $u=2x+\sqrt{1+4x^2}$;

48) $I_a=\frac{x}{4}\,.\,\frac{y^3}{7}$; 49) $\eta_a=\frac{3}{10}x^2=\frac{3}{10}y$.

Wykazać, że w przypadku hyperboli równobocznej $xy=1$ w granicach (x_1, x_2) otrzymamy:

50) $A=\log\frac{x_2}{x_1}$; $V=\pi(y_1-y_2)$. 51) $M_a=\frac{1}{2}(y_1-y_2)$; $I_a=\frac{1}{3}(y_1{}^2-y_2{}^2)$.

Przy pomocy całek określonych wyprowadzić następujące wzory elementarne:

52) Powierzchnia trójkąta $A=\frac{b\,.\,h}{2}$. 53) Powierzchnia trapezu $A=\frac{y_1+y_2}{2}h$.

54) Powierzchnia koła $A=r^2\pi$. 55) Obwód koła $O=2r\pi$.

56) Powierzchnia elipsy $A=ab\pi$. 57) Powierzchnia kuli $F=4r^2\pi$.

58) Objętość kuli $V=\frac{4}{3}r^3\pi$. 59) Pobocznica stożka $F=r\pi k$.

60) Pobocznica stożka ściętego $F=2r_m\pi\,.\,k$, gdzie $r_m=\frac{R+r}{2}$.

61) Objętość stożka $V=r^2\pi\,.\,\frac{h}{3}$. 62) Środek ciężkości trójkąta $\eta_a=\frac{h}{3}$.

63) Objętość stożka ściętego: $V=\frac{h}{3}(R^2+Rr+r^2)\pi$.

64) Moment statyczny trójkąta ze względu na podstawę: $M_a=\frac{ah}{2}\,.\,\frac{h}{3}=\frac{ah^2}{6}$.

65) Moment bezwładności trójkąta ze względu na podstawę: $I_a=\frac{ah^3}{12}$.

66) Wykazać, że środek ciężkości ćwierci ellipsy (a, b) ma spółrzędne:

$$\xi=\frac{4a}{3\pi},\qquad \eta=\frac{4b}{3\pi}.$$

67) Wykazać, że objętość bryły powstałej przez obrót hyperboli $xy=1$ około jej asymptoty w granicach od $x=1$ do $x=\infty$ ma wartość $V=\pi$.

68) Wykazać, że całkowita powierzchnia ograniczona krzywą o równaniu:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=1 \text{ ma wartość } A=\frac{3}{8}ab\pi.$$

69) Wyznaczyć powierzchnię zawartą między liniami krzywemi o równaniach:

$$y^2-4ax=0,\qquad x^2-4ay=0.$$

70) Wyznaczyć całkowitą powierzchnię ograniczoną krzywą: $a^4y^2+b^2x^4=a^2b^2x^2$.

71) Wyznaczyć całkowitą powierzchnię ograniczoną krzywą o równaniu biegunowemi: $r=a(\cos 2\varphi+\sin 2\varphi)$.

72) Wykazać, że łuk krzywej o równaniu: $x^4+6a^2x^2-8a^3y=0$ mierzony od początku układu ma długość: $s=\frac{x}{8a^3}(x^2+4a^2)^{3/2}$.

73) Wyznaczyć objętość bryły powstałej przez obrót krzywej: $y^2(x-4a)=ax(x-3a)$ około osi x-ów w granicach od $x_1=0$ do $x_2=3a$.

74) Wyznaczyć objętość bryły powstałej przez obrót krzywej $(y^2-b^2)^2=a^3x$ około osi y-ów.

75) Wyznaczyć objętość bryły powstałej przez obrót trójkąta prostokątnego o przyprostokątniach a i b około jego przeciwprostokątni.

76) Wykazać, że objętość bryły powstałej przez obrót odcinka kołowego około średnicy równoległej do jego cięciwy $2y$ jest równy objętości kuli o promieniu y.

77) Wyznaczyć powierzchnię F i objętość V pierścienia (annuloidu) powstałego przez obrót koła o promieniu a około prostej, której odległość od środka równa b jest większa od a.

78) Jak wielkim jest moment bezwładności prostej AB o długości l:

α) względem jej punktu początkowego A,

β) względem punktu leżącego na jej przedłużeniu w odległości a,

γ) względem punktu P, którego rzut P' na prostą leży na przedłużeniu prostej l **dległości** a, a odległość od prostej równa b.

79) **Wyznaczyć** potencyał prostej l ze względu na punkt P, w przypadkach β) i γ) **ag.** 78 podanych.

80) **Wyznaczyć** wielkość przyciągania wywieranego przez prostą l na punkt w przy**kach** β) i γ) w zag. 78 podanych.

Zbadać krzywą określoną równaniami: $x = t^2$, $y = t - \frac{1}{3} t^3$ i wykazać, że w grani**h od** $x_1 = 0$ do $x_2 = 3$, otrzymujemy:

$A = \frac{4}{5} \sqrt{3}$, 82) $s = 2\sqrt{3}$, 83) $\xi_a = \frac{9}{7}$, $\eta_a = \frac{5}{32}\sqrt{3}$ 84) $\xi_s = \frac{7}{5}$, $\eta_s = \frac{1}{4}\sqrt{3}$

$V_x = \frac{3}{4}\pi$. 86) $F_x = 3\pi$. 87) $V_y = \frac{72}{35}\sqrt{3}\,.\,\pi$. 88) $F_y = \frac{28}{5}\sqrt{3}\,.\,\pi$.

R o z w i ą z a n i a XLI. 4) $\frac{1}{2} a x^2$. 5) $\frac{b}{2a} x(2a-x)$. 6) $\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}$.

$\frac{a^2}{2} \arccos \frac{a-x}{a} - \frac{1}{2}(a-x)\sqrt{x(2a-x)}$. 8) $\frac{2}{3} a \sqrt{ax}$. 9) $e^x - 1$.

$A_{\dots x} = \frac{a^2}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = a\sqrt{y^2-a^2}$. 16) $V_{x_1 \dots x_2} = \pi \left\{a^2(x_2-x_1) - \frac{x_2^3 - x_1^3}{3}\right\}$.

$F_{x_1 \dots x_2} = 2a\pi(x_2 - x_1)$. 21) $\pi \operatorname{tang} \alpha . \sec \alpha . (x_2^2 - x_1^2)$. 26) $\frac{xy^3}{12}$. 69) $\frac{16}{3} a^2$.

$\frac{4}{3} ab$. 71) $a^2\pi$. 73) $\frac{a^3\pi}{2}(15 - 16 \log 2)$. 74) $\frac{256}{315} \frac{b^9\pi}{a^6}$. 75) $\frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{\pi}{3}$.

$F = 4\pi^2 ab$, $V = 2\pi^2 a^2 b$. 78) α) $\frac{l^3}{3}$, β) $\frac{l(3a^2+3al+l^2)}{3}$, γ) $\frac{l[3(a^2+b^2)+3al+l^2]}{3}$.

$\log\left(1+\frac{l}{a}\right)$, $\log \frac{a+l+\sqrt{(a+l)^2+b^2}}{a+\sqrt{a^2+b^2}}$. 80) $\frac{1}{a} - \frac{1}{a+l}$, $\frac{1}{b}\left(\operatorname{arctang} \frac{a+l}{b} - \operatorname{arctang} \frac{a}{b}\right)$.

Literatura. Fr. A u t e n h e i m e r. Elementarbuch der Differential- und Integralrech**g** mit zahlreichen Anwendungen aus der Analysis, Geometrie, Mechanik und Physik. **uflage.** Leipzig 1901. Dr. A r w e d F u h r m a n n: Naturwissenschaftliche Anwendungen Integralrechnung. Berlin 1890.

Tematy do rozprawek naukowych:

1. Ellipsa i całki określone z nią związane.
2. Hyperbola z uwzględnieniem całek określonych z nią połączonych.
3. Zastosowanie całek określonych do paraboli.

Wykład XLII.

Przykłady krzywych płaskich algebraicznych.

1. Ogólne uwagi o równaniach krzywych płaskich. Równanie między dwiema zmiennemi spółrzędnemi x, y w postaci $F(x, y)=0$ lub $y=f(x)$ przedstawia linię krzywą na płaszczyźnie XOY. Najprostsze spółrzędne są prostokątne. Zamiast nich dadzą się wyprowadzić za pomocą stosownych przekształceń i inne spółrzędne, jak ukośnokątne, biegunowe i t. d. Tym sposobem otrzymamy dla tej samej krzywej rozmaite równania, każde o dwu zmiennych. Możemy także jedną z dwu spółrzędnych przyjąć jako dowolną funkcyę trzeciej zmiennej t, uważanej jako zmienny parametr, np. $x=\varphi(t)$, wtedy druga zmienna y będzie nową zmienną parametru t, np. $y=\psi(t)$. Krzywa przedstawia się wtedy dwoma równaniami parametrowemi w postaci:

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \tag{1}$$

z których, po wyrugowaniu parametru t, otrzymujemy jedno równanie między x i y jako równanie pewnej linii krzywej.

2. Krzywe algebraiczne i przestępne. Stosownie do rodzaju równań w spółrzędnych prostokątnych punktu, dzielimy krzywe na k r z y w e a l g e b r a i c z n e i k r z y w e p r z e s t ę p n e.

Krzywe algebraiczne dzielimy podług stopni równań na krzywe pierwszego, drugiego, trzeciego,..., n-go rzędu. Rząd krzywej wyznacza się geometrycznie największą ilością punktów, w których krzywa przez dowolną prostą przeciętą być może. Krzywą pierwszego rzędu o równaniu ogólnem: $Ax+By+C=0$ jest linia prosta. Krzywemi drugiego rzędu o równaniu ogólnem: $a_{11}x^2+a_{11}y^2+2a_{12}xy+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$ są przecięcia stożkowe: ellipsa, hyperbola, parabola i ich odmiany. Krzywa n-go rzędu ma w swem równaniu ogólnem: $\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}$ spółczynników i jest ogólnie wyznaczana: $\frac{n(n+3)}{2}$ punktami płaszczyzny. Krzywą przestępną przecina linia prosta w nieskończenie wielu punktach rzeczywistych lub urojonych.

3. Wyprowadzanie równania linii krzywej z danej własności jej punktów. Mając daną własność linii krzywej, dotyczącą ruchu jej punktu, możemy wyprowadzić równanie tej linii krzywej. W tym celu należy przyjąć dowolny układ osi a daną własność przyoblec w równanie między spółrzędnemi jej punktów. Otrzymane równanie może znowu posłużyć do badania kształtu tej krzywej i do wyprowadzenia nowych jej własności.

W niniejszym wykładzie zajmiemy się niektóremi liniami krzywemi, •e uzyskały pewne znaczenie historyczne i z tego powodu także szcze- ıe nazwy.

4. **Cissoida Dioklesa.** Jeżeli w jednym końcu B średnicy $AB=2a$ danego ı wykreślimy styczną, a z drugiego jej końca A poprowadzimy w dowol- a kierunku promień AD, który przetnie dane koło w punkcie C, a wy- łloną styczną w punkcie D i odetniemy na tym promieniu długość: $|=CD$, natenczas punkta M utworzą krzywą zwaną cissoidą Dioklesa okles, geometra grecki 200 lat p. Chr., używał jej przy rozwiązywaniu adnienia o podwojeniu sześcianu). Jej równanie znajdziemy z warunku

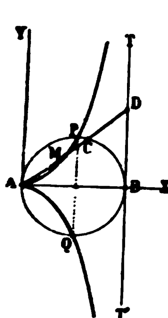


Fig. 111.

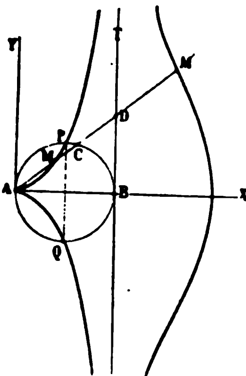


Fig. 112.

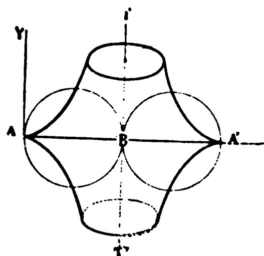


Fig. 113.

$M=CD$ (fig. 111), wprowadzając weń spółrzędne punktu bieżącego M. Wpro- dzając spółrzędne biegunowe r i φ, otrzymamy przy biegunie A i osi bie- nowej AB równości:

$$AM=r, \quad CD=AD-AC=\frac{2a}{\cos\varphi}-2a\cos\varphi=\frac{2a\sin^2\varphi}{\cos\varphi},$$

tem równanie biegunowe cissoidy w postaci:

$$r=\frac{2a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}. \tag{2}$$

Z równania tego otrzymamy równanie cissoidy w spółrzędnych prosto- tnych, kładąc $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ w postaci:

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{2ay^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}, \quad \text{czyli } x^3+xy^2-2ay^2=0. \tag{3}$$

Cissoida należy zatem do krzywych algebraicznych trzeciego rzędu. zedstawiwszy jej równanie w postaci:

$$y^2=\frac{x^3}{2a-x}, \tag{3'}$$

znajemy bezpośrednio, że cissoida ma w punkcie A punkt zwrotu, a sty- na do koła w punkcie B wykreślona jest jej asymptotą.

5. Biorąc pod uwagę, jak to czyniono w starożytności tylko oba te kawałki ków cissoidy AP i AQ, które się mieszczą wewnątrz koła ograniczone od- łnym łukiem kołowym PBQ, (fig. 111) otrzymuje się postać, przypomi- jącą liść bluszczu (ἡ κίσσος), stąd też pochodzi nazwa cissoida.

6. Odcinając na każdym promieniu OM, przecinającym styczną do koła dstawowego w punkcie D, długość $DM'=DM$ (fig. 112) otrzymamy nową ywą (fig. 112) o równaniu biegunowem:

$$r=\frac{2a}{\cos\varphi}+2a\cos\varphi=\frac{2a(1+\cos^2\varphi)}{\cos\varphi},$$

czyli:
$$r=\frac{2a(1+\cos^2\varphi)}{\cos\varphi},$$

z którego dostajemy równanie w spółrzędnych prostokątnych w po $y^2(2a-x)=x^2(x-4a)$; krzywa ta jest także trzeciego rzędu i nazyw sprzężoną cissoidy (fig. 112).

7. Powierzchnia A zawarta między cissoidą a jej asymptotą (fig. określona jest wzorem:

$$A=2\int_0^{2a} y\,dx,$$

a że w cissoidzie:

$$x=2a\sin^2\varphi,\quad y=\frac{2a\sin^3\varphi}{\cos\varphi},\quad y\,dx=8a^2\sin^4\varphi\,d\varphi,$$

a więc: $$\int_0^{2a} y\,dx=8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi\,d\varphi=8a^2.\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{\pi}{2}=\frac{24}{16}a^2\pi=\frac{3}{2}a^2\pi,$$

przeto $A=3a^2\pi$, t. j. trzy razy tak wielka jak powierzchnia danego k

8. Objętość V bryły powstałej przez obrót cissoidy około jej asym (fig. 113) określa wzór:

$$V=2\pi\int_0^\infty (2a-x)^2\,dy,$$

a że w cisssoidzie:

$$2a-x=2a\cos^2\varphi,\qquad dy=2a\frac{3\sin^2\varphi\cos^2\varphi+\sin^4\varphi}{\cos^2\varphi}d\varphi,$$

$$(2a-x)^2\,dy=8a^3(3\sin^2\varphi\cos^2\varphi+\sin^4\varphi)\cos^2\varphi\,d\varphi,$$

a więc: $$\int_0^\infty (2a-x)^2\,dy=8a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\sin^2\varphi-5\sin^4\varphi+2\sin^6\varphi)\,d\varphi=$$

$$=8a^3\left[3\frac{1}{2}-5.\frac{1}{2}.\frac{3}{4}+2.\frac{1.3.5}{2.4.6}\right]\frac{\pi}{2}=8a^3.\frac{1}{4}.\frac{\pi}{2}=a^3\pi,$$

przeto: $$V=2\pi.a^3\pi=2a^3\pi^2.$$

Przedstawiając znaleziony wzór w postaci:

$$V=a^2\pi.2a\pi,$$

widzimy, że objętość bryły powstałej przez obrót cissoidy około jej a toty jest równa objętości pierścienia powstałego przez takiż obrót d koła około tejże asymptoty.

9. **Parabola Neila.** Kształtem przypominającym cissoidę jest k określona równaniem: $y^2=x^3$, zwana parabolą Neila (fig. 114). M w punkcie początkowym punkt zwrotu, a jej asymptota leży w ni czoności prostopadle do osi x-ów. Powierzchnia w granicach od $x=$ ma wartość:

$$A=\int_0^x x^{3/2}\,dx=\frac{2}{5}x^{5/2}=\frac{2}{5}x.y,$$

gdzie x i y są spółrzędnemi punktu końcowego krzywej.

Łuk krzywej ma w tych granicach wartość:

$$s=\int_0^x\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{8}{27}\left[\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}-1\right],$$

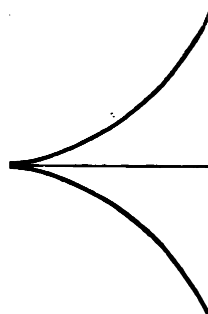


Fig. 114.

a objętość bryły powstałej przez obrót paraboli Neila około osi x-ów ma znowu w tych granicach wartość:

$$V=\pi\int_0^x x^3\,dx=\frac{\pi x^4}{4}=\frac{1}{4}x.y^2\pi,$$

jest więc czwartą częścią objętości walca o tej samej podstawie i wysokości.

10. Strofoida. Jeżeli przez punkt A na przedłużeniu ramienia OX kąta prostego YOX poprowadzimy dowolnie promień AC, który przetnie drugie ramię w punkcie C i odetniemy $CM=CM'=CO$, natenczas punkty M i M' utworzą krzywą, zwaną strofoidą. Przyjmując ramiona kąta prostego za osie układu i kładąc $OA=a$, $OC=\delta$, otrzymamy na podstawie warunku: $CM=OC$ (fig. 115) równanie:

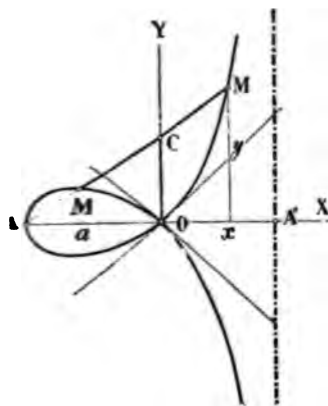


Fig. 115.

$$\sqrt{x^2+(y-\delta)^2}=\delta,$$

czyli:
$$x^2+y^2-2\delta y=0,$$

a że: $\frac{\delta}{a}=\frac{y}{x+a}$, a więc: $\delta=\frac{ay}{x+a}$,

przeto równanie powyższe przyjmuje kształt:

$$x^2+y^2-\frac{2ay^2}{x+a}=0,$$

czyli:
$$x(x^2+y^2)+a(x^2-y^2)=0. \qquad (5)$$

Strofoida należy więc także do krzywych trzeciego rzędu. Przedstawiwszy powyższe równanie w postaci:

$$y^2=\frac{x^2(a+x)}{a-x},$$

mamy wprost, że krzywa rozciąga się symetrycznie względem osi x-ów w granicach od $x=-a$ do $x=+a$, mając w prostej $x=a$ asymptotę prostopadłą do osi x-ów.

Kładąc $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, otrzymujemy:

$$r^3(\cos^3\varphi+\cos\varphi\sin^2\varphi)+2ax^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)=0,$$

li:
$$r\cos\varphi=-a\cos 2\varphi,$$

em:
$$r=-a\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}, \qquad (6)$$

o równanie biegunowe strofoidy.

Z równania tego wynika bezpośrednio, że styczne w punkcie węzłom O stoją do siebie prostopadle, tworząc dwusieczne układu osi.

11. Liść Descartesa. Kształtem zbliżony do strofoidy jest liść Descarsa, t. j. krzywa o równaniu: $x^3+y^3=3axy$. Krzywa ma w punkcie początkowym węzeł, którego styczne wpadają w osie układu, jest symetryczną względem dwójsiecznej kąta układu XOY, składa się z liścia o długości

równej $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$, a jej gałęzie nieskończone zbliżają się asymptotycznie do prostej $x+y+a=0$ (fig. 116).

Fig. 116.

Kładąc $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, otrzymujemy równanie biegunowe krzywej w postaci:

$$r=\frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}. \qquad (7)$$

Na podstawie tego równania otrzymamy powierzchnię liścia, określoną wzorem:

$$A=\frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}d\varphi.$$

Kładąc $\operatorname{tang}\varphi=u$, a więc $\sin\varphi=\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}$, $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}$, $d\varphi=\frac{du}{1+u^2}$, otrzymamy:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi\sin^2\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}d\varphi=\int_0^{\infty}\frac{u^2du}{(u^3+1)^2}=-\frac{1}{3}\Big|_0^{\infty}\frac{1}{u^3+1}=\frac{1}{3},\quad \text{zatem:}\quad A=\frac{3}{2}a^2.$$

Taką samą wielkość ma powierzchnia zawarta między obu gałęziami nieskończonemi a asymptotą liścia Descartesa.

12. Konchoida Nikomedesa. Jeżeli z danego punktu A wyprowadzimy dowolny promień AB, który przetnie daną prostą MN w punkcie B i odetniemy na nim po obu stronach punktu B stałą długość $BM=BM'=a$, natenczas punkta M i M' utworzą krzywą, zwaną k o n c h o i d ą N i k o m e d e s a. Przyjmijmy daną prostą za oś y-ów (fig. 117), a prostopadłą AO za oś x-ów,

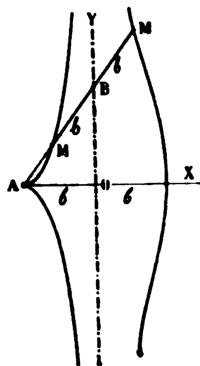


Fig. 117.

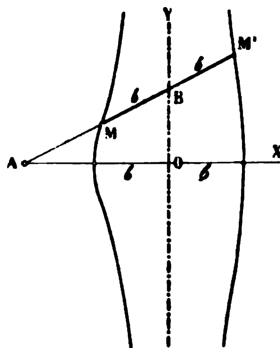


Fig. 118.

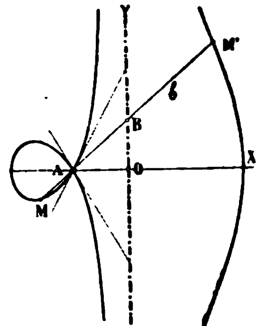


Fig. 119.

a punkt O za początek układu, natenczas, kładąc $OA=b$, $OB=\delta$, otrzymamy:

$$BM=\sqrt{x^2+(y-\delta)^2},\quad \text{zatem równanie:}\quad x^2+(y-\delta)^2=a^2,\quad \text{gdzie:}\quad \frac{\delta}{b}=\frac{y}{b+x},$$

czyli: $\delta=\frac{by}{b+x}$; wstawiwszy tą wartość w powyższe równanie warunkowe otrzymamy:

$$x^2+\left(y-\frac{by}{b+x}\right)^2=a^2, \text{ czyli: } x^2+\frac{x^2y^2}{(b+x)^2}=a^2, \text{ a stąd } x^2y^2=(a^2-x^2)(b+x),^2$$

ako równanie szukanej krzywej. Konchoida Nikomedesa należy do krzywych czwartego rzędu. Z powyższego równania otrzymamy:

$$y^2=\frac{(a^2-x^2)(b+x)^2}{x}, \text{ czyli: } y=\frac{b+x}{x}\sqrt{a^2-x^2}. \tag{8}$$

Krzywa mieści się między dwiema równoległemi do osi y-ów przecinającemi oś x-ów w punktach $-a$ i $+a$, posiada asymptotę w osi y-ów i ma jeden z trzech kształtów następujących:

1) $a=b$ konchoida zwyczajna (fig. 117);
2) $a<b$ konchoida skrócona (fig. 118);
3) $a>b$ konchoida wydłużona (fig. 119).

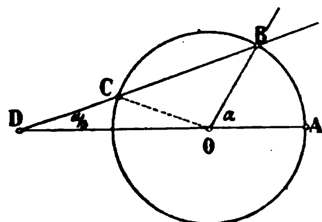


Fig. 120.

Konchoidy Nikomedesa używano do podziału kąta na trzy równe części.

Mając mianowicie podzielić kąt $AOB=a$ na trzy równe części należy przez punkt B na kole AOB poprowadzić tak prostą BD, aby odcinek DC był równy promieniowi koła, wówczas kąt $ADB=\frac{1}{3}AOB$ (fig. 120). Punkt C jest tedy punktem przecięcia choidy Nikomedesa z kołem.

13. Konchoida Pascala. Jeżeli z punktu A danego koła o średnicy $2a$ wyprowadzimy dowolną prostą AB, która przetnie koło w punkcie B, i odetniemy na niej stałą długość $BM=b$, natenczas punkta M utworzą krzywą, zwaną konchoidą kołową, albo też ślimakiem Pascala.

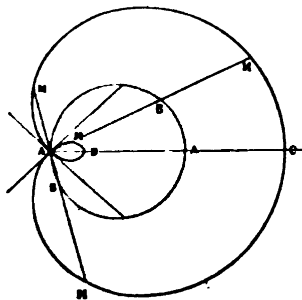
Przyjmijmy dany punkt A za biegun, a prostą AX za oś biegunową, natenczas punkt M będzie miał spółrzędne $AM=r$, $\measuredangle MAX=\varphi$ (fig. 121). Otrzymamy wtedy: $BM=AM-AB=r-2a\cos\varphi$,
zatem równanie konchoidy Pascala w postaci $r-2a\cos\varphi=b$, czyli:

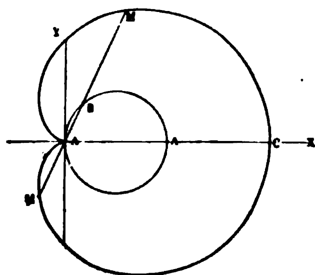
$$r=2a\cos\varphi+b. \tag{9}$$

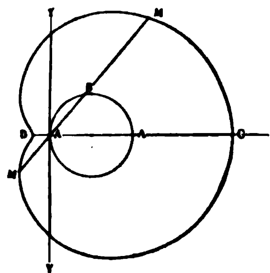
Kładąc $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, zatem $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

otrzymamy: $$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{2ax}{\sqrt{x^2+y^2}}+b, \text{ a więc } x^2+y^2=2ax+b\sqrt{x^2+y^2},$$

czyli: $$(x^2+y^2-2ax)^2=b(x^2+y^2), \tag{10}$$


Fig. 121.


Fig 122.


Fig. 123.

jako równanie konchoidy Pascala w spółrzędnych prostokątnych. Konchoida Pascala należy, jak widzimy, do krzywych rzędu czwartego.

Chcąc wykreślić tę krzywą, musimy odróżnić trzy przypadki:

1) $b < 2a$ (fig. 121) konchoida wydłużona; 2) $b = 2a$ (fig. 122) konchoida zwyczajna; 2) $b > 2a$ (fig. 123) konchoida skrócona.

W każdym z tych trzech przypadków jest krzywa symetryczna względem osi x-ów i jest w pierwszym przypadku owalem z jednej strony zgniecionym, w drugim ma kształt przekroju serca i nazywa się też kardioidą, w trzecim ma w wierzchołku A punkt węzłowy.

14. Kardioida. Szczególny przypadek konchoid Pascala, odpowiadający warunkowi $b = 2a$, tworzy kardioida (fig. 122), której równanie biegunowe przedstawia się w postaci: $r = 2a(1 + \cos\varphi)$.

Powierzchnia całkowita kardioidy ma wartość:

$$A = \int_0^\pi 4a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = 4a^2 . \frac{3\pi}{2}, \quad \text{czyli: } A = 6a^2\pi,$$

jest więc sześć razy tak wielką jak powierzchnia koła, użytego do konstrukcyi kardoidy.

15. Krzywe Cassinie'go. Krzywemi Cassinie'go nazywamy miejsce geometryczne punktów, których odległości od dwu stałych punktów dają stały iloczyn. Niech będą F_1 i F_2 (fig. 124) dwoma stałymi punktami, zwanemi ogniskami, w odległości $F_1F_2 = 2c$, a M dowolnym punktem szukanej krzywej, natenczas mamy warunek: $MF_1 . MF_2 = a^2$, czyli: $r_1 r_2 = a^2$, gdzie a^2 jest stałą liczbą dodatnią.

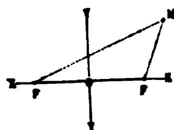


Fig. 124.

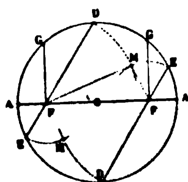


Fig. 125.

Z powyższego określenia krzywych Cassinie'go wypływa wprost sposób konstrukcyi dowolnego punktu szukanej krzywej, oparty na twierdzeniu planimetrycznem, że iloczyn odcinków każdej cięciwy, przechodzącej przez pewien punkt wewnątrz koła, jest ilością stałą równą kwadratowi połowy najkrótszej cięciwy przez tenże punkt przechodzącej. Wykreślmy zatem w F_1 prostą prostopadłą do F_1F_2 o długości $F_1G = a$ (fig. 125) i wykreślmy z punktu O jako ze środka koło o promieniu OG, a przez F_1 dowolną cięciwę DE, natenczas będzie: $F_1D . F_1E = F_1G^2 = a^2$. Odcinki F_1D i F_1E mogą więc być przyjęte jako promienie wodzące punktu M szukanej krzywej. Wykreślając zatem z punktu F_1, jako środka, łuk promieniem F_1D, a z punktu F_2 jako środka łuk promieniem F_2E, otrzymamy w punkcie przecięcia tych łuków punkt M szukanego miejsca geometrycznego o warunku $MF_1 . MF_2 = a^2$. Chcąc otrzymać równanie szukanej krzywej, przyjmijmy środek O odległości ogniskowej F_1F_2 za punkt początkowy układu, a prostą F_1F_2 za oś x-ów (fig. 114), natenczas otrzymamy:

$$MF_1 = \sqrt{y^2 + (x+c)^2}, \quad MF_2 = \sqrt{y^2 + (x-c)^2}$$

a więc równanie: $$[y^2 + (x+c)^2] . [y^2 + (x-c)]^2 = a^4, \tag{11}$$

jako równanie krzywej Cassiniego Krzywe te są, jak widzimy, krzywemi czwartego rzędu, a ich kształt zależy od stałych a i c. Z powyższego równania otrzymujemy następujące:

$$(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 = a^4, \text{ a stąd równanie: } y^2 = -(x^2 + c^2) \mp \sqrt{a^4 + 4c^2x^2}, \tag{12}$$

które dowodzi, że krzywe Cassinie'go są symetrycznemi względem osi x-ów. Każdej wartości na x odpowiadają dwie wartości na y, równe a przeciwnego znaku, które są jednak rzeczywiste tylko wówczas, gdy:

$$\sqrt{a^4+4c^2x^2} > x^2+c^2, \text{ a więc gdy } a^4+4x^2c^2 > (x^2+c^2)^2,$$

$$\text{czyli, gdy } x^4-2c^2x^2+c^4 < a^4, \text{ a więc gdy } (x^2-c^2)^2 < a^4.$$

Krzywa Cassiniego przecina więc oś x-ów, gdy będzie $(x^2+c^2)^2=a^4$, czyli $x^2-c^2=\pm a^2$, a więc gdy będzie $x^2=c^2+a^2$, jako też gdy będzie $x^2=c^2-a^2$, zatem w czterech punktach $x_{1,2}=\pm\sqrt{c^2+a^2}$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{c^2-a^2}$. Dwa z tych punktów określone wzorem $x=\pm\sqrt{c^2+a^2}$ są zawsze rzeczywiste; krzywe Cassiniego są więc zawarte wewnątrz koła o promieniu $\sqrt{a^2+c^2}$. Drugie dwa punkta określone wzorem: $x=\pm\sqrt{c^2-a^2}$ są rzeczywiste i różne, gdy $a<c$; rzeczywiste i w jeden punkt wpadające, gdy $a=c$; urojone zaś, gdy $a>c$. Istnieją zatem trzy główne postacie krzywych Cassini'ego:

1) $a<c$ Dwuowal Cassini'ego (fig. 126);
2) $a=c$ Lemniskata Cassini'ego (fig. 127);
3) $a>c$ Pojedyńczy owal Cassini'ego (fig. 128).

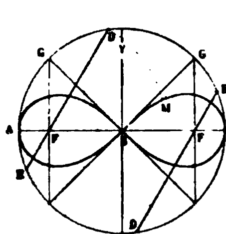


Fig. 127.

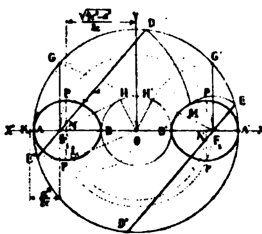


Fig. 126.

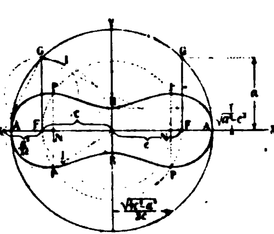


Fig. 128.

16. Celem zbadania kształtu pojedyńczego owalu wyznaczmy jego najwyższe i najniższe punkta. W tym celu otrzymamy z równania:

$$y^2=-(x^2+c^2)+\sqrt{a^4+4c^2x^2}$$

różniczkę:
$$2y\,dy=\left[-2x+\frac{1}{2}\left(a^4+4c^2x^2\right)^{-\frac{1}{2}}8c^2x\right]dx,$$

a stąd pochodną:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y}\left[-x+\frac{2c^2x}{\sqrt{a^4+4c^2x^2}}\right]=\frac{2c^2x-x\sqrt{a^4+4c^2x^2}}{y\sqrt{a^4+4c^2x^2}},$$

która staje się równa zeru, gdy:

$$2c^2x-x\sqrt{a^4+4c^2x^2}=0, \text{ czyli gdy } x[2c^2-\sqrt{a^4+4c^2x^2}]=0,$$

a więc zarówno gdy:

$$\alpha)\ x=0, \text{ jako też gdy: } \beta)\ \sqrt{a^4+4c^2x^2}=2c^2, \text{ czyli } a^4+4c^2x^2=4c^4,$$

a więc gdy: $x^2=\dfrac{4c^4-a^4}{4c^2}$, zatem: $x=\pm\dfrac{\sqrt{4c^4-a^4}}{2c}$.

Pojedyńczy owal Cassini'ego ma więc styczne równoległe do osi x-ów w trzech punktach, odpowiadających odciętym:

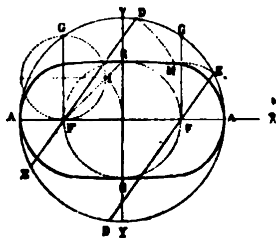
1) $x_1=0$, 2) $x_2=+\frac{\sqrt{4c^4-a^4}}{2c}$, 3) $x_3=-\frac{\sqrt{4c^4-a^4}}{2c}$.

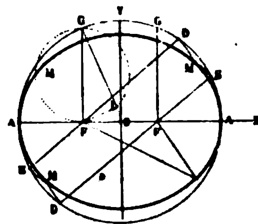
Ostatnie dwa punkta są rzeczywiste tylko wówczas, skoro $a^4<4c^4$, czyli skoro $a^2<2c^2$, a więc skoro $a<c\sqrt{2}$. Mamy więc trzy rodzaje pojedyńczego owalu, zwanego niekiedy ellipsą Cassiniego:

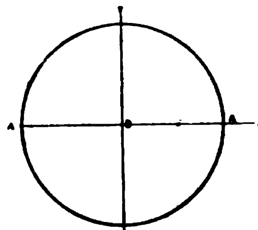
1) Owal wklęsły $c<a<c\sqrt{2}$ (fig. 128);

2) Owal płaski $c<a=c\sqrt{2}$ (fig. 129);

3) Owal wypukły $a>c\sqrt{2}$ (fig. 130).


Fig. 129.


Fig. 130.


Fig. 131.

Do owalów wypukłych należy też koło (fig. 131), któremu odpowiada $c=0$, a równanie $x^2+y^2=a^2$.

17. Wprowadziwszy spółrzędne biegunowe r i φ i przyjąwszy biegun w środku O ogniskowej F_1F_2, otrzymamy z równania krzywych Cassiniego, przedstawiającego się w postaci: $(x^2+y^2+c^2)^2=a^4+4c^2x^2$ następujące:

$$(r^2+c^2)^2=a^4+4c^2r^2\cos^2\varphi,$$

czyli:

$$r^4+2r^2c^2(1-2\cos^2\varphi)=a^4-c^4,$$

a stąd:

$$r^4-2r^2c^2\cos 2\varphi=a^4-c^4,$$

zatem:

$$r^2=c^2\cos 2\varphi\pm\sqrt{a^4-c^4\sin^2 2\varphi}$$

jako równanie biegunowe krzywych Cassini'ego.

18. Lemniskata. Szczególny przypadek krzywych Cassiniego tworzy krzywa, dla której $c=a$, zwana Lemniskatą (fig. 127).

Jej równanie w spółrzędnych prostokątnych otrzymuje na podstawie równania (11) kształt:

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0, \qquad (13)$$

skąd otrzymujemy jej równanie biegunowe w postaci:

$$r^2=2a^2\cos 2\varphi. \qquad (14)$$

Powierzchnia wycinka jej owalu otrzymuje wartość:

$$A_{0\dots\varphi}=\frac{1}{2}\int_0^\varphi r^2\,d\varphi=a^2\int_0^\varphi \cos 2\varphi\,d\varphi=\frac{a^2}{2}\sin 2\varphi, \quad \text{zatem: } A_{0\dots\frac{\pi}{4}}=\frac{a^2}{2},$$

a więc całkowita powierzchnia owalu jednego: $A=a^2$.

19. Róża czterolistna. Po ramionach kąta prostego YOX poruszają się końce prostej AB, mającej stałą długość $2a$. Wykreśliwszy z wierzchołka O prostą OM prostopadłą do prostej ruchomej AB, otrzymamy jako miejsce

geometryczne punktu M (fig. 132) krzywą, którą nazywamy **różą czterolistną** (fig. 133).

Przyjmując punkt O za biegun, a ramię OX za biegunową i oznaczając przez r i φ spółrzędne biegunowe punktu M, otrzymamy na podstawie równości: $OM=OA\cos\varphi$, $OA=AB\sin\varphi=2a\sin\varphi$,

równanie: $r=2a\sin\varphi\cos\varphi$,

czyli: $r=a\sin 2\varphi$, jako równanie biegunowe szukanej krzywej, zwanej różą czterolistną, albo także **korollą**. Z równania powyższego wynika bezpośrednio kształt krzywej (fig. 133). Krzywa składa się z czterech liści o długości a, stycznych do ramion kąta prostego. Przyjmując ramiona kąta prostego za osie układu prostokątnego, otrzymamy z równania biegunowego równanie:

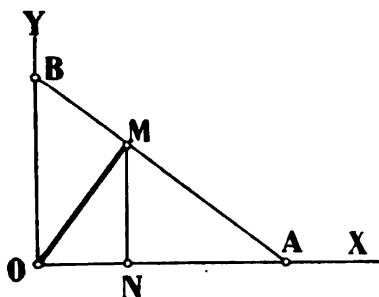


Fig. 132.

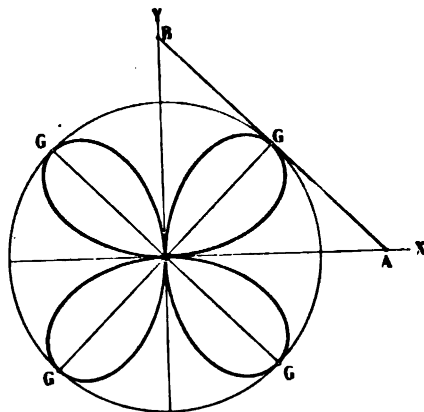


Fig. 133.

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{2axy}{x^2+y^2},\quad \text{czyli: } (x^2+y^2)^3=4a^2x^2y^2, \tag{15}$$

jako równanie krzywej w spółrzędnych prostokątnych.

Róża czterolistna jest więc krzywą algebraiczną szóstego rzędu i posiada w punkcie O punkt czterokrotny.

17. Astroida. Prosta $AB=O$ poruszająca się swymi końcami po ramionach kąta prostego YOX obwija krzywą, zwaną **astroidą**. Oznaczając odcinek OA wyznaczony na osi x-ów przez c, otrzymamy odcinek $OB=\sqrt{a^2-c^2}$, (fig. 132) zatem równanie prostej ruchomej w postaci:

$$\frac{x}{c}+\frac{y}{\sqrt{a^2-c^2}}=1.$$

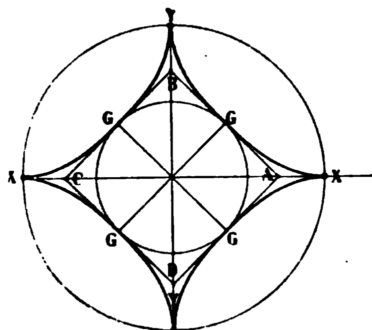


Fig. 134.

Różniczkując to równanie względem zmiennego parametru c, otrzymamy:

$$-\frac{x}{c^2}+\frac{cy}{(a^2-c^2)^{3/2}}=0, \text{ stąd równe stosunki:}$$

$$\frac{x}{c^3}=\frac{y}{(a^2-c^2)^{3/2}}=\frac{\frac{x}{c}+\frac{y}{\sqrt{a^2-c^2}}}{c^2+a^2-c^2}=\frac{1}{a^3},$$

z których wypada: $c^3=a^2x$; $(a^2-c^2)^{3/2}=a^2y$,

zatem: $c=a^{2/3}x^{1/3}$, $(a^2-c^2)^{1/2}=a^{2/3}y^{1/3}$.

Wstawiwszy te wartości w równanie prostej ruchomej, otrzymamy równanie:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{a}\right)^{2/3}=1, \tag{16}$$

jako równanie obwiedni danego układu prostych. Krzywa ta zwana astroidą jest symetryczną względem osi układu, posiada cztery punkta zwrotu i ma kształt przedstawiony na fig. 134. Równanie astroidy możemy zastąpić dwoma równaniami parametrowemi w postaci:

$$x=a\cos^3\varphi,\quad y=a\sin^3\varphi,$$

które możemy z korzyścią używać przy zastosowaniu całek określonych do astroidy.

Równanie astroidy sprowadzone do wymierności przedstawia się w postaci:

$$(x^2+y^2-a^2)^3+27a^2x^2y^2=0,$$

która dowodzi, że astroida jest krzywą algebraiczną szóstego rzędu.

Powierzchnię astroidy wyznacza wzór:

$$A=4\int_0^a y\,dx=4a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^3\varphi\,.\,3a\cos^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi=$$

$$=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4\varphi-\sin^6\varphi)\,d\varphi,$$

a że:
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi\,d\varphi=\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{\pi}{2},\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\varphi\,d\varphi=\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot\frac{\pi}{2},$$

przeto otrzymujemy: $A=12a^2.\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot\frac{\pi}{2}$, czyli: $A=\frac{3}{8}a^2\pi$.

Całkowita powierzchnia astroidy zajmuje zatem $\frac{3}{8}$ powierzchni koła na astroidzie opisanego.

Długość łuku astroidy określa wzór:

$$s=3a\int_0^{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi=\frac{3a}{2}\sin^2\varphi,$$

stąd wynika, że całkowity obwód astroidy:

$$S=\frac{4.3a}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi=\frac{4.3a}{2}=6a,$$

jest więc sześć razy tak wielki, jak promień koła opisanego na astroidzie.

Całkowita objętość bryły opisanej przez obrót astroidy około osi y-ów przedstawia się wzorem:

$$V=2.\pi\int_0^a x^2\,dy=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\cos^6\varphi\,.\,3a\sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi=$$

$$=6a^3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi=6a^3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^7\varphi-\cos^9\varphi)\,d\varphi,$$

a że:
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^7\varphi-\cos^9\varphi)\,d\varphi=\frac{2\,.\,4\,.\,6}{3\,.\,5\,.\,7}-\frac{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}{3\,.\,5\,.\,7\,.\,9}=\frac{2\,.\,4\,.\,6}{3\,.\,5\,.\,7\,.\,9},$$

rzymujemy przeto: $V=6a^2\pi.\frac{2.4.6}{3.5.7.9}=\frac{32}{105}a^3\pi$, czyli: $V=\frac{8}{35}.\frac{4}{3}a^3\pi$,

j. równa $\frac{8}{35}$ obiętości kuli o promieniu a.

Całkowita powierzchnia bryły powstałej przez obrót astroidy około osi w przedstawia się natomiast wzorem:

$$F=2.2\pi\int_0^a x\,ds=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos^3\varphi.3a\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi=12a^2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\sin\varphi\,d\varphi=$$

$$=12a^2\pi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{\cos^5\varphi}{5}\right)=\frac{12a^2\pi}{5},$$

zyli: $F=\frac{3}{5}.4a^2\pi$, jest więc równa $\frac{3}{5}$ powierzchni kuli o promieniu a.

21. Skarabea jako uogólnienie róży czterolistnej. Jeżeli prosta AB stałej długości $2a$ porusza się swemi końcami po dwu prostych prostopadłych OA i OB, a z punktu leżącego na dwusiecznej kąta prostego w odległości $OP=b$ wykreślimy prostopadłą PM do prostej ruchomej AB (fig. 135), natenczas punkta M utworzą krzywą, którą nazywamy skarabeą (chrabąszczem). Przyjąwszy punkt P za biegun, a dwusieczną OP za oś biegunową, otrzymujemy jako spółrzędne biegunowe punktu M: $MP=r$, $\sphericalangle MPX=\varphi$. Wykreśliwszy z punktu O prostą OC prostopadłą do AB, otrzymamy:

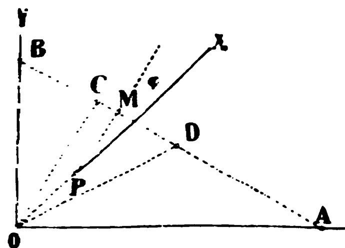


Fig. 135.

$$OC=OP.\cos\varphi+r=b\cos\varphi+r,$$

czyli: $$r=OC-b\cos\varphi.$$

Aby wyznaczyć długość OC połączmy rodek D prostej AB z punktem O, a otrzymamy:

$$DO=DB=DA=a,$$

$$\sphericalangle BOC=\sphericalangle DAO=\sphericalangle DOA=\frac{\pi}{4}-2\varphi,$$

a więc: $\sphericalangle COD=2\varphi$, zatem:

$$OC=OD.\cos 2\varphi=a\cos 2\varphi,$$

a więc: $r=a\cos 2\varphi-b\cos\varphi$,

jako równanie biegunowe szukanej krzywej (fig. 136).

Fig. 136.

Wprowadzając spółrzędne prostokątne, a więc kładąc:

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \cos\varphi=\frac{x}{r},$$

$$\cos 2\varphi=\frac{x^2-y^2}{r^2},$$

otrzymujemy:

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{a(x^2-y^2)}{x^2+y^2}-\frac{bx}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

więc: $$(x^2+y^2)^{1/2}(x^2+y^2+bx)=a(x^2+y^2),$$

zyli: $$(x^2+y^2)(x^2+y^2+bx)^2=a^2(x^2-y^2)^2, \qquad (17)$$

jako równanie krzywej w spółrzędnych prostokątnych. Skarabea jest więc krzywą algebraiczną rzędu szóstego. Jeżeli $b=0$, natenczas równanie biegunowe krzywej sprowadza się do postaci: $r=a\cos 2\varphi$, która przedstawia różę czterolistną jako szczególny przypadek skarabei.

22. Róże wielolistne. Dalszem uogólnieniem pojęcia róży czterolistnej są róże wielolistne, t. j. krzywe, określone równaniem biegunowem ogólnego typu:

$$r=a\sin n\varphi. \tag{18}$$

Krzywe tego rodzaju leżą wewnątrz koła o promieniu a, zwanego kołem podstawowem róży. Jeżeli n jest liczbą całkowitą, to krzywa składa się z $2n$ lub n liści oddzielnych, stosownie do tego, czy n jest liczbą parzystą, czy też nieparzystą; jeżeli n jest ułamkiem $\frac{p}{q}$, tedy liście krzywej nakrywają się nawzajem, tworząc niejako q warstw liściowych; warstw tych jest nieskończenie wiele, gdy spółczynnik n jest liczbą niewymierną. Wszystkie liście róży $r=a\sin n\varphi$ są symetryczne względem największego swego promienia równego a.

Powierzchnia każdego takiego liścia otrzymuje wartość:

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{n}} r^2 d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\sin^2 n\varphi\, d\varphi=\frac{a^2}{2n}\Big|_0^{\frac{\pi}{n}}\left(n\varphi-\frac{1}{2}\sin 2n\varphi\right)=\frac{a^2\pi}{4n},$$

czyli:

$$A=\frac{1}{n}\cdot\frac{a^2\pi}{4}.$$

Ćwiczenia XLII.

1) Znaleźć długość łuku cissoidy $x(x^2+y^2)-2ay^2=0$ w granicach od $x_1=0$ do $x_2=x$.

2) Wykazać, że różnica między całkowitą długością cissoidy a jej asymptotą jest skończoną, równą $2a\sqrt{3}\,.\log(2+\sqrt{3})-4a$.

3) Wykazać, że powierzchnia zawarta między cissoidą $y^2(2a-x)-x^3=0$, osią x-ów i jej asymptotą: $A=\frac{3}{8}a^2\pi$.

4) Wykazać, że środek ciężkości pola zawartego między cissoidą a jej asymptotą dzieli odstęp między wierzchołkiem cissoidy a jej asymptotą w stosunku $5:1$.

5) Znaleźć objętość bryły powstałej przez obrót cissoidy około prostej przechodzącej przez wierzchołek cissoidy równolegle do jej asymptoty.

6) Wykazać, że łuk cissoidy $x=2a\sin^2\varphi$, $y=2a\sin^2\varphi\,\text{tang}\,\varphi$ ma w granicach od $\varphi_1=0$ do $\varphi_2=\varphi$ wartość:

$$s=2a\left\{\frac{\sqrt{1+3\cos^2\varphi}}{\cos\varphi}-3\log\left[\sqrt{3}\cos\varphi+\sqrt{1+3\cos^2\varphi}\right]-2+\sqrt{3}\log(2+\sqrt{3})\right\}.$$

7) Wykazać, że objętość bryły powstałej przez obrót cissoidy $x^3=y^2(2a-x)$ około osi x-ów ma w granicach od $x_1=0$ do $x_2=x$ wartość:

$$V=\pi\left\{8a^3\log\frac{2a}{2a-x}-4a^2x-ax^2-\frac{1}{3}x^3\right\}.$$

8) Wykazać, że objętość powstała przez obrót cissoidy $x^3=y^2(2a-x)$ około jej asymptoty ma w granicach od $x_1=0$ do $x_2=x$ wartość:

$$V=a^3\pi\arccos\frac{a-x}{a}-\frac{1}{3}\pi(3a^2-5ax+x^2)\sqrt{2ax-x^2}.$$

9) Wykazać, że powierzchnia bryły powstałej przez obrót cissoidy $y^2(2a-x)=x^3$ około osi x-ów ma w granicach od $x_1=0$ do $x_2=x$ wartość:

$$F=2a\pi\left\{\frac{x-4a}{x-2a}\sqrt{8ax-3x^2}+\frac{2a}{\sqrt{3}}\arccos\frac{3x-4a}{4a}-\frac{8a}{\sqrt{3}}\pi\right\}.$$

10) Wykazać, że całkowita objętość bryły powstałej przez obrót cissoidy około jej asymptoty ma wielkość: $V = 2\pi^2 a^3$.

11) Znaleźć podstyczną i podnormalną cissoidy $y^2(2a-x) = x^3$.

12) Wyznaczyć ewolutę cissoidy: $x(x^2+y^2)-2ay^2 = 0$.

Zbadać kształty krzywych:

13) $r = \frac{2a \sin^2 \varphi}{\cos(\varphi+\alpha)}$, czyli: $(x^2+y^2)(x \cos\alpha - y \sin\alpha) = 2ay^2$ (cissoida skośna);

14) $r = a \sin\varphi - \frac{c \sin^2 \varphi}{\cos\varphi}$, czyli: $x(x^2+y^2) = y(ax-cy)$, (ofiuryda czyli węży ogon).

15) Wyznaczyć łuk paraboli Neila $ay^2 = x^3$ w granicach od $x_1 = 0$ do $x_2 = x$.

16) Dane są dwie proste równoległe l i l', a na pierwszej z nich punkt A, wykreślmy poprzeczną AB i wyznaczmy na AB punkta styczności P_1 i P_2 kół, które są zarazem styczne do prostych l i l', wykazać, że punkta P_1 i P_2 tworzą strofoidę.

17) Obliczyć: α) powierzchnię zawartą między gałęziami strofoidy a jej asymptotą; β) powierzchnię owalu strofoidy.

18) Na osi YY' dane są dwa punkta $A(0, \beta)$, $A'(0, -\beta)$, a na osi XX' punkt $C(-\alpha, 0)$. Wykazać, że skoro przez punkt C przeprowadzimy styczne do kół przechodzących przez punkta A i A', natenczas punkta styczności P tworzą krzywą o równaniu:

$$x(x^2+y^2)+\beta(x^2-y^2)+\alpha^2(x+y) = 0,$$

zwaną panstrofoidą.

19) Zbadać kształty krzywej określonej zag. 18 dla różnych wartości stałych α i β.

20) Porównać kształty krzywych:

$$\alpha)\ y = x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}, \qquad \beta)\ y = x\sqrt{\frac{a+x}{a-3x}}.$$

21) Dany punkt O i prosta l. Poprowadźmy przez punkt O promień OM, który przetnie prostą l w punkcie M i odetnijmy na tym promieniu od punktu M począwszy taką odległość MP, aby było $OM \cdot MP = k^2$, znaleźć miejsce geometryczne punktu P.

22) Zbadać kształt krzywej zag. 21 określonej i wyprowadzić jej równanie w spółrzędnych prostokątnych.

23) Zbadać kształt krzywej określonej równaniem:

$$xy^2 = a(x+y)^2,$$

zwanej krzywą Rolle'go.

24) Zbadać krzywą o równaniach $x = a+b\cos\varphi$, $y = a \operatorname{tang}\varphi + b \sin\varphi$.

25) Wykazać, że powierzchnia konchoidy Nikomedesa: $r = a \sec\varphi + b$, ma w granicach od $\varphi_1 = 0$ do $\varphi_2 = \varphi$ wartość:

$$A = \frac{1}{2}\left\{a^2 \operatorname{tang}\varphi + 2ab \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right\} + b^2\varphi.$$

26) Wykazać, że objętość bryły powstałej przez obrót konchoidy $xy = (a+y)\sqrt{b^2-y^2}$ około osi x-ów w granicach od $x_1 = 0$ do $x_2 = x$ ma wartość:

$$V = \frac{ab^2\pi^2}{2} - ab^2\pi \arcsin\frac{y}{b} + \frac{\pi}{3}(b^2-y^2)^{1/2}(y^2+2b^2).$$

27) Wykazać, że całkowita powierzchnia liścia Descartesa: $x^3+y^3 = 3axy$ ma wartość: $A = \frac{3}{2}a^2$.

28) Wykazać, że całkowita powierzchnia kardioidy: $r = a(1+\cos\varphi)$ ma wartość: $A = \frac{3}{2}a\pi^2$.

29) Wykazać, że łuk kardioidy $r = a(1+\cos\varphi)$ w granicach od $\varphi_1 = 0$ do $\varphi_2 = \varphi$ ma wartość: $s = 4a \sin\frac{\varphi}{2}$.

30) Wykazać, że obwód kardioidy $r=a(1+\cos\varphi)$ jest równy $6a$.

31) Wykazać, że łuk kardioidy $r=a(1+\cos\varphi)$ ma w granicach od φ_1 do φ_2 wartość:

$$s=8a\left(\cos\frac{\varphi_1}{2}-\cos\frac{\varphi_2}{2}\right).$$

32) Wykazać, że łuk kardioidy w granicach od $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\frac{\pi}{2}$ ma wartość:

$$s=8a\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

33) Wykazać, że środek ciężkości połowy obwodu kardioidy: $r=a(1-\cos\varphi)$ ma spółrzędne:

$$\xi_s=-\frac{3}{5}a,\qquad \eta_s=\frac{8}{5}a.$$

34) Wykazać, że powierzchnia konchoidy o równaniu biegunowem: $r=a+\frac{b}{\cos\varphi}$ ma w granicach od φ_1 do φ_2 wartość:

$$A=\frac{1}{2}\Big|_{\varphi_2}^{\varphi_1}\left\{a^2\varphi+2ab\log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)+b^2\operatorname{tang}^2\varphi\right\}.$$

35) Wykazać, że powierzchnia zawarta między krzywą donny Agnesi: $xy=2a\sqrt{2ay-y^2}$ a jej asymptotą jest cztery razy tak wielką jak powierzchnia koła tworzącego.

36) Wykazać, że całkowita objętość bryły powstałej przez obrót krzywej Agnesi $xy=2a\sqrt{2ay-y^2}$ około jej asymptoty ma wartość $V=4\pi^2a^3$.

37) Wykazać, że w konchoidzie Pascala: $r=a\cos\varphi+b$, gdy $a>m$ powierzchnia wewnętrzna:

$$A=\frac{1}{2}\left\{(a^2+2b^2)(\pi-\alpha)-3b\sqrt{a^2-b^2}\right\},$$

a zewnętrzna:

$$A=\frac{1}{2}\left\{(a^2+2b^2)\alpha+3b\sqrt{a^2-b^2}\right\},\quad \text{gdzie } \alpha=\operatorname{arc}\cos\left(-\frac{b}{a}\right).$$

38) Wykazać, że powierzchnia wycinka lemniskaty: $r^2=a^2\cos 2\varphi$ ma wartość:

$$A=\frac{a^2}{4}(\sin 2\varphi_2-\sin 2\varphi_1).$$

39) Wykazać, że powierzchnia astroidy: $x=a\cos^3\varphi$, $y=a\sin^3\varphi$ ma w granicach od $x_1=0$ do $x_2=a$ wartość: $A=\frac{3}{22}a^2\pi$, a odpowiedni łuk astroidy: $s=\frac{3}{2}a$.

40) Wykazać, że objętość bryły powstałej przez obrót astroidy $x=a\cos^3\varphi$, $y=a\sin^3\varphi$ około osi x-ów ma w granicach od $x=0$ do $x=a$ wartość: $V=\frac{16}{105}a^3\pi$, a odpowiednia powierzchnia bryły: $F=\frac{6}{5}a^2\pi$.

41) Zbadać kształt krzywej określonej równaniami parametrowemi: $x=a\cos\varphi$, $y=\frac{a\sin^2\varphi}{2+\sin\varphi}$ i wyprowadzić jej równanie w spółrzędnych prostokątnych.

42) Dane koło o środku C i promieniu a i punkt O w odległości d od C; dowolny promień przez O poprowadzony przecina koło w dwu punktach M i N, jakie jest miejsce punktu P tegoż promienia, jeżeli $OP=MN$.

43) Oznaczając przez r_1 i r_2 odległości punktu M od dwu stałych punktów F_1 i F_2 znaleźć miejsce punktów, dla których suma $\alpha r_1+\beta r_2=a$ jest ilością stałą.

44) Wykreślić krzywą: $y=\sqrt{2a^2-x^2}+\sqrt{a^2-x^2}$ i obliczyć całkowitą powierzchnię jej owalów.

Zbadać krzywe określone następującemi równaniami parametrowemi i podać ich konstrukcyę i równania w spółrzędnych prostokątnych:

45) $x=a\cos\varphi$, $y=b\operatorname{cotg}\varphi$; 46) $x=a\sec\varphi$, $y=b\operatorname{cosec}\varphi$.

47) Dane są trzy punkta A, B, C znaleźć punkt P tak, aby $\sphericalangle APB=\sphericalangle APC$.

48) **Zbadać różne kształty krzywej określonej zag. 47.**

Zbadać kształty następujących krzywych:

49) $x = \frac{a\cos\varphi}{\cos\varphi \cdot \sin\varphi} + b\cos\varphi,\ y = b\sin\varphi$; 50) $r = \frac{a}{2}\sec\frac{\varphi}{2}$.

51) **Zbadać kształt i konstrukcyę krzywej, określonej równaniem biegunowem:**

$$r = a\cos 2\varphi - b\cos\varphi.$$

52) **Zbadać kształt i podać konstrukcyę krzywej** $r = a + 2a\sin\frac{\varphi}{2}$.

Rozwiązania XLII. 1) $s = a\int_0^x (2a-x)\sqrt{\frac{8a-3x}{2a-x}}\,dx$. 5) $V = 10\pi^2 a^3$.

$T' = \frac{x(2a-x)}{3a-x}$, $N' = \frac{x^2(3a-x)}{(2a-x)^2}$, 12) $27y^4 + 1152a^2y^2 + 4096a^3x = 0$. 13) fig. 137.

fig. 138. 16) fig. 139. 17) α) $2\int_0^a x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$, β) $2\int_{-a}^0 x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$. 18) fig. 142.

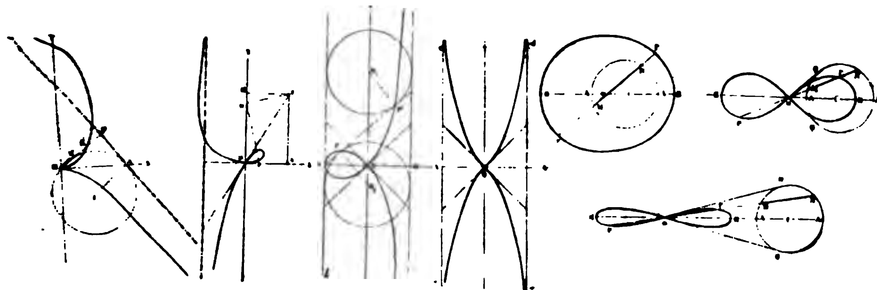


Fig. 137. Fig. 138. Fig. 139. Fig. 140. Fig. 141.

α) strofoida, β) liść Descartesa. 21) O biegun, $OX \perp l$ biegunowa, odległość O od l rna a (fig. 143), to $a(r\cos\varphi - a) = k^2\cos^2\varphi$, konchoida Sluze'go. $a(x-a)(x^2+y^2) = k^2x^2$. 24) konchoida Nikomedesa. $(x^2+2ay-a^2)^2 - y^2(a^2-x^2) = 0$ krzywa formy piroga (fig. 144). 42) $r = a\sqrt{a^2 - d^2\sin^2\varphi}$ iniskata Booth'a (fig. 141). 43) Owale Kartezyusza. 44) Liście Bernouille'go (fig. 145) $= a^2x$. 45) $\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1$ krzywa węgla (fig. 140). 46) $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1$ krzywa krzyża (fig. 146). 47) Kładąc $AB = a$, $AC = b$, $BAC = a$ $\measuredangle BAC = \alpha$ przyjmują proste AB i AB osie układu otrzymuje się : $(ay - bx)(x^2+y^2+2xy\cos\alpha) - ab(y^2 - x^2) = 0$.

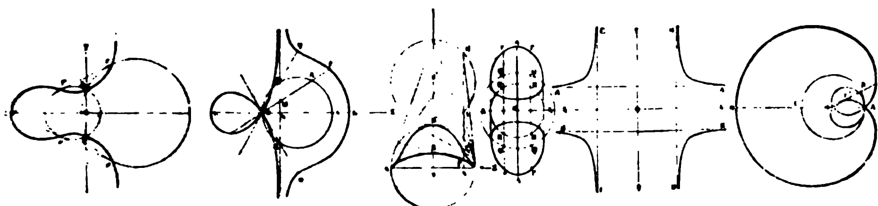


Fig 142. Fig. 143. Fig. 144. Fig. 145. Fig. 146. Fig. 147.

$(xy + b^2 - y^2)^2 = (x+y-a)^2(a^2-y^2)$ muszla Dürera. 50) $(x^2+y^2)(a^2-y^2) = \frac{a^4}{4}$ Trisektrysa (sieczna). 51) $(x^2+y^2)(x^2+y^2+bx)^2 = a^2(x^2-y^2)$ (chrabąszcz). $(x^2+y^2)(x^2+y^2-a^2)^2 = 4a^2(x^2+y^2-2ax)^2$ (Nefroida) (fig. 147).

Literatura. Dr. Gino Loria: Spezielle algebraische und transcendente ebene Curven. Nach dem Italienischen bearbeitet von Fritz Schütte. Leipzig 1902.

Tematy do rozpraweк naukowych:

1) Cissoida, strofoida i ich uogólnienia.
2) Konchoidy Nikomedesa i Pascala.
3) Krzywe Cassinie'go i ich uogólnienia.

Wykład XLIII.

Przykłady krzywych płaskich przestępnych.

1. Krzywe logarytmiczne. Krzywą logarytmiczną nazywamy krzywą, w której odcięta x każdego punktu jest proporcyonalną do logarytmu rzędnej y tegoż punktu, a więc krzywą, określoną równaniem:

$$x = m \log \frac{y}{n}, \text{ lub } y = ne^{\frac{x}{m}}.$$

Ogólnie piszemy równanie krzywej logarytmicznej w postaci:

$$y = be^{-\frac{x}{a}}. \qquad (1)$$

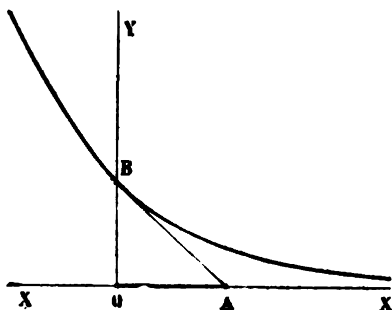


Fig. 148.

Krzywa przecina oś y-ów w punkcie B, gdzie $OB = b$, zbliża się nieograniczenie do dodatniej części osi x-ów, która jest jej asymptotą. Podstyczna w każdym punkcie tej krzywej jest stałą, równą a (fig. 148). Powierzchnia zawarta między dwiema rzędnemi ma wartość:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx = b\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x}{a}}\,dx, \quad \text{czyli: } A = a(y_1 - y_2),$$

jest więc równa różnicy rzędnych, pomnożonej przez długość stałej podstycznej. Dla $x_2 = \infty$ mamy $y_2 = 0$, zatem $A = ay$; powierzchnia nieograniczona zawarta między krzywą, jej asymptotą i jedną rzędną jest więc równa powierzchni prostokąta, którego bokami są ta rzędna i stała podstyczna.

Objętość powstała przez obrót tej krzywej około osi x-ów ma w granicach od $x_1 = x$ do $x_2 = \infty$ wartość:

$$V = \pi\int_x^\infty b^2 e^{-\frac{2x}{a}}\,dx = \pi\frac{ab^2}{2}.e^{-\frac{2x}{a}}, \quad \text{czyli: } V = y^2\pi.\frac{a}{2},$$

jest więc równa objętości walca, którego podstawą jest koło opisane przez rzędną y, a wysokość równa połowie stałej podstycznej.

Objętość tej krzywej powstała przez obrót około osi y-ów ma w granicach od $y_1 = 0$ do $y_2 = b$ wartości:

$$V = \pi\int_a^b x^2\,dy = -\frac{b\pi}{a}\int_\infty^0 x^2 e^{-\frac{x}{a}}\,dx = b\pi \Big|_\infty^0 (x^2 + 2ax + 2a^2)e^{-\frac{x}{a}}, \quad \text{czyli: } V = a^2\pi.2b,$$

jest więc równa objętości walca, którego podstawą jest koło o promieniu równym stałej podstycznej, a wysokość równa podwójnej rzędnej krzywej w punkcie początkowym.

2. Linia łańcuchowa. Tak nazywamy linią krzywą określoną równa-
m:

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right). \qquad (2)$$

Postać tę przyjmuje nić zawieszona w dwu punktach końcowych, pod łożeniem, że ciężar nici jest proporcyonalny do jej długości. Geometry-

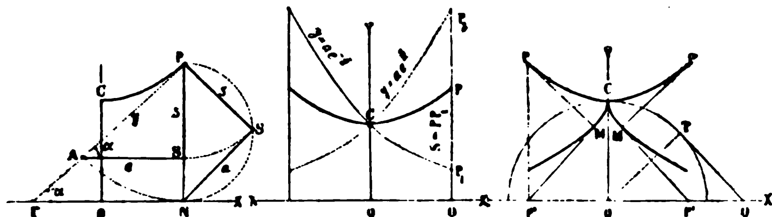


Fig. 149. Fig. 150. Fig. 151.

nie określa się ją tą własnością, że długość łuku liczonego od jej najniż-ego punktu C jest proporcyonalną do tangensa kąta α, jaki styczna końcu łuku tworzy z osią x-ów (fig. 149), a więc wzorem: $s=a\operatorname{tang}\alpha=a\frac{dy}{dx}$.

własności tej otrzymujemy stosunki: $\frac{dx}{a}=\frac{dy}{s}=\frac{ds}{\sqrt{s^2+a^2}}$,

Mamy więc z jednej strony: $dx=a\frac{ds}{\sqrt{s^2+a^2}}$, zatem: $\frac{x}{a}=\log\frac{s+\sqrt{s^2+a^2}}{a}$,

więc: $e^{\frac{x}{a}}=\frac{s+\sqrt{s^2+a^2}}{s}$, $\quad e^{-\frac{x}{a}}=\frac{s-\sqrt{s^2+a^2}}{a}$,

zeto: $e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}=\frac{2\sqrt{s^2+a^2}}{a}$, a więc: $\sqrt{s^2+a^2}=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$,

drugiej strony zaś: $dy=\frac{s\,ds}{\sqrt{s^2+a^2}}$, $\quad$ a więc: $y=\sqrt{s^2+a^2}$,

tem otrzymamy szukane równanie w postaci: $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

Linia łańcuchowa: $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ może być też określona jako miej-e geometryczne środków cięciw równoległych do osi y-ów (fig. 150) zawar-ch między krzywemi logarytmicznemi:

$$y_1=ae^{\frac{x}{a}},\ y_2=ae^{-\frac{x}{a}}.\ \text{Jest bowiem}: y=\frac{1}{2}(y_1+y_2).$$

Wykreśliwszy w każdym punkcie P linii łańcuchowej styczną PM i od-ając na niej długość PM równą łukowi liczonemu od wierzchołka C krzy-j łańcuchowej $s=CP$, otrzymamy jako miejsce geometryczne punktu M, li jako odwiniętą linii łańcuchowej, nową linię krzywą zwaną trak ysą (fig. 151).

Łuk krzywej $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ w granicach od $x_1=0$ do $x_2=x$ ma wartość:

$$s=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)=\sqrt{y^2-a^2},$$

możemy więc go wyznaczyć konstrukcyjnie, kreśląc z punktu O jako środka koło o promieniu a, styczna do tego koła wykreślona z punktu Q obranego na osi y-ów w odstępie $OQ=y$, ma długość: $QT=\sqrt{y^2-a^2}$, a jej kierunek oznacza właśnie kierunek stycznej w punkcie $P(x, y)$ linii łańcuchowej, jest bowiem $\operatorname{tang} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{s}{a}$. Prosta MP' jest równoległa do TQ wyznacza kierunek i długość stycznej w punkcie M traktrysy równą promieniowi a koła pomocniczego.

Oznaczając przez x, y spółrzędne punktu M traktrysy, odpowiadającego punktowi P linii łańcuchowej i oznaczając przez φ kąt jaki styczna MP' w punkcie M traktrysy tworzy z dodatnim kierunkiem osi x-ów otrzymamy:

$$\operatorname{tang} \varphi = -\frac{MM'}{M'P'} = -\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}},$$

zatem równanie różniczkowe traktrysy w postaci: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}$.

Z równania tego dostajemy:

$$dx = -\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}dy, \text{ kładąc } a^2-y^2=z^2, \text{ otrzymujemy: } dx = \frac{a^2 dz}{a^2-z^2},$$

przeto:

$$x = a \log \frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} - \sqrt{a^2-y^2},$$

jako równanie traktrysy, która jest, jak widać, także krzywą przestępną.

Powierzchnia traktrysy w granicach od $x_1=0$ do $x_2=\infty$ przedstawia się wzorem:

$$A = \int_0^\infty y\,dx = \int_0^a \sqrt{a^2-y^2}dy = \Big|_0^a \left(\frac{y\sqrt{a^2-y^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{y}{a}\right), \text{ zatem: } A = \frac{a^2\pi}{4},$$

jest więc równa ćwierci koła pomocniczego.

3. Krzywe goniometryczne, a w szczególności krzywa Dinostrata. Krzywemi goniometrycznemi nazywamy krzywe, w których każda rzędna punktu jest funkcyą goniometryczną odciętej tego punktu jak np.:

$y=\sin x$ (T. I. fig. 292), $y=\cos x$ (T. I. fig. 293),

$y=\operatorname{tang} x$ (T. I. fig. 294), $y=\operatorname{cotg} x$ (T. I. fig. 295),

$y=\sec x$ (T. I. fig. 296), $y=\operatorname{cosec} x$ (T. I. fig. 297).

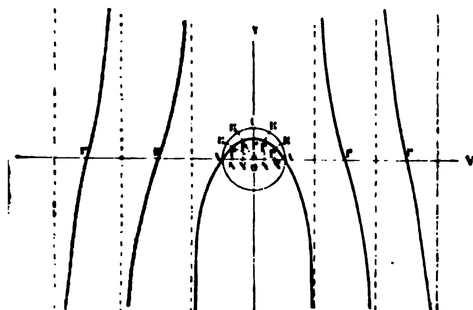
Dinostratus, matematyk szkoły Platońskiej, zajmując się kwadraturą koła, t. j. zagadnieniem zamiany koła na kwadrat o tej samej powierzchni, względnie zagadnieniem przedstawienia obwodu koła w postaci odcinka prostolinijnego, używał do tego celu krzywej, przezwanej z tego powodu kwadratryką Dinostrata.

Niech będzie dane koło AOC (fig. 152) o promieniu a, jeżeli promień OA obraca się jednostajnie około punktu O, od OA do OC, a zarazem prosta AD porusza się także jednostajnie równolegle do swego położenia od AD do OC, natenczas punkta przecięcia promienia i prostej utworzą krzywą Dinostrata. Przyjąwszy środek koła za początek układu, a promień OA za oś x-ów i oznaczając $OA=a$, $ON=x$, $NP=y$ $\measuredangle AOD=\varphi$ otrzymamy:

$$\varphi : \frac{\pi}{2} = a-x : a, \text{ a stąd: } \varphi = \frac{a-x}{a} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{a}\frac{\pi}{2},$$

p: $y=x$ tang φ, przeto otrzymujemy:

$$y=x\,\text{tang}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2a}\right),\quad\text{czyli: } y=x\,\text{cotang}\,\frac{\pi x}{2a},\tag{3}$$


Fig. 152.

jako równanie szukanej krzywej. Krzywa przecina oś x-ów w nieskończenie wielu punktach o odciętych: $\pm a$, $\pm 3a$, $\pm 5a$,..., które są punktami przegięcia krzywej, posiada nieskończenie wiele asymptot o równaniach:

$$x=\pm 2a,\quad x=\pm 4a,\ldots,$$

i składa się z jednej gałęzi parabolicznej i nieskończenie wielu gałęzi z punktami przegięcia, jak na fig. 152.

Dla $x=0$ otrzymujemy:

$$OE=y_0=\lim_{x=0}\frac{x}{\text{tang}\,\frac{\pi x}{2a}}=\lim\frac{2a}{\pi}\cos^2\frac{\pi x}{2a}=\frac{2a}{\pi},$$

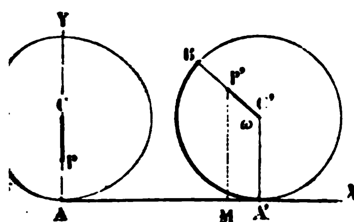
tem:

$$y_0=\frac{2a}{\pi},\ \text{skąd otrzymujemy: } \pi=\frac{2a}{y_0}.$$

Możnaby więc przy pomocy y_0, a więc przy pomocy punktu C, w któ- krzywa Dinostrata przecina oś y-ów, wykreślić liczbę π.

Jako linie wyznaczające liczbę π mogłyby ostatecznie służyć wszystkie ywe goniometryczne. Nie będzie to jednak konstrukcya geometryczna legająca na wyłącznem użyciu cyrkla i linealu.

4. Cykloida. Cykloidę opisuje punkt stale połączony z kołem toczą- się po linii prostej. Niech będzie $AC=r$ promieniem koła toczącego się prostej AX, zaś $PC=a$ stałą odległością punktu P od środka koła. li koło C tocząc się po AX zajmie położenie C', natenczas łuk AB od- nie się na prostej AA' tak, że będzie $\widehat{A'B}=r\omega$, gdzie ω przedstawia miarę kąta $A'C'B'$, o który koło C obrócił się podczas toczenia. Punkt P zajmie teraz położenie P', przyczem będzie $C'P'=CP=a$. Chcąc otrzymać równanie miejsca geometrycznego punktu P, przyjmijmy prostą AX za oś x-ów, a punkt A za punkt początkowy układu, natenczas spółrzędne punkta P' będą $AM'=x$, $M'P'=y$ (fig. 153).


Fig. 153.

Do punktu P' prowadzą z punktu A dwie gi, jedna: $(AM')+(M'P')$, druga: $(AA')+(A'C')+(C'P')$. Bacząc na to, że: $=A'B=r\omega$, $B'C'=r$, $C'M'=a$, otrzymujemy równanie:

$$x+yi=r\omega+ri+a\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\omega\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\omega\right)\right],$$

li:

$$x+yi=r\omega+ri-a\sin\omega-ai\cos\omega,$$

więc:

$$x+yi=(r\omega-a\sin\omega)+(r-a\cos\omega)i,$$

skąd otrzymujemy dwa równania o dowolnym parametrze ω, w postaci:

$$x = r\omega - a \sin \omega, \quad y = r - a \cos \omega, \tag{4}$$

jako równania cykloidy.

Z równań tych otrzymamy po wyrugowaniu zmiennego parametru ω na podstawie wzorów:

$$\cos \omega = \frac{r-y}{a}, \quad \sin \omega = \frac{\sqrt{a^2-(r-y)^2}}{a}, \quad \omega = \text{arc} \cos \frac{r-y}{a} - \sqrt{a^2-(r-y)^2},$$

jedno równanie kształtu: $x = r . \text{arc} \cos \frac{r-y}{a} - \sqrt{a^2-(r-y)^2}$, (5)

jako równanie cykloidy w spółrzędnych prostokątnych jej punktów. Jest to równanie przestępne ze względu na zmienne x i y, cykloida należy zatem do krzywych przestępnych. Szczególne postacie cykloidy zależą od związku między stałemi a i r. Jeżeli $a = r$ mamy cykloidę zwyczajną (fig. 154) o równaniach:

$$x = a(\omega - \sin \omega), \quad y = a(1 - \cos \omega), \tag{6}$$

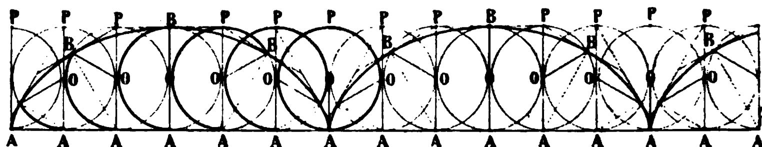


Fig. 154.

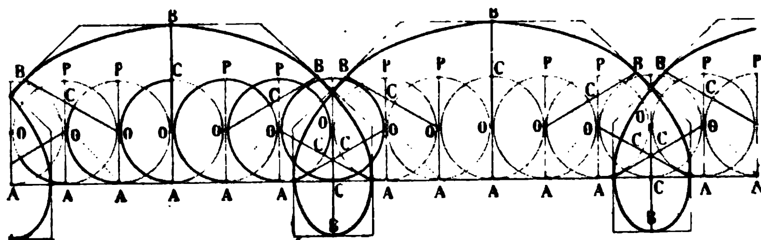


Fig. 155.

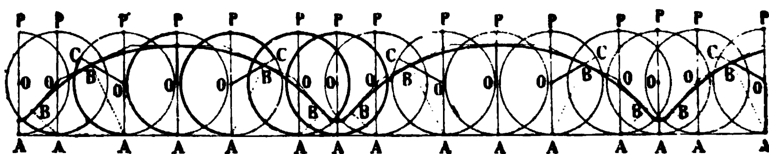


Fig. 156.

gdy $a > r$ nazywamy cykloidą wydłużoną (fig. 155), gdy $a > r$ skróconą (fig. 156). Cykloidy wydłużone i skrócone zowią także trochoidami. Problem cykloid rozszerzony na przypadek, gdy koło toczy się po innem kole prowadzi do epi- i hypo-cykloid.

5. Zastosowanie całek określonych do cykloidy zwyczajnej. Dla cykloidy zwyczajnej o równaniach: $x = a(\omega - \sin \omega)$, $y = a(1 - \cos \omega)$, mamy $dx = a(1 - \cos \omega)\, d\omega$, zatem element powierzchni:

$$dA = y\,dx = a^2(1 - \cos \omega)^2 d\omega = a^2(1 - 2 \cos \omega + \cos^2 \omega)\, d\omega =$$

$$= a^2\left(\frac{3}{2} - 2 \cos \omega + \frac{1}{2} \cos 2\omega\right) d\omega.$$

Na tej podstawie otrzymujemy powierzchnię liczoną od początku układu określoną wzorem:

$$A_{0\ldots\omega}=a^2\int_0^\omega\left(\frac{3}{2}-2\cos\omega+\frac{1}{2}\cos 2\omega\right)d\omega,$$

z którego wypływa:

$$A_{a\ldots\omega}=\frac{a^2}{2}\left(3\omega-4\sin\omega+\frac{1}{2}\sin 2\omega\right).$$

Podstawiając $\omega=2\pi$, otrzymamy stąd całą powierzchnię, zawartą między jedną gałęzią cykloidy zwyczajnej a jej podstawą, wartości: $A=3a^2\pi$, t. j. trzy razy tak wielką, jak powierzchnia koła toczącego się. Element łuku cykloidy: $x=a(\omega-\sin\omega)$, $y=a(1-\cos\omega)$,, otrzymuje z powodu, że:

$$dx=a(1-\cos\omega)\,d\omega,\quad dy=a\sin\omega\,d\omega,\ \text{wartość:}$$

$$ds=a\sqrt{(1-\cos\omega)^2+\sin^2\omega}\,.\,d\omega=a\sqrt{1-2\cos\omega+\cos^2\omega+\sin^2\omega}\,.\,d\omega,$$

czyli:
$$ds=a\sqrt{2(1-\cos\omega)}\,d\omega=2\sin\frac{\omega}{2}\,d\omega,$$

zatem łuk cykloidy zwyczajnej liczonej od wierzchołka ω wartość:

$$S_{0\ldots\omega}=2a\int_0^\omega\sin\frac{\omega}{2}\,d\omega=-4a\Big|_0^\omega\cos\frac{\omega}{2}=4a\left(1-\cos\frac{\omega}{2}\right),\ \text{czyli: } S_{0\ldots\omega}=8a\,.\sin^2\frac{\omega}{2}.$$

Podstawiając tu $\omega=2\pi$, otrzymamy długość jednej gałęzi cykloidy: $S=8a$.

Długość cykloidy zwyczajnej jest zatem ośm razy tak wielka, jak promień koła toczącego się.

Objętość bryły powstałej przez obrót cykloidy:

$$x=a(\omega-\sin\omega),\quad y=a(1-\cos\omega),$$

około jej podstawy, otrzymuje z powodu, że element:

$$dV=\pi y^2\,dx=\pi a^3(1-\cos\omega)^3\,d\omega=8a^3\pi\sin^6\frac{\omega}{2}\,d\omega$$

wartość określoną wzorem:

$$V_{0\ldots\omega}=8a^3\pi\int_0^\omega\sin^6\frac{\omega}{2}\,d\omega.$$

Gdy $\omega=2\pi$, otrzymujemy:

$$\int_0^{2\pi}\sin^6\frac{\omega}{2}\,d\omega=\frac{5}{8}\pi,$$

zatem objętość bryły, powstałej przez obrót jednej gałęzi cykloidy zwyczajnej około jej podstawy, otrzymuje wartość: $V=5\pi^2\,.\,a^3$.

Pobocznica powierzchni powstałej przez obrót cykloidy około jej podstawy otrzymuje ze względu na to, że element jej:

$$dF=2\pi y\,ds=2\pi\,.\,a(1-\cos\omega)\,.\,2a\sin\frac{\omega}{2}\,d\omega=8a^2\pi\sin^3\frac{\omega}{2}\,d\omega,$$

wartość:
$$F_{0\ldots\omega}=8a^2\pi\int_0^\omega\sin^3\frac{\omega}{2}\,d\omega.$$

Gdy $\omega=2\pi$, otrzymujemy:

$$\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{\omega}{2}\,d\omega=\frac{8}{3},$$

zatem całkowita powierzchnia bryły powstałej przez obrót cykloidy zwyczajnej około jej podstawy przedstawia się wzorem: $F=\frac{64}{3}a^2\pi$.

6. Epicykloida i hypocykloida. Epicykloidą nazywamy linię krzywą, którą opisuje punkt stale połączony z kołem, które toczy się po zewnętrznej stronie obwodu innego koła, hypocykloidą zaś, gdy koło toczy się po stronie wewnętrznej obwodu drugiego koła.

Niech będzie $OA=R$ promieniem koła podstawowego, $AC=r$ promieniem koła toczącego się, $CD=a$ oddaleniem punktu P, stale z kołem C połączonego od jego środka; jeżeli koło C zajmie położenie C' (fig. 157), gdzie $\widehat{AA'}=\widehat{AB}$, natenczas oznaczając przez φ miarę kąta AOA', a przez ω miarę kąta $A'C'B'$, otrzymamy związek $R.\varphi=r\omega$. Punkt P wpadnie teraz w punkt P', gdzie $C'P'=CP$.

Przyjmijmy środek O za początek układu, a prostą OC za oś x-ów. Do punktu P prowadzą dwie drogi, jedna: $x+yi$, druga: $(OC')_\varphi+(C'P')_{\varphi+\pi+\omega}$, czyli: $(R+r)_\varphi+a_{\varphi+\pi+\omega}$, otrzymujemy zatem równanie:

$$x+yi=(R+r)_\varphi+a_{\pi+\varphi+\omega},$$

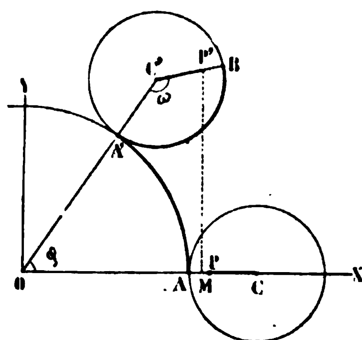


Fig. 157.

a stąd dwa równania:

$$x=(R+r)\cos\varphi-a\cos(\varphi+\omega),$$
$$y=(R+r)\sin\varphi-a\sin(\varphi+\omega),$$

które z powodu, że $R\varphi=r\omega$, a więc $\omega=\frac{R}{r}\varphi$, $\varphi+\omega=\frac{R+r}{r}$ sprowadzają się do dwu równań o jednym dowolnym parametrze φ kształtu:

$$x=(R+r)\cos\varphi-a\cos\frac{R+r}{r}\varphi, \qquad (7)$$
$$y=(R+r)\sin\varphi-a\sin\frac{R+r}{r}\varphi,$$

jako parę równań ogólnej epicykloidy. Z równań tych otrzymujemy wprost równania hypocykloidy, zastępując w nich r przez $-r$, a przez $-a$, otrzymujemy tedy równania parametrowe hypocykloidy w postaci:

$$x=(R-r)\cos\varphi+a\cos\frac{R-r}{r}\varphi,$$
$$y=(R-r)\sin\varphi-a\sin\frac{R-r}{r}\varphi. \qquad (8)$$

W przypadku, gdy $a=r$ nazywamy epi- lub hypocykloidy zwyczajnemi, gdy $a>r$ wydłużonemi, gdy $a<r$ skróconemi.

Epi- i hypocykloidy wydłużone i skrócone nazywają także epi- i hypotrochoidami. Epi- i hypocykloidy są krzywemi przestępnemi, gdy stosunek $\frac{R}{r}$ jest liczbą niewymierną, zaś krzywemi algebraicznemi, gdy stosunek $\frac{R}{r}$ jest liczbą wymierną. Rząd krzywej i jej kształt zależy od wartości tego stosunku wymiernego. Jeżeli stosunek $\frac{R}{r}$ jeit liczbą całkowitą m, natenczas

toczące się odwija się m razy na kole podstawowem, a epi- lub hypoloidy składają się z m gałęzi. Na figurach 158—163. jest $m=3$, zatem $R=3r$ da z tych epi- i hypocykloid składa się z trzech gałęzi, jest stosownie warunku $a=r$, $a>r$, $a<r$, zwyczajną, wydłużoną lub skróconą.

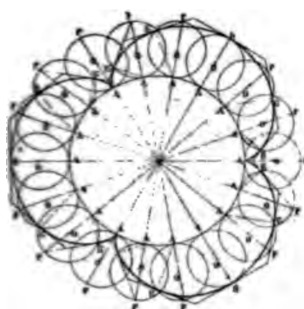


Fig. 158.

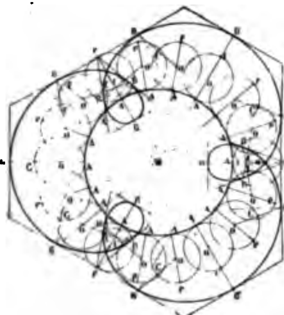


Fig. 159.

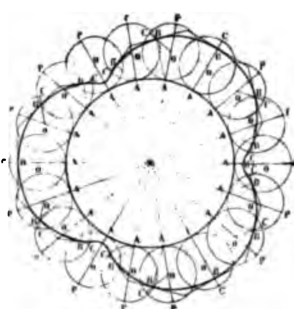


Fig. 160.

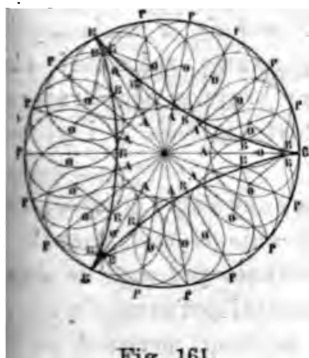


Fig. 161.

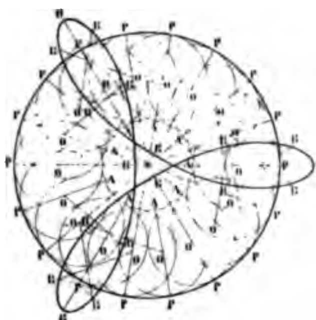


Fig. 162.

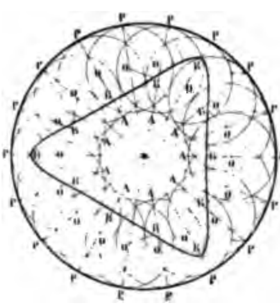


Fig. 163.

Jeżeli stosunek $\frac{R}{r}$ jest liczbą ułamkową $\frac{m}{n}$, natenczas $nR=mr$, koło r ija się m razy na n obwodach koła podstawowego; krzywe składają się dy z m gałęzi opasujących n razy obwód koła podstawowego. Jeżeli stonk $\frac{R}{r}$ jest liczbą niewymierną, natenczas krzywe składają się z nieskońnie wielu gałęzi, opasujących koło podstawowe nieskończenie wiele razy.

7. **Uwaga.** Z równania (8) otrzymujemy niektóre ciekawe przykłady hypocykloid, otrzymamy: α) gdy $a=r=\frac{R}{2}$ równania: $x=2r\cos\varphi$, $y=0$, przedstawiające linię ą, a to średnicę koła podstawowego wpadającą w oś x-ów.

β) Gdy $r=\frac{R}{2}$, a przytem $a \gtrless r$, natenczas otrzymujemy z równania (8): $x=(r+a)\cos\varphi$, $(r-a)\sin\varphi$, przedstawiające ellipsę.

Jeżeli więc koło toczy się wewnątrz drugiego koła o podwójnym promieniu, natenkażdy punkt obwodu opisuje średnicę koła podstawowego, a każdy inny punkt z kośrodkowem stale połączony opisuje elipsę.

γ) Gdy $a=r=\frac{R}{4}$ otrzymujemy z (8) równania:

$=3r\cos\varphi+r\cos 3\varphi$, $y=3r\sin\varphi-r\sin 3\varphi$, czyli: $x=4r\cos^3\varphi$, $y=-4r\sin^3\varphi$,

równanie:
$$\left(\frac{x}{4r}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{4r}\right)^{2/3}=1,$$

awiające astroidę, jako szczególną postać hypocykloidy zwyczajnej.

8. Odwinięta linii kołowej. Jeżeli po danem kole toczy się zamiast innego koła linia prosta, natenczas punkt tej prostej opisuje linię krzywą, którą nazywamy odwiniętą linii kołowej (fig. 164). Niech będzie a promieniem koła, O jego środkiem. Przyjmując O za początek układu, OA za oś x-ów, otrzymamy spółrzędne punktu P na mocy równości: $x+yi=a_\omega+(BP)_{\omega+\frac{3\pi}{2}}$, gdzie:

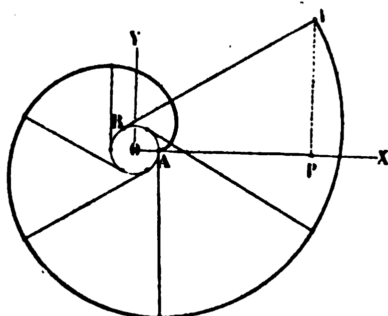


Fig. 164.

$$\widehat{BP}=\widehat{AB}=a.\omega \text{ w postaci:}$$

$$x=a\cos\omega+a\,\omega\sin\omega,$$

$$y=a\sin\omega-a\,\omega\cos\omega,$$

skąd otrzymamy równania parametrowe odwiniętej koła w postaci:

$$x=a(\cos\omega+\omega\sin\omega),$$

$$y=a(\sin\omega-\omega\cos\omega). \qquad (9)$$

9. Krzywe spiralne. Krzywemi spiralnemi nazywamy linie krzywe, których równania biegunowe są równaniami algebraicznemi ze względu na spółrzędne biegunowe r i φ ich punktów. Stopień równania w zmiennych r i φ nazywamy też rzędem spiralnej, a szczególną nazwę spiralnej określonej równaniem $r=f(\varphi)$ stosujemy zwykle do nazwy krzywej algebraicznej, określonej takiemże równaniem w spółrzędnych prostokątnych x i y, więc w postaci $y=f(x)$.

10. Spiralna Archimedesa. Spiralną Archimedesa nazywamy krzywą o równaniu biegunowem $r=a\varphi$, która powstaje geometrycznie w ten sposób, że prosta OA obraca się dokoła jednego ze swych punktów O, a na tej prostej porusza się równocześnie punkt P tak, że drogi przezeń na prostej odbyte są proporcyonalne do wielkości obrotów przez prostą wykonanych. Spiralnej Archimedesa $r=a\varphi$ odpowiada w spółrzędnych prostokątnych linia prosta $y=ax$, której obrazu możemy też użyć do wykreślenia obrazu spiralnej Archimedesa. Najłatwiej wykreśli się tę spiralną, kreśląc z początku O koło o promieniu a i odcinając na promieniu nachylonym pod kątem φ, długość odpowiedniego łuku kołowego o wielkości $a.\varphi$ (fig. 165).

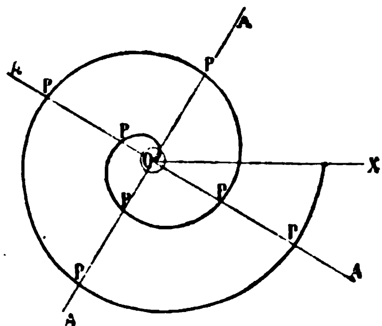


Fig. 165.

11. Spiralna hyperboliczna. Tak nazywamy krzywą o równaniu $r=\dfrac{a}{\varphi}$, której w spółrzędnych prostokątnych x i y odpowiada hyperbola równoboczna o równaniu $y=\dfrac{a}{x}$. Spiralna hyperboliczna (fig. 166) wychodzi dla $\varphi=0$ z nieskończoności w wysokości: $y_\infty=(r.\sin\varphi)_{\varphi=0}=a\left(\dfrac{\sin\varphi}{\varphi}\right)_{\varphi=0}=a$, posiada więc asymptotę o równaniu $y=a$, i wije się około punktu O nieskończenie wiele razy, osiągając punkt O po nieskończenie wielu zwojach. Punkt O nazywamy też punktem asymptotycznym spiralnej hyperbolicznej. Ujemnemu φ odpowiada analogicznie druga gałęź o asymptocie $y=-a$

i o tymże samym punkcie asymptotycznym, odpowiadającym wartości $\varphi=-\infty$. Równanie $r=\frac{a}{\varphi^2}$ przedstawia spiralną hyperboliczną trzeciego

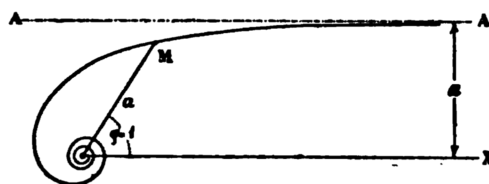


Fig. 166.

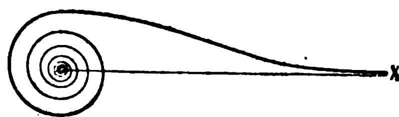


Fig. 167.

rzędu, zwaną ślimacznicą (lituus) (fig. 167). Krzywa ta ma w punkcie O punkt asymptotyczny, a oś x ów za asymptotę.

12. Spiralna paraboliczna. Tak nazywamy krzywą o równaniu $r=a.\varphi^2$, której w spółrzędnych prostokątnych x i y odpowiada parabola $y=ax^2$.

Spiralna paraboliczna ma punkt zwrotu w punkcie O, z którego wychodzi stycznie do osi x-ów, oddalając się w swych nieskończenie wielu zwojach coraz bardziej od punktu O w nieskończoność symetrycznie względem osi biegunowej.

13. Spiralna logarytmiczna. Tak nazywamy krzywą o równaniu $r=e^{\varphi}$, której w spółrzędnych prostokątnych x i y odpowiada logarytmika o równaniu $y=e^x$. Krzywa wychodzi, gdy $\varphi=0$, z punktu A na osi x-ów i wije się około punktu O nieskończenie wiele razy w jednym kierunku zbliżając się coraz bardziej do punktu O, który owija, gdy $\varphi=-\infty$, a więc dopiero po nieskończenie wielu zwojach. Spiralna logarytmiczna $r=e^{\varphi}$ ma zatem w punkcie O punkt asymptotyczny (fig. 168).

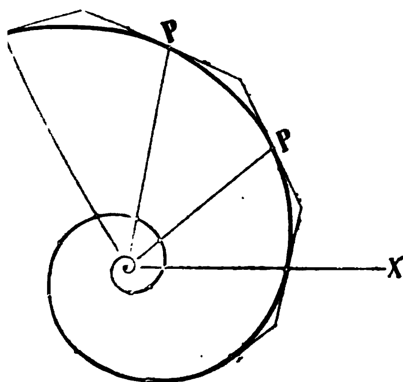


Fig. 168.

14. Styczne w punktach krzywej określonej równaniem biegunowem. Niech będzie MT styczną, a MN normalną w punkcie M krzywej $r=f(\varphi)$. Poprowadźmy przez punkt O prostą prostopadłą do promienia $OM=r$, to prosta ta przetnie styczną MT w punkcie T, a normalną MN w punkcie N. Nazywamy wtedy $MT=T$ *długością biegunową stycznej*, $MN=N$, *długością biegunową normalnej*, $OT=T'$ *biegunową podstyczną*, $ON=N'$ *biegunową podnormalną punktu* M.

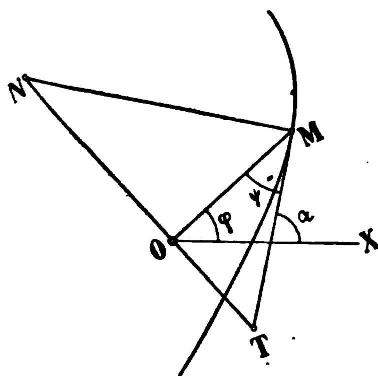


Fig. 169.

Oznaczmy przez α kąt, który styczna w punkcie M krzywej tworzy z osią biegunową OX, a przez ψ kąt, jaki taż styczna tworzy z promieniem punktu M, o spółrzędnych biegunowych $OM=r$ i $\sphericalangle MOX=\varphi$, natenczas otrzymujemy relacyę: $\alpha=\varphi+\psi$.

Na wyznaczenie kąta ψ otrzymujemy: $dr=ds.\cos\psi$, $rd\varphi=ds\sin\psi$, skąd dostajemy:

$$\operatorname{tang}\psi=\frac{rd\varphi}{dr},\ \text{czyli}\ \operatorname{tang}\psi=\frac{r}{r'},\ \text{gdzie}\ r'=\frac{dr}{d\varphi}.$$

Z wzoru: $\operatorname{tang}\alpha=\operatorname{tang}(\varphi+\psi)=\dfrac{\operatorname{tang}\varphi+\operatorname{tang}\psi}{1-\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\psi}$,

otrzymujemy zatem:

$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{\operatorname{tang}\varphi . dr+rd\varphi}{dr-\operatorname{tang}\varphi . rd\varphi}=\frac{\sin\varphi\, dr+r\cos\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi\, dr-r\sin\varphi\, d\varphi},$$

czyli: $$\operatorname{tang}\alpha=\frac{r'\sin\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi},$$

wzór wyznaczający kąt, jaki styczna w punkcie M tworzy z osią biegu Biorąc pod uwagę trójkąt prostokątny OMT (fig. 169), otrzymujemy:

$$T'=OT=r\operatorname{tang}\psi=\frac{r^2\,d\varphi}{dr},$$

zatem podstyczną biegunową: $T=\dfrac{r^2}{r'}$.

Długość biegunową stycznej określa zaś wzór: $T=\dfrac{r}{\cos\psi}$, a że:

$$\frac{\sin\psi}{r\,d\varphi}=\frac{\cos\psi}{dr}=\frac{1}{\sqrt{r^2d\varphi^2+dr^2}}=\frac{1}{d\varphi\sqrt{r^2+r'^2}}=\frac{1}{ds},$$

a więc: $$\cos\psi=\frac{dr}{ds}=\frac{r'}{\sqrt{r^2+r'^2}},\quad \text{przeto: } T=\frac{r\sqrt{r^2+r'^2}}{r'}.$$

Z trójkąta prostokątnego OMN otrzymujemy natomiast:

$$ON=N'=r\operatorname{cotg}\psi=\frac{r.r'}{r},\quad \text{zatem: } N'=r'=\frac{dr}{d\varphi}.$$

Biegunową podnormalną podaje zatem pochodna: $\dfrac{dr}{d\varphi}=r'$.

Długość biegunową normalnej określa zaś wzór:

$$MN=N=\sqrt{OM^2+ON^2}=\sqrt{r^2+r'^2},\quad \text{czyli: } N=\sqrt{r^2+r'^2}.$$

Odległość p stycznej w punkcie $M(r,\varphi)$ krzywej $r=f(\varphi)$ od bi jest określoną wzorem:

$$p=r\sin\psi=\frac{r^2.d\varphi}{dr}=\frac{r^2}{\sqrt{r^2+r'^2}},$$

z którego wynika, że: $$\frac{1}{p^2}=\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r'^2}.$$

15. Zastosowania. α) W spiralnej Archimedesa $r=a\varphi$ mamy dr a więc: $\dfrac{dr}{d\varphi}=a$, czyli: $r'=a$, zatem: $N=a$.

To znaczy: *Biegunowa podnormalna jest w spiralnej Archimedesa stałą, równą a.*

Na podstawie tego twierdzenia możemy z łatwością wykreślić st w każdym punkcie spiralnej Archimedesa.

β) W spiralnej logarytmicznej $r=e^\varphi$ mamy $dr=e^\varphi d\varphi$, a więc:

$$\frac{dr}{d\varphi}=e^\varphi,\ \text{czyli: } r=r',\ \text{zatem: } \frac{r}{r'}=1,\ \text{czyli: } \operatorname{tang}\psi=1.$$

Spiralna logarytmiczna $r=e^\varphi$ przecina więc każdy ze swoich prom pod kątem stałym $\psi=\dfrac{\pi}{4}$.

Ogólnie przy spiralnej logarytmicznej o równaniu $r=a^\varphi$ mamy:

$$dr=a^\varphi d\varphi \log a, \quad \frac{dr}{d\varphi}=a^\varphi \log a=r\log a,$$

a więc: $\operatorname{tang}\psi=\frac{r}{r'}=\frac{1}{\log a}$, zatem: $\psi=\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{\log a}$.

16. Asymptoty krzywych, określonych równaniami biegunowemi. Punkta nieskończenie dalekie krzywej, określonej równaniem $F(r,\varphi)=0$ określa warunek $r=\infty$, czyli $u=\frac{1}{r}=0$, któremu na podstawie danego równania odpowiada pewne równanie ze względu na φ, którego pierwiastki określają kierunki asymptotyczne krzywej.

Położenie asymptoty, odpowiadającej jednemu z takich pierwiastków φ, możemy wyznaczyć za pomocą biegunowej podstycznej, kładąc we wzorze:

$$T'=\frac{r^2 d\varphi}{dr}=\frac{r^2}{r'}, \text{ przy } r=\infty, \text{ odpowiednią wartość na } \varphi.$$

Kładąc $\frac{1}{r}=u$, mamy: $-\frac{dr}{r^2}=du$, zatem: $T'=-\frac{d\varphi}{dr}=-\frac{1}{u'}$,

gdzie: $u'=\frac{du}{d\varphi}$, jako wartość podstycznej biegunowej, czyli wzór, podający odległość asymptoty od bieguna.

17. Przykład. Mając np. krzywą określoną równaniem $r=a(\sec\varphi+\operatorname{tang}\varphi)$, otrzymujemy: $u=\frac{1}{r}=\frac{\cos\varphi}{a(1+\sin\varphi)}$, przeto warunkowi $r=\infty$, czyli $u=0$ odpowiadają kierunki asymptotyczne określone wzorem: $\cos\varphi=0$, który wskazuje na nieskończenie wiele asymptot odpowiadających kierunkom: $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots \pm\frac{(2n+1)\pi}{2}$.

W szczególności otrzymujemy np. dla: $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $\frac{du}{d\varphi}=-\frac{1}{2a}$, zatem: $T'=2a$. Prostopadła do osi biegunowej w odległości $2a$ od bieguna jest więc asymptotą danej krzywej.

18. Koła i punkta asymptotyczne krzywych spiralnych Jeżeli wartość promienia r krzywej $r=f(\varphi)$ dąży do pewnej stałej granicy a, gdy φ dąży do nieskończoności, wtedy krzywa zbliża się coraz bardziej do koła, zakreślonego promieniem a. Koło takie, do którego krzywa zbliża się asymptotycznie nazywamy k o ł e m a s y m p t o t y c z n e m krzywej, a jeżeli promień tego koła jest zerem, punktem asymptotycznym.

19. Przykład. Mając np. krzywą o równaniu: $r=\frac{a\varphi}{\varphi+b^2}$, zauważymy, że dla dodatniego φ jest promień r stale mniejszym od a. Gdy φ rośnie nieograniczenie, rośnie także r, dążąc do granicy stałej równej a. Koło zakreślone z bieguna jako środka promieniem a, jest więc kołem asymptotycznem krzywej. Dla ujemnych wartości φ otrzymamy drugą gałęź krzywej, dla której to samo koło będzie także kołem asymptotycznem.

20. Promień krzywizny w danym punkcie krzywej określonej równaniem biegunowem. Krzywizną w danym punkcie krzywej (patrz T. I. str. 637) nazywamy stosunek między kątem styczności $d\alpha$ a łukiem ds w tym punkcie: a więc: $k=\frac{d\alpha}{ds}$. Jeżeli krzywa określona jest równaniem biegunowem $r=f(\varphi)$, natenczas: $ds=d\varphi\sqrt{r^2+r'^2}$, $d\alpha=d\varphi+d\psi$ (fig. 169), zatem:

$$\frac{d\alpha}{d\varphi}=1+\frac{d\psi}{d\varphi}, \text{ gdzie } \operatorname{tang}\psi=\frac{r}{r'}, \text{ zatem: } \frac{d\psi}{\cos^2\psi}=\frac{r'^2-rr''}{r'^2}d\varphi,$$

a więc:
$$\frac{d\psi}{d\varphi}=\frac{r'^2-rr''}{r'^2}\cos^2\psi.$$

A że: $\cos\psi=\frac{r'}{\sqrt{r^2+r'^2}}$, przeto otrzymujemy: $\frac{d\psi}{d\varphi}=\frac{r'^2-rr''}{r'^2}\cdot\frac{r'^2}{r^2+r'^2}=\frac{r'^2-rr''}{r^2+r'^2}$,

zatem:
$$\frac{d\alpha}{d\varphi}=1+\frac{r'^2-rr''}{r^2+r'^2}=\frac{r^2+2r'^2-rr''}{r^2+r'^2}.$$

Otrzymujemy zatem krzywiznę:
$$k=\frac{r^2+2r'^2-rr''}{r^2+r'^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2}}=\frac{r^2+2r'^2-rr''}{(r^2+r'^2)^{3/2}},$$

a stąd promień krzywizny: $\varrho=\frac{1}{k}=\frac{(r^2+r'^2)^{3/2}}{r^2+2r'^2-rr''}$, (15)

czyli:
$$\varrho=\frac{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{3/2}}{r^2+2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}. \tag{16}$$

21. Uwaga. Do tego samego wyniku dojdziemy na podstawie wzoru: $\rho=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$, określającego promień krzywizny w dowolnym punkcie krzywej, określonej równaniem: $y=f(x)$ w spółrzędnych prostokątnych punktu.

Kładąc mianowicie: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, otrzymamy:
$$y'=\frac{\sin\varphi\,dr+r\cos\varphi\,d\varphi}{\cos\varphi\,dr-r\sin\varphi\,d\varphi}=\frac{r'\sin\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi},$$
$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{d\varphi}\left\{\frac{r'\sin\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}\right\}\cdot\frac{d\varphi}{dx}=\left[\frac{(r'\cos\varphi-r\sin\varphi)(r''\sin\varphi+2r'\cos\varphi-r\sin\varphi)}{(r'\cos\varphi-r\sin\varphi)^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{(r'\sin\varphi+r\cos\varphi)(r''\cos\varphi-2r'\sin\varphi-r\cos\varphi)}{(r'\cos\varphi-r\sin\varphi)^2}\right]\cdot\frac{1}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi},$$

zatem:
$$y''=\frac{r^2+2r'-rr''}{(r'\cos\varphi-r\sin\varphi)^3}.$$

Wstawiwszy otrzymane wartości y' i y'' we wzór na ρ otrzymamy, jak powyżej:
$$\rho=\frac{(r^2+r'^2)^{3/2}}{r^2+2r'^2-rr''}.$$

W szczególności, dla spiralnej Archimedesa $r=a\varphi$, mamy $r'=a$, $r''=0$,

zatem:
$$\rho=\frac{(r^2+a^2)^{3/2}}{r^2+2a^2}=\frac{(\varphi^2+1)^{3/2}}{(\varphi^2+2)},$$

wzór podający promień krzywizny w dowolnym punkcie spiralnej Archimedesa, który łatwo można wykreślić. Jeżeli $\varphi=0$, otrzymujemy stąd: $\rho_0=\frac{a}{2}$.

Ćwiczenia XLIII.

1) Wyznaczyć powierzchnię logarytmiki $y=\log x$ w granicach od x_1 do x_2.

2) Wyznaczyć długość łuku logarytmiki $y=\log x$ w granicach od $x_1=1$ do $x_2=x>1$.

3) Znaleźć podstyczną T i długość stycznej T, podnormalną N' i długość normalnej N w logarytmice: $y=be^{\frac{x}{a}}$.

4) Znaleźć wielkości T, T', N i N' w linii łańcuchowej $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

5) **Wykazać**, że promień krzywizny linii łańcuchowej $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ ma wartość $=\frac{y^2}{2a}$.

Wykazać, że dla logarytmiki $y=e^x$ w granicach x_1, x_2, otrzymamy:

6) $A=y_2-y_1$, 7) $S=\Big|_{x_1}^{x_2}\left(\sqrt{1+e^{2x}}-\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{1+e^{2x}}+1}{\sqrt{1+e^{2x}}-1}\right\}$.

8) $V=\frac{\pi}{2}(y_2^2-y_1^2)$, 9) $F=\Big|_{x_1}^{x_2}[e^{2x}+e^x+2\log(2e^{2x}-1)]$,

10) $M_x=\Big|_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{4}e^x+\frac{1}{2}\log(2e^{2x}-1]\right\}$, 11) $M_a=\frac{1}{4}(y_2^2-y_1^2)$,

12) $I_x=\frac{1}{8}\Big|_{x_1}^{x_2}(1+e^{2x})^{3/2}$, 13) $I_a=\frac{1}{12}(y_2^3-y_1^3)$.

14) **Wykazać**, że powierzchnia powstała przez obrót logarytmiki $y=ae^{-\frac{x}{a}}$ około jej asymptoty ma w granicach od $x_1=0$ do $x_2=\infty$ wartość:

$$F=a\pi\left\{\frac{a}{\alpha}\sqrt{1+\frac{a^2}{\alpha^2}}+\log\left(\frac{a}{\alpha}+\sqrt{1+\frac{a^2}{\alpha^2}}\right)\right\}.$$

15) **Wykazać**, że objętość bryły powstałej przez obrót logarytmiki $x=ae^{-\frac{x}{a}}$ około x-ów w granicach od $x_1=0$ do $x_2=x$ ma wartość: $V=\frac{\alpha a^2\pi}{2}\left(1-e^{-\frac{2x}{a}}\right)$.

16) **Wykazać**, że powierzchnia zawarta między logarytmiką $x=ae^{\frac{y}{a}}$, osią y-ów, a prostemi $y=y_1$ i $y=y_2$ ma wartość: $A=a(x_2-x_1)$, a objętość bryły powstałej przez obrót krzywej około osi y-ów ma wartość: $V=\frac{a\pi}{2}(x_2^2-x_1^2)$.

17) **Wykazać**, że powierzchnia linii łańcuchowej $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ ma w granicach od do x_2 wartość:

$$A=\frac{a^2}{2}\left(e^{\frac{x_2}{a}}-e^{-\frac{x_2}{a}}\right)-\frac{a^2}{2}\left(e^{\frac{x_1}{a}}-e^{-\frac{x_1}{a}}\right).$$

odpowiedni łuk ma wartość:

$$s=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x_2}{a}}-e^{-\frac{x_2}{a}}\right)-\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x_1}{a}}-e^{-\frac{x_1}{a}}\right).$$

18) **Wyznaczyć** powierzchnię linii łańcuchowej $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ w granicach od $=0$ do $x_2=x$;

19) **Wyznaczyć** długość łuku linii łańcuchowej: $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ w granicach od $=0$ do $x_2=x$.

20) **Wykazać**, że powierzchnia powstała przez obrót linii łańcuchowej: $=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{x}}\right)$ około osi x-ów ma w granicach od $x_1=0$ do $x_2=x$ wartość:

$$F=\frac{a\pi}{2}\left\{\frac{a}{2}\left(e^{\frac{2x}{a}}-e^{-\frac{2x}{a}}\right)+2x\right\}.$$

21) **Wykazać**, że objętość bryły powstałej przez obrót linii łańcuchowej: $=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$ około osi x-ów ma w granicach od $x_1=0$ do $x_2=x$ wartość:

$$V=\frac{a^2\pi}{4}\left\{\frac{a}{2}\left(e^{\frac{2x}{a}}-e^{-\frac{2x}{a}}\right)+2x\right\}.$$

22) Wykazać, że powierzchnia linii łańcuchowej $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ w granicach $x_1 = 0$ do $x_2 = x$ ma wartość $A = a^2 \operatorname{tang} \varphi$, gdzie φ jest kąt, jaki styczna w punkcie cowym linii łańcuchowej tworzy z osią x-ów, a odpowiedni łuk $s = a \operatorname{tang} \varphi = \sqrt{y^2 - a^2}$

23) Wykazać, że objętość bryły powstałej przez obrót linii łańcuchowej:

$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ około osi x-ów ma w granicach od $x_1 = 0$ do $x_2 = x$ wartość:

$$V = \frac{a\pi}{2}\left(ys + a^2 \log \frac{y+s}{a}\right),$$

gdzie s jest długością łuku krzywej a, y rzędną końcowego punktu.

24) Wykazać, że objętość bryły powstałej przez obrót linii łańcuchowej:

$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ około osi y-ów ma w granicach od $x_1 = 0$ do $x_2 = x$ wartość:

$$V' = a^2\pi\left\{y\left(\log\frac{y+s}{a}\right)^2 - 2s \log \frac{y+s}{a} + 2(y-a)\right\}.$$

25) Wykazać, że powierzchnia bryły powstałej przez obrót linii łańcuchowej:

$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ około osi y-ów ma w granicach od $x_1 = 0$ do $x_2 = x$ wartość:

$$F = 2a\pi\left\{s \log \frac{y+s}{a} - (y-a)\right\},$$

gdzie s jest długością łuku, a y rzędną końcowego punktu.

26) Jeżeli $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ wykazać, że:

$$V_{0 \ldots x} = \frac{\pi y}{2}(ax + y\sqrt{y^2 - x^2}), \qquad V_{a \ldots y} = \pi\left[(2a^2 + x^2)y - 2(a^2 + x\sqrt{y^2 - a^2})\right].$$

27) Wykazać, że pobocznica bryły, powstałej przez obrót logarytmiki $y = a$. około osi x-ów w granicach od $x_1 = 0$ do $x_2 = \infty$ określa się wzorem:

$$F = \pi\alpha\left\{\frac{a}{\alpha}\sqrt{1 + \frac{a^2}{\alpha^2}} + \log\left(\frac{a}{\alpha} + \sqrt{1 + \frac{a^2}{\alpha^2}}\right)\right\}.$$

Znaleźć pobocznice powierzchni powstałej przez obrót krzywej: $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right.$

28) około osi x-ów w granicach od $x_1 = 0$ do $x_2 = x$;

29) około osi y-ów w granicach od $y_1 = 0$ do $y_2 = y$.

30) Wykazać, że środek ciężkości łuku linii łańcuchowej: $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ w nicach od $x_1 = 0$ do $x_2 = x$ określają wzory:

$$\xi_s = \frac{x\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) - a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) + 2a}{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}, \qquad \eta_s = \frac{a\left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}\right) + 4x}{4\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)}$$

które możemy zastąpić przez następujące:

$$\xi_s = x - \frac{a(y-a)}{s}, \qquad \eta_s = \frac{1}{2}\left(y + \frac{ax}{s}\right),$$

gdzie x i y są spółrzędne punktu końcowego, a s długością łuku.

31) Wykazać, że środek ciężkości (ξ_a, η_a) powierzchni linii łańcuchowej:

$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{x}{a}}\right)$ w granicach $x_1 = 0$ do $x_2 = x$ określają wzory: $\xi_a = \xi_s$, $\eta_a = \frac{1}{2}$

gdzie ξ_s, η_s mają wartości w zag. 36 podane.

32) Wykazać, że moment bezwładności łuku linii łańcuchowej: $y=\left(\frac{a}{2}e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ względem osi y ów w granicach od $x_1=0$ do $x_2=x$ wyraża się wzorem:

$$I_s=\frac{a}{2}\left\{(x^2-2ax+2a^2)e^{\frac{x}{a}}-\left(x^2+2ax+2x^2\right)e^{-\frac{x}{a}}\right\}.$$

33) Wykazać, że całkowita powierzchnia cykloidy $x=a(\varphi-\sin\varphi)$, $y=a(1-\cos\varphi)$: $A=3a^2\pi$.

34) Wykazać, że długość łuku cykloidy $x=a(\varphi-\sin\varphi)$, $y=a(1-\cos\varphi)$ w granicach od $\varphi_1=0$ do $\varphi_2=\varphi$ ma wartość: $S=8a\sin^2\frac{\varphi}{2}$.

35) Wykazać, że całkowita długość cykloidy $x=a(\varphi-\sin\varphi)$, $y=a(1-\cos\varphi)$ równa się ośmiokrotnemu promieniowi koła ruchomego.

36) Wykazać, że całkowita objętość bryły powstałej przez obrót cykloidy $r=a(\varphi-\sin\varphi)$, $y=a(1-\cos\varphi)$ około jej podstawy ma wartość: $V=5a^3\pi^2$.

37) Wykazać, że objętość bryły powstałej przez obrót cykloidy około stycznej w jej wierzchołka jest równa $a^3\pi^2$.

38) Wykazać, że całkowita powierzchnia powstała przez obrót cykloidy $x=a(\varphi-\sin\varphi)$, $y=a(1-\cos\varphi)$ około jej podstawy jest równa $\frac{64}{3}a^2\pi$.

39) Wykazać, że środek ciężkości pola cykloidy $x=a(\varphi-\sin\varphi)$, $y=a(1-\cos\phi)$, w granicach od $\varphi_1=0$ do $\varphi_2=\pi$ ma spółrzędne: $\xi_a=a\left(\frac{\pi}{2}+\frac{8}{9\pi}\right)$, $\eta_a=\frac{5}{6}a$.

40) Wykazać, że środek ciężkości całkowitego pola cykloidy: $x=a(\varphi-\sin\varphi)$, $y=a(1-\cos\varphi)$ ma spółrzędne: $\xi_a=a\pi$, $\eta_a=\frac{5}{6}a$.

41) Wykazać, że środek ciężkości łuku cykloidy $x=a(\varphi-\sin\varphi)$, $y=a(1-\cos\varphi)$, liczonego od punktu zerowego do punktu najwyższego ma spółrzędne: $\xi_s=\frac{4}{3}a$, $\eta_s=\frac{4}{3}a$.

42) Wykazać, że objętość bryły powstałej przez obrót cykloidy $x=a(\varphi-\sin\varphi)$, $y=a(1-\cos\varphi)$ około osi x-ów ma w granicach od $\varphi_1=0$ do $\varphi_2=\varphi$ wartość:

$$V=a^3\pi\left(\frac{5}{2}\varphi-4\sin\varphi+\frac{3}{4}\sin 2\varphi+\frac{1}{3}\sin^2\varphi\right),$$

a jej powierzchnia:
$$F=16a^2\pi\left(\frac{2}{3}-\cos\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{2}\cos^3\frac{\varphi}{2}\right).$$

43) Wykazać, że objętość bryły powstałej przez obrót pół cykloidy około osi x-ów ma wartość: $V=\frac{5}{2}a^3\pi^2$, a odpowiednia powierzchnia: $F=\frac{32}{3}a^2\pi$.

44) Wykazać, że powierzchnia cykloidy $x=a(\varphi-\sin\varphi)$, $y=a(1-\cos\varphi)$ ma w granicach od $x_1=0$ do $x_2=x$ wartość:

$$A=a^2\left(\frac{3}{2}\varphi-2\sin\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right).$$

45) Wykazać, że powierzchnia zawarta między cykloidą $x=a(\varphi-\sin\varphi)$, $y=a(1-\cos\varphi$, osią x-ów i cięciwą koła ruchomego odpowiadającą kątowi φ ma wartość: $A=\frac{3}{2}a^2(\varphi-\sin\varphi)$.

46) Wykazać, że długość łuku zwyczajnej epicykloidy:

$$x=(R+r)\cos\varphi-r\cos\frac{R+r}{r}\varphi,\qquad y=(R+r)\sin\varphi-r\sin\frac{R+r}{r}\varphi,$$

w granicach od φ_1 do φ_2 ma wartość:

$$s=\frac{4r}{R}(R+r)(\cos\frac{R}{2r}\varphi_1-\cos\frac{R}{2r}\varphi_2).$$

47) Wyprowadzić równanie epicykloidy zwyczajnej w przypadku, gdy $R=r=a$ i wykazać, że ta epicykloida ta jest kardioidą.

48) Wyprowadzić równanie hypocykloidy zwyczajnej w przypadku, gdy $a=r=\frac{R}{4}$ i wykazać, że ta hypocykloida jest astroidą.

49) Wyprowadzić równanie hypocykloidy ogólnej w przypadku, gdy $r=\frac{R}{2}$ wykazać, że hypocykloida ta jest elipsą o półosiach $r+a$ i $r-a$.

50) Wykazać, że hypocykloida w przypadku $a=r=\frac{R}{2}$ jest linią prostą, a mianowicie średnicą koła podstawowego.

51) Wykazać, że łuk epicykloidy zwyczajnej zawarty między dwoma punktami zwrotu ma wartość: $s=\frac{4r}{R}(R+r)$, a odpowiedni łuk hypocykloidy zwyczajnej: $s=\frac{4r}{R}(R-r)$.

52) Wykazać, że powierzchnia epicykloidy zwyczajnej zawarta między promieniami dwóch sąsiednich punktów zwrotu: $A=\frac{a^2\pi}{R}(3R-2r)$.

53) Wykazać, że promień krzywizny w astroidzie $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ ma wartość: $\rho=-3\sqrt[3]{axy}$.

54) Wykazać, że powierzchnia zawarta między traktrysą o długości stycznej równej a a jej asymptotą: $A=\frac{a^2\pi}{2}$.

55) Wykazać, że długość traktrysy od wierzchołka do pewnego y ma wartość: $s=a\log\frac{a}{y}$.

56) Wykazać, że całkowita powierzchnia bryły powstałej przez obrót traktrysy około jej asymptoty ma wartość: $F=4a^2\pi$.

57) Wykazać, że powierzchnia krzywej: $r=\frac{2a}{\pi}\cdot\frac{\varphi}{\sin\varphi}$ ma w granicach od $\varphi_1=0$ do $\varphi_2=\frac{\pi}{2}$ wartość: $A=\frac{2a^2}{\pi}\log 2$.

58) Wykazać, że powierzchnia spiralnej Archimedesa: $r=a\varphi$ w granicach od $\varphi_1=0$ do $\varphi=\frac{\pi}{2}$ ma wartość: $A=\frac{\pi^3}{48}a^2$.

59) Wykazać, że powierzchnia krzywej $r=e^{a\varphi}$ zwanej spiralną logarytmiczną w granicach od r_1 do r ma wartość $A_{r_1\ldots r_2}=\frac{r_2{}^2-r_1{}^2}{4a}$.

60) Wykazać, że spiralna hiperboliczna: $r=\frac{a}{\varphi}$ ograniczona promieniami r_1 i r_2 tworzy powierzchnię: $A=\frac{a}{2}(r_1-r_2)$.

61) Wykazać, że spiralna Archimedesa $r=a\varphi$ ma w granicach od $\varphi_1=0$ do $\varphi_2=\varphi$ łuk:

$$s=\left[\varphi\sqrt{1+\varphi^2}+\log(\varphi+\sqrt{1+\varphi^2})\right].$$

62) Wyznaczyć długość łuku krzywej $r=ae^{\varphi}$ (spiralnej logarytmicznej) w granicach od $\varphi_1=0$ do $\varphi_2=\varphi$.

63) Jaką jest długość łuku krzywej $r=ae^{\varphi}$ w granicach od $\varphi_1=-\infty$ do $\varphi_2=0$.

64) Wykazać, że powierzchnia spiralnej Archimedesa o równaniu: $r=\frac{a\varphi}{a\pi}$ ma w granicach od φ_1 do φ_2 wartość: $A=\frac{a^2}{24\pi^2}(\varphi_2{}^3-\varphi_1{}^3)$, a odpowiedni łuk:

$$s=\frac{a}{4\pi}\left[\varphi_2\sqrt{1+\varphi_2{}^2}-\varphi_1\sqrt{1+\varphi_1{}^2}+\log\frac{\varphi_2+\sqrt{1+\varphi_2{}^2}}{\varphi_1+\sqrt{1+\varphi_1{}^2}}\right].$$

65) Wykazać, że powierzchnia spiralnej logarytmicznej $r=a^{\varphi}$ w granicach od φ_1 do φ_2 ma wartość: $A=\frac{1}{4}\frac{a^{2\varphi_2}-a^{2\varphi_1}}{\log a}$.

66) Wykazać, że łuk spiralnej logarytmicznej $r=a^{\varphi}$ ma w granicach od φ_1 do φ_2 długość: $s=\sqrt{1+(\log a)^2}\cdot\frac{r_2-r_1}{\log a}$.

67) Wykazać, że powierzchnia spiralnej n-go rzędu $r=a\varphi^n$ ma w granicach od φ_1 do φ_2 wartość: $A=\frac{a^2}{2}\frac{\varphi_2{}^{n+1}-\varphi_1{}^{n+1}}{n+1}$.

68) Wyznaczyć podstyczną biegunową spiralnej Archimedesa $r = a\varphi$.

69) Wyznaczyć podstyczną biegunową spiralnej hyperbolicznej $r = \frac{a}{\varphi}$.

70) Wyznaczyć podstyczną biegunową spiralnej logarytmicznej: $r = b \cdot e^{\frac{\varphi}{a}}$.

71) Wykreślić krzywą $r = \frac{a}{\sqrt{\varphi}}$ i wyznaczyć jej podstyczną biegunową T' i odległość stycznej od bieguna.

72) Wykreślić spiralną o równaniu $\varphi\sqrt{2ar - r^2} = b$ i wykazać, że koło o promieniu $2a$ jest jej kołem asymptotycznem, a biegun jest punktem asymptotycznym.

73) Wykreślić spiralną $r = \frac{a\varphi^2}{\varphi^2 - 1}$ i wykazać, że ona ma dwie asymptoty nachylone do osi biegunowej pod kątami $\varphi = +1$ i $\varphi = -1$ i koło asymptotyczne o promieniu a.

Wyznaczyć promień krzywizny: 74) kardioidy: $r = a(1 - \cos\varphi)$, 75) lemniskaty: $r^2 = a^2\cos 2\varphi$, 76) spiralnej Archimedesa: $r = a\varphi$, 77) spiralnej logarytmicznej $r = \frac{a}{\varphi}$.

Rozwiązania XLIII:

1) $A = x_2[\log x_2 - 1] - x_1[\log x_1 - 1]$ 2) $S_{1\ldots x} = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{2} + \log\frac{(1+\sqrt{2})x}{1+\sqrt{1+x^2}}$.

$T = a$, $T = \sqrt{a^2+y^2}$, $N' = \frac{y^2}{a}$, $N = \frac{y\sqrt{a^2+y^2}}{a}$, 4) $T' = \frac{ay}{\sqrt{y^2-a^2}}$, $T = \frac{y^2}{\sqrt{y^2-a^2}}$,

$= \frac{a}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}\right)$, $N = \frac{y^2}{a}$. 18) $A = a\sqrt{y^2-a^2}$. 19) $S_{0\ldots x} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

$\frac{\pi x}{2}\left\{\frac{a}{2}\left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}\right) + 2x\right\}$. 29) $\pi\left\{2a^2 + ax\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) - a^2\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)\right\}$.

$S_{0\ldots y} = a\sqrt{2}\,(e^{\varphi} - 1)$. 68) $S_{-\infty\ldots 0} = a\sqrt{2}$. 68) $T' = \frac{r^2}{a}$. 70) $T = ar$.

$T = 2a\sqrt{\varphi}$, $p = \frac{2a^2r}{\sqrt{r^4+4a^4}}$. 74) $\rho = \frac{2}{3}\sqrt{2ar}$. 75) $\rho = \frac{a^2}{3r}$. 76) $\rho = \frac{(a^2+r^2)^{3/2}}{2a^2+r^2}$.

$\rho = \frac{r(a^2+r^2)^{3/2}}{a^3}$.

Literatura. G. Salmon: Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven, deutsch bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler. Leipzig 1873. Dr. F. Gregory: Examples of the processes of the differential and integral calculus. Cambridge 1891.

Tematy do rozprawek naukowych.

1. Linia łańcuchowa, jej własności i uogólnienia.
2. Cykloidy i ich uogólnienia.
3. Linie spiralne i ich własności.

Wykład XLIV.

Zastosowanie całek określonych do krzywych przestrzennych i powierzchni.

1. Równania krzywej przestrzennej. Dwa równania między trzema zmiennemi x, y, z kształtu ogólnego:

$$f_1(x, y, z)=0, \quad f_2(x, y, z)=0 \tag{1}$$

przedstawiają jako równania jednoczesne zbiór punktów wspólnych dwom powierzchniom, z których jedna odpowiada równaniu $f_1(x, y, z)=0$, druga równaniu $f_2(x, y, z)=0$, a zbiór ten określa pewną krzywą w przestrzeni, jako przekrój dwóch powierzchni.

To znaczy: *Dwa równania niezależne o 3-ch zmiennych określają w ogólności pewną krzywą przestrzenną i nawzajem każdej krzywej przestrzennej odpowiadają dwa równania od siebie niezależne.*

Za pomocą tych dwu równań, zwanych równaniami krzywej przestrzennej, możemy wyprowadzić szereg innych powierzchni, przez tę krzywą przestrzenną przechodzących. Mianowicie wszelkie równanie kształtu:

$$f_1(x,y, z)+\lambda f_2(x, y, z)=0 \tag{2}$$

gdzie λ jest dowolnym spółczynnikiem, przedstawia powierzchnię, przechodzącą przez krzywą przestrzenną, określoną równaniami:

$$f_1(x, y, z)=0, \quad f_2(x, y, z)=0.$$

Spółrzędne x, y, z punktów, czyniące zadość danym dwu równaniom spełniają bowiem zarazem i równanie (2).

Mając do rozporządzenia parametr λ możemy go tak obrać, aby w równaniu (2) znikła jedna zmienna np. raz zmienna x, drugi raz zmienna y, tym sposobem możemy dane dwa równania krzywej przestrzennej zastąpić dwoma innemi równaniami kształtu:

$$F_1(x, y)=0, \quad F_2(x, z)=0, \tag{3}$$

które uważane za równania o 3-ch zmiennych x, y, z przedstawiają dwie powierzchnie walcowe, jedną o równaniu $F_1(x, y)=0$, prostopadłą do płaszczyzny XOY, drugą o równaniu $F_2(x, z)=0$ prostopadłą do płaszczyzny XOZ. Równania te uważane jako równania o dwu zmiennych przedstawiają rzuty ortogonalne danej krzywej przestrzennej, a to, pierwsze równanie $F_1(x, y)=0$ określa jej rzut (poziomy) na płaszczyznę XOY, drugie równanie $F_2(x, z)=0$ jej rzut (pionowy) na płaszczyznę XOZ.

Krzywa w przestrzeni może być wyznaczona dwoma rzutami, które wyczają jej położenie w przestrzeni, jako krzywą przenikania dwóch porzchni walcowych rzucających, o dane rzuty opartych.

Przedstawiając te równania w formie wyraźnej otrzymujemy zatem rnania kształtu:

$$y=\varphi(x), \quad z=\psi(x) \tag{4}$$

to równania krzywej przestrzennej. Równania te możemy zastąpić trzema wnaniami o dowolnym parametrze t, w postaci:

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t) \tag{5}$$

óre nazywamy **równaniami parametrowemi** krzywej przestrzennej.

Częstokroć używa się przy przedstawianiu krzywych przestrzennych miast spółrzędnych prostokątnych x, y, z punktu P **spółrzędnych walwych**, jakiemi są spółrzędne biegunowe na płaszczyźnie: r, φ i wysokość z. amy tedy:

$$x=r\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi, \quad z=z,$$

równania parametrowe krzywej przestrzennej w spółrzędnych walcowych rzedstawiają się w postaci:

$$r=f_1(t), \quad \varphi=f_2(t), \quad z=f_3(t) \tag{6}$$

Przy użyciu spółrzędnych sferycznych r, Θ, φ mamy:

$$x=r\cos\Theta\sin\varphi, \quad y=r\sin\Theta\sin\varphi, \quad z=r\cos\varphi,$$

wnania parametrowe krzywej przestrzennej w spółrzędnych sferycznych rzedstawiają się tedy w postaci:

$$r=F_1(t), \quad \Theta=F_2(t), \quad \varphi=F_3(t). \tag{7}$$

2. Linia śrubowa na walcu kołowym jako typowy przykład krzywej rzestrzennej. Linię śrubową opisuje punkt, który tak porusza się na walcu kołowym, że jego odległość od podstawy walca jest proporcyonalną do kąta obrotu, jaki wykonywa jego rzut na podstawę walca około osi tego walca.

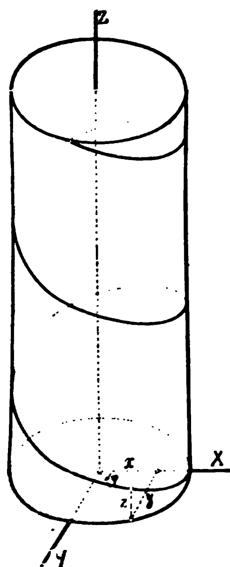


Fig. 170.

Przyjmijmy oś OZ jako oś walca kołowego o promieniu r, to równanie takiego walca kołowego przedstawi się w postaci: $x^2+y^2=r^2$. Wysokość z punktu ruchomego ma być proporcyonalną do kąta φ, opisanego w czasie ruchu przez jego rzut na płaszczyznę XOY, będzie zatem $z=a\varphi$, a że:

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{y}{x}, \text{ a więc: } \varphi=\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x},$$

przeto:
$$z=a\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}.$$

Mamy więc dwa równania:

$$x^2+y^2=r^2, \quad z=a\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x},$$

czyli:
$$x^2+y^2=r^2, \quad y=x\operatorname{tang}\frac{z}{a} \tag{8}$$

jako szukane równania linii śrubowej (fig. 170). Pierwsze przedstawia walec kołowy, drugie powierzchnię;

zwaną powierzchnią śrubową, powstałą przez ruch prostej posuwającej się po osi z-ów, a zarazem obracającej się około tej osi, tak, że jej przesunięcia są proporcyonalne do wielkości obrotu.

Linia śrubowa występuje tu zatem jako przekrój walca kołowego: $x^2+y^2=r^2$, z powierzchnią śrubową: $y=x \operatorname{tang} \frac{z}{a}$.

Z tych dwu równań znajdziemy rzuty linii śrubowej na poszczególne płaszczyzny rzutowe w postaci:

$$x^2+y^2=r^2, \quad x=r\cos\frac{z}{a}, \quad y=r\sin\frac{z}{a}.$$

Wprowadzając parametr $t=\frac{z}{a}$, otrzymujemy parametrowe równania linii śrubowej w postaci:

$$x=r\cos t, \quad y=r\sin t, \quad z=at. \tag{9}$$

3. **Rektyfikacya krzywej przestrzennej.** Element ds łuku s krzywej wyznacza odległość dwu punktów krzywej po sobie następujących, a więc punktów $P(x, y, z)$ i $Q(x+dx, y+dy, z+dz)$, określoną wzorem:

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

Jeżeli krzywa przestrzenna dana jest równaniami:

$$y=\varphi(x), \quad z=\psi(x),$$

wtedy mamy:
$$dy=\varphi'(x)\,.\,dx, \quad dz=\psi'(x)\,dx,$$

zatem:
$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx=\sqrt{1+[\varphi'(x)]^2+[\psi'(x)]^2}\,dx.$$

zatem długość łuku krzywej zawartego między punktami A i B, którym odpowiadają odcinki $x_1=a$, $x_2=b$ przedstawi się wzorem:

$$s=\int_a^b\sqrt{1+[\varphi'(x)]^2+[\psi'(x)]^2}\,dx. \tag{10}$$

Jeżeli krzywa przestrzenna dana jest trzema równaniami w postaci:

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t),$$

wtedy otrzymamy wzór:
$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,.\,dt,$$

czyli:
$$\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{[f'(t)]^2+[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt, \tag{11}$$

podający długość łuku w granicach od $t=t_1$ do $t=t_2$.

4. **Uwaga.** Jeżeli krzywa przestrzenna odniesiona jest do spółrzędnych walcowych x, φ, z, wtedy mamy:
$$x=r\cos\varphi, \; y=r\sin\varphi, \; z=z,$$

zatem:
$$dx=-r\sin\varphi\,d\varphi+\cos\varphi\,dr, \quad dy=r\cos\varphi\,d\varphi+\sin\varphi\,dr, \quad dz=dz,$$

zatem:
$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=dr^2+r^2d\varphi^2+dz^2,$$

zatem:
$$ds=\sqrt{dr^2+r^2d\varphi^2+dz^2}=s\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+r^2+\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi,$$

jeżeli φ uważamy za zmienną niezależną.

Jeżeli krzywa przestrzenna odniesiona jest do spółrzędnych sferycznych r, θ, φ, wtedy mamy:

$$x=r\cos\theta\sin\varphi, \; y=r\sin\theta\sin\varphi, \; z=r\cos\varphi,$$

$$dx=r\cos\theta\cos\varphi\,d\varphi-r\sin\theta\sin\varphi\,d\theta+\cos\theta\sin\varphi\,dr,$$

$$dy=r\sin\theta\cos\varphi\,d\varphi+r\cos\theta\sin\varphi\,d\theta+\sin\theta\sin\varphi\,dr,$$

$$dz = -r\sin\varphi\, d\varphi + \cos\varphi\, dr,$$
$$ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2 = r^2 d\varphi^2 + r^2\sin^2\varphi\, d\theta^2 + dr^2,$$
$$ds = \sqrt{r^2 d\varphi^2 + r^2\sin^2\varphi\, d\theta^2 + dr^2},$$
$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + r^2\sin^2\varphi\left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi.$$

5. **Przykłady.** α) **Rektyfikacya linii śrubowej**: $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $z = at$. Mamy tu

$$dx = -r\sin t\,.\,dt,\quad dy = r\cos t\,.\,dt,\quad dz = a\,.\,dt,$$

zatem:
$$ds = \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t + a^2}\,.\,dt = \sqrt{r^2+a^2}\,dt,$$

a więc:
$$s = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{r^2+a^2}\,dt = \sqrt{r^2+a^2}\int_{t_1}^{t_2} dt,$$

czyli:
$$s = (\sqrt{r^2+a^2})(t_2 - t_1).$$

β) Rektyfikacya krzywej przestrzennej określonej równaniami: $y = \frac{1}{2}x^2$, $z = \frac{1}{6}x^3$.

Mamy tu:
$$dy = x\,dx,\quad dz = \frac{1}{2}x^2\,dx,$$
$$ds^2 = (1+x^2+\frac{1}{4}x^4)dx^2 = (1+\frac{1}{2}x^2)^2 dx^2,$$
$$ds = (1+\frac{1}{2}x^2)dx,$$

zatem otrzymujemy długość łuku w granicach od $x_1 = 0$ do $x_2 = x$ w postaci:

$$s = \int_0^x (1+\frac{1}{2}x^2)\,dx = x + \frac{x^3}{6},\quad \text{czyli:}\quad s = x + z,$$

gdzie x, y, z są spółrzędne końcowegomi punktu krzywej.

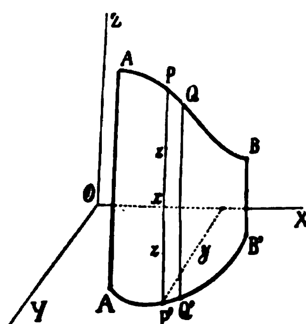


Fig. 171.

6. **Komplanacya walca rzucającego krzywą przestrzenną.** Przypuśćmy, że krzywa przestrzenna określona jest jako przekrój walca o równaniu: $y = \varphi(x)$ i powierzchni o równaniu: $z = f(x, y)$. Element $dF = PQP'Q'$, powierzchni tego walca możemy uważać za prostokąt o podstawie $P'Q'$, który jest elementem łuku krzywej: $y = f(x)$ i o wysokości:

$$PP' = z = f[x, \varphi(x)] = \psi(x),$$

zatem:
$$dF = z\,ds = z\sqrt{1+y'^2}\,dx = \psi(x)\sqrt{1+[\varphi'(x)]^2}\,dx,$$

wobec tego otrzymamy powierzchnię walca w granicach od $x = x_1$ do $x = x_2$ określoną wzorem:

$$F = \int_{x_1}^{x_2} \psi(x)\sqrt{1+[\varphi'(x)]^2}\,.\,dx. \qquad (12)$$

7. **Kubatura powierzchni dowolnych.** Obliczanie objętości bryły ograniczonej powierzchnią o równaniu: $F(x, y, z) = 0$ nazywamy kubaturą tej powierzchni. Obliczenie to możemy wykonywać albo: 1) za pomocą całki pojedyńczej, albo: 2) za pomocą całki podwójnej, albo: 3) za pomocą całki potrójnej. W pierwszym przypadku wyobrażamy sobie objętość V, którą mamy wyznaczyć, podzieloną na elementa bryłowe nieskończenie małe rzędu pierwszego dV, t. j. na takie elementa trójwymiarowe, których jeden tylko wymiar jest nieskończenie mały; w drugim przypadku wyobrażamy sobie objętość V podzieloną na elementa nieskończenie małego rzędu drugiego d^2V, t. j. na takie elementa trójwymiarowe, których dwa wymiary są nieskończenie małe; w trzecim przypadku wyobrażamy sobie objętość V podzieloną

na elementa nieskończenie małe trzeciego rzędu, t j. na takie elementa trójwymiarowe, których wszystkie trzy wymiary są nieskończenie małe.

Elementami przestrzennymi trójwymiarowymi a nieskończenie małymi rzędu pierwszego są np. 1) warstwy walcowe o podstawie $y^2\pi$, a o wysokości dx, a więc o wielkości: $dV=\pi y^2 dx$, albo pierścienie kuliste o promieniu r, a o grubości dr, a więc o wielkości; $dV=4r^2\pi . dr$ i t. p.

Elementami bryłowymi nieskończenie małymi rzędu drugiego są np. 1) graniastosłupy o podstawie prostokątnej o powierzchni $dx\, dy$, wysokości z a więc o wielkości: $d^2V=z\, dx\, dy$, 2) graniastosłupy o podstawie w kształcie wycinka pierścienia kołowego o powierzchni $r\, d\varphi . dr$, a wysokości z, a więc o wielkości: $d^2V=z\, r d\varphi\, dr$.

Elementami nieskończenie małymi rzędu trzeciego są np. graniastosłupy o wymiarach dx, dy, dz, a więc wielkości $d^3V=dx\, dy\, dz$.

8. Zastosowanie całek określonych pojedyńczych w kubaturze powierzchni. Niech będzie $F(x, y, z)=0$ równaniem powierzchni, wtedy element dV objętości, zawarty między dwiema płaszczyznami prostopadłemi do osi x-ów w odstępie dx otrzymuje wartość: $dV=A_x dx$, gdzie A_x przedstawia wielkość przekroju powierzchni $F(x, y, z)=0$ płaszczyzną równoległą do ZOY w odstępie x. Znalazłszy powierzchnię A_x jako funkcyę zmiennej x, otrzymujemy:

$$V=\int_{x_1}^{x_2} A_x\, dx,$$

wzór przedstawiający objętość powierzchni zawartą między dwiema płaszczyznami prostopadłemi do osi x-ów w miejscach x_1 i x_2.

Analogicznie otrzymujemy wzory:

$$V=\int_{y_1}^{y_2} A_y\, dy \quad \text{i} \quad V=\int_{z_1}^{z_2} A_z\, dz,$$

gdzie A_y i A_z przedstawiają wielkości przekrojów prostopadłych do osi y-ów i z-ów.

9. Zastosowanie całek podwójnych w kubaturze powierzchni. Niech będzie $z=f(x, y)$ równaniem powierzchni, natenczas używając elementów nieskończenie małych rzędu drugiego w postaci graniastosłupów o objętości: $d^2V=z\, dx\, dy$ otrzymamy na wyznaczenie objętości wzór:

$$V=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} z\, dx\, dy=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dx\, dy \tag{13}$$

gdzie granice całkowania są wyznaczone przekrojem powierzchni $z=f(x, y)$ płaszczyzną XOY czyli krzywą $f(x, y)=0$, względnie zależą od ograniczenia objętości wyznaczyć się mającej za pomocą walca opartego o płaszczyznę XOY.

Jeżeli powierzchnia daną jest równaniem $F(x, y, z)=0$, a chodzi o objętość bryły powierzchnią ograniczonej, wtedy, przyjmując, że każda prosta równoległa do osi z-ów przecina powierzchnię w dwu punktach o wysokościach z_1 i z_2, otrzymamy dwie objętości, których różnica daje żądaną objętość w postaci:

$$V=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}(z_2-z_1)\, dx\, dy.$$

Granice całkowania określa tedy walec styczny do powierzchni $F(x, y, z)=0$, którego krzywa styczności określona jest równaniami $F(x, y, z)=0$, $\frac{\partial F}{\partial z}=0$, z których po wyrugowaniu zmiennej z otrzymujemy równanie: $\varphi(x, y)=0$, jako równanie jej rzutu.

10. Zastosowanie całek potrójnych w kubaturze powierzchni. Rozkładając daną powierzchnię na elementa nieskończenie małe trzeciego rzędu w postaci: $d^3V=dx\,dy\,dz$, otrzymujemy objętość V określoną całką potrójną:

$$V=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} dx\,dy\,dz, \tag{14}$$

gdzie granice całkowania wynikają z równania powierzchni $F(x, y, z)=0$. Przy użyciu spółrzędnych sferycznych r, θ, φ, otrzymujemy wzór:

$$V=\int_{r_1}^{r_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi. \tag{15}$$

Jeżeli równanie powierzchni w spółrzędnych sferycznych przedstawia się w postaci $r=f(\theta, \varphi)$, natenczas, przyjmując, że początek układu O znajduje się wewnątrz szukanej objętości, otrzymujemy ze względu na to, że:

$$\int_0^r r^2\,dr=\frac{r^3}{3}.$$

objętość w postaci całki podwójnej:

$$V=\frac{1}{3}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^3\sin\theta\,d\theta\,d\varphi, \tag{16}$$

odpowiadającej podziałowi szukanej objętości na stożki z wierzchołkiem 0, o podstawie: $r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$ i wysokości r.

Całą objętość w granicach od $\varphi_1=0$ do $\varphi_2=2\pi$ i od $\theta_1=0$ do $\theta_2=\pi$ podaje tedy wzór:

$$V=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi} r^3\sin\theta\,d\theta. \tag{17}$$

11. Przykłady. a) **Kubatura ellipsoidy:** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Przekrój ellipsoidy prostopadły do osi OZ w odległości z od początku układu (fig. 172) jest ellipsą:

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}=1,$$

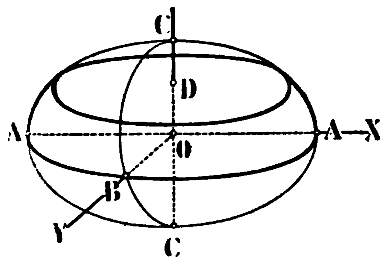


Fig. 172.

której powierzchnia: $A_z=\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$. Objętość warstwy ellipsoidalnej w granicach od $z=z_1$ do $z=z_2$ przedstawia się zatem wzorem:

$$V_{z_1\ldots z_2}=ab\pi\int_{z_1}^{z_2}\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz,$$

czyli: $V_{z_1\ldots z_2}=ab\pi\left[(z_2-z_1)-\frac{1}{3}\frac{z_2^3-z_1^3}{c^2}\right]$.

Przyjmując $z_1=0$, $z_2=z$, otrzymujemy stąd:

$$V_{0\ldots z}=ab\pi\left\{z-\frac{z^3}{3c^2}\right\}=ab\pi z\left(1-\frac{1}{3}\frac{z^2}{c^2}\right),$$

skąd dla $z=c$ wypływa: $V_{0\ldots c}=ab\pi.\frac{2}{3}c$, a stąd objętość całej ellipsoidy trójosiowej: $V=\frac{4}{3}abc\pi$. Objętość ta wyraża się za pomocą całki podwójnej wzorem:

$$V = 4c\int_0^a\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy = \frac{4}{3}abc\pi,$$

a za pomocą całki potrójnej wzorem:

$$V = 4\int_0^a\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a}}}\int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dx\,dy\,dz = \frac{4}{3}abc\pi.$$

β) **Kubatura hyperboloidy o jednej powłoce:** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. Przekrój powierzchni prostopadłej do osi OZ w odstępie z (fig. 173) jest ellipsą:

$$\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)}=1,$$

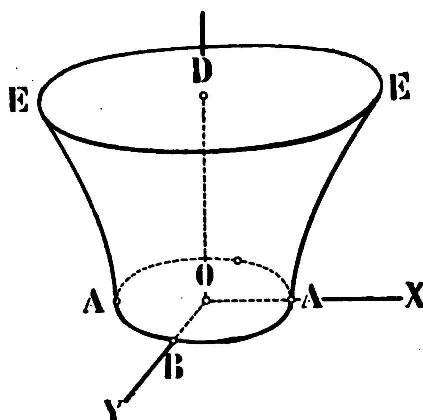


Fig. 173.

której powierzchnia: $A_z = ab\pi\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)$. Objętość warstwy hyperboloidalnej będzie więc wyznaczoną wzorem:

$$V_{z_1\ldots z_2} = ab\pi\int_{z_1}^{z_2}\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)dz = ab\pi\Big|_{z_1}^{z_2}\left(z+\frac{z^3}{3c^2}\right),$$

czyli: $V_{z_1\ldots z_2} = ab\pi\left\{(z_2-z_1)+\frac{1}{3c^2}(z_2^3-z_1^3)\right\}$.

Przyjmując $z_1=0$, $z_2=z$, otrzymujemy stąd:

$$V_{0\ldots z} = ab\pi\left(z+\frac{z^3}{3c^2}\right) = ab\pi z\left(1+\frac{1}{3}\frac{z^2}{c^2}\right),$$

skąd dla $z=c$ wypada: $V_{0\ldots c}=\frac{4}{3}abc\pi$.

γ) **Kubatura hyperboloidy o dwu powłokach:** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. Przekrój prostopadły do osi x-ów w odstępie x (fig. 174) jest ellipsą:

$$\frac{y^2}{b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)}=1,$$

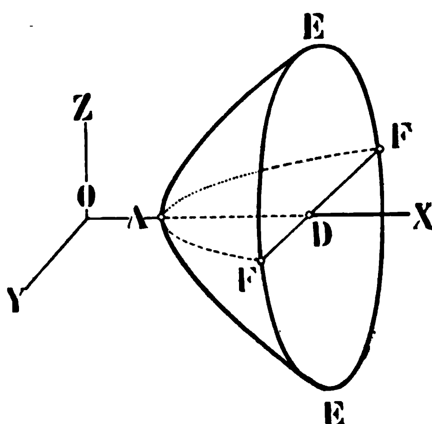


Fig. 174.

której powierzchnia $A_x = bc\pi\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)$. Objętość warstwy w granicach x_1 i x_2 będzie zatem:

$$V_{x_1\ldots x_2} = bc\pi\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)dx = bc\pi\Big|_{x_1}^{x_2}\left(\frac{x^3}{3a^2}-x\right),$$

czyli: $V_{x_1\ldots x_2} = bc\pi\left\{\frac{x_2^3-x_1^3}{3a^2}-(x_2-x_1)\right\}$.

Przyjmując $x_1=a$, $x_2=x$, otrzymujemy:

$$V_{a\ldots x} = bc\pi\left\{\frac{x^3-a^3}{3a^2}-(x-a)\right\} =$$
$$= bc\pi(x-a)\left\{\frac{x^2+ax+a^2}{3a^2}-1\right\}.$$

Dla $x=2a$ wypływa stąd: $V_{a\ldots 2a}=\frac{4}{3}abc\pi$.

δ) **Kubatura paraboloidy elliptycznej:** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$. Płaszczyzna prostopadła do osi z-ów w odległości z od początku układu (fig. 175) przecina ją podług ellipsy: $\frac{x^2}{2a^2z}+\frac{y^2}{2b^2z}=1$, której osie są $a\sqrt{2z}$ i $b\sqrt{2z}$, więc powierzchnia przekroju:

$$A_z = a\sqrt{2z}\,.\,b\sqrt{2z}\,.\,\pi = 2ab\pi z.$$

Objętość warstwy tejże paraboloidy elliptycznej przedstawia się zatem wzorem:

$$V_{z_1\ldots z_2} = 2ab\pi\int_{z_1}^{z_2} z\,dz = ab\pi(z_2^2-z_1^2),$$

czyli:
$$V = ab\pi(z_2+z_1)(z_2-z_1).$$

Kładąc $z_2 - z_1 = h$ i uwzględniając, że $2ab\pi z_2 = A_2$, $2ab\pi z_1 = A_1$ przedstawiają pochnie przekrojów: górnego w wysokości z_2 i dolnego w wysokości z_1, otrzymamy powyższy wzór w postaci: $V = (A_1 + A_2)\frac{h}{2}$.

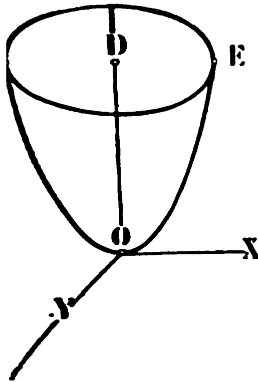


Fig. 175.

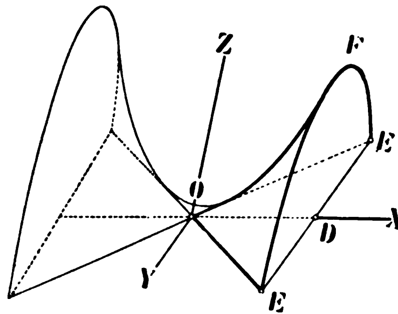


Fig. 176.

Dla $z_1 = 0$, $z_2 = z$, otrzymamy: $V_{0\ldots z} = abz^2.\pi$, czyli: $V_{0\ldots z} = 2ab\pi z.\frac{z}{2} = A.\frac{z}{2}$.

ε) **Kubatura paraboloidy hyperbolicznej:** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$. Płaszczyzna prostopadła do osi x-ów w odległości x od początku układu (fig. 176) przecina powierzchnię podług krzywej:

$$y^2 = -2b^2\left(z - \frac{x^2}{2a^2}\right).$$

Powierzchnia przekroju wzniesionego nad płaszczyzną XOY, otrzymuje tedy wartość:

$$A_x = \frac{4}{8}.z.y = \frac{4}{8}\frac{x^2}{2a^2}.\frac{b}{a}.x, \quad \text{czyli:} \quad A_x = \frac{2}{8}\frac{b}{a^3}x^3.$$

Objętość warstwy tejże paraboloidy hyperbolicznej przedstawia się zatem wzorem:

$$V_{x_1\ldots x_2} = \frac{2b}{8a^3}\int_{x_1}^{x_2} x^3\,dx = \frac{2b}{8a^3}.\frac{x_2^4 - x_1^4}{4}.$$

Dla $x_1 = 0$, $x_2 = x$, otrzymujemy stąd:

$$V_{0\ldots x} = \frac{2b}{8a^3}.\frac{x^4}{4} = \frac{2}{8}\frac{b}{a^3}x^3.\frac{x}{4}, \quad \text{czyli:} \quad V_{0\ldots x} = A_x.\frac{x}{4}.$$

12. Komplanacya dowolnych powierzchni. Niech będą x, y, z spółrzędne **punktu** P, zaś $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ spółrzędne sąsiedniego punktu Q (fig. 177), **powierzchni** $z = f(x, y)$ Przeprowadzimy przez punkta P i Q po dwie płaszczyzny: jedną równoległą do XOZ, drugą do YOZ, to płaszczyzny te ograniczą na danej powierzchni element czworokątny PQ, którego rzut na płaszczyznę XOY będzie prostokątem $P'Q'$ o powierzchni: $d^2f = dx\,dy$. Element PQ powierzchni mieści się na płaszczyźnie stycznej punktu P (art. 6 str. 608), t. j. na płaszczyźnie:

$$p(X - x) + q(Y - y) = Z - z,$$

gdzie: $$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

i otrzymuje wartość: $d^2F = \frac{dx\,dy}{\cos\gamma}$, gdzie γ jest kątem, jaki ta płaszczyzna tworzy z płaszczyzną XOY. Mamy tedy:

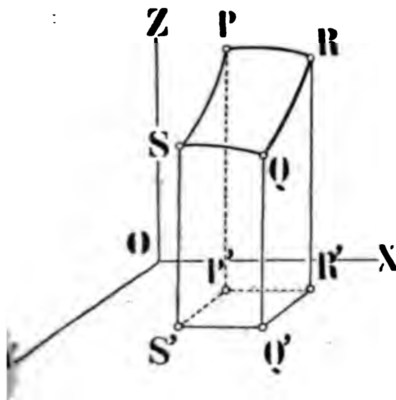


Fig. 177.

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \text{ zatem otrzymujemy: } d^2F = dx\,dy.\sqrt{p^2 + q^2 + 1},$$

wzór podający element pobocznicy danej powierzchni. Stąd otrzymujemy wzór **na komplanacyą** powierzchni w postaci:

$$F = \int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{p^2 + q^2 + 1}\,.\,dx\,dy,$$

czyli:

$$F = \int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\,.\,dx\,dy, \tag{18}$$

gdzie granice całkowania zależą od ograniczenia rzutu powierzchni, która ma być obliczoną.

Zamiast elementu, którego rzut na płaszczyznę XOY jest prostokątem o powierzchni $dx\,dy$, możemy niekiedy z korzyścią przyjmować na danej powierzchni $z=f(x, y)$ takie elementa, których rzuty przedstawiają się w postaci wycinków pierścieni (fig. 178) o powierzchni $r\,d\varphi\,.\,dr$, gdzie:

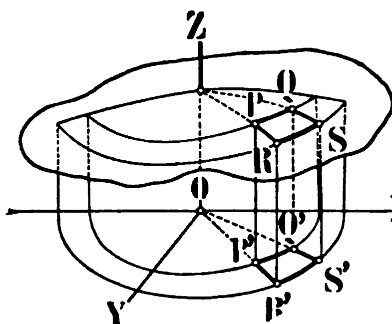


Fig. 178.

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi.$$

W takim razie otrzymujemy wzór komplanacyi w postaci: $F=\int_{r_1}^{r_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{r\,d\varphi\,dr}{\cos\gamma}$. (19)

Niekiedy upraszcza się rachunek wskutek wprowadzenia spółrzędnych sferycznych r, φ, ψ określonych wzorami:

$$x=r\sin\varphi\cos\psi,\quad y=r\sin\varphi\sin\psi,\quad z=r\cos\varphi.$$

Wzór na komplanacyę powierzchni otrzymuje w takim razie kształt:

$$F=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{\psi_1}^{\psi_2}r\,d\varphi\,d\psi\sqrt{r^2\sin^2\varphi+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\sin^2\varphi+\left(\frac{dr}{d\psi}\right)^2}. \tag{20}$$

18. Przykłady. α) Komplanacya kuli: $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Mamy tu: $$x\,dx+y\,dy+z\,dz=0,$$

czyli: $$dz=-\frac{x}{z}dx-\frac{y}{z}dy,\ \text{a więc:}\ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z},$$

przeto wzór:

$$F=\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}\,dx\,dy=\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{a\,dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Dla jednej ósemki kuli (fig. 179), otrzymujemy zaczynając całkowanie od zmiennej y, granice $y_1=0$, $y_2=\sqrt{a^2-x^2}$, a następnie $x_1=0$, $x_2=a$, zatem:

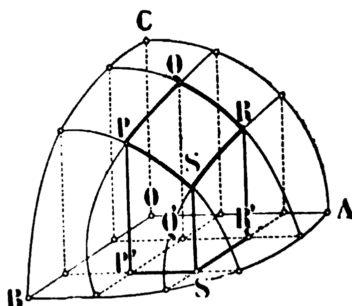


Fig. 179.

$$F=\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{a\,dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

A że:

$$\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=\int_0^{\beta}\frac{dy}{\sqrt{\beta^2-y^2}}=\Big|_0^{\beta}\arcsin\frac{y}{\beta}=\frac{\pi}{2},$$

zatem: $$F=\int_0^a\frac{a\pi}{2}dx=\frac{a\pi}{2}\Big|_0^a x=\frac{a^2\pi}{2}.$$

Powierzchnia całej kuli jest zatem:

$$F=8\,.\,\frac{a^2\pi}{2}=4a^2\pi.$$

Gdybyśmy chcieli całkować najpierw podług x, a potem podług y, wówczas mielibyśmy przy ósemce kuli dla zmiennej x granice $x_1=0$, $x_2=\sqrt{a^2-y^2}$, a dla y granice $y_1=0$, $y_2=a$, a więc wzór:

$$F=\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}\frac{a\,dy\,dx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=\int_0^a dy\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int_0^a a\,dy\Big|_0^a\arcsin\frac{x}{a}=\frac{a\pi}{2}\int_0^a dy=\frac{a^2\pi}{2}.$$

β) Komplanacya powierzchni $xy=az$. Przekroje tej powierzchni płaszczyznami równoległemi do ZOX i ZOY są liniami prostemi, a powierzchnia sama paraboloidą hyperboliczną. Mamy tu:

$$dz=\frac{y}{a}dx+\frac{x}{a}dy,\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{a},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{a},\ \text{więc:}$$

$$F = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}}\,dx\,dy.$$

Ograniczając powierzchnię płaszczyzną równoległą do ZOY w odstępie $OA=\alpha$ i równległą do ZOX w odstępie $OB=\beta$, otrzymamy rzut tej części powierzchni na płaszczyznę XOY w postaci prostokąta o bokach α i β, zatem:

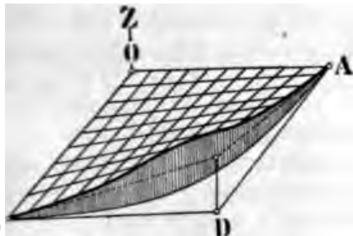


Fig. 180.

$$F = \frac{1}{a}\int_0^{\alpha}\int_0^{\beta}\sqrt{x^2+y^2+a^2}\,dx\,dy.$$

Gdybyśmy daną powierzchnię ograniczyli jej przekrojem z powierzchnią walca: $x^2+y^2=c^2$, tedy przedstawiłby się rzut tej części powierzchni na płaszczyznę XOY jako koło o promieniu c (fig. 180). Element powierzchni, którego rzut na XOY jest $r\,d\varphi\,dr$ otrzymuje tedy wartość:

$$d^2F = \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}}\,r\,d\varphi\,dr = \frac{\sqrt{a^2+r^2}}{a}\,r\,d\varphi\,dr,$$

gdzie $r^2 = x^2+y^2$.

Zatem powierzchnia rzucająca się jako koło o promieniu c ma wielkość:

$$F = \int_0^{2\pi}\int_0^{c}\frac{\sqrt{a^2+r^2}}{a}\,r\,d\varphi\,dr = \int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{a}\int_0^{c}\sqrt{a^2+r^2}\,.\,r\,dr,$$

więc:

$$F = \frac{2\pi}{3a}\left[(a^2+c^2)^{3/2}-a^3\right].$$

γ) **Komplanacya** ellipsoidy trójosiowej. Z równania: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ dostajemy:

$$z = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{cx}{a^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}},\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{cy}{b^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}},$$

tem **element** powierzchni:

$$d^2F = dx\,dy\sqrt{\frac{1-\frac{a^2-c^2}{a^2}\cdot\frac{x^2}{a^2}-\frac{b^2-c^2}{b^2}\cdot\frac{y^2}{b^2}}{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}},$$

Przyjmując, że $a>b>c$, możemy położyć: $\frac{a^2-c^2}{a^2}=\alpha^2$, $\frac{b^2-c^2}{b^2}=\beta^2$, gdzie α i β ułamkami **właściwymi**, zatem:

$$d^2F = dx\,dy\sqrt{\frac{1-\frac{\alpha^2x^2}{a^2}-\frac{\beta^2y^2}{b^2}}{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}.$$

Powierzchnia ósemki ellipsoidy jest tedy określona wzorem:

$$F = \int_0^a\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{\frac{1-\frac{\alpha^2x^2}{a^2}-\frac{\beta^2y^2}{b^2}}{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\,dx\,dy,$$

ry **prowadzi** do całek eliptycznych.

δ) **Komplanacya** powierzchni śrubowej: $z = a\,.\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{y}{x}$. Mamy tu:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{ay}{x^2+y^2},\qquad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{ax}{x^2+y^2},$$

m:

$$d^2F = \sqrt{1+\frac{a^2y^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{a^2x^2}{(x^2+y^2)^2}}\,dx\,dy = \sqrt{1+\frac{a^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy,$$

a więc:

$$F=\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\frac{a^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy.$$

Przetnijmy daną powierzchnię walcem: $x^2+y^2=r^2$, wtedy otrzymujemy na wy czenie tej części powierzchni śrubowej, której rzut na płaszczyznę XOY przedstawia jako ćwiartka koła o promieniu r (fig. 181), w

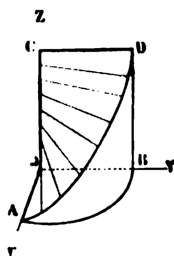


Fig. 181.

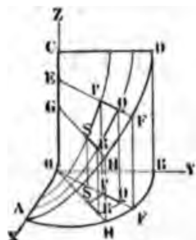


Fig. 182.

$$F=\int_0^r dx\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}\sqrt{1+\frac{a^2}{x^2+y^2}}\,dy.$$

Zamiast spółrzędnych prostokątnych punktu P' położonego wewnątrz koła (r), m my tu użyć spółrzędnych biegunowych ρ i Połóżmy zatem: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $x^2+y^2=$ wtedy powiększając ρ o $d\rho$, a φ o $d\varphi$, otrzym na płaszczyźnie XOY (fig. 182) element prostok $\rho\,d\varphi d\rho$ jako rzut elementu pobocznicy powierz śrubowej o wielkości:

$$d^2F=\frac{\rho\,d\varphi\,.\,d\rho}{\cos\gamma}=\rho\,d\varphi\,d\rho\sqrt{1+\frac{a^2}{\rho^2}},\ \text{czyli: } d^2F=\sqrt{a^2+\rho^2}\,d\rho\,d\varphi.$$

Szukaną powierzchnię wyznacza zatem całka:

$$F=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^r\sqrt{a^2+\rho^2}\,d\rho,$$

a że:

$$\int_0^r\sqrt{a^2+\rho^2}\,d\rho=\Big|_0^r\left\{\frac{\rho\sqrt{a^2+\rho^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\log(\rho+\sqrt{a^2+\rho^2})\right\}=$$

$$=\frac{r\sqrt{a^2+r^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\log(r+\sqrt{a^2+r^2})-\frac{a^2}{2}\log a,$$

przeto otrzymujemy:

$$F=\frac{\pi}{4}\left[r\sqrt{a^2+r^2}+a^2\log\frac{r+\sqrt{a^2+r^2}}{a}\right].$$

14. Momenta statyczne i środki ciężkości powierzchni i brył. Na pod wie określenia momentu statycznego danej formy geometrycznej, jako su momentów statycznych jej elementów, otrzymujemy moment statyczny p wierzchni $z=f(x, y)$ w dowolnem ograniczeniu względem płaszczyzny XOY, określony wzorem:

$$M=\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}z\sqrt{p^2+q^2+1}\,dx\,dy,$$

moment statyczny odnośnej objętości wzorem:

$$M=\int_{z_1}^{z_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}z\,dx\,dy\,dz. \qquad (21)$$

Moment statyczny tejże powierzchni względem osi x-ów określa wzór.

$$M=\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{z^2+y^2}\,\sqrt{p^2+q^2+1}\,dx\,dy, \qquad (22)$$

a moment statyczny odnośnej objętości względem osi x-ów wyznacza się wzorem:

$$M=\int_{z_1}^{z_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{z^2+y^2}\,dx\,dy\,dz. \qquad (23)$$

Moment statyczny tejże powierzchni względem początku układu określa wzór:

$$M=\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}\int_{z_1}^{z_2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,.\sqrt{p^2+q^2+1}\,dxdy, \qquad (24)$$

a moment statyczny odnośnej objętości względem początku układu wyznacza się wzorem:

$$M=\int_{z_1}^{z_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,.\,dx\,dy\,dz. \qquad (25)$$

Na wyznaczenie spółrzędnych prostokątnych ξ, η, ζ, środka ciężkości powierzchni $z=f(x, y)$ dowolnie ograniczonej służą wzory: $\xi\,.\,F=M_x$, $\eta\,.\,F=M_y$, $\zeta\,.\,F=M_z$, z których otrzymujemy:

$$\xi=\frac{\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}x\sqrt{p^2+q^2+1}\,dx\,dy}{\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{p^2+q^2+1}\,dx\,dy},\qquad \eta=\frac{\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}y\sqrt{p^2+q^2+1}\,dx\,dy}{\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{p^2+q^2+1}\,dx\,dy},$$

$$\zeta=\frac{\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}z\sqrt{p^2+q^2+1}\,dx\,dy}{\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{p^2+q^2+1}\,dx\,dy}, \qquad (26)$$

podczas gdy spółrzędne ξ, η, ζ środka ciężkości odnośnej objętości będą określone wzorami:

$$\xi=\frac{\int_{z_1}^{z_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}x\,dx\,dy\,dz}{\int_{z_1}^{z_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}dx\,dy\,dz},\qquad \eta=\frac{\int_{z_1}^{z_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}y\,dx\,dy\,dz}{\int_{z_1}^{z_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}dx\,dy\,dz},$$

$$\zeta=\frac{\int_{z_1}^{z_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}z\,dx\,dy\,dz}{\int_{z_1}^{z_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}dx\,dy\,dz}. \qquad (27)$$

15. Momenta bezwładności powierzchni i brył. Na podstawie określenia momentu bezwładności formy geometrycznej, jako sumy momentów bezwładności jej elementów, otrzymujemy moment bezwładności powierzchni: $z=f(x, y)$ dowolnie ograniczonej względem płaszczyzny XOY określony wzorem:

$$I=\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}z^2\sqrt{p^2+q^2+1}\,.\,dx\,dy, \qquad (28)$$

względem osi x-ów wzorem:

$$I=\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}(z^2+y^2)\sqrt{p^2+q^2+1}\,.\,dx\,dy, \qquad (29)$$

a względem początku układu wzorem:

$$I=\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}(x^2+y^2+z^2)\sqrt{p^2+q^2+1}\,.\,dx\,dy, \qquad (30)$$

podczas gdy moment bezwładności odnośnej objętości wyznacza względem płaszczyzny XOY wzór:

$$I=\int_{z_1}^{z_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}z^2\,dx\,dy\,dz, \qquad (31)$$

względem osi x-ów wzór:

$$I=\int_{z_1}^{z_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}(z^2+y^2)\,dx\,dy\,dz, \qquad (32)$$

a względem początku układu wzór:

$$I=\int_{z_1}^{z_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz. \qquad (33)$$

16. Potencyały powierzchni i objętości. Na podstawie określenia potencyału formy geometrycznej jako sumy potencyałów jej elementów otrzymujemy potencyał powierzchni $z=f(x, y)$ dowolnie ograniczonej względem płaszczyzny XOY określony wzorem:

$$U=\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{p^2+q^2+1}\,dx\,dy}{z}, \tag{34}$$

względem osi x-ów wzorem:

$$U=\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{p^2+q^2+1}\,dx\,dy}{\sqrt{z^2+y^2}}, \tag{35}$$

względem początku układu wzorem:

$$U=\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{p^2+q^2+1}\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \tag{36}$$

podczas gdy potencyały odnośnych objętości wyznacza względem płaszczyzny XOY wzór:

$$U=\int_{z_1}^{z_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx\,dy\,dz}{z}, \tag{37}$$

względem osi x-ów wzór:

$$U=\int_{z_1}^{z_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{y^2+z^2}}, \tag{38}$$

względem początku układu wzór:

$$U=\int_{z_1}^{z_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \tag{39}$$

17. Przyciąganie punktu przez powierzchnie i bryły. Na dany punkt $P(a, b, c)$ w przestrzeni wywiera element dm formy geometrycznej przyciąganie, którego wielkość wyraża się różniczką: $\frac{dm}{r^2}$, gdzie r jest odległością elementu od punktu P.

Wielkość przyciągania punktu $P(a, b, c)$ przez powierzchnię $z=f(x,$ dowolnie ograniczoną wyraża się zatem całką:

$$W=\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{p^2+q^2+1}\,.\,dx\,dy}{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}, \tag{40}$$

wielkość przyciągania tegoż punktu przez odnośną objętość zaś całką:

$$W=\int_{z_1}^{z_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx\,dy\,dz}{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}. \tag{41}$$

Np. kula pełna o równaniu $x^2+y^2+z^2=r^2$ wywiera na punkt $P(a, b, c)$ wnątrz niej położony przyciąganie o wielkości:

$$W=\int_{-r}^{+r}dx\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}}dy\int_{-\sqrt{r^2-x^2-y^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2-y^2}}\frac{dx\,dy\,dz}{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}. \tag{42}$$

Ćwiczenia XLIV.

1) Znaleźć długość łuku linii śrubowej o równaniach: $x = a\cos\frac{z}{b}$, $y = a\sin\frac{z}{b}$ w granicach od $z_1 = 0$, do $z_2 = z$.

2) Wykazać, że długość łuku krzywej: $y = \frac{x^2}{2a}$, $z = \frac{x^3}{6a^2}$ w granicach od $x_1 = 0$ do $x_2 = x$ przedstawia się wzorem $s = x + z$.

3) Wykazać, że krzywe o równaniach $y = f(x)$, $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}[f'(x)]^2$, mają długość łuku określoną wzorem: $s = x + z + C$.

4) Wykazać, że dla krzywej przekroju powierzchni: $(z-x)^2 = \frac{4x^3}{9a}$, $(y+x)^2 = 4ax$ jest $s = x + y - z$.

5) Wykazać, że długość łuku linii śrubowej: $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $z = b.\varphi$ w granicach od φ_1 do φ_2 wyznacza się wzorem: $s = (\varphi_2 - \varphi_1)\sqrt{a^2+b^2}$.

6) Wykazać, że długość łuku krzywej: $x = e^{a\varphi}\cos\varphi$, $y = e^{a\varphi}\sin\varphi$, $z = be^{a\varphi}$. zwanej spiralną stożkową, w granicach od φ_1 do φ_2, względnie od z_1 do z_2 wyznacza się wzorem:

$$s = \frac{1}{a}\sqrt{1+a^2+a^2b^2}\,(e^{a\varphi_2} - e^{a\varphi_1}), \quad \text{względnie:} \quad s = \frac{z_2 - z_1}{ab}\sqrt{1+a^2+a^2b^2}.$$

7) Znaleźć długość łuku krzywej o równaniach: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right)$, liczoną od punktu $z = 0$.

8) Wykazać, że długość łuku krzywej określonej równaniami:

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{x^3}{a}} + 2\sqrt{ax}, \quad z = \sqrt{5ax},$$

liczona od początku układu ma wartość: $s = y + \frac{z}{\sqrt{5}}$.

9) Znaleźć długość łuku krzywej: $y = 2\sqrt{ax} - x$, $z = x - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{x^3}{a}}$, liczoną od początktu układu.

10) Wykazać, że długość łuku krzywej: $y = 2\sqrt{2px}$, $z = p\log\frac{x}{a}$, liczonego od $x = a$ ma wartość $s = x + z - a$.

11) Znaleźć długość łuku krzywej: $y = \sqrt{2ax - x^2}$, $z = a\log\frac{2a}{2a-1}$, liczoną od początku układu.

12) Zbadać kształt krzywej określonej równaniami: $y = a.\arcsin\frac{x}{a}$, $z = \frac{1}{2}a\log\frac{a+x}{a-x}$ i wykazać, że długość łuku liczona od początku układu wyraża się wzorem: $s = x + z$.

13) Znaleźć długość łuku krzywej: $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $z = \frac{1}{4}a\log\frac{a+x}{a-x} - \frac{1}{2}x$ od $x_1 = 0$ do $x_2 = x$.

14) Wykazać, że długość krzywej przekroju walca parabolicznego $(y+z)^2 = 4ax$ ze stożkiem eliptycznym $\frac{4}{3}x^2 + y^2 - z^2 = 0$, liczoną od początku układu możemy wyrazić wzorem: $s = z\sqrt{2}$.

15) Wykazać, że wzór $s = z\sqrt{2}$ przedstawia także łuk krzywej przekroju walca parabolicznego $(z-y)^2 - 8a(z+y) = 0$ ze stożkiem eliptycznym $\frac{1}{8}x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

16) Dane są dwie powierzchnie obrotowe o wspólnej osi obrotu: 1) ellipsoida: $x^2 + z^2 + \frac{a^2y^2}{b^2} = a^2$, 2) hyperboloida: $x^2 + z^2 - \frac{a^2 - b^2}{b^2}y^2 = a^2$; wykazać, że powierzchnie ich

zawarte między dwiema płaszczyznami prostopadłemi do osi obrotowej mają jednakową wielkość.

17) Wyznaczyć objętość bryły, jaką walec $x^2+y^2=b^2$ wycina z kuli $x^2+y^2+z^2=a^2$, gdzie $b<a$.

18) Wyznaczyć wielkość objętości, jaką kula: $x^2+y^2+z^2=a^2$ ma wspólną z walcem: $x^2+y^2=ax$.

19) Wyznaczyć objętość walca: $x^2+y^2=a^2$ ściętego płaszczyzną: $z=x\operatorname{tang}\alpha$.

20) Wyznaczyć całkowitą objętość bryły powstałej przez obrót konchoidy: $xy=(a+y)(b^2-y^2)^{1/2}$ około osi x-ów.

21) Zbadać kształt powierzchni: $c^2z^2=(a^2-x^2)y^2$ i wykazać, że całkowita jej objętość jest równa: $a^2c.\pi$.

22) Wykazać, że całkowita objętość walca kołowego: $x^2+y^2=a^2$ wspólna z walcem $x^2+z^2=a^2$ ma wartość: $V=\frac{16}{8}a^3$.

23) Jak wielką objętość kula: $x^2+y^2+z^2=a^2$ ma wspólną z walcem: $x^2+y^2=b^2$.

24) Wyznaczyć wspólną objętość, jaką paraboloida obrotowa $y^2+z^2=4ax$ zawiera z walcem: $x^2+y^2=2ax$.

25) Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót ćwierci linii kołowej około stycznej w jednym punkcie końcowym łuku.

26) Po prostej $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1$ leżącej na XOZ i po elipsie: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ leżącej na XOY porusza się parabola o parametrze: $2p=-\frac{b^2}{c}$, równolegle do YOZ, obliczyć objętość bryły w zakresie jednej ćwiartki układu.

27) Obliczyć objętość bryły zawartej między pięcioma płaszczyznami: $z=0$, $x=a$, $x=b$, $y=\alpha$, $y=\beta$ i powierzchnią krzywą o równaniu: $xyz=c^3$.

28) Wyznaczyć objętość zawartą między walcem eliptycznym: $\left(\frac{x-\alpha}{a}\right)^2+\left(\frac{y-\beta}{b}\right)^2=1$, a paraboloidę hyperboliczną: $z=\frac{1}{c}.xy$.

29) Obliczyć objętość bryły, zawartej między paraboloidą hyperboliczną: $z=\frac{1}{c}xy$, płaszczyzną: $x+y+z=c$ i płaszczyzną XOY, $(z=0)$ w obrębie ósemki układu o spółrzędnych dodatnich.

30) Wykazać, że komplanacya powierzchni, określonej trzema równaniami:

$$x=f(u,v),\quad y=\varphi(u,v),\quad z=\psi(u,v)$$

o dwu parametrach u, v, prowadzi do wzoru:

$$F=\int_{v_1}^{v_2}\int_{u_1}^{u_2}\sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}\,du\,dv.$$

31) Obliczyć całkowitą pobocznicę powierzchni, ograniczonej walcem: $x^2+y^2=ax$ i kulą: $x^2+y^2+z^2=a^2$.

32) Wykazać, że część powierzchni kuli: $x^2+y^2+z^2=a^2$ wycięta przez dwie powierzchnie walcowe o równaniach: $x^2+y^2=ax$ i $x^2+y^2=-ax$ ma wartość: $F=4a^2\pi-8a^2$.

33) Wykazać, że część powierzchni śrubowej: $y=x\operatorname{tang}\frac{z}{c}$ zawarta między dwoma walcami kołowymi spółśrodkowymi o równaniach: $x^2+y^2=a$ i $x^2+y^2=b$ i dwiema płaszczyznami: $z=\frac{c}{2}\pi$ i $z=-\frac{c}{2}\pi$ ma wartość:

$$F=\frac{\pi}{6}\left\{b\sqrt{b^2+c^2}-a\sqrt{a^2+c^2}+c^2\log\frac{b+\sqrt{b^2+c^2}}{a+\sqrt{a^2+c^2}}\right\}.$$

34) Wykazać, że całkowita pobocznica powierzchni: $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ ma wartość: $F=\frac{a^2\pi^2}{2}$.

35) Wyznaczyć tę część powierzchni kuli: $x^2+y^2+z^2=1$, której rzut na płaszczyznę obejmuje wnętrze krzywej o równaniu biegunowem: $r=\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{1-\operatorname{tang}^2\varphi}$.

36) Wykazać, że środek ciężkości bryły powstałej przez obrót około osi x-ów pola erboli: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ograniczonego rzędnemi w x_1 i x_2 ma spółrzędną:

$$\xi=\frac{3}{4}\frac{x_2^4-x_1^4-2a^2(x_2^2-x_1^2)}{x_2^3-x_1^3-3a^2(x_2-x_1)}.$$

37) Wykazać, że środek ciężkości bryły powstałej przez obrót jednej gałęzi cissoidy $-y^2(2a-x)=0$ około jej asymptoty leży na tejże asymptocie w wysokości: $\eta=\frac{4a}{\pi}$.

38) Wykazać, że środek ciężkości powierzchni powstałej przez obrót połowy jednej łęzi cykloidy: $x=a(\varphi-\sin\varphi)$, $y=a(1-\cos\varphi)$ około jej podstawy leży na tejże podstawie w odstępie: $\xi=\frac{26}{15}r$.

39) Wykazać, że środek ciężkości bryły zag. 38. określonej leży także na osi x-ów odstępie: $\xi=a\left(\frac{\pi}{2}+\frac{64}{45\pi}\right)$.

40) Wykazać, że środek ciężkości powierzchni paraboloidy obrotowej, powstałej przez rót paraboli: $y^2=2px$ około osi x-ów w granicy od $x_1=0$ do $x_2=x$ znajduje się na osi otu w odległości:

$$\xi=\frac{1}{5}\frac{(6x^2+px-p^2)\sqrt{2px+p^2}+p^3}{(2x+p)\sqrt{2px+p^2}-p^2}.$$

41) Wykazać, że środek ciężkości powyższej objętości znajduje się także na osi x-ów odległości: $\xi=\frac{2}{9}x$.

42) Wyznaczyć środek ciężkości połowy ellipsoidy obrotowej powstałej przez obrót ipsy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ około osi x-ów.

43) Wyznaczyć środek ciężkości połowy powierzchni ellipsoidy obrotowej w poprzenim zagadnieniu określonej.

44) Wyznaczyć objętość bryły, jaką walec: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ wycina z paraboloidy: $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=2z$.

45) Wyznaczyć objętość bryły ograniczonej płaszczyzną XOY, walcem: $x^2+y^2=ax$ paraboloidą obrotową: $x^2+y^2=cz$.

46) Wyznaczyć objętość wspólną dwu walcom: $x^2+z^2=a^2$ i $x^2+y^2=a^2$.

47) Wyznaczyć wielkość objętości, jaką ma wspólną kula: $x^2+y^2+z^2=a^2$ z walcem: $(x^2+y^2)-a^2(x^2-y^2)=0$.

48) Jak wielką objętość obejmuje część powierzchni: $a^2y^2+x^2z^2-r^2x^2=0$ ograniczona płaszczyznami: $x=0$ i $x=a$.

49) Jak wielką objętość zajmuje ta część ellipsoidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, która jest graniczona płaszczyznami spółrzędnemi i płaszczyzną: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

50) Wykazać, że całkowita objętość, ograniczona powierzchnią:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}+\left(\frac{z}{c}\right)^{2/3}=1 \text{ ma wartość: } V=\frac{4}{35}abc\pi.$$

51) Wykazać, że moment bezwładności ellipsoidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ze względu na aszczyznę YOZ ma wartość: $I=\frac{4}{15}a^3bc\pi$.

52) Wyznaczyć moment bezwładności stożka kołowego o równaniu: $x^2+y^2=\frac{r^2}{h^2}z^2$ względu na oś z-ów.

53) Wykazać, że objętość bryły powstałej przez obrót odwiniętej koła o równaniach $x = a(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi)$, $y = a(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)$ ma w granicach od 0 do φ wartość:

$$V = 2a^3\pi(3\sin\varphi - 3\varphi\cos\varphi - \varphi^2\sin\varphi).$$

54) Wyznaczyć objętość bryły powstałej przez obrót krzywej: $y = a\varphi$, $x = a(1-\cos\varphi)$ około osi x-ów.

55) Wykazać, że powierzchnia części walca: $x^2+z^2=a^2$ ograniczonej krzywą jego przenikania z walcem: $x^2+y^2=a^2$ ma wartość: $F=8a^2$.

56) Jak wielką jest powierzchnia części kuli: $x^2+y^2+z^2=a^2$ ograniczonej krzywą jej przenikania z walcem: $x^2+y^2=ax$.

57) Jak wielką jest część powierzchni walca: $x^2+y^2=ax$, ograniczona krzywą jego przenikania z kulą: $x^2+y^2+z^2=a^2$.

58) Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót ellipsy: $y = c \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ około osi x-ów.

59) Wykazać, że powierzchnia paraboloidy hyperbolicznej o równaniu: $z = \frac{1}{c}xy$ ograniczonej płaszczyznami $x=0$ i $x=a$, tudzież $y=0$ i $y=b$ przedstawia się wzorem:

$$F = \frac{1}{c}\int_0^a dx\int_0^b \sqrt{c^2+x^2+y^2}\,dy = \frac{ab}{3c}\sqrt{c^2+a^2+b^2} + \frac{(3c^2+a^2)a}{6c}\log\frac{b+\sqrt{c^2+a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+b^2}} +$$
$$+ \frac{(3c^2+b^2)b}{6c}\log\frac{a+\sqrt{c^2+a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+a^2}} - \frac{c^2}{3}\operatorname{arc\,tang}\frac{ab}{c\sqrt{c^2+a^2+b^2}}.$$

60) Wykazać, że powierzchnia paraboloidy hyperbolicznej o równaniu: $x^2-y^2=2pz$ ograniczona krzywą jej przenikania z walcem: $x^2+y^2=a$ przedstawia się wzorem:

$$F = \frac{4}{p}\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2+x^2}}\sqrt{p^2+x^2+y^2}\,dy = \frac{2\pi}{3p}[(p^2+a^2)\sqrt{p^2+a^2} - p^3].$$

Rozwiązania LXIV. 1) $s = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}z$. 7) $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\sqrt{x^2-a^2}$. 9) $x+y-z$.
11) $a\log\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{x}}{\sqrt{2a}-\sqrt{x}}$. 13) $x+z$. 17) $V=\frac{2}{3}\pi[a^3-(a^2-b^2)^{3/2}]$. 18) $\frac{a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$.
19) $\frac{2}{3}a^3\operatorname{tang}\alpha$. 20) $\pi b^2(\pi a+\frac{4}{3}b)$. 23) $\frac{4}{3}\pi(a^2-b^2)^{3/2}$. 24) $2a^3\left(\pi+\frac{8}{3}\right)$. 25) $\frac{a^3\pi}{b}(10-3\pi)$.
26) $\frac{2abc}{3}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right)$. 27) $c^3\log\frac{b}{a}\log\frac{\beta}{\alpha}$. 28) $\frac{ab\alpha\beta}{c}\pi$. 29) $\left(\frac{17}{12}-\log 4\right)c^3$. 31) $F=2a^2\pi$.
35) $\frac{\pi}{6}+\sqrt{2}\log(\sqrt{2}+1)-\sqrt{\frac{3}{2}}\log(\sqrt{3}+\sqrt{2})$. 42) $\xi=\frac{3}{8}a$. 43) $\xi=\frac{2a[1-(1-\varepsilon^2)]^{3/2}}{3\varepsilon^2[\sqrt{1-\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon]}$,
$\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$. 44) $V=\frac{2}{3}ab\pi(2^{3/2}-1)$. 45) $V=\frac{3}{32}\frac{a^4\pi}{c}$. 46) $\frac{16}{3}a^3$.
47) $\frac{8a^3}{3}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+\log 2\right)$. 48) $\frac{ar^2\pi}{2}$. 49) $\frac{abc\pi(5\sqrt{2}-4)}{24}$. 52) $I=\frac{3}{10}r^2 V$. 54) $V=a^3\pi(\pi^2-4)$.
56) $F=a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$. 57) $4a^2$. 58) $V=2abc\pi^2$.

Literatura. Dr. Oskar Schlömlich: Übungsbuch zum Studium der höherer Analysis. Zweiter Theil. Aufgaben aus der Integralrechnung. Vierte Auflage. Leipzig 1900.

Tematy do rozprawek naukowych

1. Teorya momentów statycznych i środków ciężkości.
2. Teorya momentów bezwładności.
3. Teorya potencyałów i przyciągania mas.

Wykład XLV.

Teorya styczności i krzywizny krzywych przestrzennych.

1. Styczna do krzywej przestrzennej. Niech będzie daną pewna krzywa przestrzenna za pomocą trzech równań parametrowych kształtu:

$$x=f(t),\quad y=\varphi(t),\quad z=\psi(t), \tag{1}$$

gdzie x, y, z są spółrzędne bieżącego punktu tej krzywej, a t dowolnym parametrem.

Kierunek stycznej w pewnym punkcie krzywej przestrzennej wyznacza linia prosta, łącząca punkt styczności z sąsiednim punktem krzywej, który do punktu styczności nieograniczenie się zbliża.

Punkt nieskończenie blizko punktu x, y, z położony będzie tedy miał spółrzędne: $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$.

Niech będą X, Y, Z spółrzędne zmienne punktu linii prostej, to jej równanie będzie miało kształt:

$$X=mZ+\mu,\quad Y=nZ+\nu.$$

Jeżeli ta prosta ma być styczną krzywej, to muszą spółrzędne punktu styczności x, y, z i punktu z nim sąsiedniego: $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, dogadzać równaniu tej prostej; na tej podstawie otrzymujemy równania warunkowe:

$$x=mz+\mu,\quad y=nz+\nu,\ \text{jakoteż:}\ x+dx=m(z+dz)+\mu,\quad y+dy=n(z+dz)+\nu,$$

z których wypływa:

$$dx=m\,dz,\quad dy=n\,dz,\ \text{a więc:}\ m=\frac{dx}{dz},\quad n=\frac{dy}{dz},$$

przeto:

$$\mu=x-mz=x-z\frac{dx}{dz},\quad \nu=y-nz=y-z\frac{dy}{dz}.$$

Podstawiwszy te wartości w równanie prostej, otrzymamy równanie stycznej w punkcie x, y, z w postaci:

$$X=Z\frac{dx}{dz}+x-z\frac{dx}{dz},\quad Y=Z\frac{dy}{dz}+y-z\frac{dy}{dz},\ \text{czyli:}$$

$$X-x=\frac{dx}{dz}(Z-z),\quad Y-y=\frac{dy}{dz}(Z-z) \tag{2}$$

lbo w postaci równych stosunków:

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}. \tag{3}$$

Element krzywej zawarty między dwoma sąsiednimi punktami krzywej nazywa się różniczką łuku i oznacza przez $ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$. Kierunek tego elementu zgodny jest z kierunkiem stycznej w punkcie x, y, z, jeżeli więc λ, μ, ν, oznaczają kąty, jakie styczna tworzy z osiami układu, wtedy mamy wzory:

$$\cos\lambda=\frac{dx}{ds},\quad \cos\mu=\frac{dy}{ds},\quad \cos\nu=\frac{dz}{ds}. \tag{4}$$

2. Asymptoty krzywej przestrzennej. Asymptoty są styczne, których punkt styczności z krzywą leży w nieskończoności. Niech będzie daną krzywa przestrzenna zamocą równań:

$$x=\frac{A}{D},\quad y=\frac{B}{D},\quad z=\frac{C}{D},$$

gdzie A, B, C, D są funkcyami całkowitymi n-go stopnia, zmiennego parametru, który oznaczamy przez t Celem wyznaczenia równania stycznej otrzymamy tu:

$$dz=\frac{DA'-AD'}{D^2}dt,\quad dy=\frac{DB'-BD'}{D^2}dt,\quad dz=\frac{DC'-CD'}{D^2}dt.$$

Równania stycznej przedstawiają się przeto w postaci:

$$\frac{X-x}{DA'-AD'}=\frac{Y-y}{CD'-CD'}=\frac{Z-z}{DB'-BD'},$$

skąd jeżeli podstawimy: $x=\frac{A}{D}$, $y=\frac{B}{D}$, $z=\frac{C}{D}$, otrzymamy równania stycznej w postaci:

$$(DC'-CD')X=(DA'-AD')Z+(AC'-A'C),$$
$$(DC'-CD')Y=(DB'-BD')Z+(BC'-B'C). \tag{5}$$

Styczna staje się asymptotą, skoro punkt styczności wpadnie w nieskończoność, w tym razie musi być $D=0$.

Równania asymptoty otrzymują więc kształt:

$$\left.\begin{aligned}D'CX=D'AZ+A'C-AC',\\ D'AY=D'BZ+B'C-BC'\end{aligned}\right\}\ D=0.$$

Równanie $D=0$ jest stopnia n-go ma więc n pierwiastków: t_1, t_2, ..., t_n, które określają n punktów w nieskończoności. Istnieje tu zatem w ogólności n asymptot. Rzeczywistym pierwiastkom t odpowiadają asymptoty rzeczywiste, urojonym urojone. Jeżeli równanie $D=0$ ma dwa pierwiastki równe, wtedy będzie dla tych pierwiastków także $D'=0$. Równanie asymptoty otrzymuje tedy kształt:

$$0=A'C-C'A,\quad 0=B'C-C'B$$

i przedstawia prostą w nieskończoności. Równym pierwiastkom równania $D=0$ nie odpowiadają przeto żadne asymptoty.

3. Płaszczyzna normalna krzywej przestrzennej. Proste prostopadłe do stycznej w punkcie styczności x, y, z tworzą płaszczyznę, zwaną: płaszczyzną normalną krzywej w punkcie x, y, z. Jej równanie znajdziemy w sposób następujący: Równanie wszelkiej płaszczyzny ma kształt:

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Jeżeli ta płaszczyzna ma przechodzić przez punkt x, y, z krzywej przestrzennej, tedy musi się spełnić warunek:

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

który w połączeniu z równaniem ogólnem płaszczyzny daje równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt x, y, z w postaci:

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0.$$

Jeżeli ta płaszczyzna ma być płaszczyzną normalną, to musi być prostopadłą do stycznej w punkcie x, y, z, która ma równanie:

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz},$$

muszą przeto zachodzić równania:

$$\frac{A}{dx}=\frac{B}{dy}=\frac{C}{dz},$$

na tej podstawie ma równanie płaszczyzny normalnej w punkcie x, y, z postać:

$$dx(X-x)+dy(Y-y)+dz(Z-z)=0. \tag{6}$$

4. Płaszczyzna ściśle styczna. Płaszczyzna, przechodząca przez trzy nieskończenie blizkie punkta krzywej przestrzennej, nazywa się płaszczyzną ściśle styczną krzywej. Niech będzie x, y, z danym punktem krzywej przestrzennej, tedy otrzymamy równanie płaszczyzny przez ten punkt przechodzącej w postaci:

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0. \tag{a}$$

Jeżeli ta płaszczyzna ma także przejść przez punkt sąsiedni $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, tedy musi zajść warunek:

$$A[(x+dx)-x]+B[(y+dy)-y]+C[(z+dz)-z]=0,$$

czyli:

$$A\,dx+B\,dy+C\,dz=0. \tag{b}$$

Warunek ten otrzymamy wprost, różniczkując równanie płaszczyzny (a) ze względu na spółrzędne x, y, z, stąd ważny wniosek: Warunek, aby płaszczyzna przechodząca przez dany punkt, przechodziła także przez punkt sąsiedni, otrzymamy, różniczkując jej równanie ze względu na współrzędne tego punktu. Zastosowując to twierdzenie jeszcze raz do warunku (b), otrzymamy warunek, aby płaszczyzna jeszcze przez trzeci następny punkt przechodziła w postaci:

$$A\,d^2x+B\,d^2y+C\,d^2z=0. \tag{c}$$

Z równań warunkowych:

$$A\,dx+B\,dy+C\,dz=0 \text{ i } A\,d^2x+B\,d^2y+C\,d^2z=0,$$

otrzymamy:

$$A\,(dx\,d^2z-dz\,d^2x)+B\,(dy\,d^2z-dz\,d^2y)=0,$$

$$A\,(dx\,d^2y-dy\,d^2x)+C\,(dz\,d^2y-dy\,d^2z)=0,$$

przeto:

$$\frac{A}{dy\,d^2z-dz\,d^2y}=\frac{B}{dz\,d^2x-dx\,d^2z}=\frac{C}{dx\,d^2y-dy\,d^2x}. \tag{d}$$

Równanie płaszczyzny ściśle stycznej do krzywej w punkcie x, y, z otrzymuje przeto kształt:

$$0=(X-x)(dy\,d^2z-dz\,d^2y)+(Y-y)(dz\,d^2x-dx\,d^2z)+(Z-z)(dx\,d^2y-dy\,d^2x) \tag{7}$$

czyli w postaci wyznacznika:

$$\begin{vmatrix} X-x, & Y-y, & Z-z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0, \qquad (8)$$

który rozwinięty daje równanie:

$$P(X-x)+Q(Y-y)+R(Z-z)=0, \qquad (9)$$

gdzie: $P=dy\,d^2z-dz\,d^2y$, $Q=dz\,d^2x-dx\,d^2z$, $R=dx\,d^2y-dy\,d^2x$.

Jeżeli krzywa jest płaską, wtedy są spółczynniki P, Q, R dla każdego punktu x, y, z krzywej stale jednakowe; płaszczyzna ściśle styczna jest przeto płaszczyzną, na której leży ta krzywa płaska. Spółczynniki równania płaszczyzny ściśle stycznej tworzą więc kryteryum dla krzywych płaskich i przestrzennych.

5. Normalna główna i binormalna. Normalną główną do krzywej w przestrzeni nazywamy przekrój płaszczyzny normalnej z płaszczyzną ściśle styczną. Prosta ta daną jest przez dwa równania: równanie płaszczyzny normalnej:

$$dx(X-x)+dy(Y-y)+dz(Z-z)=0$$

i równanie płaszczyzny ściśle stycznej:

$$P(X-x)+Q(Y-y)+R(Z-z)=0.$$

Z tych dwóch równań otrzymujemy równanie głównej normalnej w postaci symetrycznej:

$$\frac{X-x}{Q\,dz-R\,dy}=\frac{Y-y}{R\,dx-P\,dz}=\frac{Z-z}{P\,dy-Q\,dx}. \qquad (10)$$

Binormalną nazywamy prostą prostopadłą do płaszczyzny ściśle stycznej:

$$P(X-x)+Q(Y-y)+R(Z-z)=0.$$

Równania binormalnej mają przeto kształt:

$$\frac{X-x}{P}=\frac{Y-y}{Q}=\frac{Z-z}{R}. \qquad (11)$$

Płaszczyzna prostopadła do głównej normalnej, a więc przechodząca przez styczną i binormalną w punkcie x, y, z krzywej jest jedną z osobliwszych płaszczyzn stycznych krzywej w punkcie x, y, z, którą nazywamy płaszczyzną rektyfikacyjną linii krzywej w punkcie x, y, z. Jej równanie ma kształt:

$$(Q\,dz-R\,dy)(X-x)+(R\,dx-P\,dz)(Y-y)+ \\ +(P\,dy-Q\,dx)(Z-z)=0. \qquad (12)$$

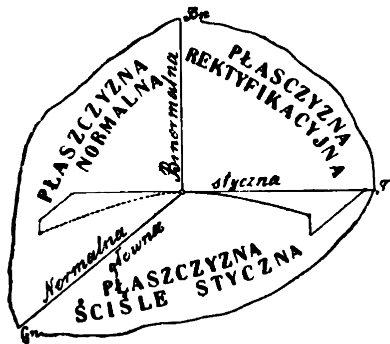


Fig. 183.

Płaszczyzna ta tworzy z płaszczyzną ściśle styczną i płaszczyzną normalną punktu układ prostokątny trzech płaszczyzn, których przekroje, jako to: styczna, główna normalna i binormalna tworzą w danym punkcie krzywej układ trzech osi prostokątnych (fig. 183). Jest to układ naturalny osi i płaszczyzn spółrzędnych, jak i wyznaczyć można w każdym punkcie krzywej przestrzennej. Układ ten zowie się także podstawowym kątem trójściennym danego punktu krzywej.

6. Koło ściśle styczne i krzywizna pierwsza. Koło przechodzące przez trzy następujące punkta krzywej przestrzennej nazywa się kołem ściśle stycznem, albo kołem krzywizny pierwszej. Wszelkie koło w przestrzeni określić możemy jako przekrój kuli z płaszczyzną; jeżeli ta płaszczyzna przechodzi przez środek kuli, wtedy będzie promień kuli zarazem promieniem koła. Niech będą tedy ξ, η, ζ spółrzędne środka kuli, a ϱ jej promieniem, wtedy przedstawią się równania koła w postaci:

$$(X-\xi)^2+(Y-\eta)^2+(Z-\zeta)^2=\varrho^2,$$
$$A(X-\xi)+B(Y-\eta)+C(Z-\zeta)=0.$$

Jeżeli to koło ma przechodzić przez punkt x, y, z krzywej przestrzennej: $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$, $z=\psi(t)$, wtedy otrzymamy dwa równania warunkowe:

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2=\varrho^2, \qquad (a)$$
$$A(x-\xi)+B(y-\eta)+C(z-\zeta)=0. \qquad (b)$$

Warunki, pod jakimi to koło przechodzi jeszcze przez dwa inne punkta nieskończenie blizko danego punktu położone, otrzymamy przez dwukrotne zróżniczkowanie powyższych dwóch równań ze względu na x, y, z, z czego wypadną równania:

$$(x-\xi)\,dx+(y-\eta)\,dy+(z-\zeta)\,dz=0, \qquad (c)$$
$$A\,dx+B\,dy+C\,dz=0, \qquad (d)$$

jakoteż:
$$(x-\xi)\,d^2x+(y-\eta)\,d^2y+(z-\zeta)\,d^2z+d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2=0, \qquad (e)$$
$$A\,d^2x+B\,d^2y+C\,d^2z=0. \qquad (f)$$

Równania (b), (d) i (f) wypowiadają warunki, aby płaszczyzna koła była płaszczyzną ściśle styczną w punkcie x, y, z krzywej (art. 4. str. 719) i prowadzą do równania:

$$P(x-\xi)+Q(y-\eta)+R(z-\zeta)=0.$$

Na wyznaczenie spółrzędnych ξ, η, ζ otrzymujemy przeto trzy równania:

$$P(x-\xi)+Q(y-\eta)+R(z-\zeta)=0,$$
$$(x-\xi)\,dx+(y-\eta)\,dy+(z-\zeta)\,dz=0,\quad (x-\xi)\,d^2x+(y-\eta)\,d^2y+(z-\zeta)\,d^2z=-(ds)^2,$$

z których otrzymamy:

$$x-\xi=\frac{\begin{vmatrix}0 & Q & R\\ 0 & dy & dz\\ ds^2 & d^2y & d^2z\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}P & Q & R\\ dx & dy & dz\\ d^2x & d^2y & d^2z\end{vmatrix}},\quad y-\eta=\frac{\begin{vmatrix}P & 0 & R\\ dx & 0 & dz\\ d^2x & ds^2 & d^2z\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}P & Q & R\\ dx & dy & dz\\ d^2x & d^2y & d^2z\end{vmatrix}},\quad z-\zeta=\frac{\begin{vmatrix}P & Q & 0\\ dx & dy & 0\\ d^2x & d^2y & ds^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}P & Q & R\\ dx & dy & dz\\ d^2x & d^2y & d^2z\end{vmatrix}},$$

czyli:

$$x-\xi=\frac{R\,dy-Q\,dz}{P^2+Q^2+R^2}ds^2,\quad y-\eta=\frac{P\,dz-R\,dx}{P^2+Q^2+R^2}ds^2,\quad z-\zeta=\frac{Q\,dx-P\,dy}{P^2+Q^2+R^2}ds^2 \qquad (13)$$

Tym sposobem wyznaczony jest środek koła ściśle stycznego w punkcie x, y, z krzywej przestrzennej. Jeżeli do tych równań dołączymy dwa równania krzywej przestrzennej kształtu: $f(x, y, z)=0$, $\varphi(x, y, z)=0$, wtedy otrzymamy pięć równań, z których możemy wyrugować trzy zmienne x, y, z. Tym sposobem otrzymamy dwa równania między ξ, η, ζ, przedstawiające miejsce geometryczne środków kół ściśle stycznych, które będzie w ogólności pewną krzywą przestrzenną, odpowiadającą ewolucie u krzywych płaskich. Promień koła ściśle stycznego w punkcie x, y, z, otrzymamy z wzoru:

$$\varrho^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2,$$

jeżeli weń wstawimy wartości pod (18) otrzymane. Będzie wtedy:

$$\varrho^2 = \frac{(R\,dy - Q\,dz)^2 + (P\,dz - R\,dx)^2 + (Q\,dx - P\,dy)^2}{(P^2+Q^2+R^2)^2}(ds)^2.$$

Na mocy tożsamości Lagrange'a:

$$(ab'-a'b)^2+(bc'-b'c)^2+(ca'-ac')^2=(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+c\ldots$$

będzie:

$$(R\,dy-Q\,dz)^2+(P\,dz-R\,dx)^2+(Q\,dx-P\,dy)^2=$$
$$=(P^2+Q^2+R^2)(dx^2+dy^2+dz^2)-(P\,dx+Q\,dy+R\ldots$$

a że: $P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0$, przeto otrzymujemy:

$$(R\,dy-Q\,dz)^2+(P\,dz-R\,dx)^2+(Q\,dx-P\,dy)^2=(P^2+Q^2+R^2)(ds)^2,$$

będzie więc:
$$\varrho^2=\frac{(P^2+Q^2+R^2)}{(P^2+Q^2+R^2)^2}(ds)^6=\frac{(ds)^6}{P^2+Q^2+R^2},$$

czyli:
$$\varrho=\frac{(ds)^3}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}. \quad (1\ldots$$

Otóż to jest wzór na obliczenie promienia koła ściśle styc... w punkcie x, y, z krzywej przestrzennej.

Dla krzywych płaskich położonych na płaszczyźnie XOY, a więc ...ślonych równaniami: $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$, $z=0$, otrzymamy:

$(ds)^2=dx^2+dy^2$, $P=dy\,d^2z-dz\,d^2y=0$, $Q=dz\,d^2x-dx\,d^2z=0$, $R=dx\,d^2y-d\ldots$

przeto:
$$\varrho=\frac{ds^3}{dx\,d^2y-dy\,d^2x}=\frac{(dx^2+dy^2)^{3/2}}{dx\,d^2y-dy\,d^2x}. \quad (1\ldots$$

Jeżeli uważać będziemy x jako zmienną niezależną, tedy będzie $d^2\ldots$

przeto otrzymamy:
$$\varrho=\frac{(dx^2+dy^2)^{3/2}}{dx\,d^2y}=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}. \quad (14)$$

7. Koło ściśle styczne z krzywą przestrzenną w pewnym jej punk... nazywamy zarazem **kołem krzywizny** linii krzywej w tym punk... Wychodząc z określenia krzywizny, podanego przy krzywych płaskich, zn... dziemy promień krzywizny w sposób następujący: Z trzech po sobie na... pujących punktów: A, B, C krzywej przestrzennej połączmy pierwszy z d... gim, a drugi z trzecim, proste łączące dadzą dwie po sobie następujące s... czne, które zawierają między sobą kąt $d\varepsilon$, zwany **kątem styczności**. W... kreślmy w środkach obu różniczek łukowych AB i BC prostopadłe, to... leżyć będą w płaszczyźnie ściśle stycznej i utworzą między sobą także k... $d\varepsilon$, a ich punkt przecięcia P będzie środkiem koła krzywizny, będzie wi...

$$\varrho\,d\varepsilon=ds.$$

Celem wyznaczenia kąta styczności $d\varepsilon$ poprowadzimy z punktu począt... wego O równoległe do stycznych AB i BC i odetnijmy na każdej z n... jednostkę długości $OM=ON=1$, tedy będzie łuk MN miarą kąta styczności.

Niech przedstawiają α, β, γ kąty, jakie prosta OM tworzy z osi... układu, tedy będą współrzędnymi punktu M:

$$x_1=\cos\alpha,\quad y_1=\cos\beta,\quad z_1=\cos\gamma.$$

Punkt N otrzymamy, jeżeli na krzywej przestrzeni przyjdziemy ... sąsiedniego punktu, którego spółrzędne są: $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, wsk... tego zmienią się kąty α, β, γ tak, że spółrzędnymi punktu N będą:

$$x_2=\cos\alpha+d\cos\alpha,\quad y_2=\cos\beta+d\cos\beta,\quad z_2=\cos\gamma+d\cos\gamma.$$

Na tej podstawie znajdziemy:

$$d\varepsilon = MN = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

czyli:
$$d\varepsilon = \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}. \tag{15}$$

Uwzględniając, że: $dx = ds\cos\alpha$, $dy = ds\cos\beta$, $dz = ds\cos\gamma$,

otrzymamy: $d\cos\alpha = d\left(\frac{dx}{ds}\right) = \frac{ds\,d^2x - dx\,d^2s}{ds^2}$, $d\cos\beta = d\left(\frac{dy}{ds}\right) = \frac{ds\,d^2y - dy\,d^2s}{ds^2}$,

$$d\cos\gamma = d\left(\frac{dz}{ds}\right) = \frac{ds\,d^2z - dz\,d^2s}{ds^2},$$

przeto: $(d\varepsilon)^2 = \frac{(ds\,d^2x - dx\,d^2s)^2}{ds^4} + \frac{(ds\,d^2y - dy\,d^2s)^2}{ds^4} + \frac{(ds\,d^2z - dz\,d^2s)^2}{ds^4}$.

Z wzoru: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, wynika:

$ds\,d^2s = dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z$, przeto będzie:

$$ds^2\,d^2x - dx\,ds\,d^2s = (dx^2 + dy^2 + dz^2)\,d^2x - dx\,(dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z) =$$
$$= d^2x\,dy^2 + d^2x\,dz^2 - dx\,dy\,d^2y - dx\,dz\,d^2z =$$
$$= dz\,(dz\,d^2x - dx\,d^2z) - dy\,(dx\,d^2y - dy\,d^2x) = Q\,dz - R\,dy,$$

podobnie:
$$ds^2\,d^2y - dy\,ds\,d^2s = R\,dx - P\,dz,$$
$$ds^2\,d^2z - dz\,ds\,d^2s = P\,dy - Q\,dx.$$

Wskutek tego otrzymamy:

$$(d\varepsilon)^2 = \frac{(ds^2\,d^2x - dx\,ds\,d^2s)^2 + \&}{ds^6} = \frac{(Q\,dz - R\,dy)^2 + (R\,dx - P\,dz)^2 + (P\,dy - Q\,dx)^2}{ds^6} =$$
$$= \frac{(P^2 + Q^2 + R^2)\,ds^2}{ds^6} = \frac{P^2 + Q^2 + R^2}{ds^4},$$

czyli:
$$d\varepsilon = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}{ds^2}. \tag{16}$$

Na tej podstawie znajdziemy: $\varrho = \frac{ds}{d\varepsilon} = \frac{ds^3}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}$, wzór zgodny z wzorem pod (13) otrzymanym.

Stosunek kąta styczności do różniczki łuku, czyli odwrotną wartość promienia krzywizny nazywamy: **pierwszą krzywizną** krzywej przestrzennej,

jej wartość jest tedy:
$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\varepsilon}{ds} = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}{ds^3}. \tag{17}$$

Wzory powyższe znacznie się uproszczą, jeżeli jako parametr przyjmiemy długość łuku s, liczoną od pewnego punktu, a więc, jeżeli równania krzywej przedstawimy w postaci $x = f(s)$, $y = \varphi(s)$, $z = \psi(s)$. Otrzymujemy wtedy:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1, \quad \frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2} = 0,$$

czyli: $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$, $x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0$, przeto:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\varepsilon}{ds} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds}\right)^2}, \quad \varrho = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}},$$

czyli:
$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\varepsilon}{ds} = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}, \qquad \varrho = \frac{1}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}},$$

jeżeli weń wstawimy wartości pod (13) otrzymane. B ...astępujące pła-

$$\varrho^2 = \frac{(R\,dy - Q\,dz)^2 + (P\,dz - R\,dx)^2 + (Q\,dx ...}{(P^2+Q^2+R^2)^2}$$

...zywamy kątem ... do różniczki łuku

Na mocy tożsamości Lagrange'a: ...żywej przestrzennej.

$(ab'-a'b)^2+(bc'-b'c)^2+(ca'-ac')^2=(a^2+b^2 ...$ ...enia $d\eta$. Wiemy, że ró-

będzie: ... y, z krzywej przestrzen-

$$(R\,dy-Q\,dz)^2+(P\,dz-R\,dx)^2+(Q\,d ...$$

$$=(P^2+ ... -z)=0.$$

a że: $P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0$, prze... ... (λ, μ, ν) oznaczony wzorami:

$(R\,dy-Q\,dz)^2+(P\,dz- ...$ ... $\overline{...+R^2}$, $\cos\nu = \frac{R}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}$.

będzie więc: $\varrho^2 = ...$

...nie stycznej będzie miał dostawy kierun-

czyli: ... $\cos\mu$, $\cos\nu + d\cos\nu$, a kąt między obu pio-

...nać się będzie kątowi skręcenia $d\eta$. Wykreślmy przez

Otóż to ... równoległe do tych pionów i odetnijmy na nich jednostkę

w punkcie ... będzie odległość końcowa promieni miarą kąta skręcenia.

Dl... tedy zatem:

ślony...

$(ds ...$ ...amy

$$d\eta = \sqrt{(d\cos\lambda)^2+(d\cos\mu)^2+(d\cos\nu)^2}.$$

Z wzoru: $\cos\lambda = \frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}} = \frac{P}{\sqrt{M}}$, gdzie $M=P^2+Q^2+R^2$, dostaniemy:

$$d\cos\lambda = \frac{\sqrt{M}\,.\,dP - \frac{1}{2}P\frac{dM}{\sqrt{M}}}{M} = \frac{M\,dP - \frac{1}{2}P\,dM}{M^{3/2}}.$$

Ponieważ atoli: $P = dy\,d^2z - dz\,d^2y$, przeto jest:

$$dP = d^2y\,d^2z + dy\,d^3z - d^2z\,d^2y - dz\,d^3y, \text{ czyli: } dP = dy\,d^3z - dz\,d^3y, \text{ podobnie:}$$

$$dQ = dz\,d^3x - dx\,d^3z, \quad dR = dx\,d^3y - dy\,d^3x,$$

a zatem:

$$dM = 2\,(P\,dP + Q\,dQ + R\,dR) =$$

$$= 2\,(P\,dy\,d^3z - P\,dz\,d^3y + Q\,dz\,d^3x - Q\,dx\,d^3z + R\,dx\,d^3y - R\,dy\,d^3x) =$$

$$= 2\,[d^3x\,(Q\,dz - R\,dy) + d^3y\,(R\,dx - P\,dz) + d^3z(P\,dy - Q\,dx)].$$

Uwzględniając, że: $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$, otrzymamy:

$$M\,dP - \frac{1}{2}P\,dM = (P^2+Q^2+R^2)\,dP - P(P\,dP + Q\,dQ + R\,dR) =$$

$$= (Q^2+R^2)\,dP - P(Q\,dQ + R\,dR) =$$

$$= (Q^2+R^2)\,(dy\,d^3z - dz\,d^3y) - P\,(Q\,dz\,d^3x - Q\,dx\,d^3z + R\,dx\,d^3y - R\,dy\,d^3x) =$$

$$= d^3x\,(PR\,dy - PQ\,dz) + d^3y\,(-Q^2\,dz - PR\,dx - R^2\,dz) + d^3z\,(Q^2\,dy + R^2\,dy + PQ\,dx) =$$

$$= P\,d^3x\,(R\,dy - Q\,dz) - d^3y\,[Q^2\,dz + R\,(P\,dx + R\,dz)] + d^3z\,[R^2\,dy + Q\,(P\,dx + Q\,dy)] =$$

$$= P\,d^3x\,(R\,dy - Q\,dz) - d^3y\,(Q^2\,dz - QR\,dy) + d^3z\,(R^2\,dy - QR\,dz) =$$

$$= P\,d^3x\,(R\,dy - Q\,dz) + Q\,d^3y\,(R\,dy - Q\,dz) + R\,d^3z\,(R\,dy - Q\,dz) =$$

$$= (R\,dy - Q\,dz)\,(P\,d^3x + Q\,d^3y + R\,d^3z),$$

przeto: $$d\cos\lambda = \frac{(R\,dy - Q\,dz)\,(P\,d^3x + Q\,d^3y + R\,d^3z)}{M^{3/2}},$$

a więc: $$(d\cos\lambda)^2 = \frac{(R\,dy - Q\,dz)^2\,(P\,d^3x + Q\,d^3y + R\,d^3z)^2}{M^3},$$

podobnie: $$(d\cos\mu)^2 = \frac{(P\,dz - R\,dx)^2\,(P\,d^3x + Q\,d^3y + R\,d^3z)^2}{M^3},$$

$$(d \cos \nu)^2 = \frac{(Q\,dx - P\,dy)^2 (P\,d^3x + Q\,d^3y + R\,d^3z)^2}{M^3},$$

szy te wartości we wzór na $d\eta$, otrzymamy:

$$\frac{Q\,dz)^2 + (P\,dz - R\,dx)^2 + (Q\,dx - P\,dy)^2}{M^3} (P\,d^3x + Q\,d^3y + R\,d^3z)^2,$$

$$^{2)} \frac{ds^2}{} (P\,d^3x + Q\,d^3y + R\,d^3z)^2 = \frac{(P\,d^3x + Q\,d^3y + R\,d^3z)^2\,ds^2}{(P^2+Q^2+R^2)^2},$$

$$d\eta = \frac{P\,d^3x + Q\,d^3y + R\,d^3z}{P^2+Q^2+R^2}\,ds, \tag{18}$$

skręcenia krzywej w punkcie x, y, z krzywej prze-

...mo czyli tak zwana druga krzywizna będzie przeto wyzna-
...zorem:

$$\frac{d\eta}{ds} = \frac{P\,d^3x + Q\,d^3y + R\,d^3z}{P^2+Q^2+R^2}. \tag{19}$$

Oznaczywszy $\frac{d\eta}{ds} = \frac{1}{\varrho_1}$, rozumiejąc przez ϱ_1, promień skręcenia czyli promień drugiej krzywizny, otrzymamy:

$$\varrho_1 = \frac{P^2+Q^2+R^2}{P\,d^3x + Q\,d^3y + R\,d^3z}, \quad \text{czyli: } \varrho_1 = \frac{P^2+Q^2+R^2}{\Delta}, \tag{20}$$

gdzie: $$\Delta = P\,d^3x + Q\,d^3y + R\,d^3z = \begin{vmatrix} dx, & dy, & dz \\ d^2x, & d^2y, & d^2z \\ d^3x, & d^3y, & d^3z \end{vmatrix}.$$

Krzywe przestrzenne są więc krzywymi podwójnej krzywizny. Dla krzywych płaskich jest kąt skręcenia (krzywizna druga) zerem, promień ϱ_1 krzywizny drugiej będzie zatem nieskończenie wielkim. W tym razie musi być $\Delta = 0$, równanie to stanowi zatem kryteryum krzywych płaskich.

9. Kula ściśle styczna. Kulą ściśle styczną nazywamy kulę, która przechodzi przez cztery nieskończenie bliskie punkta krzywej przestrzennej. Oznaczmy jej promień przez r, a spółrzędne jej środka przez ξ, η, ζ, wtedy otrzymamy jej równanie w postaci:

$$(X-\xi_1)^2 + (Y-\eta_1)^2 + (Z-\zeta_1)^2 = r^2.$$

Ażeby ta kula przechodziła przez punkt x, y, z i trzy nieskończenie bliskie mu punkta, muszą się spełnić następujące równania warunkowe:

$$(x-\xi_1)^2 + (y-\eta_1)^2 + (z-\zeta_1)^2 = r^2, \tag{α}$$

$$(x-\xi_1)\,dx + (y-\eta_1)\,dy + (z-\zeta_1)\,dz = 0,$$

$$(x-\xi_1)\,d^2x + (y-\eta_1)\,d^2y + (z-\zeta_1)\,d^2z + (ds)^2 = 0,$$

$$(x-\xi_1)\,d^3x + (y-\eta_1)\,d^3y + (z-\zeta_1)\,d^3z + 3\,ds\,d^2s = 0.$$

Z tych czterech równań dadzą się niewiadome: ξ_1, η_1, ζ_1 i r wyznaczyć.

Ostatnie trzy równania dają mianowicie na wyznaczenie ξ_1, η_1, ζ_1:

$$\left.\begin{aligned} (x-\xi_1)(P\,d^3x + Q\,d^3y + R\,d^3z) &= ds^2\,dP - 3\,P\,ds\,d^2s \\ (y-\eta_1)(P\,d^3x + Q\,d^3y + R\,d^3z) &= ds^2\,dQ - 3\,Q\,ds\,d^2s \\ (z-\zeta_1)(P\,d^3x + Q\,d^3y + R\,d^3z) &= ds^2\,dR - 3\,R\,ds\,d^2s \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

skąd za pomocą równania (α) obliczyć możemy promień r.

Prostszymi będą wzory na ξ_1, η_1, ζ_1 i r, jeżeli weźmiemy do pomocy promienie pierwszej i drugiej krzywizny ϱ i ϱ_1. Poprzednio otrzymaliśmy

$$\varrho^2 = \frac{ds^6}{P^2+Q^2+R^2}, \quad \varrho_1 = \frac{P^2+Q^2+R^2}{P\,d^3x+Q\,d^3y+R\,d^3z},$$

będzie zatem:
$$\varrho^2\varrho_1 = \frac{ds^6}{P\,d^3x+Q\,d^3y+R\,d^3z}. \tag{22}$$

Oznaczywszy przez λ, μ, ν kąty, jakie pion płaszczyzny ściśle stycznej w punkcie x, y, z tworzy z osiami układu, mamy:

$$\cos\lambda = \frac{P}{\sqrt{M}}, \quad \cos\mu = \frac{Q}{\sqrt{M}}, \quad \cos\nu = \frac{R}{\sqrt{M}}, \text{ gdzie } M = P^2+Q^2+R^2.$$

Będzie zatem:
$$\frac{\cos\lambda}{\varrho} = \frac{P}{ds^3}, \quad \frac{\cos\mu}{\varrho} = \frac{Q}{ds^3}, \quad \frac{\cos\nu}{\varrho} = \frac{R}{ds^3}.$$

Różniczkując te wyrażenia, otrzymamy:

$$d\left(\frac{\cos\lambda}{\varrho}\right) = \frac{ds^3dP - 3P\,ds^2d^2s}{ds^6} = \frac{ds^2dP - 3P\,ds\,d^2s}{ds^5},$$

podobnie:
$$d\left(\frac{\cos\mu}{\varrho}\right) = \frac{ds^2\,dQ - 3Q\,ds\,d^2s}{ds^5}, \quad d\left(\frac{\cos\nu}{\varrho}\right) = \frac{ds^2\,dR - 3R\,ds\,d^2s}{ds^5}.$$

Wstawiwszy te wartości w (21), dostaniemy:

$$x-\xi_1 = \frac{ds^5 . d\left(\frac{\cos\lambda}{\varrho}\right)}{Pd^3x+Q\,d^3y+R\,d^3z}, \quad \eta-\eta_1 = \frac{ds^5 . d\left(\frac{\cos\mu}{\varrho}\right)}{Pd^3x+\&}, \quad z-\zeta_1 = \frac{ds^5 . d\left(\frac{\cos\nu}{\varrho}\right)}{Pd^3x+\&},$$

czyli:
$$x-\xi_1 = \frac{\varrho^2\varrho_1\,d\left(\frac{\cos\lambda}{\varrho}\right)}{ds}, \quad y-\eta_1 = \frac{\varrho^2\varrho_1\,d\left(\frac{\cos\mu}{\varrho}\right)}{ds}, \quad z-\zeta_1 = \frac{\varrho^2\varrho_1\,d\left(\frac{\cos\nu}{\varrho}\right)}{ds},$$

skąd wypadają wzory:

$$\left.\begin{aligned} x-\xi_1 &= \frac{\varrho_1}{ds}(\varrho\,d\cos\lambda - \cos\lambda\,d\varrho), \quad y-\eta_1 = \frac{\varrho_1}{ds}(\varrho\,d\cos\mu - \cos\mu\,d\varrho) \\ z-\zeta_1 &= \frac{\varrho_1}{ds}(\varrho\,d\cos\nu - \cos\nu\,d\varrho) \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Jeżeli te równania podniesiemy obustronnie do kwadratu i dodamy, to otrzymamy:

$$r^2 = \frac{\varrho_1^2}{ds^2}\{\varrho^2[(d\cos\lambda)^2+\&] + (d\varrho)^2[\cos^2\lambda+\&] - 2\varrho\,d\varrho[\cos\lambda\,d\cos\lambda+\&]\},$$

czyli, ze względu na to, że: $(d\cos\lambda)^2+(d\cos\mu)^2+(d\cos\nu)^2 = (d\eta)^2$,
$\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu = 1$, $\cos\lambda\,d\cos\lambda+\cos\mu\,d\cos\mu+\cos\nu\,d\cos\nu = 0$,

nowy wzór:
$$r^2 = \varrho_1^2\left\{\varrho^2\left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2\right\}.$$

Zważywszy wreszcie, że: $\frac{d\eta}{ds} = \frac{1}{\varrho_1}$ otrzymamy: $r^2 = \varrho^2 + \varrho_1^2\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2$,

przeto:
$$r = \sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^2\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2} \tag{24}$$

wzór na wyznaczenie promienia kuli ściśle stycznej.

Środki kul ściśle stycznych tworzą krzywą przestrzenną, której równanie otrzymamy, jeżeli z równań (21) na ξ_1, η_1, ζ_1 otrzymanych i równań danej krzywej przestrzennej wyrugujemy zmienne x, y, z.

10. Związek między promieniem koła ściśle stycznego i promieniem kuli ściśle stycznej. Niech będzie $M(x, y, z)$ punktem krzywej, $C(\xi, \eta, \zeta)$ środkiem przynależnej mu kuli ściśle stycznej, tedy będą dostawy kierunkowe promienia r określone stosunkami:

$$\frac{x-\xi_1}{r}, \quad \frac{y-\eta_1}{r}, \quad \frac{z-\zeta_1}{r}.$$

Promień ten utworzy z płaszczyzną ściśle styczną kąt, który oznaczmy przez ω. Kąt ten jest dopełnieniem kąta, jaki tworzy promień r z pionem płaszczyzny ściśle stycznej, który ma dostawy kierunkowe:

$$\frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}, \quad \frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}, \quad \frac{R}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}},$$

będzie zatem:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\frac{x-\xi_1}{r}\frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}+\frac{y-\eta_1}{r}\frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}+\frac{z-\zeta_1}{r}\frac{R}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}},$$

czyli:

$$\sin\omega=\frac{P(x-\xi_1)+Q(y-\eta_1)+R(z-\zeta_1)}{r\sqrt{P^2+Q^2+R^2}} \tag{25}$$

Biorąc do pomocy wzory na ξ_1, η_1, ζ_1 pod (23) otrzymane, dostaniemy

$$\sin\omega=\frac{P\varrho_1(\varrho\, d\cos\lambda-\cos\lambda\, d\varrho)^2+\&}{r\,ds\sqrt{P^2+Q^2+R^2}},$$

skąd, kładąc:

$$P=\cos\lambda\sqrt{P^2+Q^2+R^2}, \quad Q=\cos\mu\sqrt{P^2+Q^2+R^2}, \quad R=\cos\nu\sqrt{P^2+Q^2+R^2},$$

otrzymamy:

$$\sin\omega=\frac{\varrho_1(\varrho\cos\lambda\, d(\cos\lambda)-\cos^2\lambda\, d\varrho)+\&}{r\,ds}=\frac{\varrho_1\{\varrho[\cos\lambda\, d\cos\lambda+\&]-d\varrho[\cos^2\lambda+\&]\}}{r\,ds}.$$

Zważywszy atoli, że:

$$\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu=1, \quad \cos\lambda\, d\cos\lambda+\cos\mu\, d\cos\mu+\cos\nu\, d\cos\nu=0,$$

dostaniemy z poprzedzającego wzoru:

$$\sin\omega=\frac{-\varrho_1 d\varrho}{r\,ds}, \quad \text{przeto: } r\sin\omega=-\varrho_1\frac{d\varrho}{ds}, \quad \text{czyli: } r^2\sin^2\omega=\varrho_1{}^2\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2$$

Na mocy wzoru (24) mamy jednakże:

$$\varrho_1{}^2\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2=r^2-\varrho^2, \quad \text{przeto będzie: } r^2\cos^2\omega=r^2-\varrho^2,$$

czyli:

$$\varrho^2=r^2(1-\sin^2\omega)=r^2\cos^2\omega, \text{ a więc: } \varrho=r\cos\omega, \tag{26}$$

t. z.: *Promień koła ściśle stycznego jest rzutem promienia kuli ściśle stycznej na płaszczyznę ściśle styczną.*

Wnioski: 1) Prostopadła wyprowadzona z środka C, kuli ściśle stycznej na płaszczyznę ściśle styczną przechodzi przez środek S koła krzywizny.

2) Środek S koła krzywizny i środek C kuli ściśle stycznej w pewnym punkcie M krzywej przestrzennej leżą na płaszczyźnie normalnej tegoż punktu M.

11. Wzory Freneta. Oznaczmy przez α, β, γ kąty, jakie styczna, przez ξ, η, ζ kąty, jakie główna normalna, a przez λ, μ, ν kąty, jakie binormalna w punkcie $P(x, y, z)$ krzywej przestrzennej tworzy z osiami układu, wtedy otrzymujemy na podstawie wzoru (3),

α) z relacyj:

$$\frac{\cos\alpha}{dx}=\frac{\cos\beta}{dy}=\frac{\cos\gamma}{dz}=\frac{1}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}=\frac{1}{ds},$$

wzory:

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds},\quad \cos\beta=\frac{dy}{ds},\quad \cos\gamma=\frac{dz}{ds} \tag{I}$$

na podstawie wzoru (11),

β) z relacyj:

$$\frac{\cos\xi}{Q\,dz-R\,dy}=\frac{\cos\eta}{R\,dx-P\,dz}=\frac{\cos\zeta}{P\,dy-Q\,dz}=\frac{1}{\sqrt{(Q\,dx-R\,dy)^2+\&}}=\frac{1}{ds\sqrt{P^2+Q^2+R^2}},$$

wzory:

$$\cos\xi=\frac{Q\,dz-R\,dy}{ds\sqrt{P^2+Q^2+R^2}},\quad \cos\eta=\frac{R\,dx-P\,dz}{ds\sqrt{P^2+Q^2+R^2}},\quad \cos\zeta=\frac{P\,dy-Q\,dx}{ds\sqrt{P^2+Q^2+R^2}} \tag{II}$$

które ze względu na to, że na mocy (I):

$$d\cos\alpha=\frac{ds\,d^2x-dx\,d^2s}{ds^2}=\frac{Q\,dz-R\,dy}{ds^3},$$

a więc: $$Q\,dz-R\,dy=d\cos\alpha\,.\,ds^3,$$

a podobnie: $R\,dx-P\,dz=d\cos\beta\,.\,ds^3$, $P\,dy-Q\,dx=d\cos\gamma\,.\,ds^3$,

a nadto: $\varrho=\dfrac{ds^3}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}$, możemy przedstawić w postaci:

$$\cos\xi=\varrho\frac{d\cos\alpha}{ds},\quad \cos\eta=\varrho\frac{d\cos\beta}{ds},\quad \cos\zeta=\varrho\frac{d\cos\gamma}{ds}. \tag{II'}$$

γ) Na podstawie wzoru (11) z relacyj:

$$\frac{\cos\lambda}{P}=\frac{\cos\mu}{Q}=\frac{\cos\nu}{R}=\frac{1}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}=\frac{\varrho}{ds^3},$$

wzory:

$$\cos\lambda=\frac{\varrho P}{ds^3},\quad \cos\mu=\frac{\varrho Q}{ds^3},\quad \cos\nu=\frac{\varrho R}{ds^3}. \tag{III}$$

Na podstawie powyższych wzorów w połączeniu z wzorami na promienie krzywizny i skręcenia ϱ i ϱ_1 możemy wyprowadzić wzory, podające stosunki między różniczkami dostaw kierunkowych stycznej, głównej normalnej i binormalnej a różniczką łuku, zwane **wzorami Freneta**.

Przedewszystkiem otrzymujemy z II' wzory, podające stosunki między różniczkami $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$, $d\cos\gamma$ dostaw kierunkowych stycznej a różniczką łuku ds postaci:

$$\frac{d\cos\alpha}{ds}=\frac{\cos\xi}{\varrho},\quad \frac{d\cos\beta}{ds}=\frac{\cos\eta}{\varrho},\quad \frac{d\cos\gamma}{ds}=\frac{\cos\zeta}{\varrho}. \tag{27}$$

Między dostawami kierunkowemi binormalnej (λ, μ, ν) i stycznej (α, β, γ) zachodzi związek prostopadłości: $\cos\alpha\cos\lambda+\cos\beta\cos\mu+\cos\gamma\cos\nu=0$.

Różniczkując ten związek, otrzymujemy:

$$\cos\alpha\,d\cos\lambda+\&+\cos\lambda\,d\cos\alpha+\&=0,$$

a że na podstawie (27): $\cos\lambda\,d\cos\alpha+\&=(\cos\lambda\cos\xi+\&)\,.\,\dfrac{ds}{\varrho}$,

a z powodu prostopadłości kierunków binormalnej (λ, μ, ν) i głównej normalnej (ξ, η, ζ): $\cos\lambda\cos\xi+\cos\mu\cos\eta+\cos\nu\cos\zeta=0$,
przeto otrzymujemy związek: $\cos\alpha\, d\cos\lambda+\cos\beta\, d\cos\mu+\cos\gamma\, d\cos\nu=0$,
który w połączeniu z równaniem: $\cos\lambda\, d\cos\lambda+\cos\mu\, d\cos\mu+\cos\nu\, d\cos\nu=0$,
wynikającem z relacyi: $\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu=1$, prowadzi do szeregu stosunków:

$$\frac{d\cos\lambda}{\begin{vmatrix}\cos\beta, \cos\gamma\\ \cos\mu, \cos\nu\end{vmatrix}}=\frac{d\cos\mu}{\begin{vmatrix}\cos\gamma, \cos\alpha\\ \cos\nu, \cos\lambda\end{vmatrix}}=\frac{d\cos\nu}{\begin{vmatrix}\cos\alpha, \cos\beta\\ \cos\lambda, \cos\mu\end{vmatrix}}=\frac{\sqrt{(d\cos\lambda)^2+\&}}{1}=d\eta,$$

czyli ze względu na to, że:

$$\begin{vmatrix}\cos\beta, \cos\gamma\\ \cos\mu, \cos\nu\end{vmatrix}=\cos\xi,\quad \begin{vmatrix}\cos\gamma, \cos\alpha\\ \cos\nu, \cos\lambda\end{vmatrix}=\cos\eta,\quad \begin{vmatrix}\cos\alpha, \cos\beta\\ \cos\lambda, \cos\mu\end{vmatrix}=\cos\xi,$$

do stosunków: $$\frac{d\cos\lambda}{\cos\xi}=\frac{d\cos\mu}{\cos\eta}=\frac{d\cos\nu}{\cos\zeta}=\frac{ds}{\varrho_1},$$

z których otrzymujemy wzory, podające stosunki między różniczkami dostaw kierunkowych binormalnej a różniczką łuku w postaci:

$$\frac{d\cos\lambda}{ds}=\frac{\cos\xi}{\varrho_1},\quad \frac{d\cos\mu}{ds}=\frac{\cos\eta}{\varrho_1},\quad \frac{d\cos\nu}{ds}=\frac{\cos\zeta}{\varrho_1}. \tag{28}$$

Uwzględniając relacyę:

$$\cos\xi=\begin{vmatrix}\cos\beta, \cos\gamma\\ \cos\mu, \cos\nu\end{vmatrix}=\cos\beta\cos\nu-\cos\gamma\cos\mu,$$

otrzymujemy:

$$d\cos\xi=\cos\beta\, d\cos\nu-\cos\gamma\, d\cos\mu+\cos\nu\, d\cos\beta-\cos\mu\, d\cos\gamma,$$

skąd po uwzględnieniu wzorów (27) i (28), otrzymujemy:

$$\frac{d\cos\xi}{ds}=\frac{1}{\varrho_1}(\cos\beta\cos\xi-\cos\gamma\cos\eta)+\frac{1}{\varrho}(\cos\nu\cos\eta-\cos\mu\cos\zeta),$$

a że: $$\cos\alpha=\begin{vmatrix}\cos\mu, \cos\nu\\ \cos\eta, \cos\zeta\end{vmatrix}=\cos\mu\cos\zeta-\cos\nu\cos\eta,$$

$$\cos\lambda=\begin{vmatrix}\cos\eta, \cos\zeta\\ \cos\beta, \cos\gamma\end{vmatrix}=\cos\eta\cos\gamma-\cos\zeta\cos\beta,$$

przeto otrzymujemy wzory przedstawiające stosunki między dostawami kierunkowemi głównej normalnej a różniczką łuku w postaci:

$$\frac{d\cos\xi}{ds}=-\left(\frac{\cos\alpha}{\varrho}+\frac{\cos\lambda}{\varrho_1}\right),\quad \frac{d\cos\eta}{ds}=-\left(\frac{\cos\beta}{\varrho}+\frac{\cos\mu}{\varrho_1}\right),$$

$$\frac{d\cos\zeta}{ds}=-\left(\frac{\cos\gamma}{\varrho}+\frac{\cos\mu}{\varrho_1}\right). \tag{29}$$

Z wzorów Freneta wynika, że krzywa przestrzenna jest co do kształtu swego wyznaczoną, gdy promień krzywizny ϱ i promień skręcenia ϱ_1 podane są jako funkcye łuku s, a więc gdy jest przedstawioną równaniami kształtu: $\varrho=\varphi(s)$, $\varrho_1=\psi(s)$, które nazywamy równaniami naturalnemi krzywej przestrzennej.

12. Przykłady. *a*) **Linia śrubowa:** $x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=bt$. **Mamy tu:**

$$\frac{dx}{dt}=-a\sin t,\quad \frac{dy}{dt}=a\cos t,\quad \frac{dz}{dt}=b,\quad \frac{d^2x}{dt^2}=-a\cos t,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-a\sin t,\quad \frac{d^2z}{dt^2}=0.$$

$$\frac{d^3x}{dt^3}=a\sin t,\quad \frac{d^3y}{dt^3}=-a\cos t,\quad \frac{d^3z}{dt^3}=0,\quad \frac{ds}{dt}=\sqrt{a^2+b^2},\quad P=ab\sin t\,dt^3,$$

$$Q=-ab\cos t\,dt^3,\quad R=a^2dt^3,\quad \sqrt{P^2+Q^2+R^2}=a\sqrt{a^2+b^2}dt^3,\quad Pd^3x+Qd^3y+Rd^3z=a^2b\,dt^6.$$

Na tej podstawie znajdziemy:

a) równanie stycznej w punkcie x, y, z, odpowiadającym pewnej wartości t, z wzoru:

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz},$$

w postaci:
$$\frac{X-a\cos t}{-a\sin t}=\frac{Y-a\sin t}{a\cos t}=\frac{Z-bt}{b},$$

czyli:
$$X=-\frac{a}{b}\sin t\,.\,Z+a(t\sin t+\cos t),\quad Y=\frac{a}{b}\cos t\,.\,Z-a(t\cos t-\sin t),$$

b) równanie płaszczyzny normalnej z wzoru:

$$(X-x)dx+(Y-y)dy+(Z-z)dz=0,$$

w postaci:
$$-(X-a\cos t)a\sin t+(Y-a\sin t)a\cos t+(Z-bt)b=0,$$

czyli:
$$-a\sin t\,X+a\cos t\,Y+b\,Z=b^2t,$$

c) równanie płaszczyzny ściśle stycznej z wzoru:

$$P(X-x)+Q(Y-y)+R(Z-z)=0,$$

w postaci:
$$ab\sin t(X-a\cos t)-ab\cos t(Y-a\sin t)+a^2(Z-bt)=0,$$

czyli:
$$b\sin t\,X-b\cos t\,Y+a\,Z=abt,$$

d) kierunek binormalnej, t. j. pionu płaszczyzny ściśle stycznej z wzorów:

$$\cos\lambda=\frac{b\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\mu=-\frac{b\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\nu=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Ponieważ $\cos\nu$ jest tu ilością stałą, zatem płaszczyzna ściśle styczna do linii śrubowej jest w każdym punkcie do osi OZ, a więc do rodzących walca jednakowo nachyloną.

e) Normalna główna jako przecięcie płaszczyzny normalnej z płaszczyzną ściśle styczną określoną tu będzie równaniami:

$$-a\sin t\,X+a\cos t\,Y+bX=b^2t,\quad b\sin t\,X-b\cos t\,Y+aZ=abt,$$

które sprowadzić możemy do postaci:

$$Z=bt,\quad X\sin t=Y\cos t,$$

z której czytamy, że główna normalna linii śrubowej przecina zawsze oś OZ, czyli oś walca.

f) Promienie pierwszej i drugiej krzywizny znajdujemy z wzorów:

$$\rho=\frac{ds^3}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}},\quad \rho_1=\frac{P^2+Q^2+R^2}{Pd^3x+Qd^3y+Rd^3z},$$

w postaci:
$$\rho=\frac{a^2+b^2}{a},\quad \rho_1=\frac{a^2+b^2}{b},$$

które dowodzą, że linia śrubowa ma w każdym punkcie jednakową krzywiznę i jednakowe skręcenie.

g) Promień kuli ściśle stycznej: $r=\sqrt{\rho^2+\rho_1^2\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2}$ będzie tu miał z powodu, że: $d\rho=0$ wartość: $r=\rho=\frac{a^2+b^2}{a}$ jest więc także jednakowy i w każdym punkcie równy promieniowi koła ściśle stycznego.

h) Środek koła ściśle stycznego określony równaniami:

$$x-\xi=\frac{Rdy-Qdz}{P^2+Q^2+R^2}ds^2,\quad y-\eta=\frac{Pdz-Rdx}{P^2+Q^2+R^2}ds^2,\quad z-\zeta=\frac{Qdx-Pdy}{P^2+Q^2+R^2}ds^2,$$

będzie tu wyznaczony wzorami:

$$x-\xi=\frac{a^2+b^2}{a}\cos t=a\cos t+\frac{b^2}{a}\cos t,$$

$$y-\eta=\frac{a^2+b^2}{a}\sin t=a\sin t+\frac{b^2}{a}\sin t,\quad z-\zeta=0,$$

których wypada:

$$\xi=-\frac{b^2}{a}\cos t,\quad \eta=-\frac{b^2}{a}\sin t,\quad \zeta=bt.$$

Wzory te dowodzą, że miejsce środków kół ściśle stycznych do linii śrubowej two- nowu linię śrubową.

Środek kuli ściśle stycznej wpada w środek koła ściśle stycznego, gdyż z powodu, $r=\rho$ mamy $\cos\omega=\frac{\rho}{r}=1$, a więc $\omega=0$, koło ściśle styczne jest tu zatem wielkiem kuli ściśle stycznej. Miejsce środków kul ściśle stycznych zgadza się więc z miej- kół ściśle stycznych i tworzy nową linię śrubową.

β) **Lemniskata sferyczna.** Na około punktu początkowego opisana jest kula o promie- a; nad promieniem tej kuli jako średnicą oparty jest na płaszczyźnie XOY, prosty walec kołowy, tenże wycina z kuli zamkniętą krzywą przestrzenną wyglądającą jak lemni- kata na kuli rozmieszczona. Znaleźć obie krzywizny.

Krzywę tę przedstawiają równania: $x^2+y^2+z^2=a^2$ i $x^2+y^2=ax$, które możemy zastąpić równaniami: $y^2=x(a-x)$, $z^2=a(a-x)$.

Uważajmy x jako zmienną niezależną, a więc dx jako ilość stałą, zatem $d^2x=0$, to otrzymamy:

$$2y\frac{dy}{dx}=a-2x,\quad 2z\frac{dz}{dx}=-a,\quad \text{przeto}\quad \frac{dy}{dx}=\frac{a-2x}{2y},\quad \frac{dz}{dx}=-\frac{a}{2z}.$$

Różniczkując jeszcze raz otrzymamy:

$$2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2y\frac{d^2y}{dx^2}=-2,\quad 2\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+2z\frac{d^2z}{dx^2}=0,$$

skąd wypada:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{a^2}{4y^3},\quad \frac{d^2z}{dx^2}=-\frac{a^2}{4z^3}.$$

Dalej będzie stąd: $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{3a^2}{4y^4}\cdot\frac{dy}{dx}=-\frac{3a^2(a-2x)}{8y^5}$, $\frac{d^3z}{dx^3}=-\frac{3a^3}{8z^5}$.

Na tej podstawie znajdziemy:

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\frac{(a-2x)^2}{4x(a-x)}+\frac{a^2}{4a(a-x)}}=\sqrt{\frac{a(a+x)}{4x(a-x)}}$$

$$P=-\frac{a^{1/2}(a+2x)}{8x^{3/2}(a-x)}dx^3,\quad Q=\frac{a^2}{4z^3}dt^3,\quad R=-\frac{a^2}{4y^3}dx^3,$$

$$P^2+Q^2+R^2=\frac{a^3(5a+3x)}{64x^3(a-x)^3}dx^6,\quad Pd^3x+Qd^3y+Rd^3z=\frac{3a^2\sqrt{ax}}{32x^2(a-x)^3}dx^6,$$

więc promienie: $\rho=\frac{ds^3}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}=\sqrt{\frac{(a+x)}{5a+3x}}$, $\rho_1=\frac{P^2+Q^2+R^2}{Pd^3x+Qd^3y+Rd^3z}=\frac{4a+3x}{6\sqrt{\frac{x}{a}}}$.

Promień kuli ściśle stycznej jest stały $r=a$, krzywa jest bowiem krzywą sferyczną. wyznaczenie środków kół ściśle stycznych mamy:

$$x-\xi=\frac{Rdy-Qdz}{P^2+Q^2+R^2}ds^2=\frac{2(a+x)(x^2+2ax-a^2)}{-a(5a+3x)},$$

zatem:

$$\xi=\frac{(a-x)(3a+x)(a+2x)}{a(5a+3x)},$$

podobnie znajdziemy: $\eta=-\frac{2(2a+x)x\sqrt{x(a-x)}}{a(5a+3x)}$, $\zeta=\frac{2(2a+x)\sqrt{a(a-x)}}{5a+3x}$.

Miejsce środków kół ściśle stycznych jest zatem krzywą przestrzenną określoną ostatniemi trzema równaniami. Krzywa ta jest krzywą algebraiczną stopnia szóstego.

γ) **Dana krzywa algebraiczna:** $x=at$, $y=\frac{a}{2}t^2$, $z=\frac{a}{3}t^3$. Mamy tu:

$$=a,\quad \frac{dy}{dt}=at,\quad \frac{dz}{dt}=at^2,\quad \frac{d^2x}{dt^2}=0,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=a,\quad \frac{d^2z}{dt^2}=2at,\quad \frac{d^3x}{dt^3}=0,\quad \frac{d^3y}{dt^3}=0,\quad \frac{d^3z}{dt^3}=2a,$$

przeto: $\frac{ds}{dt}=a\sqrt{1+t^2+t^4}$, $\frac{P}{dt^3}=a^2t^2$, $\frac{Q}{dt^3}=-2a^2t$, $\frac{R}{dt^3}=a^2$,

$$\frac{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}{dt^3}=a^2\sqrt{1+4t^2+t^4},\quad \frac{Pd^3x+Qd^3y+Rd^3z}{dt^3}=2a^3.$$

Na tej podstawie znajdziemy:

a) równanie linii stycznej: $X=\frac{Z}{t^2}+\frac{2}{3}at,\quad Y=\frac{Z}{t}+\frac{1}{6}at^2,$

b) równanie płaszczyzny normalnej: $X+tY+t^2Z=at\left(1+\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{3}\right),$

c) równanie płaszczyzny ściśle stycznej: $t^2X-2tY+Z=\frac{a}{3}t^3,$

d) promienie krzywizny: $\rho=\frac{ds^3}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}=a\sqrt{\frac{(1+t^2+t^4)^3}{1+4t^2+t^4}},$

$$\rho_1=\frac{P^2+Q^2+R^2}{Pd^3x+Qd^3y+Rd^3z}=\frac{a}{2}(1+4t^2+t^4),$$

e) promień kuli ściśle stycznej z wzoru: $r^2=\rho^2+\rho_1^2\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2$ w postaci:

$$r^2=\frac{a^2}{4}(4-3t^2+8t^4+101t^6+108t^8+16t^{10}),$$

f) miejsce środków kół ściśle stycznych:

$$\xi=a\frac{t^3-2t^5-2t^7}{1+4t^2+t^4},\quad \eta=a\frac{2+8t^2+4t^4-t^6-2t^8}{1+4t^2+t^4},\quad \zeta=a\frac{6t+10t^3+18t^5+4t^7}{1+4t^2+t^4},$$

g) miejsce środków kul ściśle stycznych:

$$\xi_1=\frac{a}{2}(t^3+t^5),\quad \eta_1=\frac{a}{2}(2-3t^2-10t^4),\quad \zeta_1=\frac{a}{2}(9t+20t^3).$$

δ) **Wyznaczyć asymptoty krzywej przestrzennej:**

$$x=\frac{a}{t-1},\quad y=\frac{a}{t},\quad z=\frac{a}{t+1}.$$

Równanie tej krzywej możemy przedstawić w postaci:

$$x=a\frac{t^2+t}{t^3-t}=\frac{A}{D},\quad y=a\frac{t^2-1}{t^3-t}=\frac{B}{D},\quad z=a\frac{t^2-t}{t^3-t}=\frac{C}{D},$$

gdzie: $A=a(t^2+t),\quad B=a(t^2-1),\quad C=a(t^2-t),\quad D=t^3-t.$

Krzywa ma trzy punkta w nieskończoności odpowiadające trzem pierwiastkom ı nia: $D=t^3-t=0$, którymi są $t_1=-1$, $t_2=0$ i $t_3=+1$. Istnieją tu zatem trzy r wiste asymptoty. Równania jakiejkolwiek asymptoty są:

$$XD'C=ZD'A+(A'C-C'A),\quad YD'C=ZD'B+(B'C-C'B)$$

W tym wypadku mamy:

$$A'=a(2t+1),\quad B'=2at,\quad C'=a(2t-1),\quad D'=3t^2-1,$$

przeto przedstawiają się powyższe równania w postaci:

$$X=\frac{Z(3t^3+3t^2-t-1)-2at}{3t^3-3t^2-t+1},\quad Y=\frac{Z(3t^3+3t^2-t-1)-a(t-1)}{3t^3-3t^2-t+1}$$

Poszczególne asymptoty będą tedy:

a) dla $t_1=-1$, $X=-\frac{a}{2}$, $Y=-a$, prosta równoległa do osi OZ,

b) dla $t_2=0$, $Z=a$, $X=-a$, prosta równoległa do osi OY,

c) dla $t_3=1$, $Z=\frac{a}{2}$, $Y=a$, prosta równoległa do osi OX.

13. Styczność dwu krzywych przestrzennych. Przyjmijmy, że krzywe przestrzenne, jedna określona równaniami: $x=f_1(t)$, $y=\varphi_1(t)$, $z=$ druga równaniami: $x=f_2(t)$. $y=\varphi_2(t)$, $z=\psi_2(t)$ mają punkt wspólny (x, odpowiadający pewnej wartości parametru t, natenczas otrzymamy warunki: $f_1(t)=f_2(t)$, $\varphi_1(t)=\varphi_2(t)$, $\psi_1(t)=\psi_2(t)$.

Jeżeli prócz tego punktu miałby być jeszcze sąsiedni punkt wspólny, odpowiadający wartości $t+dt$ parametru, natenczas otrzymalibyśmy nowe trzy warunki w postaci:

$$f'_1(t)=f'_2(t), \quad \varphi'_1(t)=\varphi'_2(t), \quad \psi'_1(t)=\psi'_2(t).$$

Warunki te wskazują na wspólną styczną obu krzywych w punkcie odpowiadającym pewnej wartości parametru t, a takie krzywe, które mają w pewnym punkcie wspólną styczną, nazywamy krzywemi stycznemi w tym punkcie.

Gdyby takie krzywe, mające wspólne dwa punkta sąsiednie $P(x, y, z)$ i $Q(x+dx, y+dy, z+dz)$ miały jeszcze wspólny następny punkt:

$$R(x+2dx+d^2x, \; y+2dy+d^2y, \; z+2dz+d^2z),$$

wówczas musiałyby się na podstawie wzoru Taylora spełnić jeszcze warunki:

$$f''_1(t)=f''_2(t), \quad \varphi''_1(t)=\varphi''_2(t), \quad \psi''_1(t)=\psi''_2(t).$$

O krzywych takich powiadamy, że mają w punkcie $P(x, y, z)$ styczność drugiego rzędu.

Ogólnie, jeżeli dwie krzywe, jedna o równaniach $x=f_1(t)$, $y=\varphi_1(t)$, $z=\psi_1(t)$, druga o równaniach: $x=f_2(t)$. $y=\varphi_2(t)$, $z=\psi_2(t)$ mają oprócz punktu $P(x, y, z)$ jeszcze n następnych punktów wspólnych, a więc razem $(n+1)$ punktów sąsiednich wspólnych, wówczas powiadamy, że krzywe mają na tym punkcie styczność n-go rzędu.

Warunki styczności n-go rzędu przedstawiają się dla powyższych krzywych na mocy szeregu Taylora w postaci $3(n+1)$ równań kształtu:

$$f_1(t)=f_2(t), \quad \varphi_1(t)=\varphi_2(t), \quad \psi_1(t)=\psi_2(t),$$
$$f'_1(t)=f'_2(t), \quad \varphi'_1(t)=\varphi'_2(t), \quad \psi'_1(t)=\psi'_2(t),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$f_1^{(n)}(t)=f_2^{(n)}(t), \quad \varphi_1^{(n)}(t)=\varphi_2^{(n)}(t), \quad \psi_1^{(n)}(t)=\psi_2^{(n)}(t).$$

Jeżeliby druga krzywa była dana równaniami $F(x, y, z)=0$, $\Phi(x, y, z)=0$, natenczas otrzymujemy $(2n+2)$ równanie kształtu:

$$F[f(t), \varphi(t), \psi(t)]=0, \; F'[f(t), \varphi(t), \psi(t)]=0, \ldots, F^{(n)}[f(t), \varphi(t), \psi(t)]=0,$$
$$\Phi[f(t), \varphi(t), \psi(t)]=0, \; \Phi'[f(t), \varphi(t), \psi(t)]=0, \ldots, \Phi^{(n)}[f(t), \varphi(t), \psi(t)]=0,$$

przedstawiające warunki, pod którymi krzywa $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$, $z=\psi(t)$ ma z krzywą: $F(x, y, z)=0$, $\Phi(x, y, z)=0$ w danym punkcie t styczność n-go rzędu.

Ćwiczenia XLV.

1) Uzasadnić podział krzywych przestrzennych na krzywe algebraiczne i krzywe przestępne.

2) Wykazać, że każda krzywa przestrzenna rzędu pierwszego jest linią prostą.

3) Wykazać, że krzywe przestrzenne rzędu drugiego są krzywemi płaskiemi, a mianowicie przecięciami stożkowemi.

4) Wykazać, że rzut krzywej przestrzennej jest najwyżej tego samego rzędu, co sama krzywa przestrzenna.

5) Wykazać, że dwie powierzchnie, z których jedna jest m-go, druga n-go rzędu przecinają się według krzywej mn-go rzędu.

Zbadać następujące krzywe przestrzenne i wyznaczyć ich rzuty i rzędy:

6) $x^2+y^2+z^2=a^2$, $y^2=x(a-x)$; 7) $y=\frac{1}{2}x^2$, $z=\frac{1}{6}x^3$; 8) $y=\sqrt{x}$, $z=\frac{1}{x}$;

9) $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2-z^2=0$; 10) $x^2+y^2=a^2$, $y=x\operatorname{tang}\frac{z}{b}$.

11) Okazać, że równania parametrowe kształtu:

$$x=\frac{a_1t^3+b_1t^2+c_1t+d_1}{at^3+bt^2+ct+d},\quad y=\frac{a_2t^3+b_2t^2+c_2t+d_2}{at^3+bt^2+ct+d},\quad z=\frac{a_3t^3+b_3t^2+c_3t+d_3}{at^3+bt^2+ct+d}$$

przedstawiają krzywe przestrzenne trzeciego rzędu.

Wykazać, że w danym punkcie x, y, z krzywej: $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$, $z=\psi(t)$ otrzymujemy równania:

12) Prostej stycznej: $\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}$;

13) Płaszczyzny normalnej: $dx(X-x)+dy(Y-y)+dz(Z-z)=0$;

14) Płaszczyzny ściśle stycznej: $P(X-x)+Q(Y-y)+R(Z-z)=0$, gdzie $P=dy\,d^2z-dz\,d^2y$ $Q=dz\,d^2x-dx\,d^2z$, $R=dx\,d^2y-dy\,d^2x$;

15) Głównej normalnej: $\frac{X-x}{Q\,dz-R\,dy}=\frac{Y-y}{R\,dx-P\,dz}=\frac{Z-z}{P\,dy-Q\,dx}$;

16) Binormalnej: $\frac{X-x}{P}=\frac{Y-y}{Q}=\frac{Z-z}{R}$;

17) Płaszczyzny rektyfikacyjnej: $(Q\,dz-R\,dy)(X-x)+\&=0$;

18) Wykazać, że równania stycznej w punkcie $P(x,y,z)$ krzywej przestrzennej określonej równaniami: $\varphi(x,y,z)=0$, $\psi(x,y,z)=0$ możemy przedstawić w postaci:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial\varphi}{\partial z}(Z-z)=0,\quad \frac{\partial\psi}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial\psi}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial\psi}{\partial z}(Z-z)=0.$$

19) Wykazać, że równanie płaszczyzny normalnej w punkcie $P(x,y,z)$ krzywej: $\varphi(x,y,z)=0$, $\psi(x,y,z)=0$ możemy przedstawić w postaci wyznacznika:

$$\begin{vmatrix} X-x, & Y-y, & Z-z \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}, & \frac{\partial\varphi}{\partial y}, & \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \\ \frac{\partial\psi}{\partial x}, & \frac{\partial\psi}{\partial y}, & \frac{\partial\psi}{\partial z}, \end{vmatrix}=0.$$

Wyprowadzić równania osi i płaszczyzn układu naturalnego w danym punkcie $P(x,y,z)$ krzywej przestrzennej, określonej równaniami:

20) $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$, $z=\psi(t)$, gdzie t jest dowolnym parametrem.

21) $x=f(s)$, $y=\varphi(s)$, $z=\psi(s)$, gdzie parametr s przedstawia długość łuku, liczonego od pewnego punktu krzywej.

22) $y=f(x)$, $z=\varphi(x)$. 23) $\varphi(x,y,z)=0$, $\psi(x,y,z)=0$.

Wyprowadzić równania osi i płaszczyzn układu naturalnego w danym punkcie $P(x,y,z)$ następujących krzywych:

24) $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=t$. 25) $x=t$, $y=\frac{1}{2}t^2$, $z=\frac{1}{3}t^3$.

26) $x=\frac{1}{t-1}$, $y=\frac{1}{t}$, $z=\frac{1}{t+1}$. 27) $x^2+y^2=a$, $y^2+z^2=b^2$.

28) $x^2+y^2+z^2=a^2$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

29) Wykazać, że kula $x^2+y^2+z^2=1$ przecina powierzchnię $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2-2xyz=0$ w czterech kołach i wyznaczyć płaszczyzny tych kół.

30) Wykazać, że środek koła ściśle stycznego w punkcie (x,y,z) krzywej $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$, $z=\psi(t)$ ma spółrzędne:

$$\xi=x-\frac{R\,dy-Q\,dz}{P^2+Q^2+R^2}(ds)^2,\quad \eta=y-\frac{P\,dz-R\,dx}{P^2+Q^2+R^2}(ds)^2,\quad \zeta=z-\frac{Q\,dx-P\,dy}{P^2+Q^2+R^2}(ds)^2,$$

a promień tego koła ma wartość: $\rho=\frac{(ds)^3}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}$,

31) Wykazać, że promień skręcenia ρ_1 w punkcie (x,y,z) krzywej przestrzennej $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$, $z=\psi(t)$ wyznacza wzór: $\rho_1=\frac{P^2+Q^2+R^2}{P\,d^3x+Q\,d^3y+R\,d^3z}$.

32) Jeżeli krzywa przestrzenna określona jest dwoma równaniami kształtu: $y=f(x)$, $z=\varphi(x)$ okazać, że wówczas wzory na promienie krzywizny i skręcenia ρ i ρ_1 możemy przedstawić w postaci:

$$\rho=\sqrt{\frac{(1+y'^2+z'^2)^3}{(y'z''-y''z')^2+y''^2+z''^2}}, \qquad \rho_1=\frac{(1+y'^2+z'^2)^3}{\rho^2(y''z'''-y'''z'')}.$$

33) Okazać, że gdy krzywa przestrzenna określona jest równaniami: $x=f(s)$, $y=\varphi(s)$, $z=\psi(s)$, gdzie s jest długością łuku, natenczas spółrzędne środka krzywizny otrzymują wartości:

$$\xi=x+\rho^2\frac{d^2x}{ds^2}, \quad \eta=y+\rho^2\frac{d^2y}{ds^2}, \quad \zeta=z+\rho^2\frac{d^2z}{ds^2}, \quad \text{a} \quad \rho=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}},$$

przedstawia promień krzywizny.

34) Jeżeli ρ jest promieniem krzywizny, ρ_1 promieniem skręcenia w danym punkcie krzywej przestrzennej, okazać, że promień r kuli ściśle stycznej w tym punkcie wyraża się wzorem: $r=\sqrt{\rho^2+\rho_1^2\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2}$.

Wyznaczyć promień krzywizny i skręcenia w następujących krzywych:

35) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $x=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}}+e^{-\frac{z}{a}}\right)$. 36) $y=\frac{1}{2}x^2$, $z=\frac{1}{6}x^3$.

37) $x=a\cos\varphi$, $y=a\sin\varphi$, $z=b\varphi$. 38) $x=a\varphi\cos\varphi$, $y=a\varphi\sin\varphi$, $z=b\varphi$.

39) Wykazać, że środek ξ, η, ζ kuli ściśle stycznej w punkcie x, y, z, krzywej: $x=f(s)$, $y=\varphi(s)$, $z=\psi(s)$, gdzie s przedstawia długość łuku, możemy wyrazić wzorami:

$$\xi=x+\frac{z'y'''-y'z'''}{\Delta}, \quad \eta=y+\frac{x'z'''-z'x'''}{\Delta}, \quad \zeta=z+\frac{y'x'''-x'y'''}{\Delta}, \quad \text{gdzie } \Delta=\begin{vmatrix} x', & y', & z' \\ x'', & y'', & z'' \\ x''', & y''', & z''' \end{vmatrix},$$

a promień r kuli ściśle stycznej wzorem: $r=\frac{1}{\Delta}\sqrt{x'''^2+y'''^2+z'''^2-(x''^2+y''^2+z''^2)^3}$.

40) Punkt styczności (x, y, z) porusza się po krzywej: $y=\frac{1}{2}x^2$, $z=\frac{1}{6}x^3$, jaką drogę opisuje na płaszczyźnie XOY ślad stycznej.

41) Wyznaczyć miejsce geometryczne środków kół ściśle stycznych w punktach krzywej: $y=\frac{1}{2}x^2$, $z=\frac{1}{6}x^3$.

42) Zbadać kształt krzywej: $x=e^{a\varphi}\cos\varphi$, $y=e^{a\varphi}\sin\varphi$, $z=c\,.\,e^{a\varphi}$ i wyznaczyć długość jej łuku w granicach od $z=z_1$ do $z=z_2$.

43) Okazać, że krzywa określona równaniami: $f(x, y, z)=0$, $\varphi(x, y, z)=0$ ma w punkcie: $P(x, y, z)$, dla którego $\frac{\partial f}{\partial x}:\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}:\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}:\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, punkt osobliwy.

44) Wykazać, że przekrój płaszczyzny normalnej wykreślonej w punkcie $P(x, y, z)$ krzywej przestrzennej z płaszczyzną normalną punktu sąsiedniego, zwany osią krzywej w punkcie $P(x, y, z)$, określa się równaniami:

$$dx(X-x)+dy(Y-y)+dz(Z-z)=0, \quad d^2x(X-x)+d^2y(Y-y)+d^2z(Z-z)=ds^2.$$

45) Okazać, że oś krzywej, określona zag. 44, a odpowiadająca punktowi $P(x, y, z)$, ma ten sam kierunek (λ, μ, ν), co binormalna tego punktu, określony wzorami:

$$\frac{\cos\lambda}{P}=\frac{\cos\mu}{Q}=\frac{\cos\nu}{R}.$$

46) Okazać, że dwie styczne po sobie następujące w krzywej: $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$ $z=\psi(t)$ są określone równaniami:

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}, \quad \frac{X-x-dx}{dx+d^2x}=\frac{Y-y-dy}{dy+d^2y}=\frac{Z-z-dz}{dz+d^2z},$$

a kąt $d\varepsilon$ między niemi zawarty określa się wzorem:

$$d\varepsilon=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} dy, & dz \\ d^2y, & d^2z \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} dz, & dx \\ d^2z, & d^2x \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} dx, & dy \\ d^2x, & d^2y \end{vmatrix}^2}}{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

47) Okazać, że dwie krzywe, jedna: $x=f_1(t)$, $y=\varphi_1(t)$, $z=\psi_1(t)$, druga: $x=f_2(t)$, $y=\varphi_2(t)$, $z=\psi_2(t)$, mają w pewnym punkcie styczność n-ego rzędu, jeżeli dla pewnej wartości parametru obok trzech warunków: $f_1(t)=f_2(t)$, $\varphi_1(t)=\varphi_2(t)$, $\psi_1(t)=\psi_2(t)$, spełnia się jeszcze $3n$ warunków:

$$\frac{d^r f_1(t)}{dt^r}=\frac{d^r f_2(t)}{dt^r},\quad \frac{d^r \varphi_1(t)}{dt^r}=\frac{d^r \varphi_2(t)}{dt^r},\quad \frac{d^r \psi_1(t)}{dt^r}=\frac{d^r \psi_2(t)}{dt^r},\ \text{gdzie: } r=1,\ 2,\dots,n.$$

48) Okazać, że krzywa $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$, $z=\psi(t)$ ma z powierzchnią $F(x,\ y,\ z)=0$ w pewnym punkcie t styczność n-ego rzędu, jeżeli obok warunku: $F[f(t),\ \varphi(t),\ \psi(t)]=0$ spełnia się jeszcze n warunków kształtu:

$$\frac{d^r F[f(t),\ \varphi(t),\ \psi(t)]}{dt^r}=0,\ (r=1,\ 2,\dots,n).$$

Oznaczając przez kąty α, β, γ kierunek stycznej, przez ξ, η, ζ kierunek głównej normalnej, przez λ, μ, ν kierunek binormalnej, a przez ρ i ρ_1 promienie krzywizny i skręcenia, okazać, że:

49) $$\begin{vmatrix} \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma \\ \cos\xi, & \cos\eta, & \cos\zeta \\ \cos\lambda, & \cos\mu, & \cos\nu \end{vmatrix}=1,$$

50) $$\begin{aligned} \cos\xi &= \cos\mu\cos\gamma-\cos\nu\cos\beta \\ \cos\eta &= \cos\nu\cos\alpha-\cos\lambda\cos\gamma. \\ \cos\zeta &= \cos\lambda\cos\beta-\cos\mu\cos\alpha \end{aligned}$$

51) $\cos\alpha\, d\cos\lambda+\cos\beta\, d\cos\mu+\cos\gamma\, d\cos\nu=-\dfrac{ds}{\rho}.$

52) $\cos\xi\, d\cos\lambda+\cos\eta\, d\cos\mu+\cos\zeta\, d\cos\nu=-\dfrac{ds}{\rho_1}.$

53) $\dfrac{d\cos\alpha}{ds}=\dfrac{\cos\xi}{\rho},\quad \dfrac{d\cos\beta}{ds}=\dfrac{\cos\eta}{\rho},\quad \dfrac{d\cos\gamma}{ds}=\dfrac{\cos\zeta}{\rho}.$

54) $\dfrac{d\cos\xi}{ds}=-\left[\dfrac{\cos\alpha}{\rho}+\dfrac{\cos\lambda}{\rho'}\right],\quad \dfrac{d\cos\eta}{ds}=-\left[\dfrac{\cos\beta}{\rho}+\dfrac{\cos\mu}{\rho'}\right],\quad \dfrac{d\cos\zeta}{ds}=-\left[\dfrac{\cos\gamma}{\rho}+\dfrac{\cos\nu}{\rho'}\right].$

55) $\dfrac{d\cos\lambda}{ds}=\dfrac{\cos\xi}{\rho'},\quad \dfrac{d\cos\mu}{ds}=\dfrac{\cos\eta}{\rho'},\quad \dfrac{d\cos\nu}{ds}=\dfrac{\cos\zeta}{\rho'}.$

56) Oznaczając przez $d\varepsilon$ kąt między sąsiedniemi stycznemi, przez $d\eta$ kąt między binormalnemi, a przez $d\omega$ między głównemi normalnemi, okazać, że: $d\omega^2=d\varepsilon^2+d\eta^2$ (twierdzenie Lancret'a).

Rozwiązania XLV. 6) Przekrój kuli z walcem kołowym. 7) Przekrój walca parabolicznego drugiego rzędu z walcem parabolicznym 3-go rzędu. 8) Przekrój walca parabolicznego z walcem hyperbolicznym. 9) Przekrój kuli ze stożkiem. 10) Linia śrubowa. 11) Płaszczyzna: $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$ przecina krzywą w trzech punktach. 28) Sferyczny przekrój stożkowy. 29) $x+y+z=-1$, $x+y-z=1$, $x-y+z=1$, $x-y-z=-1$.

35) $\rho=\dfrac{(a^2+b^2)x^2}{a}$, $\rho_1=\dfrac{(a^2+b^2)x^2}{b}$. 36) $\rho=\rho_1=\dfrac{(2a^2+x^2)^2}{4a^2}$. 37) $\rho=\dfrac{a^2+b^2}{a}$, $\rho_1=\dfrac{a^2+b^2}{b}$.

38) $\rho=\dfrac{\sqrt{[(a^2+b^2)b^2+a^2z^2)]^3}}{ab\sqrt{4(a^2+b^2)b^4+(4a^2+b^2)b^2z^2+a^2z^4}}$, $\rho_1=\dfrac{4(a^2+b^2)b^4+(4a^2+b^2)b^2z^2+a^2z^4}{b^3(6b^2+z^2)}$.

40) $y=\dfrac{3}{8}x^2$, 41) $X=-\dfrac{1}{2}x^2$, $Y=1+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{4}x^4$, $Z=\dfrac{1}{3}x(3+2x^2)$.

42) $s=\dfrac{z_2-z_1}{ac}\sqrt{1+a^2+a^2c^2}$.

Literatura. F. Joachimsthal: Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung. Zweite Auflage. Leipzig 1881. Dr. Georg Scheffers: Einführung in die Theorie der Curven in der Ebene und im Raume. Leipzig 1901. Komerell: Allgemeine Theorie der Raumcurven. Leipzig 1903.

Tematy do rozpraw naukowych.

1. Linie śrubowe walcowe i stożkowe.
2. Niezmienniki różniczkowe krzywej przestrzennej.
3. Równania naturalne krzywych przestrzennych.

Wykład XLVI.

Ogólne własności powierzchni drugiego rzędu.

1. Dyskusya równania drugiego stopnia o trzech zmiennych. Ogólne równanie drugiego stopnia między trzema zmiennymi x, y, z ma kształt:

$$f(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \qquad (1)$$

Równanie to zawiera dziesięć wyrazów, czyli dziewięć dowolnych parametrów, co dowodzi, że dziewięć punktów: $(x_i, y_i, z_i)_{(i=1, 2, \ldots, 9)}$, określa w przestrzeni pewną powierzchnię drugiego rzędu.

Ażeby zbadać ogólne własności powierzchni drugiego rzędu, przyjmijmy w przestrzeni dowolny punkt ξ, η, ζ i poprowadźmy z niego promień w dowolnym kierunku, tworzącym z osiami układu kąty λ, μ, ν.

Przyjmijmy, że promień ten spotka powierzchnię w pewnym punkcie x, y, z oddalonym o r od punktu wyjścia, wówczas będzie:

$$\frac{x-\xi}{\cos\lambda} = \frac{y-\eta}{\cos\mu} = \frac{z-\zeta}{\cos\nu} = r, \qquad (2)$$

czyli:

$$x = \xi + r\cos\lambda, \quad y = \eta + r\cos\mu, \quad z = \zeta + r\cos\nu. \qquad (3)$$

Wstawiwszy w równanie (1) za x, y, z wartości (3), będziemy mieli:

$$a_{11}(\xi + r\cos\lambda)^2 + 2a_{23}(\eta + r\cos\mu)(\zeta + r\cos\nu) + 2a_{14}(\xi + r\cos\lambda) + \&\!c + a_{44} = 0.$$

Uporządkowawszy to równanie według potęg r, otrzymamy równanie drugiego stopnia ze względu na r, kształtu:

$$sr^2 + 2tr + f = 0, \qquad (4)$$

gdzie:

$$s = a_{11}\cos^2\lambda + a_{22}\cos^2\mu + a_{33}\cos^2\nu + 2a_{12}\cos\lambda\cos\mu + \\ + 2a_{13}\cos\lambda\cos\nu + 2a_{23}\cos\mu\cos\nu,$$

$$t = a_{11}\xi\cos\lambda + a_{22}\eta\cos\mu + a_{33}\zeta\cos\nu + a_{12}\xi\cos\mu + a_{12}\eta\cos\lambda + a_{13}\xi\cos\nu + \\ + a_{13}\zeta\cos\lambda + a_{23}\eta\cos\nu + a_{23}\zeta\cos\mu + a_{14}\cos\lambda + a_{24}\cos\mu + a_{34}\cos\nu,$$

$$f = a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 + a_{33}\zeta^2 + 2a_{12}\xi\eta + 2a_{13}\xi\zeta + 2a_{23}\eta\zeta + 2a_{14}\xi + 2a_{24}\eta + 2a_{34}\zeta + a_{44}.$$

Położywszy dla skrócenia:

$$\left.\begin{array}{ll} a_{11}\cos\lambda + a_{12}\cos\mu + a_{13}\cos\nu = w_1, & a_{12}\cos\lambda + a_{22}\cos\mu + a_{23}\cos\nu = w_2, \\ a_{13}\cos\lambda + a_{23}\cos\mu + a_{33}\cos\nu = w_3, & a_{14}\cos\lambda + a_{24}\cos\mu + a_{34}\cos\nu = w_4, \\ a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta + a_{14} = f_1, & a_{12}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta + a_{24} = f_2, \\ a_{13}\xi + a_{23}\eta + a_{33}\zeta + a_{34} = f_3, & a_{14}\xi + a_{24}\eta + a_{34}\zeta + a_{44} = f_4, \end{array}\right\} \qquad (5)$$

otrzymamy spółczynniki s, t, f określone w postaciach następujących:

$$\left.\begin{aligned} s&=w_1\cos\lambda+w_2\cos\mu+w_3\cos\nu,\\ t&=\xi w_1+\eta w_2+\zeta w_3+w_4=f_1\cos\lambda+f_2\cos\mu+f_3\cos\nu,\\ f&=\xi f_1+\eta f_2+\zeta f_3+f_4. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Spółczynnik s zawisł tylko od kierunku promienia, f tylko od punktu wyjścia, t od punktu wyjścia i kierunku promienia.

Z równania (4) wypadają na r w ogólności dwie wartości r_1 i r_2, które dowodzą, że wyszedłszy z punktu ξ, η, ζ w dowolnym kierunku λ, μ, ν spotkamy wogólności dwa punkta powierzchni (1), jeden znajdować się będzie w końcu odległości r_1, drugi w końcu odległości r_2, gdzie:

$$r_1=\frac{-t+\sqrt{t^2-fs}}{s},\quad r_2=\frac{-t-\sqrt{t^2-fs}}{s}. \quad (7)$$

Punkty te będą rzeczywiste i od siebie różne, skoro punkt wyjścia ξ, η, ζ i kierunek λ, μ, ν będą tak dobrane, żeby było $t^2>fs$; rzeczywiste i w jeden punkt wpadające. skoro $t^2=fs$; urojone i sprzężone, skoro $t^2<fs$. Wszelka prosta przecina więc powierzchnię drugiego stopnia w dwóch punktach (rzeczywistych i różnych, albo rzeczywistych w jeden wpadających, albo urojonych, jednakże sprzężonych).

Przejdźmy teraz do szczegółowego rozbioru równania (4), który nas doprowadzi do poznania głównych własności powierzchni drugiego rzędu.

2. Środek powierzchni. Przyjmijmy naprzód, że spółrzędne punktu wyjścia ξ, η, ζ i kierunek promienia λ, μ, ν czynią zadość równaniu warunkowemu $t=0$.

W tym razie otrzymamy z (4) równanie:

$$sr^2-f=0,\ \text{a stąd}\ r=\pm\sqrt{\frac{-f}{s}},$$

czyli na r dwie wartości równe, ale przeciwnego znaku.

Równanie warunkowe $t=0$ wskazuje na związek, jaki w tym razie zachodzić musi między spółrzędnymi ξ, η, ζ punktu wyjścia, a kierunkiem λ, μ, ν promieni.

Jeżeli punkt wyjścia ξ, η, ζ jest stały, wówczas możemy równanie warunkowe $t=0$ napisać w postaci:

$$f_1\cos\lambda+f_2\cos\mu+f_3\cos\nu=0, \quad (8)$$

która wskazuje, jak ma być dobrany kierunek λ, μ, ν, aby przyjęty punkt ξ, η, ζ był środkiem cięciwy przez niego przechodzącej. Kierunki te muszą na mocy (8) być równoległymi do płaszczyzny: $f_1x+f_2y+f_3z=0$, czyli muszą leżeć na płaszczyźnie:

$$f_1(x-\xi)+f_2(y-\eta)+f_3(z-\zeta)=0. \quad (9)$$

Przez każdy punkt w przestrzeni da się więc przesunąć jedna płaszczyzna, tak że ten punkt będzie środkiem wszystkich cięciw przez niego przechodzących, a na tej płaszczyźnie położonych. Innemi słowy: Wszelki punkt w przestrzeni jest środkiem jednej krzywej płaskiej (krzywej drugiego rzędu) na danej powierzchni drugiego rzędu położonej.

Płaszczyzna tej krzywej jest ściśle i jednoznacznie określoną, skoro wyrażenia f_1, f_2, f_3, nie są równocześnie zerami, zaś zupełnie dowolną w razie przeciwnym.

Weźmy pod uwagę ten wypadek wyjątkowy, w którym równocześnie: $f_1=0$, $f_2=0$, $f_3=0$.

W tym razie musiałyby spółrzędne przyjętego punktu wyjścia ξ, η, ζ dogadzać równocześnie trzem równaniom pierwszego stopnia kształtu:

$$\left.\begin{array}{c} f_1=a_{11}\xi+a_{12}\eta+a_{13}\zeta+a_{14}=0,\ f_2=a_{12}\xi+a_{22}\eta+a_{23}\zeta+a_{24}=0, \\ f_3=a_{13}\xi+a_{23}\eta+a_{33}\zeta+a_{34}=0, \end{array}\right\} \quad (10)$$

których otrzymamy spółrzędne punktu:

$$\xi=-\frac{\begin{vmatrix} a_{14} & a_{12} & a_{13} \\ a_{24} & a_{22} & a_{23} \\ a_{34} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}}=x_0, \quad \eta=-\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} & a_{13} \\ a_{12} & a_{24} & a_{23} \\ a_{13} & a_{34} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}}=y_0, \quad \zeta=-\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{34} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}}=z_0. \quad (11)$$

Ten szczególny punkt w przestrzeni jest środkiem wszystkich cięciw przez niego przechodzących i nazywa się **środkiem** powierzchni drugiego rzędu. Na wyznaczenie jego spółrzędnych służą trzy równania kształtu (10), które ze względu na to, że: $f_1=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \xi}$, $f_2=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \eta}$, $f_3=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \zeta}$ możemy zastąpić równaniami:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial \zeta}=0. \quad (10')$$

Spółrzędne środka będą miały wartości skończone, skoro:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \lesseqgtr 0 \quad (12)$$

nieskończone, skoro $\Delta=0$, nieoznaczone zaś, skoro obok $\Delta=0$ staną się także liczniki w (11) zerami.

W ostatnim przypadku są równania (10), przedstawiające trzy płaszczyzny, od siebie zależne i sprowadzają się do dwóch równań niezależnych, albo do jednego tylko, przedstawiają zatem w pierwszym razie prostą w przestrzeni, w drugim płaszczyznę jako miejsce środków; miejsca te mogą leżeć znowu w skończoności lub nieskończoności.

Na mocy tego podzielić można powierzchnie drugiego rzędu na następujące rodzaje:

1. Powierzchnie środkowe, mające jeden środek w skończoności.
2. Powierzchnie bezśrodkowe, t. j. powierzchnie mające środek w nieskończoności.
3. Powierzchnie, mające prostą środków, położoną w odległości skończonej.
4. Powierzchnie, mające prostą środków, położoną w odległości nieskończonej.
5. Powierzchnie, mające płaszczyznę środków.

Jeżeli powierzchnia drugiego rzędu posiada środek, to może się zdarzyć, że ten punkt leży na niej samej. W takim razie muszą spółrzędne środka uczynić zadość równaniu:

$$f=f_1\xi+f_2\eta+f_3\zeta+f_4=0,$$

czyli skoro: $f_1=f_2=f_3=0$, także $f_4=0$, a więc dogadzać czterem równaniom:

$$\left.\begin{aligned} f_1=a_{11}\xi+a_{12}\eta+a_{13}\zeta+a_{14}=0, \quad f_2=a_{12}\xi+a_{22}\eta+a_{23}\zeta+a_{24}=0,\\ f_3=a_{13}\xi+a_{23}\eta+a_{33}\zeta+a_{34}=0, \quad f_4=a_{14}\xi+a_{24}\eta+a_{34}\zeta+a_{44}=0,\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

co się stać może tylko wtedy, gdy będzie wyznacznik:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34}\\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44}\end{vmatrix}=0. \quad (14)$$

Równanie (4) otrzymuje wtedy kształt: $sr^2=0$, daje więc na r dwie wartości równe zeru, skoro kierunek λ, μ, ν będzie tak dobrany, że $s \gtrless 0$, albo wartości dowolne, skoro będzie $s=0$.

Powierzchnia taka składa się z szeregu prostych, z jednego punktu wychodzących, jest więc powierzchnią stożkową.

Stożek drugiego stopnia jest zatem jedyną powierzchnią rzędu drugiego, której środek leży na samej powierzchni. Wierzchołek jest środkiem stożka.

3. Płaszczyzny środkowe. Przyjmijmy w równaniu warunkowem $t=0$, kierunek promieni λ, μ, ν, jako stały, wówczas możemy równanie $t=0$ napisać w postaci:

$$\xi w_1+\eta w_2+\zeta w_3+w_4=0, \quad (15)$$

która przy zmiennych spółrzędnych ξ, η, ζ punktu wyjścia przedstawia płaszczyznę.

Przyjąwszy więc pewien stały kierunek, otrzymamy na każdej prostej w tym kierunku wykreślonej jeden punkt, który będzie środkiem dotyczącej cięciwy. Spółrzędne tego punktu muszą dogadzać równaniu (15) stopnia pierwszego, a zatem:

Środki cięciw równoległych powierzchni drugiego rzędu leżą zawsze na jednej płaszczyźnie.

Płaszczyznę taką nazywamy płaszczyzną środkową, albo diametralną.

Z jej równania podanego w (15) kształtu:

$$w_1x+w_2y+w_3z+w_4=0,$$

otrzymamy kierunek jej pionu λ', μ', ν', określony równaniami:

$$\frac{\cos\lambda'}{w_1}=\frac{\cos\mu'}{w_2}=\frac{\cos\nu'}{w_3}=\frac{1}{\sqrt{w_1^2+w_2^2+w_3^2}},$$

przeto:

$$\cos\lambda'=\frac{w_1}{\sqrt{w_1^2+w_2^2+w_3^2}}, \quad \cos\mu'=\frac{w_2}{\sqrt{w_1^2+w_2^2+w_3^2}}, \quad \cos\nu'=\frac{w_3}{\sqrt{w_1^2+w_2^2+w_3^2}} \quad (16)$$

Każdemu kierunkowi cięciw (λ, μ, ν) odpowiada więc jeden kierunek płaszczyzny środkowej (λ', μ', ν').

Równaniu płaszczyzny środkowej podanemu w (15) kształtu:

$$\xi w_1+\eta w_2+\zeta w_3+w_4=0,$$

które przedstawić możemy także w postaci:

$$f_1\cos\lambda+f_2\cos\mu+f_3\cos\nu=0,$$

czynią zadość niezawiśle od λ, μ, ν spółrzędne środka, które określają równania: $f_1=f_2=f_3=0$, z czego wynika:

Płaszczyzna środkowa powierzchni drugiego rzędu, odpowiadająca jakiemukolwiek kierunkowi cięciw, przechodzi zawsze przez środek powierzchni.

Odwrotnie jakakolwiek płaszczyzna poprowadzona przez środek powierzchni będzie płaszczyzną środków cięciw równoległych.

Niech będzie bowiem:

$$A(x-\xi)+B(y-\eta)+C(z-\zeta)=0$$

równaniem dowolnej płaszczyzny, przechodzącej przez środek ξ, η, ζ, to porównując je z równaniem płaszczyzny środkowej, odpowiadającej kierunkowi λ, μ, ν, przedstawiającem się w postaci: $w_1(x-\xi)+w_2(y-\eta)+w_3(z-\zeta)=0$, otrzymamy równości:

$$\frac{w_1}{A}=\frac{w_2}{B}=\frac{w_3}{C}, \tag{17}$$

które wystarczą do wyznaczenia kierunku λ, μ, ν cięciw danej płaszczyźnie przynależnych.

Mianowie otrzymamy z tych równości:

$$\frac{a_{11}\cos\lambda+a_{12}\cos\mu+a_{13}\cos\nu}{A}=\frac{a_{12}\cos\lambda+a_{22}\cos\mu+a_{23}\cos\nu}{B}=$$
$$=\frac{a_{13}\cos\lambda+a_{23}\cos\mu+a_{33}\cos\nu}{C}=k,$$

przeto:

$$\cos\lambda=k\frac{\begin{vmatrix}A & a_{12} & a_{13}\\ B & a_{22} & a_{23}\\ C & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}},\quad \cos\mu=k\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & A & a_{13}\\ a_{12} & B & a_{23}\\ a_{13} & C & a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}},\quad \cos\nu=k\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & A\\ a_{12} & a_{22} & B\\ a_{13} & a_{23} & C\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}}.$$

Ze względu, że: $\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu=1$, będzie: $k^2=\dfrac{\Delta^2}{\Delta_1^{\,2}+\Delta_2^{\,2}+\Delta_3^{\,2}}$, gdzie Δ jest wyznacznikiem mianowników, Δ_1, Δ_2, Δ_3 są wyznacznikami liczników, przeto otrzymujemy:

$$\cos\lambda=\frac{\Delta_1}{\sqrt{\Delta_1^{\,2}+\Delta_2^{\,2}+\Delta_3^{\,2}}},\quad \cos\mu=\frac{\Delta_2}{\sqrt{\Delta_1^{\,2}+\Delta_2^{\,2}+\Delta_3^{\,2}}},\quad \cos\nu=\frac{\Delta_3}{\sqrt{\Delta_1^{\,2}+\Delta_2^{\,2}+\Delta_3^{\,2}}}.$$

Każdej płaszczyznie, przechodzącej przez środek, odpowiada przeto jeden kierunek cięciw, który nazywamy kierunkiem z płaszczyzną sprzężonym.

4. Średnice powierzchni 2-go rzędu. Przekrój dwóch płaszczyzn środkowych danej powierzchni drugiego rzędu nazywamy średnicą tej powierzchni. Ażeby znaleźć równania takiej prostej, weźmy pod uwagę dwie płaszczyzny środkowe sprzężone z kierunkiem λ, μ, ν względnie λ', μ', ν'. Ich równania dadzą się przedstawić w postaci:

$$f_1\cos\lambda+f_2\cos\mu+f_3\cos\nu=0,\quad f_1\cos\lambda'+f_2\cos\mu'+f_3\cos\nu'=0,$$

skąd otrzymujemy równości:

$$\frac{f_1}{\cos\mu\cos\nu'-\cos\mu'\cos\nu}=\frac{f_2}{\cos\nu\cos\lambda'-\cos\nu'\cos\lambda}=\frac{f_3}{\cos\lambda\cos\mu'-\cos\lambda'\cos\mu},$$

które się sprawdzają dla dowolnego punktu przecięcia płaszczyzn środkowych, a więc określają średnicę powierzchni. Ponieważ stałe kierunki λ, μ, ν, λ', μ', ν' są dowolne, przeto możemy napisać równanie średnicy w postaci:

$$\frac{f_1}{l}=\frac{f_2}{m}=\frac{f_3}{n}, \tag{18}$$

gdzie l, m, n są dowolnemi liczbami.

co si... wartości otrzymają te spółczynniki, równania (18) pr...
... zawsze prostą przechodzącą przez środek.
... pewnej średnicy są środkami przekrojów płaskich powierzchni
... na płaszczyznach do siebie równoległych, mianowicie równole-
...ch do płaszczyzny: $lx+my+nz=0$, skoro średnica ma równanie:

$$\frac{f_1}{l}=\frac{f_2}{m}=\frac{f_3}{n}.$$

Kierunek pionu tych płaszczyzn jest zgodny z kierunkiem pionu płaszczyzny środkowej z daną średnicą sprzężonej.

5. Średnice sprzężone. Weźmy dowolny kierunek cięciw $L(\lambda, \mu, \nu)$, któremu odpowiada płaszczyzna środkowa P: $w_1x+w_2y+w_3z+w_4=0$.

Przyjmijmy teraz inny kierunek cięciw $L'(\lambda', \mu', \nu')$ równoległy jednakże do płaszczyzny P, a więc dogadzający relacyi:

$$w_1 \cos\lambda' + w_2 \cos\mu' + w_3 \cos\nu' = 0,$$

tedy otrzymamy przynależną mu płaszczyznę środkową P', określoną równaniem:

$$w'_1x+w'_2y+w'_3z+w'_4=0.$$

Płaszczyzna ta będzie równoległą do kierunku $L(\lambda, \mu, \nu)$. Z równania warunkowego:

$$w_1 \cos\lambda' + w_2 \cos\mu' + w_3 \cos\nu' = 0,$$

które wypowiada, że $L' \parallel P$, otrzymamy bowiem zarazem, skoro je podług λ, μ, ν uporządkujemy, równanie:

$$w'_1 \cos\lambda + w'_2 \cos\mu + w'_3 \cos\nu = 0,$$

które dowodzi właśnie, że płaszczyzna P' jest równoległą do kierunku L.

Jeżeli tedy z dwóch kierunków λ, μ, ν i λ', μ', ν' jeden jest równoległy do płaszczyzny środkowej, sprzężonej z drugim kierunkiem, wtedy ten drugi kierunek będzie także równoległy do płaszczyzny środkowej sprzężonej z pierwszym. Dwa takie kierunki λ, μ, ν i λ', μ', ν' związane są odnośnie do danej powierzchni drugiego rzędu relacyą:

$$w_1 \cos\lambda' + w_2 \cos\mu' + w_3 \cos\nu' = 0,$$

która daje się przedstawić także w postaci:

$$w'_1 \cos\lambda + w'_2 \cos\mu + w'_3 \cos\nu = 0.$$

Nazywamy je **kierunkami sprzężonymi**, a średnice do nich równoległe **średnicami sprzężonymi**.

6. Układy średnic sprzężonych. Każdej średnicy odpowiada nieskończenie wiele średnic sprzężonych, które leżą na płaszczyźnie środkowej z daną średnicą sprzężonej.

Przyjąwszy jakikolwiek kierunek $L_1(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ obierzmy równolegle do płaszczyzny środkowej P_1 z nim sprzężonej drugi kierunek $L_2(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$, tedy będzie płaszczyzna środkowa P_2 sprzężona z L_2 wedle poprzed. art. równoległą do kierunku L_1, obie płaszczyzny P_1 i P_2 przecinają się w średnicy, która będzie miała kierunek $L_3(\lambda_3, \mu_3, \nu_3)$. Kierunek ten będzie sprzężony tak z kierunkiem L_1, jako też z kierunkiem L_2, płaszczyzna środkowa mu przynależna będzie więc równoległą do L_1 i L_2. Otrzymane w ten sposób trzy kierunki mają tę własność, że płaszczyzna środkowa z jednym z nich sprzężona, jest równoległą do dwóch innych kierunków. Układ takich kierunków nazywamy **układem kierunków sprzężonych** powierzchni, a w szczególności układ trzech średnic tego rodzaju **układem trzech średnic sprzężonych**.

Warunki, pod jakimi trzy kierunki λ_1, μ_1, ν_1; λ_2, μ_2, ν_2; λ_3, μ_3, ν_3 są ze względu na daną powierzchnię sprzężone, przedstawimy, pisząc $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \ldots$, zamiast $\cos\lambda_1$, $\cos\mu_1$, $\cos\nu_1 \ldots$, w postaci:

$$(a_{11}\lambda_1+a_{12}\mu_1+a_{13}\nu_1)\lambda_2+(a_{12}\lambda_1+a_{22}\mu_1+a_{23}\nu_1)\mu_2+(a_{13}\lambda_1+a_{23}\mu_1+a_{33}\nu_1)\nu_2=0,$$
$$(a_{11}\lambda_2+a_{12}\mu_2+a_{13}\nu_2)\lambda_3+(a_{12}\lambda_2+a_{22}\mu_2+a_{23}\nu_2)\mu_3+(a_{13}\lambda_2+a_{23}\mu_2+a_{33}\nu_2)\nu_3=0,$$
$$(a_{11}\lambda_3+a_{12}\mu_3+a_{13}\nu_3)\lambda_1+(a_{12}\lambda_3+a_{22}\mu_3+a_{23}\nu_3)\mu_1+(a_{13}\lambda_3+a_{23}\mu_3+a_{33}\nu_3)\nu_1=0,$$

czyli:

$$w_1^{(1)}\lambda_2+w_2^{(1)}\mu_2+w_3^{(1)}\nu_2=0,\quad w_1^{(2)}\lambda_3+w_2^{(2)}\mu_3+w_3^{(2)}\nu_3=0,\quad w_1^{(3)}\lambda_1+w_2^{(3)}\mu_1+w_3^{(3)}\nu_1=0.$$

Obrawszy dowolnie jeden kierunek np. λ_1, μ_1, ν_1 możemy znaleźć nieskończenie wiele kierunków, tworzących z nim układ trzech kierunków sprzężonych, bo mamy tylko trzy równania, a cztery niewiadome stosunki: $\frac{\lambda_2}{\nu_2}, \frac{\mu_2}{\nu_2}, \frac{\lambda_3}{\nu_3}, \frac{\mu_3}{\nu_3}$.

7. Płaszczyzny główne i kierunki główne powierzchni. Jeżeli płaszczyzna środkowa jest prostopadłą do kierunku cięciw, które dzieli na dwie równe części, wtedy nazywa się płaszczyzną główną powierzchni drugiego stopnia; kierunek z tą płaszczyzną sprzężony zowie się kierunkiem głównym powierzchni.

Zajmijmy się teraz wyznaczeniem płaszczyzn i kierunków głównych. Kierunkowi λ, μ, ν odpowiada płaszczyzna środkowa:

$$w_1x+w_2y+w_3z+w_4=0.$$

Płaszczyzna ta będzie prostopadłą do kierunku λ, μ, ν z nią sprzężonego, skoro zajdą równości:

$$\frac{w_1}{\cos\lambda}=\frac{w_2}{\cos\mu}=\frac{w_3}{\cos\nu}, \tag{19}$$

czyli:

$$\frac{a_{11}\cos\lambda+a_{12}\cos\mu+a_{13}\cos\nu}{\cos\lambda}=\frac{a_{12}\cos\lambda+a_{22}\cos\mu+a_{23}\cos\nu}{\cos\mu}=$$
$$=\frac{a_{13}\cos\lambda+a_{23}\cos\mu+a_{33}\cos\nu}{\cos\nu}.$$

Jeżeli do tych równań dołączymy relacyę przynależną do wszelkiego kierunku, jako to: $\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu=1$, wówczas otrzymujemy układ trzech równań, któreby należało rozwiązać, aby oznaczyć kierunki główne powierzchni.

Aby ułatwić rozwiązanie, połóżmy w (19):

$$\frac{w_1}{\cos\lambda}=\frac{w_2}{\cos\mu}=\frac{w_3}{\cos\nu}=\frac{w_1\cos\lambda+w_2\cos\mu+w_3\cos\nu}{\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu}=\frac{s}{1}=s, \tag{20}$$

gdzie s jest teraz pomocniczą niewiadomą, która przedstawia wartość stosunków (19).

W ten sposób otrzymujemy trzy równania:

$$\left.\begin{array}{c}a_{11}\cos\lambda+a_{12}\cos\mu+a_{13}\cos\nu=s\cos\lambda,\ a_{12}\cos\lambda+a_{22}\cos\mu+a_{23}\cos\nu=s\cos\mu\\ a_{13}\cos\lambda+a_{23}\cos\mu+a_{33}\cos\nu=s\cos\nu,\end{array}\right\} \tag{21}$$

czyli:

$$\left.\begin{array}{c}(a_{11}-s)\cos\lambda+a_{12}\cos\mu+a_{13}\cos\nu=0,\ a_{12}\cos\lambda+(a_{22}-s)\cos\mu+a_{23}\cos\nu=0\\ a_{13}\cos\lambda+a_{23}\cos\mu+(a_{33}-s)\cos\nu=0,\end{array}\right\} \tag{22}$$

jednorodne ze względu na $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, a zawierające cztery niewiadome λ, μ, ν i s.

Jakiekolwiek wartości otrzymają te spółczynniki, równania (18) przedstawiają zawsze prostą przechodzącą przez środek.

Punkta pewnej średnicy są środkami przekrojów płaskich powierzchni położonych na płaszczyznach do siebie równoległych, mianowicie równoległych do płaszczyzny: $lx+my+nz=0$, skoro średnica ma równanie:

$$\frac{f_1}{l}=\frac{f_2}{m}=\frac{f_3}{n}.$$

Kierunek pionu tych płaszczyzn jest zgodny z kierunkiem pionu płaszczyzny środkowej z daną średnicą sprzężonej.

5. Średnice sprzężone. Weźmy dowolny kierunek cięciw $L(\lambda, \mu, \nu)$, któremu odpowiada płaszczyzna środkowa P: $w_1x+w_2y+w_3z+w_4=0$.

Przyjmijmy teraz inny kierunek cięciw $L'(\lambda', \mu', \nu')$ równoległy jednakże do płaszczyzny P, a więc dogadzający relacyi:

$$w_1\cos\lambda'+w_2\cos\mu'+w_3\cos\nu'=0,$$

tedy otrzymamy przynależną mu płaszczyznę środkową P', określoną równaniem:

$$w'_1x+w'_2y+w'_3z+w'_4=0.$$

Płaszczyzna ta będzie równoległą do kierunku $L(\lambda, \mu, \nu)$. Z równania warunkowego:

$$w_1\cos\lambda'+w_2\cos\mu'+w_3\cos\nu'=0,$$

które wypowiada, że $L' \parallel P$, otrzymamy bowiem zarazem, skoro je podług λ, μ, ν uporządkujemy, równanie:

$$w'_1\cos\lambda+w'_2\cos\mu+w'_3\cos\nu=0,$$

które dowodzi właśnie, że płaszczyzna P' jest równoległą do kierunku L.

Jeżeli tedy z dwóch kierunków λ, μ, ν i λ', μ', ν' jeden jest równoległy do płaszczyzny środkowej, sprzężonej z drugim kierunkiem, wtedy ten drugi kierunek będzie także równoległy do płaszczyzny środkowej sprzężonej z pierwszym. Dwa takie kierunki λ, μ, ν i λ', μ', ν' związane są odnośnie do danej powierzchni drugiego rzędu relacyą:

$$w_1\cos\lambda'+w_2\cos\mu'+w_3\cos\nu'=0,$$

która daje się przedstawić także w postaci:

$$w'_1\cos\lambda+w'_2\cos\mu+w'_3\cos\nu=0.$$

Nazywamy je kierunkami sprzężonymi, a średnice do nich równoległe średnicami sprzężonymi.

6. Układy średnic sprzężonych. Każdej średnicy odpowiada nieskończenie wiele średnic sprzężonych, które leżą na płaszczyźnie środkowej z daną średnicą sprzężonej.

Przyjąwszy jakikolwiek kierunek $L_1(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ obierzmy równolegle do płaszczyzny środkowej P_1 z nim sprzężonej drugi kierunek $L_2(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$, tedy będzie płaszczyzna środkowa P_2 sprzężona z L_2 wedle poprzed. art. równoległą do kierunku L_1, obie płaszczyzny P_1 i P_2 przecinają się w średnicy, która będzie miała kierunek $L_3(\lambda_3, \mu_3, \nu_3)$. Kierunek ten będzie sprzężony tak z kierunkiem L_1, jako też z kierunkiem L_2, płaszczyzna środkowa mu przynależna będzie więc równoległą do L_1 i L_2. Otrzymane w ten sposób trzy kierunki mają tę własność, że płaszczyzna środkowa z jednym z nich sprzężona, jest równoległą do dwóch innych kierunków. Układ takich kierunków nazywamy układem kierunków sprzężonych powierzchni, a w szczególności układ trzech średnic tego rodzaju układem trzech średnic sprzężonych.

Warunki, pod jakimi trzy kierunki λ_1, μ_1, ν_1; λ_2, μ_2, ν_2; λ_3, μ_3, ν_3 są ze względu na daną powierzchnię sprzężone, przedstawimy, pisząc $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \ldots$, zamiast $\cos\lambda_1$, $\cos\mu_1$, $\cos\nu_1 \ldots$, w postaci:

$$(a_{11}\lambda_1+a_{12}\mu_1+a_{13}\nu_1)\lambda_2+(a_{12}\lambda_1+a_{22}\mu_1+a_{23}\nu_1)\mu_2+(a_{13}\lambda_1+a_{23}\mu_1+a_{33}\nu_1)\nu_2=0,$$
$$(a_{11}\lambda_2+a_{12}\mu_2+a_{13}\nu_2)\lambda_3+(a_{12}\lambda_2+a_{22}\mu_2+a_{23}\nu_2)\mu_3+(a_{13}\lambda_2+a_{23}\mu_2+a_{33}\nu_2)\nu_3=0,$$
$$(a_{11}\lambda_3+a_{12}\mu_3+a_{13}\nu_3)\lambda_1+(a_{12}\lambda_3+a_{22}\mu_3+a_{23}\nu_3)\mu_1+(a_{13}\lambda_3+a_{23}\mu_3+a_{33}\nu_3)\nu_1=0,$$

czyli:

$$w_1^{(1)}\lambda_2+w_2^{(1)}\mu_2+w_3^{(1)}\nu_2=0, \quad w_1^{(2)}\lambda_3+w_2^{(2)}\mu_3+w_3^{(2)}\nu_3=0, \quad w_1^{(3)}\lambda_1+w_2^{(3)}\mu_1+w_3^{(3)}\nu_1=0.$$

Obrawszy dowolnie jeden kierunek np. λ_1, μ_1, ν_1 możemy znaleźć nieskończenie wiele kierunków, tworzących z nim układ trzech kierunków sprzężonych, bo mamy tylko trzy równania, a cztery niewiadome stosunki: $\frac{\lambda_2}{\nu_2}, \frac{\mu_2}{\nu_2}, \frac{\lambda_3}{\nu_3}, \frac{\mu_3}{\nu_3}$.

7. Płaszczyzny główne i kierunki główne powierzchni. Jeżeli płaszczyzna środkowa jest prostopadłą do kierunku cięciw, które dzieli na dwie równe części, wtedy nazywa się płaszczyzną główną powierzchni drugiego stopnia; kierunek z tą płaszczyzną sprzężony zowie się kierunkiem głównym powierzchni.

Zajmijmy się teraz wyznaczeniem płaszczyzn i kierunków głównych. Kierunkowi λ, μ, ν odpowiada płaszczyzna środkowa:

$$w_1x+w_2y+w_3z+w_4=0.$$

Płaszczyzna ta będzie prostopadłą do kierunku λ, μ, ν z nią sprzężonego, skoro zajdą równości:

$$\frac{w_1}{\cos\lambda}=\frac{w_2}{\cos\mu}=\frac{w_3}{\cos\nu}, \tag{19}$$

czyli:

$$\frac{a_{11}\cos\lambda+a_{12}\cos\mu+a_{13}\cos\nu}{\cos\lambda}=\frac{a_{12}\cos\lambda+a_{22}\cos\mu+a_{23}\cos\nu}{\cos\mu}=$$
$$=\frac{a_{13}\cos\lambda+a_{23}\cos\mu+a_{33}\cos\nu}{\cos\nu}.$$

Jeżeli do tych równań dołączymy relacyę przynależną do wszelkiego kierunku, jako to: $\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu=1$, wówczas otrzymujemy układ trzech równań, któreby należało rozwiązać, aby oznaczyć kierunki główne powierzchni.

Aby ułatwić rozwiązanie, połóżmy w (19):

$$\frac{w_1}{\cos\lambda}=\frac{w_2}{\cos\mu}=\frac{w_3}{\cos\nu}=\frac{w_1\cos\lambda+w_2\cos\mu+w_3\cos\nu}{\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu}=\frac{s}{1}=s, \tag{20}$$

gdzie s jest teraz pomocniczą niewiadomą, która przedstawia wartość stosunków (19).

W ten sposób otrzymujemy trzy równania:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}\cos\lambda+a_{12}\cos\mu+a_{13}\cos\nu=s\cos\lambda, \quad a_{12}\cos\lambda+a_{22}\cos\mu+a_{23}\cos\nu=s\cos\mu \\ a_{13}\cos\lambda+a_{23}\cos\mu+a_{33}\cos\nu=s\cos\nu, \end{array}\right\} \tag{21}$$

czyli:

$$\left.\begin{array}{c} (a_{11}-s)\cos\lambda+a_{12}\cos\mu+a_{13}\cos\nu=0, \quad a_{12}\cos\lambda+(a_{22}-s)\cos\mu+a_{23}\cos\nu=0 \\ a_{13}\cos\lambda+a_{23}\cos\mu+(a_{33}-s)\cos\nu=0, \end{array}\right\} \tag{22}$$

jednorodne ze względu na $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, a zawierające cztery niewiadome λ, μ, ν i s.

Jeżeli z tych równań wyrugujemy λ, μ, ν otrzymamy jedno równanie, które zawiera tylko niewiadomą s w postaci:

$$\Delta(s)=\begin{vmatrix} a_{11}-s, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{12}, & a_{22}-s, & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-s \end{vmatrix}=0. \tag{23}$$

Równaniu temu możemy, rozwinąwszy wyznacznik, nadać postać:

$$(a_{11}-s)(a_{22}-s)(a_{33}-s)-(a_{11}-s)a^2_{23}-(a_{22}-s)a^2_{13}-(a_{33}-s)a^2_{12}+2a_{12}a_{13}a_{23}=0,$$

czyli:

$$s^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})s^2+(a_{11}a_{22}+a_{11}a_{33}+a_{22}a_{33}-a^2_{12}-a^2_{13}-a^2_{23})s+$$
$$+a_{11}a^2_{23}+a_{22}a^2_{13}+a_{33}a^2_{12}-a_{11}a_{22}a_{33}-2a_{12}a_{13}a_{23}=0. \tag{24}$$

Kładąc:

$$P=a_{11}+a_{22}+a_{33}, \quad Q=(a_{11}a_{33}-a^2_{12})+(a_{11}a_{33}-a^2_{13})+(a_{22}a_{33}-a^2_{23})=$$
$$=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}+a_{22}+a_{33},$$

$$\Delta=a_{11}a_{22}a_{33}+2a_{12}a_{13}a_{23}-a_{11}a^2_{23}-a_{22}a^2_{13}-a_{33}a^2_{12}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

napiszemy powyższe równanie w postaci:

$$s^3-Ps^2+Qs-\Delta=0. \tag{25}$$

Równanie (25) zależy tylko od spółczynników przy wyrazach drugiego stopnia w równaniu ogólnem, a jako równanie trzeciego stopnia dostarcza w ogólności trzy pierwiastki s_1, s_2, s_3, za pomocą których z równań (22) znajdziemy wartości stosunków $\frac{\cos\lambda}{\cos\nu}$, $\frac{\cos\mu}{\cos\nu}$, przynależnych każdemu s, a tem samem trzy kierunki główne w powierzchni rzędu drugiego.

8. Układ kierunków głównych. Najpierw wykażemy, że powyższe równanie trzeciego stopnia ze względu na s ma wszystkie trzy pierwiastki rzeczywiste.

W tym celu przedstawmy wprzód równania (22) w postaci:

$$\frac{\cos\mu}{a_{13}}+\frac{\cos\nu}{a_{12}}=\frac{\cos\lambda}{a_{12}a_{13}}(s-a_{11}), \quad \frac{\cos\lambda}{a_{23}}+\frac{\cos\nu}{a_{12}}=\frac{\cos\mu}{a_{12}a_{23}}(s-a_{22}),$$
$$\frac{\cos\lambda}{a_{23}}+\frac{\cos\mu}{a_{13}}=\frac{\cos\nu}{a_{13}a_{23}}(s-a_{33}),$$

skąd gdy dodamy po obu stronach poszczególnych równań kolejno: $\frac{\cos\lambda}{a_{23}}$, $\frac{\cos\mu}{a_{13}}$, $\frac{\cos\nu}{a_{12}}$ wypadnie:

$$\frac{\cos\lambda}{a_{23}}+\frac{\cos\mu}{a_{13}}+\frac{\cos\nu}{a_{12}}=\frac{\cos\nu}{a_{12}a_{13}}\left(s-a_{11}+\frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}}\right),$$
$$\frac{\cos\lambda}{a_{23}}+\frac{\cos\mu}{a_{13}}+\frac{\cos\nu}{a_{12}}=\frac{\cos\mu}{a_{12}a_{23}}\left(s-a_{22}+\frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}\right),$$
$$\frac{\cos\lambda}{a_{23}}+\frac{\cos\mu}{a_{13}}+\frac{\cos\nu}{a_{12}}=\frac{\cos\nu}{a_{13}a_{23}}\left(s-a_{33}+\frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}}\right).$$

Połóżmy: $\frac{\cos\lambda}{a_{23}}+\frac{\cos\mu}{a_{13}}+\frac{\cos\nu}{a_{12}}=k$, $\quad a_{11}-\frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}}=a$, $\quad a_{22}-\frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}=b$,

$a_{33}-\frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}}=c$, wtedy otrzymamy z równań poprzedzających:

$$\cos\lambda=\frac{k.a_{12}a_{13}}{s-a},\quad \cos\mu=\frac{k.a_{12}a_{23}}{s-b},\quad \cos\nu=\frac{k.a_{13}a_{23}}{s-c},$$

a stąd:
$$\frac{\cos\lambda}{a_{23}}+\frac{\cos\mu}{a_{13}}+\frac{\cos\nu}{a_{12}}=k=k\frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}(s-a)}+k\frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}(s-b)}+k\frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}(s-c)},$$

czyli:
$$\frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}(s-a)}+\frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}(s-b)}+\frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}(s-c)}=1.$$

Na podstawie tego równania możemy równaniu trzeciego stopnia ze względu na s nadać kształt:

$$\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{a_{23}a_{13}a_{12}}-\frac{(s-b)(s-c)}{a^2_{23}}-\frac{(s-a)(s-c)}{a^2_{13}}-\frac{(s-a)(s-b)}{a^2_{12}}=0. \quad (26)$$

Z postaci tej łatwo wywnioskować, że równanie ma wszystkie trzy pierwiastki rzeczywiste. Przyjmijmy $a>b>c$, co wcale nie zmniejsza ogólności i podstawmy w równaniu kolejno za s liczby: $-\infty$, a, b, c, tedy otrzymamy pod założeniem, że iloczyn: $a_{12}.a_{13}.a_{23}$ jest ujemny, następujące wartości lewej strony równania (26):

$$+,\ -\frac{(a-b)(a-c)}{a^2_{23}},\quad -\frac{(b-a)(b-c)}{a^2_{13}},\quad -\frac{(c-a)(c-b)}{a^2_{12}},$$

czyli następujący szereg znaków: $+, -, +, -$, z którego wypływa, że równanie (26) ma trzy pierwiastki rzeczywiste, zawarte między liczbami: $-\infty$ i a, a i b, b i c.

Jeżeli iloczyn $a_{12}a_{13}a_{23}$ jest dodatni, wówczas podstawmy za s kolejno wartości a, b, c, $+\infty$, a otrzymamy szereg znaków: $-, +, -, +$, który dowodzi, że i w tym razie ma równanie trzy pierwiastki rzeczywiste, zawarte między liczbami: a i b, b i c, c i $+\infty$.

Pozostaje nam zbadać przypadek, dotąd wykluczony, jeżeli jeden ze spółczynników a_{12}, a_{13}, a_{23}, a tem samem iloczyn $a_{12}a_{13}a_{23}$ jest zerem.

Przyjmijmy, że $a_{12}=0$, tedy otrzyma równanie (23) kształt:

$$(a_{11}-s)(a_{22}-s)(a_{33}-s)-(a_{11}-s)a^2_{23}-(a_{22}-s)a^2_{13}=0.$$

Przyjmując, że $a_{22}>a_{11}$ podstawmy za s wartości $-\infty$, a_{11}, a_{22}, $+\infty$, a znajdziemy dla wartości lewej strony tegoż równania szereg znaków: $+, -, +, -$, który dowodzi, że i w tym razie wszystkie trzy pierwiastki są rzeczywiste, a zawarte między liczbami: $-\infty$ i a_{11}, a_{11} i a_{22}, a_{22} i $+\infty$

Jeżeli wreszcie między spółczynnikami a_{12}, a_{13}, a_{23} dwa są zerem, a więc np. $a_{12}=0$ i $a_{13}=0$, tedy sprowadza się równanie poprzednie do następującego:

$$(a_{11}-s)[(a_{22}-s)(a_{33}-s)-a^2_{23}]=0,$$

które ma jeden pierwiastek równy a_{11}, dwa inne zaś są oznaczone równaniem drugiego stopnia:

$$(a_{22}-s)(a_{33}-s)-a^2_{23}=0,$$

które ma jak łatwo sprawdzić zawsze pierwiastki rzeczywiste.

W każdym więc razie ma równanie trzeciego stopnia ze względu na s wszystkie trzy pierwiastki rzeczywiste.

Istnieją więc w powierzchni drugiego rzędu trzy kierunki główne $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$, $(\lambda_3, \mu_3, \nu_3)$, odpowiadające trzem pierwiastkom s_1, s_2, s_3 równania trzeciego stopnia.

9. Nie trudno wykazać, że kierunki główne są do siebie prostopadłe. Na podstawie równań (22) otrzymujemy bowiem dla dwóch kierunków (λ_1, μ_1, ν_1) i (λ_2, μ_2, ν_2), odpowiadających dwom pierwiastkom s_1, s_2 równania:

$$a_{11}\cos\lambda_1 + a_{12}\cos\mu_1 + a_{13}\cos\nu_1 = s_1\cos\lambda_1,$$
$$a_{12}\cos\lambda_1 + a_{22}\cos\mu_1 + a_{23}\cos\nu_1 = s_1\cos\mu_1,$$
$$a_{13}\cos\lambda_1 + a_{23}\cos\mu_1 + a_{33}\cos\nu_1 = s_1\cos\nu_1,$$
$$a_{11}\cos\lambda_2 + a_{12}\cos\mu_2 + a_{13}\cos\nu_2 = s_2\cos\lambda_2,$$
$$a_{12}\cos\lambda_2 + a_{22}\cos\mu_2 + a_{23}\cos\mu_2 = s_2\cos\mu_2,$$
$$a_{13}\cos\lambda_2 + a_{23}\cos\mu_2 + a_{33}\cos\nu_2 = s_2\cos\nu_2.$$

Pomnóżmy trzy pierwsze równania kolejno przez $\cos\lambda_2$, $\cos\mu_2$, $\cos\nu_2$, drugie przez $\cos\lambda_1$, $\cos\mu_1$, $\cos\nu_1$ i odejmijmy następnie od sumy trzech pierwszych równań sumę trzech drugich, wtedy otrzymamy równanie:

$$(s_1 - s_2)(\cos\lambda_1\cos\lambda_2 + \cos\mu_1\cos\mu_2 + \cos\nu_1\cos\nu_2) = 0, \tag{27}$$

z którego wynika, że kierunki główne odpowiadające dwom równym pierwiastkom równania trzeciego stopnia są do siebie prostopadłe.

Z własności tej mamy nowy dowód, że pierwiastki s nie mogą być urojone. Gdyby bowiem było $s_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$ musiałoby być $s_2 = \alpha_1 - \beta_1 i$, otrzymalibyśmy tedy z równań (26):

$$\cos\lambda_1 = a + bi, \quad \cos\mu_1 = c + di, \quad \cos\nu_1 = e + fi,$$
$$\cos\lambda_2 = a - bi, \quad \cos\mu_2 = c - di, \quad \cos\nu_2 = e - fi.$$

Warunkowi $\cos\lambda_1\cos\lambda_2 + \cos\mu_1\cos\mu_2 + \cos\nu_1\cos\nu_2 = 0$, który tu otrzymuje kształt: $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2=0$, mogłoby się stać zadość tylko wtedy, gdyby było $a=b=c=d=e=f=0$, ale w takim razie nie mógłby się sprawdzić związek konieczny: $\cos^2\lambda_1 + \cos^2\mu_1 + \cos^2\nu_1 = 1$, a więc niemożebną jest rzeczą, aby równanie trzeciego stopnia ze względu na s miało pierwiastki urojone.

Niech będzie s_1 jednym z pierwiastków równania, λ_1, μ_1, ν_1 odpowiadającym mu kierunkiem głównym, tedy płaszczyzna z tym kierunkiem sprzężona, czyli tak zwana płaszczyzna główna, będzie miała równanie:

$$xw_1 + yw_2 + zw_3 + w_4 = 0$$

czyli ze względu na równanie (22) w postaci:

$$s_1(x\cos\lambda_1 + y\cos\mu_1 + z\cos\nu_1) + a_{14}\cos\lambda_1 + a_{24}\cos\mu_1 + a_{34}\cos\nu_1 = 0. \tag{28}$$

Każdemu kierunkowi głównemu wyznaczonemu przez pierwiastek s_1 różny od zera odpowiada tedy jedna płaszczyzna główna powierzchni.

Istnieją zatem, gdy pierwiastki s_1, s_2, s_3 są między sobą różne i różne od zera trzy płaszczyzny główne powierzchni.

Jeżeli jeden pierwiastek s_1 jest zerem, co się wedle (25) tylko wtedy stać może, skoro będzie:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

wówczas otrzymujemy kierunek główny, któremu przynależy płaszczyzna główna położona w nieskończoności; gdyby jednakże oprócz $f_1 = 0$ było także $a_{14}\cos\lambda_1 + a_{24}\cos\mu_1 + a_{34}\cos\nu_1 = 0$, wówczas byłoby równanie (28) tożsamością, płaszczyzna główna nieoznaczona; wszelka płaszczyzna prostopadła do kierunku λ_1, μ_1, ν_1 byłaby więc płaszczyzną główną powierzchni.

średnice poprowadzone w kierunkach głównych powierzchni nazywamy osiami powierzchni. Widocznie każda oś będzie zarazem przekrojem dwóch innych płaszczyzn głównych.

10. Płaszczyzna styczna. Przyjmijmy punkt ξ, η, ζ tak, aby było $f=0$, a więc na danej powierzchni, w tym razie będzie równanie (4) kształtu:

$$sr^2+2tr=0 \tag{29}$$

będzie więc miało jeden pierwiastek $r_1=0$, drugi zaś $r_2=-\frac{2t}{s}$. (30)

Wychodząc więc z pewnego punktu ξ, η, ζ powierzchni w dowolnym kierunku λ, μ, ν, napotkamy jeszcze drugi punkt tej powierzchni w odległości $r_2=-\frac{2t}{s}$, która będzie skończoną skoro będzie s różnem od zera.

Odległość tego drugiego punktu od punktu wyjścia staje się także zerem, skoro będzie kierunek λ, μ, ν tak dobrany, aby było $t=0$, czyli:

$$f_1\cos\lambda+f_2\cos\mu+f_3\cos\nu=0, \tag{31}$$

gdzie f_1, f_2, f_3, są w wiadomej nam zależności od punktu wyjściu ξ, η, ζ. Z równania (31) wynika, że kierunki te tworzą płaszczyznę, która przechodząc przez punkt ξ, η, ζ ma równanie kształtu:

$$f_1(x-\xi)+f_2(y-\eta)+f_3(z-\zeta)=0, \tag{32}$$

czyli z powodu, że: $\quad f=\xi f_1+\eta f_2+\zeta f_3+f_4=0,$

w postaci: $\quad f_1x+f_2y+f_3z+f_4=0.$

Z każdego punktu powierzchni drugiego stopnia da się więc wyprowadzić nieskończenie wiele prostych, które w tym punkcie powierzchnię podwójnie przecinają, mając z nią wspólne dwa punkta w jeden wpadające. Proste te, zwane prostymi stycznymi do powierzchni, tworzą wedle (32) jedną płaszczyznę, zwaną płaszczyzną styczną do powierzchni.

Równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni $f(x, y, z)=0$ w punkcie ξ, η, ζ, ma tedy wedle (32) kształt:

$$f_1x+f_2y+f_3z+f_4=0,$$

czyli:

$$(a_{11}\xi+a_{12}\eta+a_{13}\zeta+a_{14})x+(a_{12}\xi+a_{22}\eta+a_{23}\zeta+a_{24})y+$$
$$+(a_{13}\xi+a_{23}\eta+a_{33}\zeta+a_{34})z+(a_{14}\xi+a_{24}\eta+a_{34}\zeta+a_{44})=0, \tag{33}$$

który otrzymamy wprost z równania powierzchni, zastępując x^2, y^2, z^2 przez $x\xi$, $y\eta$, $z\zeta$, iloczyny $2xy$, $2xz$, $2yz$, przez $x\eta+\xi y$, $x\zeta+\xi z$, $y\zeta+\eta z$, a wyrazy $2x$, $2y$, $2z$ przez $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$.

Wyznaczmy warunek, pod jakim równanie pierwszego stopnia:

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{34}$$

przedstawia płaszczyznę styczną do powierzchni drugiego rzędu.

Porównywując to równanie z równaniem płaszczyzny stycznej w punkcie ξ, η, ζ kształtu: $\quad f_1x+f_2y+f_3z+f_4=0,$

otrzymujemy równania warunkowe:

$$f_1=kA,\quad f_2=kB,\quad f_3=kC,\quad f_4=kD,$$

gdzie k jest dowolną ilością stałą.

Mamy tedy na oznaczenie szukanego punktu styczności ξ, η, ζ pięć równań:

$$a_{11}\xi+a_{12}\eta+a_{13}\zeta+a_{14}-kA=0,\quad a_{12}\xi+a_{22}\eta+a_{23}\zeta+a_{24}-kB=0,$$
$$a_{13}\xi+a_{23}\eta+a_{33}\zeta+a_{34}-kC=0,\quad a_{14}\xi+a_{24}\eta+a_{34}\zeta+a_{44}-kD=0,$$
$$A\xi+B\eta+C\zeta+D=0,$$

którym może się stać zadość tylko wtedy, skoro będzie wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & A \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24}, & B \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33}, & a_{34}, & C \\ a_{14}, & a_{24}, & a_{34}, & a_{44}, & D \\ A, & B, & C, & D, & 0 \end{vmatrix}=0. \tag{35}$$

Wyznacznik ten zrównany do zera przedstawia zatem warunek, pod jakim równanie (34) przedstawia dowolną płaszczyznę styczną do powierzchni drugiego rzędu.

12. Stożek styczny. Weźmy teraz dowolny punkt ξ, η, ζ w przestrzeni i oznaczmy miejsce geometryczne wszystkich stycznych, jakie z obranego punktu wyprowadzić się dadzą do danej powierzchni.

Ażeby prosta z punktu ξ, η, ζ wyprowadzona była styczną do powierzchni musiałby jej kierunek λ, μ, ν być tak dobranym, aby równanie:

$$sr^2+2tr+f=0$$

dało na r dwa pierwiastki równe, co się stanie, skoro będzie: $t^2-fs=0$, czyli:

$$(f_1\cos\lambda+f_2\cos\mu+f_3\cos\nu)^2=fs. \tag{36}$$

Oznaczmy przez x, y, z spółrzędne dowolnego punktu tej prostej oddalonego o ϱ od punktu ξ, η, ζ, tedy będzie:

$$\cos\lambda=\frac{x-\xi}{\varrho},\quad \cos\mu=\frac{y-\eta}{\varrho},\quad \cos\nu=\frac{z-\zeta}{\varrho},$$
$$f_1\cos\lambda+f_2\cos\mu+f_3\cos\nu=\frac{xf_1+yf_2+zf_3+f_4-f}{\varrho},$$
$$s=w_1\cos\lambda+w_2\cos\mu+w_3\cos\nu=(f_{1x}-f_1)\frac{x-\xi}{\varrho^2}+(f_{2x}-f_2)\frac{y-\eta}{\varrho^2}+(f_{3x}-f_3)\frac{z-\zeta}{\varrho^2}=$$
$$=\frac{1}{\varrho^2}[xf_{1x}+yf_{2x}+zf_{3x}+f_{4x}-2(xf_1+yf_2+zf_3+f_4)+f]=$$
$$=\frac{1}{\varrho^2}[f(x,y,z)+f(\xi,\eta,\zeta)-2(xf_1+yf_2+zf_3+f_4)],$$

przeto otrzymamy z (36) równanie:

$$[xf_1+yf_2+zf_3+f_4]^2=f(x,y,z)f(\xi,\eta,\zeta), \tag{37}$$

które jest ze względu na x, y, z stopnia drugiego i przedstawia stożek obwijający powierzchnię $f(x,y,z)=0$, czyli tak zwany **stożek styczny** do powierzchni mający wierzchołek w punkcie ξ, η, ζ.

13. Biegun i płaszczyzna biegunowa. Krzywa styczności stożka z powierzchnią będzie określoną równaniami stożka i powierzchni, a zatem dwoma równaniami:

$$(xf_1+yf_2+zf_3+f_4)^2=f(x,y,z)f(\xi,\eta,\zeta),\quad f(x,y,z)=0,$$

które widocznie dadzą się zastąpić także równaniami:

$$xf_1+yf_2+zf_3+f_4=0,\quad f(x,y,z)=0. \tag{38}$$

Pierwsze jest ze względu na x, y, z stopnia pierwszego, przedstawia ...m płaszczyznę, drugie przedstawia daną powierzchnię. Krzywa styczno... stożka z powierzchnią drugiego stopnia jest zatem krzywą płaską.

Płaszczyzna tej krzywej pozostaje z wierzchołkiem ξ, η, ζ stożka sty...ści w osobliwszym związku.

Poprowadźmy mianowicie przez punkt ξ, η, ζ prostą w dowolnym kie...u λ, μ, ν. to prosta ta przetnie powierzchnię w dwóch punktach: w jed... $P_1(x_1, y_1, z_1)$ w odległości r_1 od punktu $S(\xi, \eta, \zeta)$, w drugim $P_2(x_2, y_2, z_2)$ ...dległości r_2; płaszczyznę zaś krzywej styczności w punkcie $M(x, y, z)$ ...dległości ϱ.

Będzie tedy na podstawie równania:

$$sr^2+2tr+f=0, \quad r_1+r_2=-\frac{2t}{s}, \quad r_1r_2=\frac{f}{s}, \quad \frac{r_1+r_2}{2r_1r_2}=-\frac{t}{f}.$$

Ale: $\quad x=\xi+\varrho\cos\lambda, \quad y=\eta+\varrho\cos\mu, \quad z=\zeta+\varrho\cos\nu,$

...o otrzymamy z równania:

$$xf_1+yf_2+zf_3+f_4=0,$$

...dstawiającego płaszczyznę krzywej styczności następujące równanie:

$$(\xi+\varrho\cos\lambda)f_1+(\eta+\varrho\cos\mu)f_2+(\zeta+\varrho\cos\nu)f_3+f_4=0,$$

...i: $$\xi f_1+\eta f_2+\zeta f_3+f_4+\varrho[f_1\cos\lambda+f_2\cos\mu+f_3\cos\nu]=0.$$

Będzie zatem:

$$\varrho=-\frac{\xi f_1+\eta f_2+\zeta f_3+f_4}{f_1\cos\lambda+f_2\cos\mu+f_3\cos\nu}=-\frac{f}{t},$$

...ięc: $$\frac{1}{\varrho}=\frac{r_1+r_2}{2r_1r_2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right), \tag{39}$$

... odległość ϱ jest średnią harmoniczną między odległościami r_1 i r_2.

Płaszczyzna krzywej styczności jest zatem miejscem geometrycznem ...artego punktu harmonicznego sprzężonego z wierzchołkiem $S(\xi, \eta, \zeta)$ ze ...lędu na punkta przecięcia P_1, P_2 dowolnego promienia z powierzchnią.

Z tego powodu nazywa się też płaszczyzna krzywej styczności stożka ...owierzchnią drugiego stopnia **płaszczyzną biegunową** punktu ξ, η, ζ, ...unkt ξ, η, ζ biegunem tej płaszczyzny ze względu na powierzchnię dru...go rzędu $f(x, y, z)=0$.

Punktowi ξ, η, ζ w przestrzeni odpowiada wedle tego płaszczyzna bie...owa, której równanie ma kształt:

$$xf_1+yf_2+zf_3+f_4=0. \tag{40}$$

Równanie to możemy napisać także w postaci: (41)

$$\xi f_{1x}+\eta f_{2x}+\zeta f_{3x}+f_{4x}=0,$$

...re wyraża, że płaszczyzna biegunowa punktu x, y, z przechodzi przez ...kt ξ, η, ζ. A zatem:

Jeżeli z dwóch punktów ξ, η, ζ i x, y, z jeden leży na płaszczyźnie ...gunowej drugiego, to drugi leży na płaszczyźnie biegunowej pier...szego punktu. Stąd wnioski:

1. Jeżeli punkt porusza się po płaszczyźnie, to płaszczyzna biegunowa ...ktu, obraca się koło bieguna tej płaszczyzny.

2. Jeżeli punkt porusza się po linii prostej, to płaszczyzna biegunowa obraca się około drugiej prostej.

Te dwie proste, które w ten sposób sobie odpowiadają, że płaszczyzny biegunowe punktów na jednej z nich położonych przechodzą przez drugą, nazywają się prostemi sprzężonemi względem danej powierzchni.

Możemy tu wykazać, że:

Szereg punktów leżących na jednej prostej jest homograficznym z pękiem płaszczyzn biegunowych, przechodzących przez drugą prostą. Skoro bowiem: $P'(\xi', \eta', \zeta')$ i $P''(\xi'', \eta'', \zeta'')$ są dwoma punktami szeregu prostolinijnego, opisanego przez punkt P, to spółrzędne punktu P będą:

$$x=\lambda\xi'+\mu\xi'',\quad y=\lambda\eta'+\mu\eta'',\quad z=\lambda\zeta'+\mu\zeta''.$$

Płaszczyzna biegunowa punktu P będzie miała tedy równanie;

$$xf_1+yf_2+zf_3+f_4=0, \tag{a}$$

które sprowadza się do postaci:

$$\lambda[xf'_1+yf'_2+zf'_3+f'_4]+\mu[xf''_1+yf''_2+zf''_3+f''_4]=0. \tag{b}$$

Ze zmianą λ i μ otrzymujemy z (a) szereg punktów, położonych na prostej $P'P''$, t. j. na prostej określonej równaniami:

$$xf'_1+yf'_2+zf'_3+f'_4=0,\quad xf''_1+yf''_2+zf''_3+f''_4=0.$$

Jeżeli tedy uważać będziemy punkt szeregu (a) i płaszczyznę pęku (b) odpowiadające tej samej wartości stosunku $\frac{f_1}{\lambda}$ jako elementa sobie odpowiadające, wtedy widocznie jest pęk płaszczyzn (b) homograficznym, czyli jednokreślnym z szeregiem punktów (a).

10. Punkta nieskończenie dalekie na powierzchni. Stożek asymptotyczny. Wróćmy znowu do rozważania równania: $sr^2+2tr+f=0$, a w szczególności przyjmijmy, że dla pewnego przyjętego kierunku λ, μ, ν jest $s=0$.

W takim razie otrzymujemy z tego równania jeden pierwiastek $r_1=\infty$, drugi $r_2=-\frac{f}{2t}$.

Prosta wyprowadzona z dowolnego punktu ξ, η, ζ w kierunku dogadzającym równaniu $s=0$, przecina tedy powierzchnię w dwóch punktach, z których jeden jest punktem nieskończenie dalekim, drugi zaś ma, skoro $t \gtrless 0$, odległość skończoną.

Równanie $s=0$, czyli:

$$a_{11}\cos^2\lambda+a_{22}\cos^2\mu+a_{33}\cos^2\nu+2a_{12}\cos\lambda\cos\mu+ \\ +2a_{13}\cos\lambda\cos\nu+a_{23}\cos\mu\cos\nu=0$$

jest ze względu na λ, μ, ν jednorodnem stopnia drugiego, przedstawia zatem szereg kierunków, które wyprowadzone z pewnego punktu wyjścia ξ, η, ζ tworzą w ogólności stożek drugiego rzędu. Oznaczmy przez x, y, z spółrzędne dowolnego punktu prostej, wyprowadzonej z punktu ξ, η, ζ w kierunku λ, μ, ν, wtedy będzie:

$$\cos\lambda=\frac{x-\xi}{\varrho},\quad \cos\mu=\frac{y-\eta}{\varrho},\quad \cos\nu=\frac{z-\zeta}{\varrho},$$

przeto otrzymamy z warunku $t=0$ równanie:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}(x-\xi)^2+a_{22}(y-\eta)^2+a_{33}(z-\zeta)^2+2a_{12}(x-\xi)(y-\eta(+ \\ +2a_{23}(y-\eta)(z-\zeta)+2a_{13}(x-\xi)(-\zeta)=0. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

jednorodne względem $x-\xi$, $y-\eta$, $z-\zeta$, przedstawiające stożek o wierzchołku ξ, η, ζ.

Każda tworząca tego stożka przecina powierzchnię drugiego stopnia w dwóch punktach, z których jeden leży na tej prostej w nieskończoności.

Jeżeli oprócz $s=0$ jest także $t=0$, czyli:

$$f_1 \cos\lambda + f_2 \cos\mu + f_3 \cos\nu = 0,$$

co stać się może przy pewnym kierunku λ, μ, ν od warunku $t=0$ niezależnym, tylko wówczas, skoro będzie $f_1=0$, $f_2=0$, $f_3=0$, czyli skoro przyjęty punkt ξ, η, ζ jest środkiem x_0, y_0, z_0 powierzchni, natenczas przecina każda taka prosta powierzchnię w dwóch punktach nieskończenie dalekich w siebie wpadających jest więc **asymptotą** powierzchni. Stożek z tych prostych powstały nazywamy też **stożkiem asymptotycznym** powierzchni drugiego rzędu; jego równanie ma kształt:

$$a_{11}(x-x_0)^2 + a_{22}(y-y_0)^2 + a_{33}(z-z_0)^2 + 2a_{12}(x-x_0)(y-y_0) + \\ + 2a_{13}(x-x_0)(z-z_0) + 2a_{23}(y-y_0)(z-z_0) = 0, \qquad (43)$$

gdzie wartości x_0, y_0, z_0 określają znane równania:

$$f_1=0,\ f_2=0,\ f_3=0.$$

Stożek asymptotyczny mają tylko powierzchnie środkowe. Zależnie od kształtu tych powierzchni może być stożek urojonym, t. z. punktem samym, albo stożkiem rzeczywistym.

Jeżeli lewa strona równania (41) rozkłada się na iloczyn dwu czynników pierwszego stopnia, natenczas rozkłada się stożek asymptotyczny na dwie płaszczyzny asymptotyczne, które mogą być urojone (jedna prosta), albo rzeczywiste.

Ćwiczenia LXVI.

1) Wykazać, że powierzchnia drugiego rzędu jest wyznaczona dziewięcioma punktami przestrzeni.

2) Wyprowadzić warunek, pod którym dziesięć punktów przestrzeni leży na tej samej powierzchni drugiego rzędu.

3) Okazać, że wszelka płaszczyzna przecina powierzchnię drugiego rzędu podług krzywej drugiego rzędu (rzeczywistej, lub urojonej).

4) Okazać, że wszelka prosta przecina powierzchnię drugiego rzędu w dwu punktach (rzeczywistych, lub urojonych).

5) Wykazać, że spółrzędne środka powierzchni drugiego rzędu $f=0$, określone są trzema równaniami kształtu: $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$, $\frac{\partial f}{\partial z}=0$.

6) Znaleźć środek $S(\xi, \eta, \zeta)$ powierzchni: $xy+xz+yz-2x-y-3z+1=0$.

7) Wyznaczyć środek $S(\xi, \eta, \zeta)$ powierzchni:

$$x^2+y^2+3z^2+xy+3xz+2yz-7x-17y-25z+1=0.$$

8) Znaleźć środek $S(\xi, \eta, \zeta)$ powierzchni:

$$(ay+bx-c)^2-ab(xy-z^2)=0,$$

9) Wykazać, że równanie: $8xy-16xz+8yz-8x+8y-16z-7=0$ przedstawia powierzchnię stożkową o wierzchołku: $S\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

10) Okazać, że równanie jednorodne drugiego stopnia o zmiennych x, y, z przedstawia powierzchnię stożkową drugiego rzędu, której wierzchołek leży w początku układu.

11) Okazać, że wszystkie proste g, które przechodzą przez punkt przecięcia dwu danych prostych l i l' tak, że suma kątów, jakie każda z tych prostych g tworzy z dwiema danemi prostemi l i l' jest ilością stałą, tworzą powierzchnię stożkową drugiego rzędu, której wierzchołek leży w punkcie przecięcia danych dwu prostych.

12) Okazać, że wszystkie proste g, które przechodzą przez punkt przecięcia dwu danych prostych l i l' tak, że różnica kątów, jakie każda z prostych g tworzy z dwiema danemi prostemi l i l', jest ilością stałą, tworzą powierzchnię stożkową drugiego rzędu, której wierzchołek leży w punkcie przecięcia danych dwu prostych.

14) Wyprowadzić warunek, pod którym ogólne równanie drugiego stopnia między trzema zmiennemi x, y, z, przedstawia powierzchnię stożka drugiego.

14) Okazać, że miejsce geometryczne punktów, których odległość od danej prostej l, do jego odległości od danej płaszczyzny P nachylonej do l, pozostaje w stałym stosunku ε jest stożkiem drugiego rzędu.

15) Okazać, że miejsce punktu, którego odległość od osi x-ów jest równą jego odległości od płaszczyzny: $Ax+By+Cz=0$ jest stożkiem o równaniu: $(Ax+By+Cz)^2=D^2(z^2+y^2)$.

16) Znaleźć równanie stożka, którego wierzchołek znajduje się na powierzchni kuli $x^2+y^2+z^2=a^2$ w punkcie $P(0, 0, a)$, a kierownica jest kołem małem tejże kuli, leżącem na płaszczyźnie: $lx+my+nz=p$.

17) Okazać, że stożek rzędu drugiego jest jedyną powierzchnią rzędu drugiego, której środek leży na samej powierzchni.

18) Okazać, że powierzchnia:

$$a_{11}x^2+4y^2+9z^2+4xy+12yz+6zx+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$$

posiada środek w nieskończoności, jeżeli $a_{11} \gtrless 1$, a w przypadku, gdy $a_{11}=1$, posiada prostą w nieskończoności.

19) Wyznaczyć miejsce geometryczne środków cięciw równoległych do prostej: $\frac{x}{\cos\lambda}=\frac{y}{\cos\mu}=\frac{z}{\cos\nu}$.

20) Wyznaczyć równanie płaszczyzny środkowej, odpowiadającej kierunkowi λ, μ, ν cięciw w powierzchni: $xy+yz+zx=a^2$.

21) Okazać, że powierzchnia:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+H=0,$$

i stożek:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}xy=0,$$

mają te same płaszczyzny środkowe.

22) Okazać, że płaszczyzna przesunięta przez punkt: $P(\xi, \eta, \zeta)$, któraby przecinała powierzchnię drugiego rzędu podług krzywej drugiego rzędu, dla której punkt $P(\xi, \eta, \zeta)$ jest środkiem, ma równanie: $f'_\xi(x-\xi)+f'_\eta(y-\eta)+f'_\zeta(z-\zeta)=0$

23) Wyprowadzić równania średnicy spółrzędnej z płaszczyzną $Ax+By+Cz+D=0$ w powierzchni: $f=a_{11}x^2+...+a_{44}=0$.

24) Płaszczyzna obraca się około pewnej danej prostej, okazać, że jej średnica sprzężona opisuje płaszczyznę, mianowicie płaszczyznę sprzężoną z daną prostą.

25) Okazać, że powierzchnia drugiego rzędu ma w ogóle trzy płaszczyzny główne i trzy osie.

26) Wyznaczyć płaszczyzny główne powierzchni: $7x^2+6y^2+5z^2-4xy+4yz=b$

27) Wyznaczyć dostawy kierunkowe osi głównych powierzchni, określonej równaniem:

$$32x^2+y^2+z^2-16xy+6yz-16xz-6x-12x-12z+18=0.$$

28) Okazać, że dwie powierzchnie o równaniach:

$$ax^2+by^2+cz^2-(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2=d^4, \quad \left(\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\right)\left(\frac{\alpha^2}{a}+\frac{\beta^2}{b}+\frac{\gamma^2}{c}-1\right)-\left(\frac{\alpha x}{a}+\frac{\beta x}{b}+\frac{\gamma c}{c}\right)^2=1$$

mają osie główne jednakowego kierunku.

29) Wyprowadzić warunek, pod którym płaszczyzna $\xi x+\eta y+\zeta z+1=0$ dotyka ogólnej powierzchni drugiego rzędu: $f_z=0$.

30) Wyprowadzić warunek, pod którym prosta, określona równaniami:

$$Ax+By+Cz+D=0,\quad A'x+B'y+C'z+D'=0$$

przechodzi przez środek powierzchni drugiego rzędu.

31) Okazać, że styczne, wyprowadzone z początku układu do powierzchni: $f=a_{11}x^2+...+a_{44}=0$, leżą na stożku o równaniu:

$$a_{44}f-(a_{11}x+a_{22}y+a_{33}z+a_{44})^2=0.$$

32) Okazać, że środki powierzchni, określonych równaniem:

$$x^2+y^2-z^2+2\lambda xz+2\mu yz-2ax-2by+2cz=0,$$

w którem λ i μ przedstawiają dowolne parametry, leżą na powierzchni:

$$x^2+y^2+z^2-(ax+by+cz)=0.$$

33) Wyprowadzić warunek, pod którym równanie:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz=0$$

przedstawia stożek o trzech tworzących do siebie prostopadłych.

34) Wykazać, że w powierzchniach pozbawionych środka płaszczyzny środkowe są albo do siebie równoległe, albo równoległe do jednej linii prostej.

35) Wykazać, że wszelka powierzchnia drugiego rzędu ma przynajmniej jedną płaszczyznę główną.

36) Okazać, że równanie trzeciego stopnia $\Delta(s)=0$ nie może mieć pierwiastków zespolonych kształtu $s_1=\alpha+\beta i$, $s_2=\alpha-\beta i$.

37) Jakie równanie trzeciego stopnia $\Delta(s)=0$ odpowiada powierzchni:

$$x^2+2y^2+2z^2+2xy-2x-4y-4z+2=0$$

i jakie są jego pierwiastki.

38) Okazać, że spółczynniki równania trzeciego stopnia $\Delta(s)=0$ nie zmieniają się ze zmianą danego układu prostokątnego na inny układ prostokątny.

39) Wyprowadzić równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $P(\xi,\eta,\zeta)$ powierzchni drugiego rzędu $f(x,y,z)=0$.

Wyprowadzić i rozwiązać równania trzeciego stopnia $\Delta(s)=0$, odpowiadające następującym powierzchniom:

40) $5x^2-y^2+z^2+6xz+4xy+2x+4y+6z=8$, 41) $2xy-xz+yz-2x+2y-3z=2$,
42) $xy+yz+zx=a^2$, 43) $7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz=6$.

44) Wyznaczyć środek powierzchni:

$$x^2+2y^2+3z^2+2(xy+xz+yz)+x+y+z=1.$$

45) Wyprowadzić równanie płaszczyzny biegunowej punktu: $P(\xi,\eta,\zeta)$ ze względu na powierzchnię drugiego rzędu: $f(x,y,z)=0$.

46) Wyprowadzić równanie stożka stycznego do powierzchni drugiego rzędu $f=0$, mającego wierzchołek w punkcie $P(\xi,\eta,\zeta)$.

47) Wykazać, że płaszczyzna styczna w punkcie: $P(x',y',z')$ powierzchni:

$$ax^2+by^2+cz^2+2a'yz+2b'xz+2c'xy+2a''x+2b''y+2c''z+d=0 \text{ ma równanie:}$$

$$(ax'+c'y+b'z+a'')x+(c'x+by+a'z+b'')y+(b'x+a'y+cz+c'')z+(a''x+b''y+c''z+d)=0.$$

48) Wykazać, że punkta styczności stożka stycznego do powierzchni drugiego rzędu leżą na płaszczyźnie biegunowej wierzchołka.

49) Wykazać, że wszystkie punkta, które ze względu na powierzchnię rzędu drugiego są z danym punktem harmonicznie sprzężone, leżą na jednej płaszczyźnie, płaszczyźnie biegunowej danego punktu.

50) Wykazać, że prosta, podług której przecinają się płaszczyzny biegunowe dwu punktów jest wzajemną biegunową prostej łączącej dane dwa punkta.

51) Wykazać, że płaszczyzny biegunowe czterech punktów leżących na linii prostej mają stosunek anharmoniczny równy stosunkowi anharmonicznemu danych czterech punktów.

52) Wykazać, że stosunek anharmoniczny czterech płaszczyzn przecinających się podług pewnej linii prostej jest równy stosunkowi anharmonicznemu ich biegunów.

53) Wykazać, że szereg punktów linii prostej jest jednokreślnym z pękiem odpowiednich płaszczyzn biegunowych.

54) Okazać, że płaszczyzna biegunowa danego punktu powierzchni drugiego rzędu wpada w płaszczyznę styczną w tym punkcie powierzchni.

55) Okazać, że przez wszelką prostą w przestrzeni można przesunąć w ogólności dwie płaszczyzny styczne do powierzchni drugiego rzędu (z wyjątkiem stożka i walca).

56) Okazać, że przez wszelki punkt w przestrzeni można przesunąć w ogólności dwie płaszczyzny styczne do stożka, lub walca drugiego rzędu.

57) Wykazać, że płaszczyzny biegunowe punktów średnicy są do siebie równoległe i równoległe do płaszczyzny środkowej z tą średnicą sprzężonej.

58) Wykazać, że średnica powierzchni przechodząca przez wierzchołek stożka stycznego do powierzchni drugiego rzędu przechodzi przez środek krzywej styczności stożka z tą powierzchnią.

59) Wykazać, że płaszczyzny styczne do powierzchni, a do siebie równoległe są styczne w punktach końcowych średnicy sprzężonej z płaszczyzną środkową do tych płaszczyzn stycznych równoległą.

60) Okazać, że linie styczne do powierzchni drugiego rzędu, a do siebie równoległe są styczne do powierzchni według krzywej przekroju tej powierzchni płaszczyzną środkową sprzężoną ze średnicą do tych stycznych równoległą.

61) Wykazać, że średnica powierzchni drugiego rzędu: $f_x = a_{11}x + \ldots + a_{44} = 0$ sprzężona z płaszczyzną: $Ax+By+Cz+D=0$ jest określoną równaniami: $\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}}{A} = \dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}}{B} = \dfrac{\frac{\partial f}{\partial z}}{C}$.

62) Wykazać, że płaszczyzny środkowe powierzchni drugiego rzędu: $f=0$, sprzężone z kierunkami λ, μ, ν spełniającymi warunek: $a \cos\lambda + b \cos\mu + c \cos\nu = 0$ przechodzą przez prostą, określoną równaniami: $\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}}{a} = \dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}}{b} = \dfrac{\frac{\partial f}{\partial z}}{c}$.

63) Przez dany punkt $P(x_0, y_0, z_0)$ przesunięto wiązkę płaszczyzn przecinających powierzchnię drugiego rzędu: $f=0$, wykazać, że środki przekrojów tych płaszczyzn z powierzchnią mieszczą się na powierzchni drugiego rzędu o równaniu:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial z}(z-z_0)=0.$$

Rozwiązania XLVI. 6) $S(1, 2, 0)$. 7) $S(1, 2, 3)$ 8) $S\left(\frac{2c}{3b}, \frac{2c}{3a}, 0\right)$.

10) $(p-na)(x^2+y^2)-(p+na)(z-a)^2+2a(z-a)(lx+my)=0$.

20) $(\cos\mu+\cos\nu)x+(\cos\lambda+\cos\nu)y+(\cos\lambda+\cos\mu)z=0$. 26) $x+2y+2z=0$, $2x-2y+z=0$ $2x+y-2z=0$. 27) $\frac{\cos\lambda_1}{1}=\frac{\cos\mu_1}{2}=\frac{\cos\nu_1}{2}=\frac{1}{3}$, $\frac{\cos\lambda_2}{4}=\frac{\cos\mu_2}{-1}=\frac{\cos\nu_2}{-1}=\frac{\sqrt{2}}{6}$, $\frac{\cos\lambda_3}{0}=\frac{\cos\mu_3}{-1}=\frac{\cos\nu_3}{-1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 33) $a_{11}+a_{22}+a_{33}=0$. 39) $(s-2)(s^2-3s+1)=0$.

40) $s^3-5s^2-14s=0$. 41) $s^3-\frac{3}{2}s+\frac{1}{2}=0$. 42) $s^3-\frac{1}{8}s-\frac{1}{4}=0$. 43) $s^3-18s^2+99s-162=0$.

44) $S(-\frac{1}{2}, 0, 0)$.

Literatura. Joseph Carnoy: Cours de géometrie analytique. Géometrie de l'espace Louvin-Paris 1881. George Salmon: A treatise on the analytic geometry of three dimensions. Dublin 1882. Dr. Władysław Zajączkowski: Geometrya analityczna Warszawa 1884.

Tematy do rozprawek naukowych.

1. Teorya środków i osi głównych w powierzchniach drugiego rzędu.
2. Teorya płaszczyzn stycznych do powierzchni drugiego rzędu.
3. Teorya biegunów i płaszczyzn biegunowych względem powierzchni drugiego rzędu.

Wykład XLVII.

Szczególne postacie powierzchni drugiego rzędu.

1. Przekształcanie ogólnego równania powierzchni drugiego rzędu na podstawie zmiany początku układu. Niech będzie:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0 \quad (1)$$

równaniem dowolnej powierzchni drugiego rzędu, odniesionem do pewnego układu prostokątnego.

Zmieńmy najpierw punkt początkowy układu, zatrzymując niezmieniony kierunek osi spółrzędnych. W tym to celu połóżmy w równaniu:

$$x=x'+\xi,\ y=y'+\eta,\ z=z'+\zeta,$$

gdzie ξ, η, ζ są współrzędnemi nowego punktu początkowego, wtedy otrzymamy przerobione równanie w postaci:

$$a_{11}(x'+\xi)^2+2a_{23}(y'+\eta)(z'+\zeta)+2a_{14}(x'+\xi)+\&+a_{44}=0.$$

Uporządkowawszy to równanie wedle potęg zmiennych x', y', z', kreski jako nie potrzebne opuszczając, otrzymamy równanie:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2(a_{11}\xi+a_{12}\eta+a_{13}\zeta+a_{14})x+$$
$$+2(a_{12}\xi+a_{22}\eta+a_{23}\zeta+a_{24})y+2(a_{13}\xi+a_{23}\eta+a_{33}\zeta+a_{34})z+(a_{11}\xi^2+a_{22}\eta^2+a_{33}\zeta^2+$$
$$+2a_{12}\xi\eta+2a_{13}\xi\zeta+2a_{23}\eta\zeta+2a_{14}\xi+2a_{24}\eta+2a_{34}\zeta+a_{44})=0,$$

czyli za użyciem symbolów równanie kształtu:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2f_1x+2f_2y+2f_3z+f=0. \quad (2)$$

Zmiana punktu początkowego wpływa więc tylko na spółczynniki przy x, y, z i na wyraz wolny, nie zmienia zaś wcale spółczynników w wyrażeniach drugiego stopnia: x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz.

Stosownym wyborem punktu początkowego możemy trzy spółczynniki sprowadzić do zera. Jakoż, położywszy:

$$A_{14}=f_1=a_{11}\xi+a_{12}\eta+a_{13}\zeta+a_{14}=0,$$
$$A_{24}=f_2=a_{12}\xi+a_{22}\eta+a_{23}\zeta+a_{24}=0,$$
$$A_{34}=f_3=a_{13}\xi+a_{23}\eta+a_{33}\zeta+a_{34}=0.$$

otrzymujemy na wyznaczenie nowego punktu początkowego trzy równania pierwszego stopnia ze względu na ξ, η, ζ, cechujące jak wiadomo środek powierzchni.

Równanie powierzchni środkowej uprości się więc, skoro środek (x_0, y_0, z_0) powierzchni będzie punktem początkowym układu, mianowicie gdy znikną spółczynniki przy x, y, z, wyrazem wolnym będzie zaś:

$$A_{44}=f=a_{14}x_0+a_{24}y_0+a_{34}z_0+a_{44}=\frac{D}{\Delta},$$

gdzie D i Δ są wyznacznikami znanymi z wzorów (12) i (14) poprzedniego wykładu, zatem będzie miało równanie powierzchni środkowej, odniesione do środka powierzchni jako punktu początkowego, postać:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+\frac{D}{\Delta}=0. \qquad (3)$$

Jeżeli $D=0$, to znak, że środek powierzchni leży na niej samej, taką powierzchnią jest stożek drugiego stopnia, a jego równanie ogólne odniesione do wierzchołka jako punktu początkowego przedstawia się zatem w formie równania jednorodnego drugiego stopnia:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz=0. \qquad (4)$$

Jeżeli powierzchnia drugiego rzędu nie ma środka, wówczas nie możemy wszystkich trzech spółczynników przy x, y, z sprowadzić do zera, gdyż w tym razie nie ma, z powodu, że $\Delta=0$, żadnego punktu w skończoności, dla któregoby równocześnie znikły f_1, f_2 i f_3. Natomiast możemy zawsze wyraz wolny f i którekolwiek dwa z tych trzech spółczynników np f_2 i f_3 sprowadzić do zera, obierając stosownie pewien punkt powierzchni za punkt początkowy.

Tym sposobem sprowadzić możemy zmianą punktu początkowego równanie powierzchni bezśrodkowej do postaci:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2f_1x=0. \qquad (5)$$

2. Zmiana kierunków osi układu. Rozważmy teraz, w jaki sposób zmiana kierunków osi wpływa na kształt równania.

W tym celu wyprowadźmy z punktu początkowego trzy proste w kierunkach $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)(\lambda_3, \mu_3, \nu_3)$ i przyjmijmy je za osie OX', OY', OZ' nowego układu. Wzory transformacyi otrzymują w tym razie kształt:

$$x=x'\cos\lambda_1+y'\cos\lambda_2+z'\cos\lambda_3,$$
$$y=x'\cos\mu_1+y'\cos\mu_2+z'\cos\mu_3,$$
$$z=z'\cos\nu_1+y'\cos\nu_2+z'\cos\nu_3,$$

wskutek czego równanie (1) zamieni się w następujące:

$$a_{11}(x\cos\lambda_1+y\cos\lambda_2+z\cos\lambda_3)^2+$$
$$+2a_{23}(x\cos\mu_1+y\cos\mu_2+z\cos\mu_3)(x\cos\nu_1+y\cos\nu_2+z\cos\nu_3)+$$
$$+2a_{14}(x\cos\lambda_1+y\cos\lambda_2+z\cos\lambda_3)+\dots+a_{44}=0.$$

Uporządkowawszy to równanie według potęg zmiennych x, y, z otrzymamy:

$$(a_{11}\cos^2\lambda_1+a_{22}\cos^2\mu_1+a_{33}\cos^2\nu_1)x^2+2yz(a_{11}\cos\lambda_2\cos\lambda_3+a_{22}\cos\mu_2\cos\mu_3+$$
$$+a_{33}\cos\nu_2\cos\nu_3+a_{12}\cos\lambda_2\cos\mu_3+a_{12}\cos\lambda_3\cos\mu_2+a_{13}\cos\lambda_2\cos\nu_3+$$
$$+a_{13}\cos\lambda_3\cos\nu_2+a_{23}\cos\mu_2\cos\nu_3+a_{23}\cos\mu_3\cos\nu_2)+$$
$$+2x(a_{14}\cos\lambda_1+a_{24}\cos\mu_1+a_{34}\cos\nu_1)+\dots+a_{44}=0,$$

czyli przy użyciu łatwo zrozumiałych skróceń:

$$s_1x^2+s_2y^2+s_3z^2+2p_{12}xy+2p_{13}xz+2p_{23}yz+2q_1x+2q_2y+2q_3z+a_{44}=0. \qquad (6)$$

Zmiana kierunku osi przy niezmiennym punkcie początkowym nie wpływa więc wcale na wyraz wolny.

Jeden tylko kierunek i to kierunek nowej osi OX wpływa na spółczynniki przy x^2 i x; dwa kierunki, a to osi OY i OZ wpływają na spółczynniki przy yz; podobnie ma się z innymi spółczynnikami.

3. Zastanówmy się nad kształtem spółczynników p_{12}, p_{13}, p_{23} stojących przy iloczynach xy, xz i yz. Spółczynnik p_{23} zawisł od kierunków $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$

$(\lambda_3, \mu_3, \nu_3)$; uporządkowawszy jego wyrażenie wedle $\cos\lambda_2$, $\cos\mu_2$, $\cos\nu_2$ otrzymamy:

$$p_{23}=(a_{11}\cos\lambda_3+a_{12}\cos\mu_3+a_{13}\cos\nu_3)\cos\lambda_2+$$
$$+(a_{12}\cos\lambda_3+a_{22}\cos\mu_3+a_{23}\cos\nu_3)\cos\mu_2+(a_{13}\cos\lambda_3+a_{23}\cos\mu_3+a_{33}\cos\nu_3)\cos\nu_2,$$

czyli:
$$p_{23}=w_1^{(3)}\cos\lambda_2+w_2^{(3)}\cos\mu_2+w_3^{(3)}\cos\nu_2,$$

przy uporządkowaniu według $\cos\lambda_3$, $\cos\mu_3$, $\cos\nu_3$ przedstawi się p_{23} w postaci:

$$p_{23}=w_1^{(2)}\cos\lambda_3+w_2^{(2)}\cos\mu_3+w_3^{(2)}\cos\nu_3.$$

Podobnie znajdziemy:

$$p_{12}=w_1^{(1)}\cos\lambda_2+w_2^{(1)}\cos\mu_2+w_3^{(1)}\cos\nu_2=w_1^{(2)}\cos\lambda_1+w_2^{(2)}\cos\mu_1+w_3^{(2)}\cos\nu_1,$$

$$p_{13}=w_1^{(1)}\cos\lambda_3+w_2^{(1)}\cos\mu_3+w_3^{(1)}\cos\nu_3=w_1^{(3)}\cos\lambda_1+w_2^{(3)}\cos\mu_1+w_3^{(3)}\cos\nu_1.$$

Z kształtu spółczynników p_{12}, p_{13}, p_{23} widzimy, że one staną się zerami, skoro kierunki $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ i $(\lambda_3, \mu_3, \nu_3)$ utworzą układ kierunków sprzężonych.

Obrawszy nowe osie OX, OY, OZ w kierunku trzech średnic sprzężonych powierzchni, uwolnimy równanie powierzchni od wyrazów, zawierających iloczyny spółrzędnych; przekształcone równanie powierzchni otrzyma wtedy kształt:

$$s_1x^2+s_2y^2+s_3z^2+2q_1x+2q_2y+2q_3z+a_{33}=0, \tag{7}$$

gdzie wyrażenia:

$$s_1=w_1^{(1)}\cos\lambda_1+w_2^{(1)}\cos\mu_1+w_3^{(1)}\cos\nu_1,\quad s_2=w_1^{(2)}\cos\lambda_2+w_2^{(2)}\cos\mu_2+w_3^{(2)}\cos\nu_2,$$

$$s_3=w_1^{(3)}\cos\lambda_3+w_2^{(3)}\cos\mu_3+w_3^{(3)}\cos\nu_3,\quad q_1=w_4^{(1)},\quad q_2=w_4^{(2)},\quad q_3=w_4^{(3)},$$

zawisłe są każde od jednego z trzech kierunków sprzężonych.

Jeżeli przyjmiemy w szczególności, że nowe osie układu są równoległe do trzech osi głównych, t. j. do trzech kierunków sprzężonych i do siebie prostopadłych, wówczas użyjemy do wyznaczenia kierunków nowych osi równań (21) str. 743, równanie przekształcone otrzymuje także kształt (7), a spółczynniki przy x^2, y^2, z^2 będą tu pierwiastkami wiadomego równania trzeciego stopnia ze względu na s.

Jeżeli więc, niezmieniając punktu początkowego obierzemy kierunki osi głównych powierzchni jako osi układu, wówczas przekształcimy równanie ogólne:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$$

w następujące:

$$s_1x^2+s_2y^2+s_3z^2+2q_1x+2q_2y+2q_3z+a_{44}=0, \tag{8}$$

gdzie s_1, s_2, s_3 są pierwiastkami równania trzeciego stopnia:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{12}, & a_{22}-s, & a_{23} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33}-s \end{vmatrix}=0.$$

4. Zmiana początku i kierunków osi układu. Przekształćmy teraz równanie (1), zmieniając punkt początkowy i kierunek osi.

Przyjmując osie układu w kierunku średnic sprzężonych, a niezmieniając punktu początkowego, otrzymujemy na mocy (7) równanie:

$$s_1x^2+s_2y^2+s_3z^2+2q_1x+2q_2y+2q_3z+a_{44}=0,$$

przenieśmy teraz punkt początkowy do innego punktu ξ, η, ζ, a więc podstawmy w równaniu (8):

$$x=x'+\xi,\quad y=y'+\eta,\quad z=z'+\zeta,$$

wtedy, opuszczając kreski, otrzymamy równanie przerobione w postaci:

$$s_1x^2+s_2y^2+s_3z^2+2(q_1+s_1\xi)x+2(q_2+s_2\eta)y+2(q_3+s_3\zeta)z+f=0, \tag{9}$$

gdzie: $f=s_1\xi^2+s_2\eta^2+s_3\zeta^2+2q_1\xi+2q_2\eta+2q_3\zeta+a_{44}$.

Równanie powierzchni odniesione do trzech osi prostokątnych równoległych do osi głównych powierzchni, a przecinających się w punkcie, którego spółrzędne względem pierwotnego układu są ξ, η, ζ, ma więc kształt

$$s_1x^2+s_2y^2+s_3z^2+2(q_1+s_1\xi)x+2(q_2+s_2\eta)y+2(q_3+s_3\zeta)z+f=0.$$

5. Jeżeli powierzchnia jest środkową, możemy uwolnić równanie od spółczynników przy x, y, z, przyjmując środek powierzchni jako punkt początkowy układu, a więc kładąc w równaniu (9): $\xi=-\frac{q_1}{s_1}$, $\eta=-\frac{q_2}{s_2}$, $\zeta=-\frac{q_3}{s_3}$

będzie tedy:

$$f=s_1\xi^2+s_2\eta^2+s_3\zeta^2-2s_1\xi^2-2s_2\eta^2-2s_3\zeta^2+a_{44}=-(s_1\xi^2+s_2\eta^2+s_3\zeta^2-a_{44})=k,$$

przerobione równanie zatem przyjmie postać:

$$s_1x^2+s_2y^2+s_3z^2+k=0. \tag{10}$$

Gdybyśmy zmienili w równaniu (1) najpierw punkt początkowy, obierając go w środku powierzchni, otrzymalibyśmy wedle (5) równanie:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+\frac{D}{\Delta}=0,$$

zmieniając teraz kierunek osi nie zmienimy tym sposobem wcale wyrazu wolnego $\frac{D}{\Delta}$; przekształcone równanie odniesione do dowolnych osi ze środka powierzchni wychodzących będzie zatem:

$$s_1x^2+s_2y^2+s_3z^2+2p_{12}xy+2p_{13}xz+2p_{23}yz+\frac{D}{\Delta}=0.$$

Jeżeli jako osie układu przyjmiemy trzy średnice sprzężone, w szczególności trzy osie główne, wówczas będzie $p_{12}=p_{13}=p_{23}=0$, a równanie przerobione otrzymuje tedy kształt:

$$s_1x^2+s_2y^2+s_3z^2+\frac{D}{\Delta}=0, \tag{11}$$

musi więc $\frac{D}{\Delta}$ równe być k.

Równanie powierzchni środkowej odniesione do układu osi głównych tej powierzchni przedstawia się zatem w postaci:

$$s_1x^2+s_2y^2+s_3z^2+k=0,$$

gdzie spółczynniki s_1, s_2, s_3 są pierwiastkami równania trzeciego stopnia $\Delta(s)=0$, a wyraz wolny $k=\frac{D}{\Delta}$.

6. Jeżeli powierzchnia nie ma środka, wówczas możemy odnieść równanie do układu kierunków sprzężonych bez zmiany punktu początkowego, a otrzymamy równanie:

$$s_1x^2+s_2y^2+s_3z^2+2q_1x+2q_2y+2q_3z+a_{44}=0, \tag{12}$$

zmieniając teraz dowolnie punkt początkowy dostaniemy równanie przerobione w postaci:

$$s_1x^2+s_2y^2+s_3z^2+2(q_1+s_1\xi)x+2(q_2+s_2\eta)y+2(q_3+s_3\zeta)z+f=0. \quad (13)$$

Ponieważ dla powierzchni bezśrodkowych jest $\Delta=0$, a więc jeden pierwiastek równania trzeciego stopnia $\Delta(s)=0$ jest zerem np. $s_1=0$, więc, odnosząc równanie powierzchni bezśrodkowej do układu kierunków głównych z punktu ξ, η, ζ wychodzących, a w szczególności przyjmując kierunek, dla którego $s_1=0$ za oś x-ów, otrzymamy równanie przerobione w postaci:

$$s_2y^2+s_3z^2+2q_1x+2(q_2+s_2\eta)y+2(q_3+s_3\zeta)z+f=0, \quad (14)$$

gdzie $f=s_2\eta^2+s_3\zeta^2+2q_1\xi+2q_2\eta+2q_3\zeta+a_{44}$.

Jeżeli drugie dwa pierwiastki równania trzeciego stopnia $\Delta(s)$ są różne od zera, wówczas możemy obrać punkt początkowy tak, aby było $\eta=-\frac{q_2}{s_2}$, $\zeta=\frac{q_3}{s_3}$; tym sposobem sprowadzimy równanie (14) do postaci:

$$s_2y^2+s_3z^2+2q_1x+k=0, \quad (15)$$

gdzie teraz:

$$k=s_2\eta^2+s_3\zeta^2+2q_1\xi-2s_2\eta^2-2s_3\zeta^2+a_{44}=2q_1\xi-s_2\eta^2-s_3\zeta^2+a_{44}=$$
$$=2q_1\xi-\frac{q^2_2}{s_2}-\frac{q^2_3}{s_3}+a_{44}.$$

zależy jeszcze tylko od dowolnej ilości ξ.

Przyjmując, że q_1 jest różnem od zera, możemy ξ dobrać tak, aby było $k=0$. W tym celu położymy:

$$\xi=\frac{s_2\eta^2+s_3\zeta^2-a_{44}}{2q_1}=\frac{q^2_2s_3+q^2_3s_2-a_{44}s_2s_3}{2q_1s_2s_3},$$

a równanie (15) sprowadzi się wtedy do postaci:

$$s_2y^2+s_3z^2+2q_1x=0. \quad (16)$$

Równanie powierzchni, nie mających środka, możemy tedy, obierając pewien punkt powierzchni, jako punkt początkowy, a osie układu w kierunku głównych osi powierzchni sprowadzić do postaci:

$$s_2y^2+s_3z^2+2q_1x=0, \quad (17)$$

gdzie s_2 i s_3 są dwoma pierwiastkami równania $\Delta(s)$ różnymi od zera, a spółczynnik $q_1=a_{14}\cos\lambda_1+a_{24}\cos\mu_1+a_{34}\cos\nu_1$ zawisł od kierunku osi, dla której pierwiastek $s_1=0$.

7. Jeżeli w równaniu (9) wypadło $q_1=0$, wówczas nie moglibyśmy uwolnić równania od wyrazu wolnego k, równanie przerobione zatrzymałoby tedy kształt:

$$s_2y^2+s_3z^2+k=0, \quad (18)$$

gdzie: $k=a_{44}-(s_2\eta^2+s_3\zeta^2)$, $\eta=-\frac{q_2}{s}$, $\zeta=-\frac{q_3}{s}$.

Jeżeli równanie trzeciego stopnia $\Delta(s)=0$, dostarcza dwa pierwiastki równe zeru, np. $s_1=0$ i $s_2=0$, wówczas przedstawia się równanie powierzchni odniesione do układu kierunków głównych z punktów ξ, η, ζ wychodzących w postaci:

$$s_3z^2+2q_1x+2q_2y+2(q_3+s_3\zeta)z+k=0,$$

gdzie: $k=s_3\zeta^2+2q_1\xi+2q_2\eta+2q_3\zeta+a_{44}$.

W tym przypadku możemy wziąć: $\zeta=-\frac{q_3}{s_3}$, wskutek czego równanie przerobione otrzyma kształt:

$$s_3 z^2+2q_1x+2q_2y+k=0, \qquad (19)$$

gdzie:

$$k=2q_1\xi+2q_2\eta-s_3\zeta^2+a_{44}.$$

Ponieważ kierunki główne odpowiadające pierwiastkowi $s_1=s_2=0$ są nieoznaczone, bo dla pierwiastka podwójnego równania $\Delta(s)=0$, nie są równania (21) poprzedniego paragrafu od siebie różne, więc dla wyznaczenia kierunku $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ odpowiadającego pierwiastkowi $s_2=0$ możemy dołączyć równanie:

$$q_2=a_{14}\cos\lambda_2+a_{24}\cos\mu_2+a_{34}\cos\nu_2=0.$$

Przyjąwszy, że $q_1 \gtrless 0$, będziemy mogli jeszcze przyjąć ξ tak, aby było:

$$k=2q_1\xi-s_3\zeta^2+a_{44}=0,$$

skąd otrzymujemy:

$$\xi=\frac{s_3\zeta^2-a_{44}}{2q_1}.$$

Tym sposobem przejdzie równanie przerobione w następujące:

$$s_3 z^2+2q_1x=0. \qquad (20)$$

Jeżeli zaś $q_1=0$, wówczas nie możemy się uwolnić od wyrazu wolnego k, równanie przerobione otrzymuje tedy kształt:

$$s_3 z^2+k=0, \text{ gdzie } k=a_{44}-s_3\zeta^2, \ \zeta=-\frac{q_3}{s_3}.$$

Przypadek, żeby wszystkie trzy pierwiastki równania $\Delta(s)=0$ były zerami, jest niemożliwy, gdyż wtedy byłoby równanie dane stopnia pierwszego.

Na podstawie powyższych wyników przekształceń możemy teraz przystąpić do ocenienia możliwych kształtów powierzchni drugiego stopnia.

8. Klasyfikacya powierzchni drugiego rzędu. W poprzedzających paragrafach poznaliśmy, że równanie powierzchni drugiego stopnia da się stosownie do natury spółczynników sprowadzić do jednego z następujących pięciu kształtów:

$$s_1x^2+s_2y^2+s_3z^2+k=0, \qquad (I)$$

$$s_1x^2+s_2y^2+2q_3z=0, \qquad (II)$$

$$s_1x^2+s_2y^2+k=0, \qquad (III)$$

$$s_1x^2+2q_1y=0, \qquad (IV)$$

$$s_1x^2+k=0. \qquad (V)$$

Z tych kształtów wynurzają się poszczególne formy powierzchni drugiego stopnia, jeżeli spółczynniki równań I—V otrzymują szczególne znaki.

Oznaczmy bezwzględne wartości stosunków $-\frac{k}{s_1}, -\frac{k}{s_2}, -\frac{k}{s_3}$ przez a^2, b^2, c^2, tedy otrzymamy z (I) następujące cztery możliwe kształty powierzchni środkowych:

1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, Ellipsoida trójosiowa (fig. 184).

2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$, Ellipsoida urojona.

3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, Hiperboloida o jednej powłoce (fig. 185).

4. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, Hiperboloida o dwóch powłokach (fig. 186).

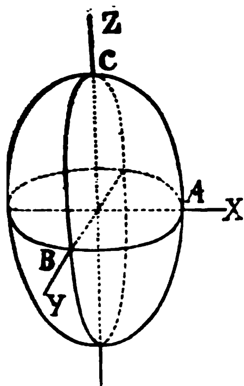


Fig. 184.

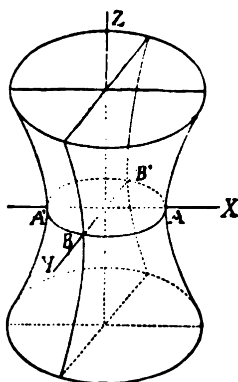


Fig. 185.

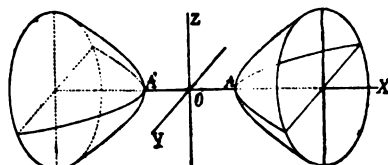


Fig. 186.

Jeżeli $k=\frac{D}{\Delta}=0$ wówczas otrzymamy z (I) jeszcze dwa możliwe kształty wierzchni środkowych.

5. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$, Punkt (jako stożek urojony).

6. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, Stożek elliptyczny (fig. 187).

Z równania (II) otrzymamy znowu stosownie do znaków liczb s_1, s_2, q_3, a kształty powierzchni bezśrodkowych, jako mających środek w nieskończoności, a to:

7. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$, Paraboloida elliptyczna (fig. 188).

8. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$, Paraboloida hiperboliczna (fig. 189).

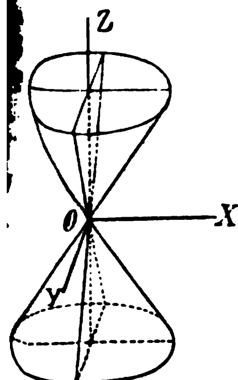


Fig. 187.

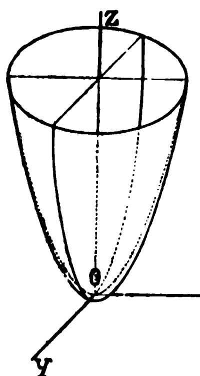


Fig. 188.

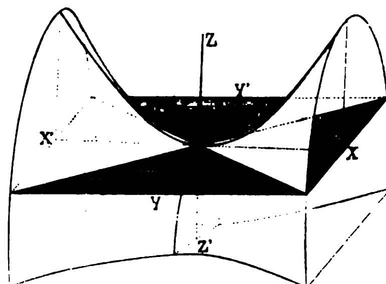


Fig. 189.

Z (III) wypadają kształty powierzchni, mających prostą środków, którą tutaj oś z-ów, a to:

9. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, Walec elliptyczny (fig. 190).

10. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$, Walec urojony.

11. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, Walec hiperboliczny (fig. 191).

12. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$, Linia prosta — oś z-ów.

13. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$, Dwie przecinające się płaszczyzny.

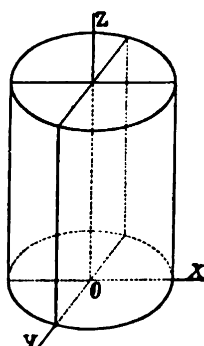


Fig. 190.

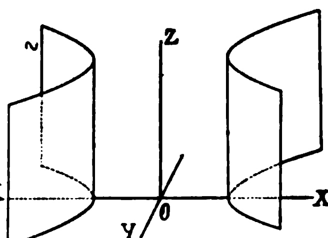


Fig. 191.

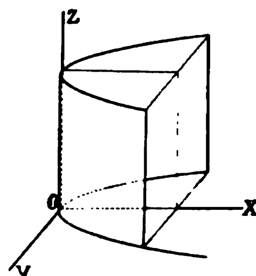


Fig. 192.

Z (IV) wypadają powierzchnie mające prostą środków w nieskończoności, jako to:

14. $x^2=2py$, Walec paraboliczny (fig. 192).

Wreszcie z (V) powierzchnie, mające płaszczyznę środków, a to:

15. $x^2=a^2$, Dwie płaszczyzny równoległe.

16. $x^2=-a^2$, Dwie urojone sprzężone płaszczyzny równoległe.

17. $x^2=0$, Płaszczyzna podwójna.

Oprócz tych kształtów nie może równanie drugiego stopnia przedstawiać żadnego innego utworu geometrycznego. Z siedemnastu kształtów uważane są jako właściwe powierzchnie rzędu drugiego tylko pięć, a to: ellipsoida, hiperboloida o jednej i dwóch powłokach, jako trzy powierzchnie środkowe drugiego rzędu; paraboloida elliptyczna i paraboloida hiperboliczna jako dwie powierzchnie beześrodkowe drugiego rzędu, resztę kształtów jako szczególne odmiany tych pięciu powierzchni.

9. Powierzchnie obrotowe rzędu drugiego. Zastanówmy się obecnie nad przypadkiem, gdy równanie trzeciego stopnia $\Delta(s)=0$ dostarcza pierwiastków równych. Przy szczegółowem roztrząsaniu tego równania zauważyliśmy, że jego pierwiastki są zawsze rzeczywiste i że mieszczą się między wielkościami: $-\infty$, a, b, c, albo między wielkościami a, b, c, ∞, według tego czy iloczyn $a_{12}a_{13}a_{23}$ jest ujemny czy dodatni, jeżeli:

$$a=a_{11}-\frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}},\quad b=a_{22}-\frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}},\quad c=a_{33}-\frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}}.$$

Jeżeliby więc dwa pierwiastki miały być równe, musiałby koniecznie ten podwójny pierwiastek zejść się z jedną z wielkości granicznych a, b, c.

Niech będzie a tą wielkością, czyli podwójnym pierwiastkiem równania $\Delta(s)=0$; istnieje tedy wspólny czynnik $(s-a)^2$, co wymaga jednakże, aby było $a=b=c$. Odwrotnie jeżeli $a=b=c$, tedy będzie miała pierwsza strona równania czynnik $(s-a)^2$, będzie więc a podwójnym pierwiastkiem równania.

Warunki konieczne, a zarazem wystarczające, aby równanie $\Delta(s)=0$ miało dwa pierwiastki równe, przedstawiają się więc w postaci równań $a=b=c$, czyli:

$$a_{11}-\frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}}=a_{22}-\frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}=a_{33}-\frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}}. \tag{21}$$

Oznaczmy przez s_1 podwójny pierwiastek równania $\Delta(s)=0$, tedy będzie:

$$s_1=a_{11}-\frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}}=a_{22}-\frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}=a_{33}-\frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}},$$

a więc: $$a_{11}-s=\frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}},\quad a_{22}-s=\frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}},\quad a_{33}-s=\frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}}.$$

Na tej podstawie otrzymamy z trzech równań:

$$(a_{11}-s)\cos\lambda+a_{12}\cos\mu+a_{13}\cos\nu=a_{12}\cos\lambda+(a_{22}-s)\cos\mu+a_{23}\cos\nu=$$
$$=a_{13}\cos\lambda+a_{23}\cos\mu+(a_{33}-s)\cos\nu=0 \tag{22}$$

określających kierunek główny λ, μ, ν, odpowiadający pewnemu pierwiastkowi s, jedno tylko równanie w postaci:

$$a_{12}a_{13}\cos\lambda+a_{12}a_{23}\cos\mu+a_{13}a_{23}\cos\nu=0, \tag{23}$$

które dowodzi, że istnieje nieskończenie wiele kierunków głównych odpowiadających pierwiastkowi podwójnemu. Są one wszystkie prostopadłe do kierunku λ_3, μ_3, ν_3, odpowiadającego trzeciemu pierwiastkowi s_3, różnemu od pierwszych dwóch $s_1=s_2$ i równoległe do płaszczyzny:

$$a_{12}a_{13}\,x+a_{12}a_{23}\,y+a_{13}\,a_{23}\,z=0. \tag{24}$$

Jeżeli tedy obierzemy dowolnie dwa kierunki λ_1, μ_1, ν_1 i λ_2, μ_2, ν_2 położone na tej płaszczyźnie, a do siebie prostopadłe i dołączymy do nich kierunek λ_3, μ_3, ν_3, tedy otrzymamy układ trzech, kierunków sprzężonych, do siebie prostopadłych. Obrawszy te kierunki za kierunki osi spółrzędnych sprowadzimy w tym razie równanie powierzchni środkowych do postaci:

$$s_1(x^2+y^2)+s_3z^2+k=0, \tag{25}$$

którą cechują widocznie przekroje kołowe prostopadłe do osi OZ. Taka powierzchnia da się utworzyć przez obrót jakiejś krzywej na około pewnej osi (OZ) i nazywa się powierzchnią obrotową. Jako powierzchnie obrotowe drugiego rzędu mające środek, występują wedle (25):

1. ellipsoida obrotowa: $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

2. hiperboloida obrotowa o jednej powłoce: $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

3. hiperboloida obrotowa o dwóch powłokach: $\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2+y^2}{a^2}=1.$

4. stożek obrotowy: $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0.$

Równania powierzchni obrotowych drugiego rzędu bez środka $s_1=s_2$, $s_3=0$ sprowadzimy do postaci:

$$s(x^2+y^2)+2qz=0$$

jeżeli środek powierzchni wypada w nieskończoności, albo do pos

$$s(x^2+y^2)+k=0,$$

jeżeli oś obrotu (OZ) jest osią środków.

W pierwszym przypadku występuje paraboloida obrotowa $\frac{x^2+y^2}{a^2}$, w drugim walec obrotowy $\frac{x^2+y^2}{a^2}=1$ jako szczególne kształty powierz obrotowych.

Pozostaje jeszcze do rozpatrzenia przypadek, jeżeli równanie trzec stopnia $\Delta(s)=0$ daje pierwiastek potrójny $s_1=s_2=s_3$. Z kształtu równ $\Delta(s)=0$, który możemy napisać w postaci:

$$(a_{11}-s)(a_{22}-s)(a_{33}-s)-a^2_{23}(a_{11}-s)-a^2_{13}(a_{22}-s)-a^2_{12}(a_{33}-s)+2a_{12}a_{13}a_{23}=$$

wynika, że przypadek: $s_1=s_2=s_3$ może nastąpić tylko wtedy, skoro będ $a_{13}=a_{12}=a_{23}=0$, a przytem: $a_{11}=a_{22}=a_{33}$; w tym przypadku stają się równania określające kierunek główny tożsamościowymi, co dowodzi, wszystkie kierunki w przestrzeni są dla takiej powierzchni kierunkami wnymi. Wyprowadziwszy tedy ze środka powierzchni, który w tym leży w skończoności z powodu, że żaden pierwiastek s nie jest równy dowolne trzy kierunki do siebie prostopadłe, jako osie spółrzędne, spr dzimy równanie ogólne powierzchni do postaci: $s_1(x^2+y^2+z^2)+k=0$, k przedstawia kulę: $x^2+y^2+z^2=r^2$, o promieniu $r=\sqrt{-\frac{k}{s_1}}$.

Ćwiczenia XLVII.

1) Okazać, że równanie powierzchni drugiego rzędu, której środek leży w poc układu nie zawiera wyrazów pierwszego stopnia.

2) Przekształcić równanie:

$$x^2+8y^2+4z^2+6xy+2yz+4zx-26x-24y-82z-26=0,$$

przyjmując środek tej powierzchni za początek układu.

Przekształcić podobnie równanie:

3) $4x^2+8y^2+9z^2+8xz+4xy+4y+8z+1=0$.

4) $4x^2-15y^2+14yz+4zx-4xy+4x-84y+24z-18=0$.

5) Wykazać, że wszelką powierzchnię środkową rzędu drugiego możemy przeds równaniem kształtu: $Ax^2+By^2+Cz^2=D$.

6) Wykazać, że w każdej powierzchni środkowej drugiego rzędu suma kwadı jakichkolwiek trzech średnic sprzężonych jest równa sumie kwadratów jej osi.

7) Wykazać, że w każdej powierzchni środkowej drugiego rzędu suma kwadı ścian bocznych równoległościanu utworzonego z trzech średnic sprzężonych powier jest równa sumie kwadratów ścian bocznych równoległościanu prostokątnego utwors z osi tej powierzchni.

8) Wykazać, że w każdej powierzchni środkowej drugiego rzędu objętość rów głościanu, utworzonego z którychkolwiek trzech średnic sprzężonych, jest równa obj równoległościanu prostokątnego utworzonego z osi tej powierzchni.

9) Okazać, że równanie: $5y^2-2x^2-z^2+4xy-6yz+8xz-1=0$ przedstawia hyperb o jednej powłoce.

10) Okazać, że równanie: $x^2-y^2+z^2-4xy+6xz-2yz-1=0$ przedstawia hyperb o dwu powłokach.

11) Okazać, że równanie: $4x^2+4y^2+12z^2-12yz+4xy+4x+2y+8z=0$ przedstawia paraboloidę elliptyczną.

12) Okazać, że równanie: $4x^2-2y^2-12z^2+12yz+4xy+4x+2y+8z=0$ przedstawia paraboloidę hyperboliczną.

13) Okazać, że równanie: $x^2+2y^2+4z^2-4yz-2xy+2x-2y-4=0$ przedstawia walec elliptyczny.

14) Okazać, że równanie: $xy+yz+zx=a^2$ możemy przez zmianę kierunków osi układu sprowadzić do postaci: $2x^2-y^2-z^2=2a^2$.

15) Okazać, że równanie: $x^2+y^2+\frac{1}{2}yz+zx=a^2$ możemy przez zmianę kierunków osi układu sprowadzić do postaci: $x^2+\frac{3}{4}y^2-\frac{1}{4}z^2=a^2$.

16) Okazać, że równanie: $x^2+y^2+z^2+k(xy+yz+zx)=1$ przedstawia powierzchnię obrotową drugiego rzędu, której osią obrotu jest prosta o równaniach: $x=y=z$.

17) Okazać, że równanie: $x^2-2y^2+2z^2+3xz-xy-2x+7y-5z=3$ przedstawia dwie przecinające się płaszczyzny, których krawędź przecięcia ma równanie:

$$x=-4y+7=-\frac{4}{3}z+\frac{5}{3}.$$

18) Zbadać powierzchnię określoną równaniem: $x^2+y^2+z^2+2xy+4xz+2yz=1$ i wyznaczyć kierunki i długość jej osi.

19) Okazać, że równanie: $x^2+y^2+2(xy+yz+zx)=a^2$ przedstawia walec hyperboliczny.

20) Okazać, że równanie: $x^2+y^2+3z^2+3yz+zx+xy-7x-14y-25z+a=0$ przedstawia ellipsoidę, punkt lub ellipsoidę urojoną stosownie do tego czy $a \lesseqgtr 15$.

21) Okazać, że równanie: $(cy-bz)^2+(az-cx)^2+(bx-ay)^2=1$ przedstawia prosty walec kołowy, którego oś ma równania: $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

22) Okazać, że równanie odniesione do układu ukośnokątnego α, β, γ, a przedstawiające się w postaci: $ax^2+by^2+cz^2=1$ przedstawia powierzchnię obrotową, skoro:

$$\frac{a\cos\alpha}{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}=\frac{b\cos\beta}{\cos\beta-\cos\alpha\cos\gamma}=\frac{c\cos\gamma}{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}.$$

Zbadać następujące powierzchnie i sprowadzić ich równania do najprostszej postaci:

23) $x^2+2y^2+2z^2+2xy-2x-4y-4z+2=0$, 24) $2xy-zx+yz-2x+2y-3z-2=0$, 25) $x^2-yz+a^2=0$. 26) $7x^2+6y^2+5z^2-4yz-4xy=6$. 27) $11x^2+10y^2+6z^2-12xy-8yz+4xz=12$. 29) $7x^2-13y^2+6z^2+24xy+12yz-12xz=84$.

30) Okazać, że równanie: $4x^2+y^2-4xy+6x+8z=0$ przedstawia walec paraboliczny.

31) Okazać, że równanie: $z=ax^2+by^2+2cxy+2dx+2ey+f$ przedstawia paraboloidę elliptyczną, gdy: $c^2-ab<0$, paraboloidę hyperboliczną, gdy: $c^2-ab>0$, a walec paraboliczny, gdy: $c^2-ab=0$.

32) Okazać, że powierzchnia: $x^2-y^2-z^2+2yz+x+y-z-5=0$ ma nieskończenie wiele środków położonych na prostej określonej równaniami: $2x+1=0$, $2y-2z-1=0$.

33) Okazać, że równanie: $a(y-z)^2+b(z-x)^2+c(x-y)^2=d^2$ przedstawia walec drugiego rzędu, i to hyperboliczny, gdy $bc+ca+ab<0$, zaś elliptyczny, gdy $bc+ca+ab>0$.

34) Okazać, że równanie: $a_{11}x^2+4y^2+9z^2+12yz+5xz+4xy+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$ przedstawia paraboloidę elliptyczną albo walec paraboliczny albo paraboloidę hyperboliczną stosownie do tego, czy $a_{11}>1$, czy $a=1$, czy też: $a_{11}<1$.

35) Okazać, że równanie: $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{13}xz+2_{12}xy=0$ przedstawia stożek obrotowy, którego kąt u wierzchołka równy θ, skoro:

$$\frac{a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13}}{a_{23}}=\frac{a_{22}a_{13}-a_{12}a_{23}}{a_{13}}=\frac{a_{33}a_{12}-a_{23}a_{13}}{a_{12}}=(a_{11}+a_{22}+a_{33})\frac{1+\cos\theta}{1+3\cos\theta}.$$

36) Wyznaczyć miejsce geometryczne punktów równooddalonych od każdego punktu koła określonego równaniami: $x^2+y^2+z^2=a^2$, $Ax+By+Cz=D$.

37) Okazać, że równanie: $xy+xz+yz-2x+6y-8z=d$ przedstawia hyperboloidę obrotową o dwu powłokach, skoro $d>48$, stożek obrotowy, gdy $d=48$, a hyperboloidę o jednej powłoce, gdy $d<48$.

38) Wyznaczyć położenie przekrojów kołowych hyperboloidy o dwu powłokach i wykazać, że te same płaszczyzny przecinają podług kół jej stożek asymptotyczny.

39) Jeżeli: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ są spółrzędnemi wierzchołków trzech średnic sprzężonych ellipsoidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ wykazać, że:

$$x^2_1+x^2_2+x^2_3=a^2,\quad y^2_1+y^2_2+y^2_3=b^2,\quad z^2_1+z^2_2+z^2_3=c^2,$$
$$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=0,\quad x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3=0,\quad y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3=0.$$

40) Wyprowadzić warunki konieczne, pod którymi równanie:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz=0$$

przedstawia dwie płaszczyzny.

41) Dowieść, że dwie powierzchnie drugiego rzędu przechodzące przez pewną krzywą płaską przecinają się jeszcze podług drugiej krzywej płaskiej.

42) Wykazać, że przez pięć prostych wychodzących z jednego punktu przestrzeni da się przeprowadzić tylko jeden stożek drugiego rzędu.

43) Wykazać, że suma kwadratów odległości środka powierzchni: $Ax^2+By^2+Cz^2=1$ od trzech płaszczyzn stycznych do powierzchni, a do siebie prostopadłych, jest wielkością stałą równą: $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}$.

44) Wykazać, że miejscem geometrycznem punktów, z których można poprowadzić płaszczyzny styczne do powierzchni: $Ax^2+By^2+Cz^2=1$, a do siebie prostopadłe, jest kula o promieniu: $r=\sqrt{\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}}$.

45) Wykazać, że suma kwadratów odwrotnych długości średnic powierzchni: $Ax^2+By^2+Cz^2=1$ do siebie prostopadłych jest stałą równą: $A+B+C$.

Rozwiązania XLVII.

2) $x^2+3y^2+4z^2+6xy+2yz+4xz=111$. 3) $4x^2+3y^2+9z^2+8xz+4xy=5$. 4) $4x^2-15y^2+14yz+4xz-4xy=6$. 13) Hyperboloida o jednej powłoce o osiach: $\sqrt{6}-\sqrt{2}$, $\sqrt{6}+\sqrt{2}$, 1, przy dostawach kierunkowych: $(1, \sqrt{3}-2, 1)$, $(1, -\sqrt{3}-2, 1)$, $(1, 0, -1)$. 23) Ellipsoida: $4x^2+(3+\sqrt{5})y^2+(3-\sqrt{5})z^2=4$. 24) Hyperboloida o jednej powłoce: $2x^2+(\sqrt{3}-1)y^2-(1+\sqrt{3})z^2=2$. 25) Hyperboloida o dwu powłokach: $z^2-y^2-2x^2=2a^2$. 16) $x^2+2y^2+3z^2=2$. 27) $x^2+2y^2+6z^2=4$. 28) $x^2+2y^2-3z^2=12$. 36) Linia prosta: $\frac{x}{A}=\frac{y}{B}=\frac{z}{C}$. 40) $a^2_{13}-a_{11}a_{33}>0$, $(a^2_{12}-a_{11}a_{33})(a^2_{23}-a_{22}a_{33})=(a_{23}a_{13}-a_{33}a_{12})^2$.

Literatura. C. Briot et I. C. Bouquet: Leçons de géométrie analitique. Dixseptième édition revue par M. Appell. Paris 1900. Dr. Otto Hesse: Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung. Leipzig 1861. B. Niewęgłowski: Cours de géométrie analytique. Tom III. Géometrie dans l'espace. Paris 1896.

Tematy do rozpraw naukowych.

1. Sposoby upraszczania równań powierzchni drugiego rzędu.
2. Powierzchnie obrotowe drugiego rzędu.
3. Teorya stożków stycznych do powierzchni drugiego rzędu.

Wykład XLVIII.

Szczególne własności powierzchni środkowych rzędu drugiego.

1. Ellipsoida. Równanie powierzchni środkowej drugiego rzędu można, k wiemy, sprowadzić zawsze do postaci:

$$s_1 x^2 + s_2 y^2 + s_3 z^2 = H, \qquad (1)$$

eli obierzemy środek powierzchni za punkt początkowy układu, a trzy ie główne, w ogólności trzy średnice sprzężone, powierzchni za osie układu. eli spółczynniki s_1, s_2, s_3, H, są dodatnie i różne od zera, wówczas mo- my równanie (1) napisać w postaci:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (2)$$

dzie wielkości: $a = \sqrt{\frac{H}{s_1}}$, $b = \sqrt{\frac{H}{s_2}}$, $c = \sqrt{\frac{H}{s_3}}$ są rzeczywiste i oznaczają po- wki trzech osi powierzchni, zwanej ellipsoidą.

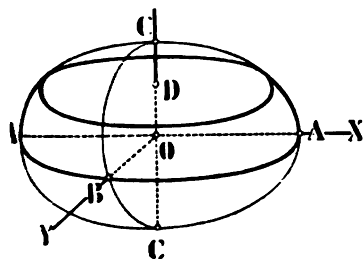


Fig. 193.

Jeżeli po obu stronach punktu początkowego, który jest środkiem ellipsoidy, odetniemy długości równe wielkościom a, b, c otrzymamy sześć punktów A i A', B i B', C i C', które się nazywają wierzchołkami ellipsoidy. Jeżeli $a > b > c$, wtedy jest $2a = AA'$ osią wielką, $2b = BB'$ osią średnią, $2c = CC'$ osią małą ellipsoidy.

Przekroje ellipsoidy płaszczyznami spółrzędnymi, które są płaszczyznami głównymi powierzchni, wyznaczone są równaniami:

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x = 0, \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

zedstawiającymi ellipsy, z których każda przechodzi przez cztery wierz- ołki ellipsoidy.

Płaszczyzna równoległa do płaszczyzny xy, przecina ellipsoidę w ellipsie, reślonej równaniami: $z = h$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}$.

Półosie tej ellipsy są tu: $a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$ i $b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$.

Ellipsa jest rzeczywista, skoro $h < c$ i maleje, sprowadzając się dla c do punktu, jako ellipsy, której osie są zerami. Dla $h > c$ staje się ellipsa

urojoną. Przekroje płaszczyznami równoległymi do płaszczyzn głównych są więc ellipsami i to rzeczywistemi, skoro płaszczyzna przekroju znajduje się między środkiem i wierzchołkami powierzchni.

2. Przekroje płaskie ellipsoidy. Niech będzie $z=mx+ny+p$ dowolną płaszczyzną. Wyrugowawszy zmienną z z równania tej płaszczyzny i równania ellipsoidy, otrzymamy równanie:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{(mx+ny+p)^2}{c^2}=1,$$

które przedstawia rzut krzywej przecięcia się tejże płaszczyzny z ellipsoidą na płaszczyznę XOY.

Rzut ten jest ellipsą, gdyż w równaniu jego podanem w postaci:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0, \text{ mamy:}$$

$$a_{11}a_{22}-a^2_{12}=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{c^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}\right)-\frac{m^2n^2}{c^4}=\frac{1}{a^2b^2}+\frac{m^2}{b^2c^2}+\frac{n^2}{a^2c^2}>0,$$

dla wszelkich wartości spółczynników m, n, p.

Wszelka płaszczyzna przecina więc ellipsoidę w ellipsie. Przekroje płaszczyznami równoległymi są widocznie ellipsami podobnymi, gdyż spółczynnik p, cechujący położenie płaszczyzny nie wpływa na wyrazy drugiego stopnia w równaniu przekroju. Chcąc więc zbadać kształt dowolnego przekroju płaskiego ellipsoidy dość jest zbadać przekrój ellipsoidy płaszczyzną środkową do danej płaszczyzny równoległą.

3. Przekroje kołowe ellipsoidy. Wyobraźmy sobie pewną płaszczyznę przechodzącą przez środek ellipsoidy, którąby przecięła ellipsoidę w kole o promieniu r. Koło to musiałoby leżeć na kuli z ellipsoidą współśrodkowej określonej równaniem:

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}=1.$$

Odjąwszy od równania ellipsoidy równanie kuli, otrzymamy równanie jednorodne:

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{r^2}\right)=0,$$

przedstawiające stożek, który ma wierzchołek w środku ellipsoidy i przechodzi przez przekrój kuli z ellipsoidą. Ażeby więc obie powierzchnie miały wspólny przekrój kołowy, musi stożek przejść w dwie płaszczyzny przez środek przechodzące, co się stanie, skoro w ostatniem równaniu jedno z wyrażeń stanie się zerem. Położywszy kolejno $r=a$, $r=b$, $r=c$, otrzymamy równania płaszczyzn kołowych:

$$y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)=0, \qquad x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)=0,$$

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)=0,$$

Jeżeli $a>b>c$, natenczas przedstawia pierwsze i trzecie równanie płaszczyzny urojone, drugie zaś równanie sprowadza się do postaci:

$$\frac{x^2(a^2-b^2)}{a^2}=\frac{z^2(b^2-c^2)}{c^2}, \quad \text{czyli: } \frac{z}{c}=\pm\frac{x}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}$$

i przedstawia dwie płaszczyzny rzeczywiste, przechodzące przez oś średnią ellipsoidy. Oznaczywszy przez θ kąt nachylenia tych płaszczyzn do płaszczyzny XOY, otrzymamy równanie:

$$\operatorname{tang} \theta = \pm \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}. \tag{3}$$

W ellipsoidzie istnieją zatem dwa szeregi przekrojów kołowych; oba są równoległe do średniej osi powierzchni. Wykreśliwszy w ellipsie (a, c) (fig. 194), położonej na płaszczyźnie XOZ średnice równe $2b$, otrzymamy dwie proste: $B_1B'_1$ i $B_2B'_2$, jako ślady środkowych płaszczyzn kołowych, do których dwa szeregi płaszczyzn są równoległe.

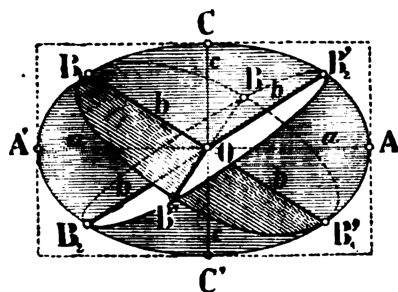


Fig. 194.

Z dyskusyi powyższej okazuje się, że płaszczyzna może ellipsoidę trójosiową przeciąć tylko w ellipsie, a dwa szeregi płaszczyzn przecinają ją w kołach. Jako odmiany ellipsoidy trójosiowej występują: ellipsoida obrotowa $(a=b)$, kula $(a=b=c)$, walec elliptyczny $(a=\infty)$, dwie płaszczyzny równoległe $(a=\infty,\ b=\infty)$ i punkt $(a=b=c=0)$.

4. **Średnice i płaszczyzny środkowe ellipsoidy.** Niech będzie x, y, z dowolnym punktem ellipsoidy, $2d$ zaś długością średnicy przez ten punkt przechodzącej. Oznaczmy przez λ, μ, ν kąty, jakie ta średnica tworzy z osiami ellipsoidy, wtedy otrzymamy:

$$x=d\cos\lambda,\quad y=d\cos\mu,\quad z=d\cos\nu.$$

Podstawiając te wartości w równanie ellipsoidy, dojdziemy do równania:

$$\frac{1}{d^2}=\frac{\cos^2\lambda}{a^2}+\frac{\cos^2\mu}{b^2}+\frac{\cos^2\nu}{c^2}.$$

Przyjmijmy, żeśmy przez środek poprowadzili trzy średnice: $2d_1$, $2d_2$ $2d_3$ do siebie prostopadłe, wtedy otrzymamy trzy równania:

$$\frac{1}{d^2_1}=\frac{\cos^2\lambda_1}{a^2}+\frac{\cos^2\mu_1}{b^2}+\frac{\cos^2\nu_1}{c^2},\qquad \frac{1}{d^2_2}=\frac{\cos^2\lambda_2}{a^2}+\frac{\cos^2\mu_2}{b^2}+\frac{\cos^2\nu_2}{c^2},$$

$$\frac{1}{d^2_3}=\frac{\cos^2\lambda_3}{a^2}+\frac{\cos^2\mu_3}{b^2}+\frac{\cos^2\nu_3}{c^2},$$

które do siebie dodane dają równość tożsamościową:

$$\frac{1}{d^2_1}+\frac{1}{d^2_2}+\frac{1}{d^2_3}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}, \tag{4}$$

t. zn. *Suma odwrotnych wartości z kwadratów średnic prostokątnych w ellipsoidzie jest ilością stałą.*

5. Niech będą znowu λ, μ, ν kątami, jakie pewna średnica tworzy z osiami ellipsoidy. Płaszczyzna środkowa sprzężona z tą średnicą będzie określona równaniem:

$$\frac{x\cos\lambda}{a^2}+\frac{y\cos\mu}{b^2}+\frac{z\cos\nu}{c^2}=0. \tag{5}$$

Oznaczmy przez x', y', z' punkt, w którym ta średnica spotyka ellipsoidę, wtedy otrzymamy: $\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}=0.$

Zważywszy, że równanie płaszczyzny stycznej w punkcie x', y', z' ellipsoidy ma kształt: $\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}=1$, widzimy, że:

płaszczyzna środkowa sprzężona z średnicą przechodzącą przez punkt x', y', z' ellipsoidy jest równoległą do płaszczyzny stycznej w tym punkcie.

6. Układy średnic sprzężonych. Trzy średnice tworzą układ średnic sprzężonych, skoro każda z nich jest sprzężoną z płaszczyzną dwóch innych.

Przyjmijmy dowolnie pierwszą średnicę OD (fig. 195), to płaszczyzna środkowa z nią sprzężona przetnie ellipsoidę w ellipsie; przyjmijmy dowolne dwie średnice sprzężone OE i OF w tej ellipsie, wtedy utworzą trzy średnice OD, OE i OF układ średnic sprzężonych. Przyjąwszy trzy proste OD, OE i OF jako osie układu i oznaczywszy przez a', b', c' długości OD, OE i OF, otrzymamy równanie ellipsoidy w postaci:

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1.$$

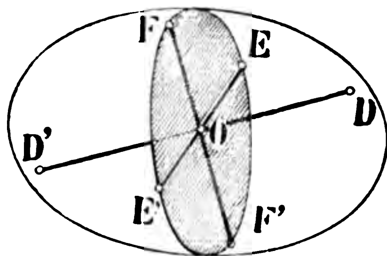


Fig. 195.

Z równania tego widzimy, jak się zmieniają przekroje równoległe. Jeżeli przetniemy powierzchnię płaszczyzną równoległą do płaszczyzny środkowej $Y'OZ'$, otrzymamy ellipsę: $\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1-\frac{x^2}{a'^2}$, jednokładną (homotetyczną) z ellipsą EOF. Ellipsa ta zmniejsza się w miarę jak płaszczyzna sieczna oddala się od płaszczyzny środkowej i sprowadza się w końcu do punktu, gdy płaszczyzna przejdzie przez punkt P, a więc będzie styczną do powierzchni. Po za tym punktem przesunięta płaszczyzna nie przecina już powierzchni, albo innemi słowy przecina ją w ellipsie urojonej, której środek leży na prostej OD.

7. Niech będą teraz a', b', c' połówkami trzech średnic sprzężonych ellipsoidy (a, b, c), a (x', y', z'), (x'', y'', z''), $(x''' y''', z''')$ punktami, w których one ellipsoidę przecinają. Ażeby dane średnice były sprzężone, musi płaszczyzna środkowa sprzężona z jedną średnicą przechodzić przez dwie inne. Muszą się przeto spełnić następujące relacye:

$$\frac{x'x''}{a^2}+\frac{y'y''}{b^2}+\frac{z'z''}{c^2}=0,\quad \frac{x''x'''}{a^2}+\frac{y''y'''}{b^2}+\frac{z''z'''}{c^2}=0,\quad \frac{x'x'''}{a^2}+\frac{y'y'''}{b^2}+\frac{z'z'''}{c^2}=0. \quad (6)$$

Połóżmy: $x'=a.\cos\lambda'$, $y'=b.\cos\mu'$, $z'=c.\cos\nu'$, podobnie:

$x''=a\cos\lambda''$, $y''=b.\cos\mu''$, $z''=c.\cos\nu''$, $x'''=a\cos\lambda'''$, $y'''=b.\cos\mu'''$, $z'''=c.\cos\nu'''$, wtedy będą λ, μ, ν wielkościami zmieniającemi się wraz z położeniem punktu na ellipsoidzie. Zważywszy, że dla punktu x', y', z' ellipsoidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ sprawdza się równanie: $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1$, przeto będzie: $\cos^2\lambda'+\cos^2\mu'+\cos^2\nu'=1$, co dowodzi, że parametry λ', μ', ν' wyznaczają kąty nachylenia pewnej prostej, wychodzącej z punktu początkowego, z osiami powierzchni. Prosta ta nie przechodzi w ogólności przez punkt x', y', z' ellipsoidy, da się jednakże dla wszelkiego punktu x', y', z' jednoznacznie wyznaczyć. Kąty takie λ', μ', ν' nazywają się częstokroć spółrzędnymi kątowymi punktu

x', y', z'. Spółrzędne kątowe (λ', μ', ν'), $(\lambda'', \mu'', \nu'')$, $(\lambda''', \mu''', \nu''')$, odpowiadające punktom (x', y', z'), (x'', y'', z''), (x''', y''', z''') dogadzają tedy relacyom:

$$\left.\begin{array}{c}\cos^2\lambda'+\cos^2\mu'+\cos^2\nu'=1, \quad \cos^2\lambda''+\cos^2\mu''+\cos^2\nu''=1, \\ \cos^2\lambda'''+\cos^2\mu'''+\cos^2\nu'''=1,\end{array}\right\} \quad (7)$$

nadto z powodu, że punkta (x', y', z'), (x'', y'', z''), (x''', y''', z''') są końcami średnic sprzężonych wedle wzorów (6) czynią zadość także relacyom:

$$\left.\begin{array}{c}\cos\lambda'\cos\lambda''+\cos\mu'\cos\mu''+\cos\nu'\cos\nu''=0, \\ \cos\lambda''\cos\lambda'''+\cos\mu''\cos\mu'''+\cos\nu''\cos\nu'''=0, \\ \cos\lambda'''\cos\lambda'+\cos\mu'''\cos\mu'+\cos\nu'''\cos\nu'=0,\end{array}\right\} \quad (8)$$

które dowodzą, że proste (λ', μ', ν'), $(\lambda'', \mu'', \nu'')$, $(\lambda''', \mu''', \nu''')$, odpowiadające końcowym punktom (x', y', z'), (x'', y'', z''), (x''', y''', z''') trzech średnic sprzężonych w ellipsoidzie są do siebie prostopadłe. Będzie więc także:

$$\left.\begin{array}{c}\cos^2\lambda'+\cos^2\lambda''+\cos^2\lambda'''=1, \quad \cos^2\mu'+\cos^2\mu''+\cos^2\mu'''=1, \\ \cos^2\nu'+\cos^2\nu''+\cos^2\nu'''=1.\end{array}\right\} \quad (9)$$

Długość średnicy przechodzącej przez punkt (x', y', z') ellipsoidy (a, b, c) określona będzie wzorem: $a'^2=x'^2+y'^2+z'^2=a^2\cos^2\lambda'+b^2\cos^2\mu'+c^2\cos^2\nu'$.

Na tej podstawie otrzymamy dla trzech średnic sprzężonych (a', b', c') równości:

$$a'^2=a^2\cos^2\lambda'+b^2\cos^2\mu'+c^2\cos^2\nu', \quad b'^2=a^2\cos^2\lambda''+b^2\cos^2\mu''+c^2\cos^2\nu'',$$
$$c'^2=a^2\cos^2\lambda'''+b^2\cos^2\mu'''+c^2\cos^2\nu''',$$

które do siebie dodane dają ze względu na równości (9) wzór:

$$a'^2+b'^2+c'^2=a^2+b^2+c^2, \quad (10)$$

wypowiadający twierdzenie: *Suma kwadratów trzech średnic sprzężonych jest stałą i równą sumie kwadratów osi.*

Podobnie możemy dowieść następującego twierdzenia: *Objętość równoległościanu, wykreślonego nad trzema średnicami sprzężonymi jest stałą i równą objętości równoległościanu, wykreślonego nad osiami.*

Objętość równoległościanu, wykreślonego nad połówkami średnic sprzężonych, przechodzących przez punkta (x', y', z'), (x'', y'', z''), (x''', y''', z''') ellipsoidy, będzie bowiem określoną wzorem:

$$V=\begin{vmatrix} x', & y', & z' \\ x'', & y'', & z'' \\ x''', & y''', & z''' \end{vmatrix}, \quad (11)$$

skąd, wprowadzając spółrzędne kątowe $(\lambda', \mu' \nu')$, $(\lambda'', \mu'', \nu'')$, $(\lambda''', \mu''', \nu''')$, otrzymujemy wzór:

$$V=abc\begin{vmatrix} \cos\lambda', & \cos\mu', & \cos\nu' \\ \cos\lambda'', & \cos\mu'', & \cos\nu'' \\ \cos\lambda''', & \cos\mu''', & \cos\nu''' \end{vmatrix}.$$

Wyznacznik ten jest jednakże z powodu relacyi (7) i (8) równy 1, przeto jest:

$$V=abc. \quad (11')$$

8. Układ równych średnic sprzężonych. Zbadajmy, czy istnieją w ellipsoidzie równe średnice sprzężone. Ażeby istniał w ellipsoidzie układ równych średnic sprzężonych, musiałyby się sprawdzić następujące relacye:

$$\cos^2\lambda'+\cos^2\mu'+\cos^2\nu'=1, \quad \cos^2\lambda''+\cos^2\mu''+\cos^2\nu''=1,$$
$$\cos^2\lambda'''+\cos^2\mu'''+\cos^2\nu'''=1, \quad \cos\lambda'\cos\lambda''+\cos\mu'\cos\mu''+\cos\nu'\cos\nu''=0,$$
$$\cos\lambda''\cos\lambda'''+\cos\mu''\cos\mu'''+\cos\nu''\cos\nu'''=0,$$
$$\cos\lambda'''\cos\lambda'+\cos\mu'''\cos\mu'+\cos\nu'''\cos\nu'=0,$$

$$a^2\cos^2\lambda'+b^2\cos^2\mu'+c^2\cos^2\nu'=a^2\cos^2\lambda''+b^2\cos^2\mu''+c^2\cos^2\nu''=$$
$$=a^2\cos^2\lambda'''+b^2\cos^2\mu'''+c^2\cos^2\nu'''.$$

Mamy tedy ośm równań na wyznaczenie dziewięciu niewiadomych. Istnieje zatem nieskończenie wiele układów równych średnic sprzężonych.

Niech będzie a' długością jednej z nich, wtedy będzie:

$$3a'^2=a^2+b^2+c^2,\text{ czyli: } a'^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}. \tag{12}$$

Końce równych średnic sprzężonych w ellipsoidzie znajdują się przeto na przecięciu się tej ellipsoidy z kulą: $x^2+y^2+z^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$.

9. Hiperboloida o jednej powłoce. Równanie: $s_1x^2+s_2y^2+s_3z^2=H$ określa powierzchnię, zwaną hiperboloidą o jednej powłoce, jeżeli jeden ze spółczynników s jest ujemny, a stała ilość H jest dodatnią. W tym razie możemy, jeżeli s_3 ma znak ujemny, przedstawić powyższe równanie w postaci:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\text{ gdzie: } a=\sqrt{\frac{H}{s_1}},\ b=\sqrt{\frac{H}{s_2}},\ c=\sqrt{\frac{H}{-s_3}}.$$

Ilości $2a$, $2b$, będą tedy długościami osi rzeczywistych, $2c$ długością osi urojonej. Przekroje główne powierzchni (fig. 196) są tu określone równaniami:

$$z=0,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad y=0,\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;\quad x=0,\ \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

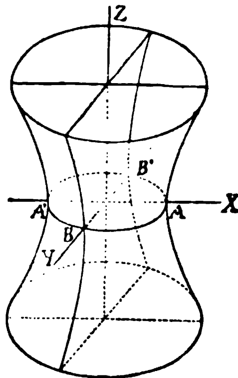


Fig. 196.

przekrój płaszczyzną XOY jest tu ellipsą, dwa inne przekroje główne hiperbolami o osi rzeczywistej $2a=AA'$, względnie $2b=BB'$. Przekrój powierzchni płaszczyzną równoległą do XOY będzie określony równaniem:

$$z=\zeta,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{\zeta^2}{c^2},$$

będzie zatem zawsze ellipsą, jakąkolwiek wartość nadamy ilości ζ. Ellipsa ta powiększa się w miarę oddalania się płaszczyzny siecznej od punktu początkowego. Płaszczyzna $y=\eta$ równoległa do XOZ przecina powierzchnię wzdłuż krzywej: $y=\eta,\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{\eta^2}{b^2}$, która będzie hiperbolą o osi poprzecznej równoległej do osi OX, skoro $\eta>b$, układem dwóch prostych, skoro $\eta=b$, a hiperbolą o osi poprzecznej równoległej do osi OZ, skoro $\eta<b$. Podobnie poznajemy, że płaszczyzna $x=\xi$, równoległa do YOZ przecina powierzchnię dla $\xi<a$ w hiperboli o osi poprzecznej równoległej do OY, dla $\xi=a$ podług dwóch prostych, dla $\xi<a$ w hiperboli o osi poprzecznej równoległej do OZ.

10. Przekroje płaskie hiperboloidy o jednej powłoce. Weźmy teraz pod uwagę przekrój hiperboloidy dowolną płaszczyzną: $z=mx+ny+p$.

Rzut tego przekroju na płaszczyznę XOY będzie określony równaniem:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{(mx+ny+p)^2}{c^2}+1, \tag{13}$$

które przedstawia krzywą drugiego rzędu.

Mamy tu na wyznaczenie rodzaju krzywej:

$$a_{11}=\frac{1}{a^2}-\frac{m^2}{c^2},\quad a_{22}=\frac{1}{b^2}-\frac{n^2}{c^2},\quad a_{12}=\frac{mn}{c^2},\ \text{przeto:}$$

$$a_{11}a_{22}-a^2_{12}=\left(\frac{1}{a^2}-\frac{m^2}{c^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{n^2}{c^2}\right)-\frac{m^2n^2}{c^4}=\frac{1}{a^2b^2}-\frac{m^2}{b^2c^2}-\frac{n^2}{a^2c^2}=$$

$$=-a^2b^2c^2(a^2m^2+b^2n^2-c^2).$$

Krzywa przekroju będzie tedy ellipsą, skoro $a^2m^2+b^2n^2<c^2$, hiperbolą skoro $a^2m^2+b^2n^2>c^2$, parabolą zaś skoro $a^2m^2+b^2n^2=c^2$. Warunkowi ostatniemu stanie się zadość, skoro będzie $m=\frac{c}{a}\cos\varphi$, $n=\frac{c}{b}\sin\varphi$, gdzie φ jest dowolnym parametrem. Równanie płaszczyzny, przecinającej hiperboloidę o jednej powłoce w paraboli, ma tedy kształt:

$$\frac{z}{c}=\frac{x}{a}\cos\varphi+\frac{y}{b}\sin\varphi+p. \tag{14}$$

11. Przekroje kołowe hiperboloidy o jednej powłoce. Z równania hiperboloidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ i równania kuli współśrodkowej $\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}=1$, otrzymujemy po odjęciu równanie:

$$\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)x^2+\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}\right)y^2-\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{r^2}\right)z^2=0, \tag{15}$$

które przedstawia stożek przechodzący przez przekrój tych powierzchni. Stożek ten sprowadza się do dwóch płaszczyzn, skoro przyjmiemy: $r^2=a^2$, $r^2=b^2$, $r^2=c^2$. Pod założeniem $a^2>b^2>-c^2$ będą te płaszczyzny rzeczywiste tylko dla $r^2=a^2$, ich równanie będzie tedy:

$$y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)-z^2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)=0,\ \text{czyli:}\ \frac{y}{b}\sqrt{a^2-b^2}=\pm\frac{z}{c}\sqrt{a^2+c^2} \tag{16}$$

i przedstawia dwie płaszczyzny, przechodzące przez oś x-ów.

Hiperboloida o dwóch powłokach ma więc dwa układy przekrojów kołowych, które są równoległe do jej większej osi rzeczywistej.

12. Stożek asymptotyczny hiperboloidy o jednej powłoce. Z równania hiperboloidy o jednej powłoce:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

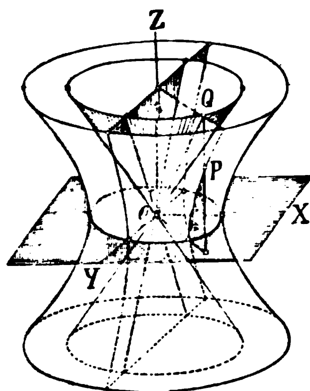


Fig. 197.

otrzymamy, opuszczając wyraz wolny, równanie: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, które przedstawia stożek, otaczający oś urojoną danej hiperboloidy. Stożek ten zbliża się coraz bardziej do hiperboloidy, im bardziej oddalamy się od środka w kierunku osi OZ. Skoro bowiem obierzemy na prostej równoległej do osi OZ dwa punkta, jeden $P(x,y,z)$ na hiperboloidzie, drugi $Q(x,y,\zeta)$ na stożku (fig. 197), wtedy będzie:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{\zeta^2}{c^2}=0,$$

skąd przez odejmowanie otrzymamy: $\frac{\zeta^2-z^2}{c^2}=1$, czyli: $\zeta-z=\frac{c^2}{\zeta+z}$. (17)

Skoro tedy z rośnie nieograniczenie, wówczas różnica $\zeta - z$ maleje i staje się równą zeru dla $z = \infty$. Stożek zbliża się więc nieograniczenie do hiperboloidy dotykając się jej w nieskończoności. Stożek ten jest więc **stożkiem asymptotycznym** hiperboloidy o jednej powłoce. Przekroje hiperboloidy i jej stożka asymptotycznego są krzywe podobne i współśrodkowe, gdyż współczynniki ilości zmiennych są takie same w równaniu hiperboloidy, jak w równaniu jej stożka asymptotycznego. Płaszczyzna przecinająca wszystkie tworzące stożka asymptotycznego, przecina więc hiperboloidę w ellipsie, płaszczyzna równoległa do dwóch tworzących stożka w hiperboli, a płaszczyzna równoległa do jednej tylko tworzącej stożka w paraboli.

Z równania hiperboloidy o jednej powłoce wynika, że szczególnymi odmianami hiperboloidy o jednej powłoce są: hiperboloida obrotowa o jednej powłoce, stożek, walec elliptyczny i hiperboliczny, dwie płaszczyzny przecinające się i dwie płaszczyzny równoległe.

13. Linie proste na hiperboloidzie o jednej powłoce. Na hiperboloidzie o jednej powłoce istnieją dwa szeregi linij prostych, które nazywamy prostymi tworzącymi hiperboloidy. Zajmijmy się tedy bliżej ich wyznaczaniem. Prosta określona równaniami: $x = mz + p, \quad y = nz + q,$ będzie leżała na hiperboloidzie o jednej powłoce: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, skoro dla dowolnego z sprawdzi się równanie:

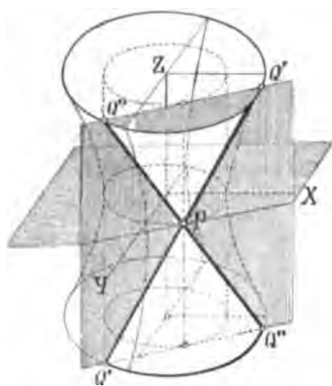


Fig. 198.

$$\frac{(mz+p)^2}{a^2} + \frac{(nz+q)^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Stanie się to oczywiście, skoro parametry m, p, n, q będą dogadzać relacyom:

$$\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0, \quad \frac{mp}{a^2} + \frac{nq}{b^2} = 0, \quad \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Z relacyi: $\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} - 1 = 0$ czytamy, że prosta położona na hiperboloidzie ma swój ślad z płaszczyzną XOY na ellipsie szyjnej: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, druga relacya: $\frac{mp}{a^2} + \frac{nq}{b^2} = 0$ daje równości:

$$\frac{\frac{m}{a}}{\frac{a}{p}} = -\frac{\frac{n}{b}}{\frac{b}{q}} = \frac{\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}}{\sqrt{\frac{a^2}{p^2} + \frac{b^2}{q^2}}} = \frac{\frac{1}{c}}{\frac{\sqrt{a^2q^2 + b^2p^2}}{pq}} = \frac{pq}{cab\sqrt{\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}}} = \pm \frac{pq}{abc},$$

z których otrzymujemy: $m = \pm \frac{aq}{bc}, \quad n = \mp \frac{bp}{ac}$.

Z każdego punktu (p, q) ellipsy szyjnej (fig. 198) wychodzą więc dwie proste tworzące hiperboloidy, określone równaniami:

$$x = \frac{aq}{bc} z + p, \quad y = -\frac{bp}{ac} z + q; \quad x = -\frac{aq}{bc} z + p, \quad y = \frac{bp}{ac} z + q. \tag{18}$$

Wprowadzając kąt pomocniczy φ, możemy spółrzędne dowolnego punktu ellipsy szyjnej określić równaniami: $p = a.\cos\varphi$, $q = b.\sin\varphi$, równania prostych tworzących otrzymują tedy kształt:

1. $\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\sin\varphi + \cos\varphi, \qquad \frac{y}{b} = -\frac{z}{c}\cos\varphi + \sin\varphi,$

2. $\frac{x}{a} = -\frac{z}{c}\sin\varphi + \cos\varphi, \quad \frac{y}{b} = \frac{z}{c}\cos\varphi + \sin\varphi.$

14. W innej formie otrzymamy równania prostych tworzących wprost z równania hiperboloidy: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Mamy bowiem stąd:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}, \text{ czyli: } \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right).$$

Równaniu temu stanie się zadość, skoro położymy:

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \lambda\left(1 + \frac{y}{b}\right), \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{y}{b}\right), \tag{19}$$

albo:

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \mu\left(1 - \frac{y}{b}\right), \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{y}{b}\right), \tag{20}$$

gdzie λ i μ są dwa dowolne parametry. Otrzymane dwie pary równań przedstawiają tedy dwa układy (λ i μ) prostych położonych na danej hiperboloidzie (fig. 199). Przez każdy punkt hiperboloidy o jednej powłoce przechodzi jedna prosta z każdego z obu układów i to tylko jedna. Skoro bowiem x_1, y_1, z_1 jest pewnym punktem hiperboloidy, wtedy otrzymamy na wyznaczenie parametrów λ i μ równania:

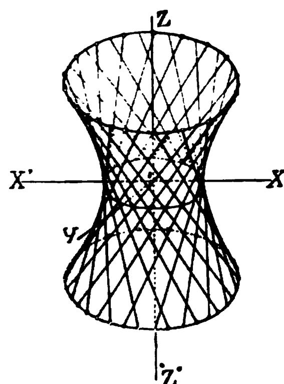


Fig. 99.

$$\frac{x_1}{a} + \frac{z_1}{c} = \lambda\left(1 + \frac{y_1}{b}\right), \quad \frac{x_1}{a} - \frac{z_1}{c} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{y_1}{b}\right),$$

$$\frac{x_1}{a} + \frac{z_1}{c} = \mu\left(1 - \frac{y_1}{b}\right), \quad \frac{x_1}{a} - \frac{z_1}{c} = \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{y_1}{b}\right),$$

z których otrzymujemy:

$$\lambda = \frac{\frac{x_1}{a} + \frac{z_1}{c}}{1 + \frac{y_1}{b}} = \lambda = \frac{1 - \frac{y_1}{b}}{\frac{x_1}{a} - \frac{z_1}{c}}, \quad \mu = \frac{\frac{x_1}{a} + \frac{z_1}{c}}{1 - \frac{y_1}{b}} = \mu = \frac{1 + \frac{y_1}{b}}{\frac{x_1}{a} - \frac{z_1}{c}}.$$

Ponieważ punkt (x_1, y_1, z_1) leży na danej hiperboloidzie, przeto będą oba stosunki otrzymane na λ, jako też oba stosunki na μ otrzymane między sobą równe. Przez każdy punkt hiperboloidy przechodzi więc jedna tylko prosta z jednego i jedna z drugiego układu prostych tworzących. Dwie proste należące do jednego i tego samego układu tworzących są względem siebie wichrowate. Albowiem równania dwóch prostych należących, np. do pierwszego układu, różnią się tylko między sobą oddzielnemi wartościami parametru λ, czyli mają kształt:

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \lambda_1\left(1 + \frac{y}{b}\right), \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda_1}\left(1 - \frac{y}{b}\right); \tag{21}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \lambda_2\left(1 + \frac{y}{b}\right), \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda_2}\left(1 - \frac{y}{b}\right), \tag{22}$$

mogą się więc równocześnie sprawdzić tylko wtedy, skoro będzie:

$$\left(\lambda_1 - \lambda_2\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right) = 0, \text{ jako też: } \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right) = 0,$$

co jest niemożebnem. Dwie proste jednego układu nie mogą więc mieć żadnego punktu wspólnego, czyli nie mogą leżeć na jednej płaszczyźnie, są

więc względem siebie wichrowate. Natomiast dwie proste należące do dwóch różnych układów leżą zawsze na jednej płaszczyźnie. Jakakolwiek płaszczyzna przechodząca przez pewną prostą układu λ, jako to:

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right),\quad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{y}{b}\right),$$

będzie bowiem miała równanie:

$$\left[\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)-\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right)\right]+k\left[\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)-\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{y}{b}\right)\right]=0,$$

gdzie k jest parametrem nieoznaczonym. Płaszczyzna ta przejdzie przez pewną prostą drugiego układu μ, jako to:

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right),\quad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{y}{b}\right),$$

skoro będzie: $$\left(\mu-\frac{k}{\lambda}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)+\left(\frac{k}{\mu}-\lambda\right)\left(1+\frac{y}{b}\right)=0,$$

dla wszelkiej wartości y, a więc skoro będzie $k=\lambda\mu$. Płaszczyzna:

$$\left[\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)-\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right)\right]+\lambda\mu\left[\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)-\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{y}{b}\right)\right]=0, \tag{23}$$

zawiera więc tworzące dwóch różnych układów, czyli przez dowolne dwie proste λ, μ, z których każda do innego układu należy, da się zawsze przesunąć jedna płaszczyzna (fig, 198), określona poprzedniem równaniem, które da się także sprowadzić do postaci:

$$\frac{x}{a}(1+\lambda\mu)+\frac{y}{b}(\mu-\lambda)+\frac{z}{c}(1-\lambda\mu)-(\lambda+\mu)=0.$$

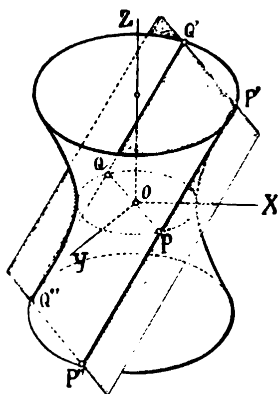


Fig. 200.

Jeżeli równania dwóch tworzących, należących do dwóch różnych układów (fig. 200) napiszemy w postaci:

$$\frac{x}{a}=\frac{z}{c}\sin\varphi+\cos\varphi,\quad \frac{y}{b}=-\frac{z}{c}\cos\varphi+\sin\varphi,$$

$$\frac{x}{a}=-\frac{z}{c}\sin\varphi_1+\cos\varphi_1,\quad \frac{y}{b}=\frac{z}{c}\cos\varphi_1+\sin\varphi_1,$$

wtedy otrzymamy równanie płaszczyzny, przechodzącej przez pierwszą tworzącą w postaci:

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\sin\varphi-\cos\varphi\right)+k\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\cos\varphi-\sin\varphi\right)=0.$$

Ażeby ta płaszczyzna zawierała w sobie także drugą tworzącą musi być

$$k=\frac{\sin\varphi+\sin\varphi'}{\cos\varphi+\cos\varphi'}=\frac{\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}}{\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}},$$

płaszczyzna dwóch tworzących ma zatem równanie kształtu:

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}+\frac{z}{c}\sin\frac{\varphi-\varphi'}{2}=\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2}.$$

Aby dwie tworzące, należące do różnych układów były do siebie równoległe musi być: $\sin\varphi=-\sin\varphi'$, $\cos\varphi=-\cos\varphi'$, a więc $\varphi'=\varphi+180$. Równanie płaszczyzny, przechodzącej przez dwie tworzące do siebie równoległe, (fig. 200) ma więc kształt:

$$\frac{x}{a}\sin\varphi-\frac{y}{b}\cos\varphi-\frac{z}{c}=0, \qquad (24)$$

wskazuje zatem na płaszczyznę, przechodzącą przez punkt początkowy czyli przez środek danej hiperboloidy.

15. Proste poprowadzone przez środek hiperboloidy równolegle do jej tworzących, tworzą stożek asymptotyczny. Prosta poprowadzona przez środek hiperboloidy równolegle do tworzącej: $x=\frac{aq}{bc}z+p$, $y=-\frac{bp}{ac}z+q$ ma bowiem równania: $x=\frac{aq}{bc}z$, $y=-\frac{bp}{ac}z$, z których otrzymujemy: $p=-\frac{acy}{bz}$, $q=\frac{bcx}{az}$, a że: $\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}=1$, przeto będzie miejsce tych równoległych określone równaniem: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, które przedstawia właśnie stożek asymptotyczny.

Z tej własności tworzących hiperboloidy wynika bezpośrednio, że trzy tworzące, należące do jednego układu, a więc względem siebie wichrowate nie mogą być równocześnie równoległe do jednej płaszczyzny, musiałyby bowiem trzy tworzące stożka asymptotycznego leżeć na jednej płaszczyźnie, co jest niemożebnem.

16. Hiperboloida o jednej powłoce powstała przez ruch prostej. Wiemy, że wszelka prosta jednego układu tworzących przecina wszystkie proste drugiego układu. Jeżeli tedy obierzemy dowolnie trzy proste wichrowate i poruszać będziemy inną prostę tak, aby się na danych trzech prostych opierała, to ta prosta ruchoma utworzy hiperboloidę o jednej powłoce. Ażeby wprost dowieść tego twierdzenia przesuńmy przez każdą z danych trzech prostych P_1, P_2, P_3 dwie płaszczyzny równoległe do dwóch pozostałych prostych. Otrzymamy tedy równoległościan, którego krawędzie będą do danych prostych równoległe; środek tego równoległościanu przyjmijmy, jako punkt początkowy układu osi równoległych do danych trzech prostych. Oznaczmy przez $2a$, $2b$, $2c$ długości krawędzi w utworzonym równoległościanie, a otrzymamy równanie danych prostych w postaci:

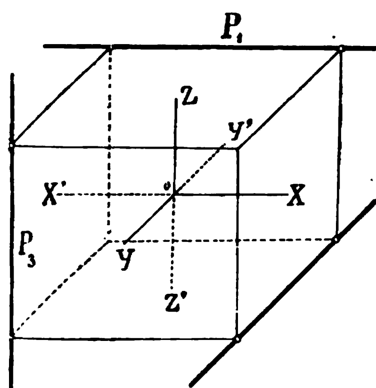


Fig. 201.

$$P_1\begin{cases}y=-b\\z=c\end{cases},\quad P_2\begin{cases}x=a\\z=-c\end{cases},\quad P_3\begin{cases}x=-a\\y=b\end{cases}.$$

Prostę ruchomą możemy uważać, jako przekrój dwóch płaszczyzn, z których jedna przechodzi przez prostą P_1, druga przez prostą P_2, a temsamem określić równaniami: $z-c-\lambda(y+b)=0$, $z+c-\mu(x-a)=0$

Ażeby ta prosta przecięła także prostą P_3 musi być:

$$z=c+2\lambda b=-c-2\mu a, \text{ czyli: } c+\lambda b+\mu a=0.$$

Wstawiwszy w ten warunek za λ i μ wartości: $\lambda=\frac{z-c}{y+b}$, $\mu=\frac{z+c}{x-a}$, otrzymamy równanie:

$$c+\frac{b(z-c)}{y+b}+\frac{a(z+c)}{x-a}=0, \text{ czyli: } ayz+bxz+cxy+abc=0, \qquad (25)$$

które sprowadza się do postaci:

$$\frac{yz}{bc}+\frac{zx}{ac}+\frac{xy}{ab}+1=0 \qquad (25')$$

Równaniu temu czynią zadość spółrzędne jakiegokolwiek punktu prostej ruchomej, jest ono zatem równaniem powstałej powierzchni. Powierzchnia ta jest stopnia drugiego. Ażeby ją odnieść do osi głównych, utworzymy równanie trzeciego stopnia $\Delta(s)=0$ w postaci:

$$s^3-Ps^2+Qs-\Delta=0.$$

Mamy tu:

$$a_{11}=a_{22}=a_{33}=0,\ a_{23}=\frac{a}{2},\ \ a_{13}=\frac{b}{2},\ \ a_{12}=\frac{c}{2},\ \ P=a_{11}+a_{22}+a_{33}=0,$$

$$Q=(a_{11}a_{22}-a^2_{12})+\&=-\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2),$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0, & \frac{c}{2}, & \frac{b}{2} \\ \frac{c}{2}, & 0, & \frac{a}{2} \\ \frac{b}{2}, & \frac{a}{2}, & 0\end{vmatrix}=\frac{abc}{4},$$

powyższe równanie otrzymuje przeto kształt:

$$s^3-\frac{a^2+b^2+c^2}{4}s-\frac{abc}{4}=0,\ \text{czyli: } 4s^3-(a^2+b^2+c^2)s-abc=0,$$

daje zatem dwa pierwiastki ujemne i jeden dodatni. Otrzymana powierzchnia drugiego stopnia odniesiona do swych osi głównych będzie więc miała równanie kształtu:

$$-s_1x^2-s_2y^2+s_3z^2=-abc,\ \text{czyli: } s_1x^2+s_2y^2-s_3z^2=abc, \qquad (26)$$

jest zatem hiperboloidą o jednej powłoce. Wszelka powierzchnia, powstała przez ruch prostej opierającej się stale na trzech wichrowatych nierównoległych do jednej płaszczyzny, jest więc hiperboloidą o jednej powłoce.

17. Średnice sprzężone hiperboloidy o jednej powłoce. Płaszczyzna środkowa sprzężona z kierunkiem λ, μ, ν średnicy, otrzymuje tu równanie kształtu:

$$\frac{x\cos\lambda}{a^2}+\frac{y\cos\mu}{b^2}-\frac{z\cos\nu}{c^2}=0, \qquad (27)$$

które, jeżeli przez x', y', z' oznaczymy spółrzędne punktu końcowego średnicy, przedstawi się także w postaci: $\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}-\frac{zz'}{c^2}=0$. Płaszczyzna styczna w końcu x', y', z' danej średnicy, ma atoli równanie kształtu:

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}-\frac{zz'}{c^2}=1,$$

jest zatem równoległą do płaszczyzny środkowej z tąż średnicą sprzężonej. Jeżeli odniesiemy hiperboloidę o jednej powłoce do układu trzech średnic sprzężonych, wtedy otrzymamy równanie:

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=1,$$

gdzie $2a'$, $2b'$, $2c'$ będą długościami średnic sprzężonych. Między trzema średnicami sprzężonymi hiperboloidy istnieje zawsze jedna urojona, t. j. taka, która hiperboloidy wcale nie przecina. Skoro bowiem jedna płaszczyzna, np. płaszczyzna (a', b'), przecina powierzchnię w ellipsie, to średnica z tą płaszczyzną sprzężona będzie leżała wewnątrz stożka asymptotycznego, będzie więc urojona, jeżeli zaś ta płaszczyzna przecina powierzchnię w hiperboli, to trzecia średnica wpadnie zewnątrz stożka, będzie więc rzeczywistą. Poprowadziwszy przez punkt końcowy średnicy rzeczywistej a' płaszczyznę równoległą do dwóch innych średnic, otrzymamy płaszczyznę styczną do powierzchni; płaszczyzna ta przetnie zarazem tę hiperboloidę w dwóch prostych, określonych równaniami:

$$x=a',\quad \frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=0.$$

Płaszczyzna styczna do hiperboloidy o jednej powłoce, przecina więc zawsze tę powierzchnię w dwóch prostych rzeczywistych, będą to dwie tworzące hiperboloidy, przez punkt styczności przechodzące.

18. Między długościami średnic sprzężonych istnieją związki podobne do tych, jakieśmy przy ellipsoidzie poznali. Płaszczyzna dwóch średnic sprzężonych (a', b') niech przecina hiperboloidę w ellipsie a płaszczyznę XOY w średnicy 2α, z którą sprzężona średnica w tej ellipsie, niech ma długość 2β, wtedy będzie na podstawie własności średnic sprzężonych w ellipsie:

$$a'^2+b'^2=\alpha^2+\beta^2,\text{ przeto: } a'^2+b'^2-c'^2=\alpha^2+\beta^2-c'^2.$$

W ellipsie szyjnej (a, b) niech ma średnica sprzężona z średnicą 2α długość 2γ, to płaszczyzna sprzężona ze średnicą 2α przetnie powierzchnię w hiperboli, która będzie miała średnice sprzężone 2γ i $2c$, jakoteż 2β i $2c'$, będzie zatem:

$$\gamma^2-c^2=\beta^2-c'^2,\text{ przeto: } \alpha^2+\gamma^2-c^2=\alpha^2+\beta^2-c'^2=a'^2+b'^2-c'^2. \quad (28)$$

A że $\alpha^2+\gamma^2=a^2+b^2$, będzie więc: $a'^2+b'^2-c'^2=a^2+b^2-c^2$. Suma algebraiczna kwadratów trzech średnics przężonych w hiperboloidzie, jest więc ilością stałą. Wiedząc, że powierzchnia równoległoboku wykreślonego nad średnicami sprzężonemi krzywej drugiego stopnia jest stałą, otrzymamy, oznaczając objętość równoległościanu, wykreślonego nad średnicami sprzężonemi a', b', c' przez $V(a', b', c')$, kolejno:

$$V(a'\, b'\, c')=V(\alpha, b, c')=V(\alpha, \beta, c)=V(a, b, c),\text{ czyli: } V(a', b', c')=V(a, b, c).$$

Objętość równoległościanu wykreślonego nad trzema średnicami sprzężonemi hiperboloidy o jednej powłoce, jest więc stałą i równą objętości równoległościanu wykreślonego nad osiami.

19. Hiperboloida o dwóch powłokach. Hiperboloida o dwóch powłokach jest powierzchnią określoną równaniem: $s_1x^2+s_2y^2+s_3z^2=H$, w którem dwa spółczynniki, np. s_2 i s_3 są ujemne. Równanie takie możemy zawsze sprowadzić do postaci: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, w której $2a$ przedstawia długość osi rzeczywistej, $2b$ i $2c$ zaś długości osi urojonych. Główne przekroje są tu określone równaniami:

$$z=0,\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad y=0,\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\quad x=0,\ \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

z których dwa pierwsze przedstawiają hiperbolę o osi rzeczywistej $2a$, trzecie zaś ellipsę urojoną. Płaszczyzna równoległa do YOZ przecina powierzchnię w krzywej: $x=\alpha$, $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{\alpha^2}{a^2}-1$, która jest ellipsą urojoną dla $\alpha<a$, punktem dla $\alpha=a$, a ellipsą rzeczywistą dla $\alpha>a$. Przekroje równoległe do dwóch innych płaszczyzn głównych przedstawiają hiperbole, których oś rzeczywista jest zawsze równoległą do osi x-ów.

20. Przekroje płaskie hiperboloidy o dwu powłokach. Niech będzie teraz: $x=my+nz+p$ dowolną płaszczyzną, płaszczyzna ta przecina powierzchnię w krzywej, której rzut na płaszczyznę YOZ określony jest równaniem: $\frac{(my+nz+p)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. Dwumian $a_{11}a_{22}-a^2_{12}$ ma tu wartość:

$$\left(\frac{m^2}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{n^2}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)-\frac{m^2n^2}{a^4}=\frac{1}{a^2b^2c^2}(b^2m^2+c^2n^2-a^2).$$

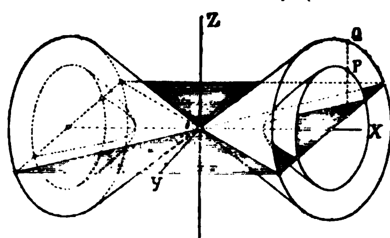


Fig. 202.

Przekrój płaski hiperboloidy o dwóch powłokach może być tedy, jedną z trzech krzywych stożkowych, ellipsą, skoro $b^2m^2+c^2n^2>a^2$, hiperbolą, skoro: $b^2m^2+n^2c^2<a^2$, albo parabolą, skoro: $b^2m^2+c^2n^2=a^2$. Ostatniemu warunkowi stanie się zadość, skoro przyjmiemy: $m=\frac{a}{b}\cos\varphi$, $n=\frac{a}{c}\sin\varphi$, wszelka płaszczyzna równoległa do płaszczyzny: $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}\cos\varphi+\frac{z}{c}\sin\varphi$ przecina tedy hiperboloidę o dwóch powłokach w paraboli.

21. Przekroje kołowe hiperboloidy o dwu powłokach. Ażeby wyznaczyć przekroje kołowe tej powierzchni odejmijmy od równania powierzchni: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ równanie kuli: $\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}=1$, a otrzymamy równanie:

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)-y^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{r^2}\right)-z^2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{r^2}\right)=0,$$

które przedstawia dwie płaszczyzny, jeżeli położymy kolejno: $r^2=a^2$, $r^2=-b^2$, $r^2=-c^2$.

Przyjmując $b>c$, otrzymamy płaszczyzny rzeczywiste tylko dla $r^2=-b^2$, w którym to razie równanie powyższe otrzymuje kształt:

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)-z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)=0,\ \text{czyli:}\ \frac{x}{a}\sqrt{a^2+b^2}=\pm\frac{z}{c}\sqrt{b^2-c^2}. \quad (29)$$

Hiperboloida o dwóch powłokach ma zatem dwa szeregi płaszczyzn, dających przekroje kołowe; płaszczyzny te są równoległe do większej osi urojonej.

22. Stożek asymptotyczny hiperboloidy o dwu powłokach. Jeżeli w równaniu hiperboloidy o dwóch powłokach jest wyraz wolny H zerem, wtedy otrzymujemy równanie jednorodne: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, przedstawiające stożek, którego wierzchołek jest w punkcie początkowym (fig. 202). Płaszczyzna równoległa do YOZ przecina ten stożek w ellipsie: $x=\alpha$, $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{\alpha^2}{a^2}$, stożek ten jest zatem elliptyczny i ułożony na około osi x-ów.

Jest on zarazem stożkiem asymptotycznym hiperboloidy. Jeżeli bowiem obierzemy dwa punkty na prostej równoległej do osi OZ, jeden $P(x, y, z)$ na hiperboloidzie, drugi $Q(x, y, \zeta)$ na stożku (fig. 202), tedy otrzymamy równości:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{\zeta^2}{c^2}=0,$$

z których wypada: $\frac{\zeta^2-z^2}{c^2}=1$, czyli: $\zeta-z=\frac{c^2}{\zeta+z}$. Widać stąd, że ζ jest większe od z i że różnica $\zeta-z$ maleje nieograniczenie w miarę jak z rośnie, obie powierzchnie dotykają się więc w nieskończoności, stożek: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ jest zatem stożkiem asymptotycznym hiperboloidy o dwóch powłokach: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

Jako odmiany hiperboloidy o dwóch powłokach występują jak łatwo wywnioskować: hiperboloida obrotowa o dwóch powłokach, stożek, walec hiperboliczny i dwie płaszczyzny równoległe.

23. Płaszczyzny środkowe i średnice sprzężone hiperboloidy o dwu powłokach. Płaszczyzna środkowa sprzężona z kierunkiem λ, μ, ν otrzymuje tu równanie kształtu:

$$\frac{x\cos\lambda}{a^2}-\frac{y\cos\mu}{b^2}-\frac{z\cos\nu}{c^2}=0, \text{ czyli: } \frac{xx'}{a^2}-\frac{yy'}{b^2}-\frac{zz'}{c^2}=0,$$

jeżeli (x', y', z') jest punktem, w którym średnica wykreślona w kierunku λ, μ, ν spotyka powierzchnią. Płaszczyzna styczna w tym kierunku przedstawia się tu równaniem: $\frac{xx'}{a^2}-\frac{yy'}{b^2}-\frac{zz'}{c^2}=1$, jest zatem równoległą do płaszczyzny środkowej, sprzężonej z średnicą przez ten punkt przechodzącą. Jeżeli kierunek λ, μ, ν wpada wewnątrz stożka asymptotycznego, wtedy cięciwy równoległe przecinają obie powłoki tej powierzchni, płaszczyzna środkowa, przechodząca przez ich środki, nie przetnie tedy hiperboloidy; jeżeli kierunek λ, μ, ν wpada zewnątrz stożka, cięciwy równoległe przecinają tedy jedną tylko powłokę, płaszczyzna środkowa przetnie tedy stożek asymptotyczny w dwóch prostych, a hiperboloidę w hiperboli, jeżeli wreszcie kierunek λ, μ, ν wpada w tworzącą stożka, wtedy będzie płaszczyzna środkowa styczną do stożka asymptotycznego.

Z uwagi, że płaszczyzna środkowa, albo nie przecina wcale hiperboloidy, albo ją przecina w hyperboli stosownie do tego, czy średnica z nią sprzężona powierzchnię przecina lub nie, wynika wprost, że z trzech średnic sprzężonych hiperboloidy o dwóch powłokach jedna tylko hiperboloidę przecina. Jeżeli odniesiemy hiperboloidę o dwóch powłokach do trzech średnic sprzężonych, otrzymamy też równanie:

$$\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=1,$$

gdzie $2a'$, $2b'$, $2c'$ przedstawiają długości średnic sprzężonych. Podobnie jak przy hiperboloidzie o jednej powłoce otrzymamy tu relacyę:

$$a'^2-b'^2-c'^2=a^2-b^2-c^2, \qquad (30)$$

dowodzącą, że algebraiczna suma kwadratów trzech średnic sprzężonych jest stałą i równą algebraicznej sumie kwadratów trzech osi, jak również drugą:

$$V(a', b', c') = V(a, b, c), \tag{31}$$

wypowiadającą, że objętość równoległościanu, wykreślonego nad trzema średnicami sprzężonemi jest stałą i równą objętości równoległościanu wykreślonego nad osiami.

Ćwiczenia XLVIII.

1) Podać środek, płaszczyzny główne i przekroje ellipsoidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

2) Podać płaszczyznę środkową ellipsoidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, sprzężoną z cięciwami równoległemi do prostej: $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$.

3) Podać warunki, pod jakimi płaszczyzna: $Ax+By+Cz=0$ jest sprzężona z średnicą: $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$, ellipsoidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

4) Gdzie leżą środki przekrojów ellipsoidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ płaszczyznami równoległemi do płaszczyzny: $Ax+By+Cz=D$.

5) Wykazać, że płaszczyzna styczna w punkcie $P(x', y', z')$ ellipsoidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ jest równoległa do płaszczyzny środkowej sprzężonej ze średnicą łączącą dany punkt: $P(x', y', z')$ ellipsoidy z jej środkiem.

6) Okazać, że wszelką płaszczyznę styczną do ellipsoidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ można przedstawić równaniem: $Ax+By+Cz=\sqrt{A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2}$.

7) Wyprowadzić równania normalnej w punkcie $P(\xi, \eta, \zeta)$ ellipsoidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

8) Wyprowadzić równanie płaszczyzny, która by przechodziła przez normalną w punkcie $P(\xi, \eta, \zeta)$ ellipsoidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ i przez środek tejże ellipsoidy.

9) Wykazać, że półosie r ellipsy występującej jako przekrój ellipsoidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ płaszczyzną: $Ax+By+Cz=0$ czynią zadość równaniu:

$$\frac{a^2A^2}{r^2-a^2}+\frac{b^2B^2}{r^2-b^2}+\frac{c^2C^2}{r^2-c^2}=0.$$

10) Wykazać, że powierzchnia E ellipsy, będącej przekrojem ellipsoidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ z płaszczyzną: $Ax+By+Cz=D$ wyznacza się wzorem:

$$E=\frac{A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2-D^2}{(A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2)^{3/2}}\,abc\pi.$$

11) W punktach przekroju ellipsoidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ z płaszczyzną $z=h$ wykreślono normalne do tejże powierzchni, wykazać, że ich ślady na płaszczyźnie XOY tworzą ellipsę o równaniu:

$$\frac{a^2x^2}{(a^2-c^2)^2}+\frac{b^2y^2}{(b^2-c^2)^2}=1-\frac{h^2}{c^2}.$$

12) Podać warunki, pod którymi trzy średnice o kierunkach (λ, μ, ν), (λ', μ', ν') $(\lambda'', \mu'', \nu'')$ tworzą układ średnic sprzężonych ellipsoidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

13) Wykazać, że równanie ellipsoidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ odniesione do któregokolwiek układu jej średnic sprzężonych przedstawi się w postaci: $\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1$, gdzie a', b', c' będą połówkami odnośnych średnic sprzężonych ellipsoidy.

14) Wykazać, że suma kwadratów trzech średnic sprzężonych ellipsoidy jest zawsze stałą i równą sumie kwadratów jej osi.

15) Wykazać, że suma długości trzech średnic sprzężonych ellipsoidy jest wtedy największą, gdy te średnice są równe.

16) Wykazać, że objętość równoległościanu utworzonego z trzech średnic sprzężonych ellipsoidy jest równą objętości równoległościanu prostokątnego, utworzonego z osi ellipsoidy.

17) Wykazać, że w równoległościanie utworzonym ze średnic sprzężonych ellipsoidy jest także suma kwadratów powierzchni jego ścian bocznych stałą, równą sumie kwadratów powierzchni ścian równoległościanu prostego utworzonego z osi ellipsoidy.

18) Wykazać, że ellipsoida trójosiowa: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, gdzie $a>b>c$ ma dwa szeregi przekrojów kołowych układem płaszczyzn, określonych równaniami:

$$\frac{x}{a}=\pm\frac{z}{c}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}}.$$

19) Wyznaczyć kąt θ, jaki tworzą płaszczyzny przekrojów kołowych ellipsoidę trójosiową: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ z płaszczyzną XOY.

20) Wykazać, że punkta końcowe średnic sprzężonych z płaszczyznami przekrojów kołowych ellipsoidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, zwane punktami kołowemi ellipsoidy trójosiowej mają spółrzędne (x', y', z'), określone wzorami:

$$x'=\pm a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},\quad y'=0,\quad z'=\pm c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}.$$

21) Wyznaczyć odległość r punktów kołowych ellipsoidy trójosiowej: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ od jej środka.

22) Wykazać, że w ellipsoidzie suma kwadratów z odwrotnych wartości trzech średnic do siebie prostopadłych jest stałą równą sumie kwadratów odwrotnych wartości trzech osi tejże ellipsoidy.

23) Okazać, że do odmian ellipsoidy trójosiowej należą ellipsoida obrotowa, kula, walec elliptyczny, dwie płaszczyzny równoległe i punkt i podać odpowiednie najprostsze równania.

24) Wykazać, że płaszczyzna: $z=mx+ny+p$ przecina hiperboloidę: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ podług ellipsy, gdy $a^2m^2+b^2n^2>c^2$, podług hyperboli, gdy $a^2m^2+b^2n^2<c^2$, a podług paraboli, gdy $a^2m^2+b^2n^2=c^2$.

25) Wykazać, że hiperboloida o jednej powłoce: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, gdzie $a^2>b^2>c^2$ ma dwa układy przekrojów kołowych z płaszczyznami równoległemi do większej osi rzeczywistej tejże powierzchni.

26) Okazać, że do odmian hiperboloidy o jednej powłoce należą hiperboloida obrotowa, stożek, walec elliptyczny, walec hiperboliczny i dwie płaszczyzny równoległe; podać odnośne najprostsze równania.

27) Wykazać, że przez każdy punkt hiperboloidy o jednej powłoce przechodzą dwie linie proste, leżące na tej powierzchni.

28) Wykazać, że na hiperboloidzie o jednej powłoce istnieją dwa szeregi linij prostych; proste jednego szeregu są względem siebie wichrowate i przecinają wszystkie proste drugiego szeregu.

29) Wykazać, że punkta hiperboloidy o jednej powłoce: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, przez które przechodzą dwie jej tworzące do siebie prostopadłe, leżą na przecięciu się tejże hiperboloidy z kulą: $x^2+y^2+z^2=a^2+b^2-c^2$.

30) Wykazać, że proste poprowadzone przez środek hyperboloidy o jednej powłoce równolegle do jej tworzących tworzą stożek asymptyczny tejże hyperboloidy.

31) Wykazać, że rzuty prostych tworzących hyperboloidę o jednej powłoce: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ na płaszczyznę XOY są styczne do ellipsy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

32) Okazać, że przeprowadziwszy przez dwa punkta w przestrzeni pęki płaszczyzn przechodzących przez tworzące jednego układu hiperboloidy o jednej powłoce otrzymujemy dwa pęki jednokreślne.

33) Wykazać, że krawędzie przecięcia się odpowiednich płaszczyzn dwu pęków jednokreślnych utworzą hiperboloidę o jednej powłoce.

34) Wykazać, że płaszczyzna styczna do hiperboloidy o jednej powłoce przecina jej powierzchnię podług dwu prostych rzeczywistych.

35) Wykazać, że suma kwadratów z prostopadłych wyprowadzonych ze środka hiperboloidy o jednej powłoce do trzech płaszczyzn stycznych a do siebie prostopadłych jest ilością stałą.

36) Wykazać, że płaszczyzna przesunięta przez dwie do siebie równoległe proste hiperboloidy o jednej powłoce przechodzi przez środek tej powierzchni.

37) Wykazać, że płaszczyzna: $Ax+By+Cz+D=0$ przecina powierzchnię: $yz+zx+xy=a^2$ podług paraboli, skoro $\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}=0$.

38) Wykazać, że linie proste, leżące na powierzchni: $yz+zx+xy+a^2=0$, a przechodzące przez punkt: $P\left(0,\ a\lambda,\ -\frac{a}{\lambda}\right)$ tejże powierzchni mają równania:

$$x(1\pm\lambda)=a\lambda-y=\pm(\lambda z+a),$$

39) Wykazać, że płaszczyzny równoległe do płaszczyzny: $x+y+z=0$ przecinają powierzchnię: $yz+zx+xy=a^2$ podług linij kołowych.

40) Wyprowadzić warunek, pod którym płaszczyzna: $Ax+By+Cz=0$ przecina powierzchnię: $ayz+bzx+cxy=0$ podług dwu prostych do siebie prostopadłych.

41) Okazać, że płaszczyzna: $z=mx+ny$ przecina stożek: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ podług dwu prostych do siebie prostopadłych, jeżeli spełnia się warunek:

$$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}+m^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)+n^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)=0.$$

42) Wykazać, że płaszczyzna: $x=my+nz+p$ przecina hiperboloidę o dwu powłokach: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ podług ellipsy, gdy: $b^2m^2+c^2n^2<a^2$, podług hiperboli, gdy: $b^2m^2+c^2n^2>a^2$, podług paraboli, gdy: $b^2m^2+c^2n^2=a^2$.

43) Wykazać, że hiperboloida o dwu powłokach ma dwa układy przekrojów kołowych płaszczyznami równoległemi do większej osi urojonej.

44) Wykazać, że punkta kołowe hyperboloidy o dwu powłokach:

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ mają spółrzędne: $y=0$, $x=\pm a\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}}$, $z=\pm c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2+c^2}}$.

45) Okazać, że do odmian hiperboloidy o dwu powłokach należą hiperboloida obrotowa dwu powłokowa, stożek, walec hyperboliczny i dwie płaszczyzny równoległe.

46) Wyprowadzić równania normalnej w punkcie $P(x',\ y',\ z')$ hiperboloidy o dwu powłokach: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

Rozwiązania XLVIII. 2) $\frac{lx}{a^2}+\frac{my}{b^2}+\frac{nz}{c^2}=0$ 3) $\frac{l}{a^2A}=\frac{m}{b^2B}=\frac{n}{c^2C}$. 4) Na prostej: $\frac{x}{a^2A}=\frac{y}{b^2B}=\frac{z}{c^2C}$ 5) Porównaj 3). 7) $\frac{a^2(x-\xi)}{\xi}=\frac{b^2(y-\eta)}{\eta}=\frac{c^2(z-\zeta)}{\zeta}$.
8) $\frac{a^2(b^2-c^2)}{\xi}x+\frac{b^2(c^2-a^2)}{\eta}y+\frac{c^2(a^2-b^2)}{\zeta}z=0$. 12) $\frac{\cos\lambda\cos\lambda'}{a^2}+\frac{\cos\mu\cos\mu'}{b^2}+\frac{\cos\nu\cos\nu'}{c^2}=0$,
19) $\operatorname{tang}\theta=\pm\frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}$. 21) $r=\sqrt{a^2+c^2-b^2}$. 41) $aBC+bCA+cAB=0$.
46) $\frac{a^2(x-x')}{x'}=-\frac{b^2(x-y')}{y'}=-\frac{c^2(z-z')}{z'}$.

Literatura. O. Fort und O. Schlömilch: Lehrbuch der analytischen Geometrie. Zweiter Thel: Analytische Geometrie des Raumes. 6. Auflage. Leipzig 1898. Percival Frost: Solid geometry. London 1875. Dr. Max Simon: Analytische Geometrie des Raumes. II. Theil: Die Flächen zweiten Grades. Leipzig 1902.

Tematy do rozprawek naukowych:

1. Szczególne własności ellipsoidy.
2. Szczególne własności hiperboloidy o jednej powłoce.
3. Szczególne własności hiperboloidy o dwu powłokach.

Wykład XLIX.

Szczególne własności powierzchni bezśrodkowych rzędu drugiego.

1. Paraboloida elliptyczna. Jeżeli równanie drugiego stopnia przedstawia powierzchnię nie posiadającą środka, wówczas da się zawsze sprowadzić do postaci:

$$s_1 x^2 + s_2 y^2 = 2qz, \tag{1}$$

która określa paraboloidę elliptyczną, skoro s_1 i s_2 mają jednakowe znaki, albo paraboloidę hiperboliczną, skoro znaki spółczynników s_1 i s_2 są różne.

Weźmy najpierw pod uwagę paraboloidę elliptyczną, którą określa równanie:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z. \tag{2}$$

Płaszczyzny XZ i YZ są tu płaszczyznami głównemi powierzchni, które przecinają ją w dwóch parabolach, mających wspólną oś OZ, która się też nazywa osią paraboloidy elliptycznej.

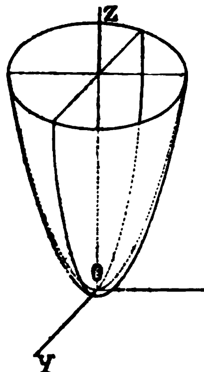


Fig. 208.

Płaszczyzna XOY dotyka się paraboloidy elliptycznej. Przekroje równoległe do płaszczyzny XOY są ellipsami, które określają równania:

$$z = h, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2h.$$

Osie tych ellips rosną nieograniczenie w miarę jak rośnie h. Dla ujemnego h stają się ellipsy urojone, powierzchnia nie ma zatem żadnego punktu pod płaszczyzną XY. Płaszczyzny równoległe do XOZ przecinają powierzchnię w parabolach, których równaniami będą:

$$y = k, \quad \frac{x^2}{a^2} = 2z - \frac{k^2}{b^2}.$$

Parabole te mają wszystkie jednakowy parametr $2a^2$, są więc do siebie przystające. To samo dotyczy przekrojów, równoległych do YOZ, które będą przystającemi parabolami o parametrze $2b^2$.

2. Przekroje płaskie paraboloidy elliptycznej. Niech będzie teraz: $y = mz + nx + r$ dowolną płaszczyzną; jej przekrój z powierzchnią rzuci się na płaszczyznę XOZ w krzywej drugiego rzędu:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mz + nx + r)^2}{b^2} - 2z = 0, \tag{3}$$

dla której dwumian $a_{11}a_{22}-a^2_{12}$ otrzymuje wartość:

$$\frac{m^2}{b^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)-\frac{m^2n^2}{b^4}=\frac{m^2}{a^2b^2}.$$

Krzywa przekroju zatem jest zawsze ellipsą, skoro spółczynnik m jest różnym od zera. Dla $m=0$ będzie przekrój parabolą; płaszczyzna przekroju ma tedy równanie kształtu: $y=nx+r$, jest więc równoległą do osi OZ, która jest osią paraboloidy elliptycznej.

3. Przekroje kołowe paraboloidy elliptycznej. Ażeby wyznaczyć przekroje kołowe paraboloidy elliptycznej, przyjmijmy, że jakaś płaszczyzna, przechodząca przez punkt początkowy O, przecina paraboloidę w kole. Przez to koło przesuńmy kulę, któraby dotykała się płaszczyzny XOY w punkcie O; środek tej kuli będzie tedy leżał na osi z-ów, jej równanie otrzyma przeto kształt:

$$x^2+y^2+z^2-2rz=0,$$

czyli:

$$\frac{x^2}{r}+\frac{y^2}{r}+\frac{z^2}{r}-2z=0,$$

odejmując od tego równania równanie paraboloidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2z=0$,

otrzymamy równanie:

$$x^2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{b^2}\right)+\frac{z^2}{r}=0, \tag{4}$$

przedstawiające stożek, który musi się sprowadzić do dwóch płaszczyzn, jeżeli paraboloida i kula mają wspólne przekroje kołowe. Stać się może to tylko dla $r=a^2$, albo $r=b^2$. Załóżmy, że $a>b$, wtedy, kładąc $r=a^2$, otrzymamy równanie:

$$y^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)+\frac{z^2}{a^2}=0, \text{ czyli: } \frac{z^2}{a^2}-y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)=0,$$

przedstawiające dwie płaszczyzny rzeczywiste:

$$\frac{z}{a}=y\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}},\quad \frac{z}{a}=-y\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}, \tag{5}$$

przechodzące przez oś x-ów. Paraboloida elliptyczna ma zatem dwa szeregi płaszczyzn kołowych, równoległych do stycznej w wierzchołku tego z przekrojów głównych parabolicznych, który ma większy parametr.

4. Odmiany paraboloidy elliptycznej. Jako szczególne odmiany paraboloidy elliptycznej występują paraboloida obrotowa ($a=b$), walec paraboliczny ($a=\infty$, albo $b=\infty$) i linia prosta ($a=b=0$).

Paraboloidę elliptyczną możemy także uważać jako granicę ellipsoidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, w której osie rosną nieograniczenie, gdyż ellipsoida odniesiona do układu, którego początek wpada w wierzchołek osi OZ ma równanie:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{2z}{c}=0, \text{ czyli: } \frac{x^2}{\frac{a^2}{c}}+\frac{y^2}{\frac{b^2}{c}}+\frac{z^2}{c}-2z=0,$$

które dla $c=\infty$, $\frac{a^2}{c}=A^2$, $\frac{b^2}{c}=B^2$ otrzymuje kształt: $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-2z=0$, przedstawiający właśnie paraboloidę elliptyczną.

5. Płaszczyzna styczna i prosta normalna. Płaszczyzna styczna w punkcie x', y', z' paraboloidy elliptycznej otrzymuje równanie:

$$(x-x')\frac{x'}{a^2}+(y-y')\frac{y'}{b^2}-(z-z')=0, \text{ czyli: } \frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}-z+z'-\left(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}\right)=0,$$

które ze względu na to, że: $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=2z'$ przedstawia się ostatecznie w postaci:

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}-(z+z')=0. \tag{6}$$

Normalna w tym punkcie będzie określona równaniami:

$$\frac{x-x'}{\frac{x'}{a^2}}=\frac{y-y'}{\frac{y'}{b^2}}=\frac{z-z'}{-1}. \tag{7}$$

Przyjmijmy dowolnie punkt (ξ, η, ζ) w przestrzeni i poprowadźmy przez niego normalną do paraboloidy, wtedy otrzymamy na wyznaczenie punktu przebicia normalnej z paraboloidą równania:

$$\frac{\xi-x'}{\frac{x'}{a^2}}=\frac{\eta-y'}{\frac{y'}{b^2}}=\frac{\zeta-z'}{-1}=k, \quad \frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=2z'.$$

Z pierwszego szeregu wartości otrzymamy:

$$x'=\frac{a^2\xi}{a^2+k}, \quad y'=\frac{b^2\eta}{b^2+k}, \quad z'=k+\zeta,$$

a podstawiwszy te wartości w równanie paraboloidy dostaniemy równanie:

$$\frac{a^2\xi^2}{(a^2+k)^2}+\frac{b^2\eta^2}{(b^2+k)^2}-2(k+\zeta)=0,$$

które jest ze względu na k stopnia 5-go. Z dowolnego punktu w przestrzeni można więc wykreślić w ogólności pięć normalnych do paraboloidy elliptycznej. Punkta przecięcia x, y, z normalnej odpowiadającej punktowi ξ, η, ζ z paraboloidą dogadzają równaniom:

$$\frac{\xi-x}{\frac{x}{a^2}}=\frac{\eta-y}{\frac{y}{b^2}}=\frac{\zeta-z}{-1}, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z.$$

Pierwsze dwa równania możemy także przedstawić w postaci:

$$\frac{x}{a^2}(z-\zeta)=\xi-x; \quad \frac{y}{b^2}(z-\zeta)=\eta-y,$$

czyli:
$$\frac{xz}{a^2}-\frac{\zeta x}{a^2}+x-\xi=0, \quad \frac{yz}{b^2}-\frac{\zeta y}{b^2}+y-\eta=0,$$

skąd, pomnożywszy pierwsze przez x, drugie przez y, otrzymamy jako sumę równanie:

$$z\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)-\zeta\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)+x^2+y^2-x\xi-y\eta=0,$$

które ze względu na równanie paraboloidy sprowadza się do postaci:

$$2z^2+y^2+x^2-2z\zeta-x\xi-y\eta=0, \tag{8}$$

przedstawiającej ellipsoidę obrotową, której oś obrotu jest równoległą do osi z-ów.

Spodki pięciu normalnych, jakie się z danego punktu w przestrzeni do paraboloidy elliptycznej, poprowadzić dadzą, leżą tedy na przecięciu paraboloidy z pewną ellipsoidą obrotową, która przechodzi przez wierzchołek paraboloidy i ma oś obrotu równoległą do osi tej paraboloidy.

6. Płaszczyzny środkowe i średnice paraboloidy elliptycznej. Płaszczyzna środkowa sprzężona z kierunkiem λ, μ, ν otrzymujemy tu postać:

$$\frac{x \cos \lambda}{a^2} + \frac{y \cos \mu}{b^2} - \cos \nu = 0, \tag{9}$$

jest więc dla każdego kierunku λ, μ, ν równoległą do osi z-ów, czyli do osi paraboloidy. Jakakolwiek średnica jest przeto, jako przekrój dwóch płaszczyzn środkowych, także równoległą do osi paraboloidy.

I tu otrzymamy nieskończenie wiele układów spółrzędnych, dla których równanie paraboloidy będzie kształtu: $\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 2z$.

Obrawszy mianowicie jakąkolwiek średnicę równoległą do osi paraboloidy za oś z-ów, przyjmijmy płaszczyznę styczną do paraboloidy w końcu M średnicy jako płaszczyznę XOY, obierając na niej dowolnie oś OX, a za oś OY kierunek sprzężony z płaszczyzną XOZ. Równanie odniesione do takiego układu kierunków sprzężonych musi dla $x=0$ jako też dla $y=0$ przedstawić parabolę odniesioną do średnicy i stycznej w punkcie końcowym średnicy, musi więc mieć widocznie kształt powyżej podany.

7. Paraboloida hiperboliczna. Paraboloida hiperboliczna określa się równaniem kształtu:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z. \tag{10}$$

Przekroje tej powierzchni płaszczyznami spółrzędnemi są określone równaniami:

$$z=0, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0; \quad x=0, \quad y^2 = -2b^2z; \quad y=0, \quad x^2 = 2a^2z.$$

Pierwsze przedstawia dwie proste: $x = \frac{a}{b} y$, $x = -\frac{a}{b} y$ na płaszczyźnie XY symetrycznie ułożone względem osi układu; drugie parabolę na YZ, której oś ma kierunek ujemnej osi z-ów, trzecie znowu parabolę na XZ o osi idącej w dodatnim kierunku osi z-ów.

Płaszczyzna równoległa do XY przecina powierzchnię w hiperboli:

$$z=\gamma, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2\gamma,$$

której oś poprzeczna jest dla dodatniego γ równoległą do osi x-ów, dla ujemnego γ zaś do osi y-ów. Płaszczyzna równoległa do YZ daje na przekrój parabolę:

$$x=\alpha, \quad \frac{y^2}{b^2} = -2z + \frac{\alpha^2}{a^2},$$

przystającą do paraboli leżącej na płaszczyźnie głównej YZ. Podobnie przecina płaszczyzna równoległa do XZ powierzchnię w paraboli:

$$y=\beta, \quad \frac{x^2}{a^2} = 2z + \frac{\beta^2}{b^2},$$

przystającej do paraboli położonej na płaszczyźnie głównej XZ.

8. Przekroje płaskie paraboloidy hiperbolicznej. Na wyznaczenie przekroju danej powierzchni dowolną płaszczyzną: $y=mz+nx+r$, otrzymujemy równanie: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{(mz+nx+r)^2}{b^2}=2z$, określające rzut krzywej przekroju na płaszczyznę XZ.

Mamy tu dwumian: $a_{11}a_{22}-a^2_{12}=-\frac{m^2}{a^2b^2}$; krzywa będzie więc zawsze hiperbolą, z wyjątkiem, gdy $m=0$, t. zn. gdy płaszczyzna przekroju jest równoległą do osi z-ów, w którym to wypadku będzie przekrój parabolą.

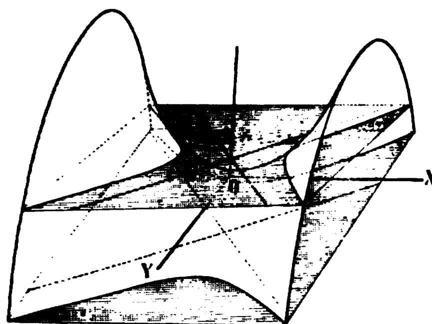


Fig. 204.

Paraboloida hiperboliczna nie da się przeciąć w kole, gdyż nie ma wcale przekrojów zamkniętych, nie może być też nigdy powierzchnią obrotową.

9. Linie proste na paraboloidzie hiperbolicznej. Szczególna własność paraboloidy hiperbolicznej polega na tem, że na jej powierzchni dadzą się wykreślić dwa szeregi prostych, zwanych p r o s t e m i t w o r z ą c e m i paraboloidy hiperbolicznej.

Aby to wykazać przyjmijmy, że prosta określona równaniami:

$$y=mx+\alpha,\quad z=nx+\beta$$

leży cała na powierzchni: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$, miałoby tedy sprawdzić się równanie: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{(mx+\alpha)^2}{b^2}=2(nx+\beta)$, czyli: $x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{m^2}{b^2}\right)-2x\left(\frac{m\alpha}{b^2}+n\right)-\frac{\alpha^2}{b^2}-2\beta=0$, jakiemkolwiek byłoby x.

Spółczynniki w równaniach prostej muszą przeto dogadzać równaniom:

$$\frac{1}{a^2}-\frac{m^2}{b^2}=0,\quad \frac{m\alpha}{b^2}+n=0,\quad \frac{\alpha^2}{b^2}+2\beta=0.$$

Ostatnie równanie sprowadza się do kształtu: $\alpha^2=-2b^2\beta$ wypowiadając, że ślad rozważanej prostej na płaszczyźnie głównej YOZ musi się mieścić na paraboli $y^2=-2b^2z$, która jest głównym przekrojem powierzchni. Pierwsze dwa równania dają natomiast:

$$m=\pm\frac{b}{a},\quad n=\mp\frac{\alpha}{ab},$$

a więc dwie wartości na m i n co dowodzi, że z każdego śladu $(\alpha\beta)$ wychodzącą dwie proste, leżące na paraboloidzie hiperbolicznej, i to tylko dwie określone równaniami:

$$y=\frac{b}{a}x+\alpha,\quad z=-\frac{\alpha}{ab}x+\beta;\quad y=-\frac{b}{a}x+\alpha,\quad z=+\frac{\alpha}{ab}x+\beta, \tag{11}$$

gdzie parametry α i β są spółrzędnemi dowolnego punktu paraboli $y^2=-2b^2z$, a więc związane są relacyą $\alpha^2=-2b^2\beta$.

10. Równanie prostych tworzących możemy także otrzymać wprost z równania powierzchni: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$, które możemy napisać w postaci:

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2z. \tag{12}$$

Jeżeli bowiem podstawimy:

$$1)\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\lambda,\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{2z}{\lambda},\ \text{albo: } 2)\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\mu,\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{2z}{\mu},$$

gdzie λ i μ są stałe dowolne, wtedy otrzymamy dwa układy równań, określających dwa oddzielne układy prostych, które leżą na paraboloidzie hiperbolicznej, gdyż z pomnożenia równań 1) albo 2) wypada równanie tej powierzchni. Przez każdy punkt paraboloidy hyperbolicznej przechodzi z każdego układu jedna prosta. Niech będą bowiem x_1, y_1, z_1 spółrzędne dowolnego punktu powierzchni, to proste przez ten punkt przechodzące będą określone równaniami:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\lambda_1,\quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{2z}{\lambda_1};\qquad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\mu_1,\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{2z}{\mu_1}, \tag{13}$$

w których parametry λ_1, μ_1 będą oznaczone wartościami:

$$\lambda_1=\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}=2z_1:\left(\frac{x_1}{a}-\frac{y_1}{b}\right),\quad \mu_1=\frac{x_1}{a}-\frac{y_1}{b}=2z_1:\left(\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}\right).$$

Mamy tu wprawdzie dla każdego z obu parametrów po dwie wartości, są one jednakże ze względu na równanie paraboloidy hiperbolicznej, na której punkt x, y, z, leży między sobą równe. Istnieje więc w każdym z obu układów 1) i 2) jedna prosta i to tylko jedna, która przez dany punkt x_1, y_1, z_1 przechodzi.

11. Dwie proste tego samego układu są względem siebie wichrowate, dwie proste należące do dwóch różnych układów leżą natomiast zawsze na pewnej płaszczyźnie. Niech będą bowiem dane dwie proste należące do jednego układu np. 1), a więc określone równaniami:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\lambda_1,\quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{2z}{\lambda_1},\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\lambda_2,\quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{2z}{\lambda_2}.$$

Ażeby te dwie proste mogły mieć punkt wspólny, musiałaby istnieć grupa wartości x, y, z, któraby powyższym czterem równaniom dogodziła. Odejmując od siebie parami po dwa równania pod sobą umieszczone, otrzymamy w obu wypadkach jako warunek: $\lambda_1-\lambda_2=0$, który się sprawdzić nie może, skoro przyjęte dwie proste są różne od siebie.

Dwie proste należące do jednego układu nie mogą tedy nigdy utworzyć jednej płaszczyzny, muszą więc być względem siebie wichrowate. Wszystkie proste jednego układu, jakkolwiek względem siebie wichrowate, są atoli do jednej stałej płaszczyzny równoległe. Równanie: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\lambda$ przedstawia dla różnych wartości λ szereg płaszczyzn rzucających proste pierwszego układu na płaszczyznę XOY. Wszystkie te płaszczyzny są widocznie równoległe do płaszczyzny: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$, a tem samem są także wszystkie proste pierwszego układu 1) równoległe do płaszczyzny: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$. Podobnie poznamy, że wszystkie proste drugiego układu są równoległe do płaszczyzny: $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$. Te dwie płaszczyzny stałe nazywamy płaszczyznami kierowniczemi paraboloidy hiperbolicznej.

Weźmy teraz dowolne dwie proste, należące do dwóch różnych układów, a więc określone równaniami:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\lambda,\quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{2z}{\lambda},\quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\mu,\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{2z}{\mu}.$$

Dowolna płaszczyzna przesunięta przez pierwszą prostą będzie tedy miała równanie:

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\lambda\right)+k\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}-\frac{2z}{\lambda}\right)=0.$$

Ażeby ta płaszczyzna zawierała w sobie także prostą drugiego układu musiałby się sprawdzić warunek:

$$\left(\frac{2z}{\mu}-\lambda\right)+k\left(\mu-\frac{2z}{\lambda}\right)=0,\ \text{czyli: } 2z(\lambda-\mu k)-\mu\lambda(\lambda-\mu k)=0$$

dla wszelkiego z, co prowadzi do warunku jedynego $k=\frac{\lambda}{\mu}$.

Równanie:

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\lambda\right)\mu+\lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}-2z\right)=0,\ \text{czyli: } \frac{\lambda+\mu}{a}x+\frac{\mu-\lambda}{b}y-2\lambda z-\lambda\mu=0, \quad (14)$$

będzie tedy równaniem płaszczyzny zawierającej w sobie dwie proste (λ, μ) należące do dwóch różnych układów. Przez każdą parę prostych, należących do dwóch różnych układów, da się tedy zawsze przesunąć jedna płaszczyzna.

12. Z powyższych własności wypływają następujące prawidła tworzenia paraboloidy hyperbolicznej: 1) Paraboloida hyperboliczna powstaje przez ruch prostej, która się opiera na trzech prostych wichrowatych, równoległych do pewnej płaszczyzny, albo 2) Paraboloida hyperboliczna powstaje przez ruch prostej, która się opiera na dwóch prostych wichrowatych i pozostaje zawsze równoległą do pewnej płaszczyzny. Możemy obu tych prawideł dowieść wprost rachunkiem: ad 1). Niech będą dane trzy proste L_1, L_2, L_3, równoległe do jednej płaszczyzny. Przyjmijmy prostą L_3 za oś x-ów, poprowadźmy płaszczyznę XZ równoległą do prostych L_1 i L_2 i obierzmy jako oś y-ów prostą przecinającą obie proste L_1 i L_2. Przy tym układzie osi spółrzędnych (fig. 205) będą równania prostych:

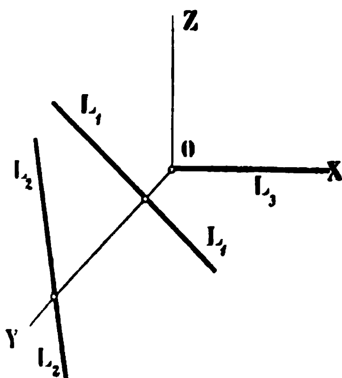


Fig. 205.

$$L_1\begin{cases}y=m\\ z=nx\end{cases},\quad L_2\begin{cases}y=m'\\ z=n'x\end{cases},\quad L_3\begin{cases}y=0\\ z=0\end{cases},$$

Prostą ruchomą przecinającą proste L_1 i L_2 możemy uważać, jako przecięcie się dwóch płaszczyzn, z których jedna przez L_1, druga przez L_2 przechodzi, przeto określić równaniami:

$$(z-nx)-\lambda(y-m)=0,\quad (z-n'x)-\mu(y-m')=0,$$

gdzie λ i μ są dowolnymi parametrami. Ażeby prosta przecięła także oś OX musi być: $z+\lambda m=0$, jako $z+\mu m'=0$, a więc $\lambda m-\mu m'=0$, czyli: $\frac{\lambda}{m'}=\frac{\mu}{m}$.

Równania prostej przecinającej proste L_1 i L_2 mają tedy kształt:

$$(z-nx)-\lambda(y-m)=0,\quad (z-n'x)-\frac{m}{m'}\lambda(y-m')=0,$$

skąd po wyrugowaniu parametru dowolnego λ otrzymamy równanie powstałej powierzchni w postaci:

$$\frac{z-nx}{y-m}=\frac{m'(z-n'x)}{m(y-m')},\text{ czyli: } (m-m')yz-(mn-m'n')xy+mm'(n-n')x=0,$$

przedstawiające powierzchnię drugiego stopnia nie mającą środka, a zawierającą proste tworzące, czyli paraboloidę hiperboliczną.

ad 2) Niech będą L_1 i L_2 dwie dane proste, a P stałą płaszczyzną, przyjmijmy prostą L_2 za oś z-ów, płaszczyznę daną jako płaszczyznę XZ równolegle do L_1 i obierzmy jako oś y-ów prostą przecinającą L_1. Przy tym układzie osi (fig. 206) przedstawią się równania danych prostych w postaci:

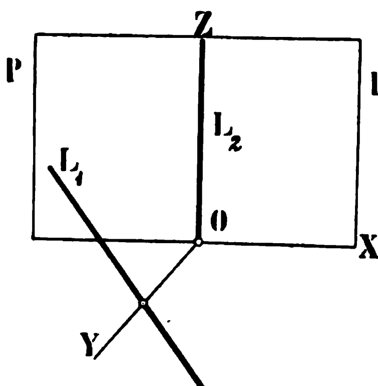


Fig. 206.

$$L_1\begin{cases}y=m\\z=nx\end{cases}\quad L_2\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$$

Prosta ruchoma AB przecinająca L_2 i równoległa do płaszczyzny XY będzie miała tedy równania: $z=\lambda$, $y=\mu x$, gdzie λ i μ są dowolnymi parametrami. Ażeby ta prosta przecięła także prostą L_1 musi być $nx=\lambda$ jako też $m=\mu x$ czyli $mn=\lambda\mu$. Wyrugowawszy z równań prostej AB parametry λ, μ, otrzymamy tedy równanie powierzchni ruchomej w postaci: $yz=mnx$, określające właśnie paraboloidę hyperboliczną.

Nietrudno zauważyć, że prosta ruchoma AB opierająca się na prostych L_1, L_2, a równoległa do stałej płaszczyzny P wyznaczy na prostych L_1 i L_2 odcinki proporcyonalne. Niech będą bowiem AB, $A'B'$, $A''B''$ trzy położenia prostej ruchomej, przez każdą z tych prostych przesuńmy płaszczyznę równoległą do płaszczyzny kierowniczej P, otrzymamy tedy trzy płaszczyzny między sobą równoległe, a te wyznaczają na prostych je przecinających odcinki proporcyonalne (fig. 207). Będzie więc:

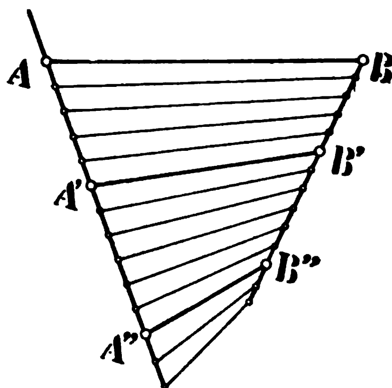


Fig. 207.

$$\frac{AA'}{A'A''}=\frac{BB'}{B'B''}.$$

Na tej własności opierając się, możemy wykreślić model paraboloidy hiperbolicznej z drutów lub nitek. W tym celu podzielimy dwa przeciwległe boki czworoboku wichrowatego na równe części i połączymy punkta podziału nitkami, które w tym razie przedstawiają jeden układ tworzących paraboloidy; zrobimy podobny podział na dwóch innych bokach przeciwległych, otrzymamy drugi układ tworzących.

13. Płaszczyzny styczne i płaszczyzny środkowe paraboloidy hiperbolicznej. Niech będzie x', y', z' punktem paraboloidy hiperbolicznej: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$, płaszczyzna styczna w tym punkcie będzie miała równanie: $\frac{xx'}{a^2}-\frac{yy'}{b^2}=z+z'$. Porównawszy to równanie z równaniem płaszczyzny, zawierającej dwie tworzące λ, μ, które ma kształt:

$(\lambda+\mu)\frac{x}{a}+(\mu-\lambda)\frac{y}{b}-2z-\lambda\mu=0$, otrzymamy równości: $\frac{\lambda+\mu}{\frac{x'}{a^2}}=\frac{\lambda-\mu}{\frac{y'}{b^2}}=2$,

z których wypadają wartości:

$$\lambda=\frac{x'}{a^2}+\frac{y'}{b^2},\quad \mu=\frac{x'}{a^2}-\frac{y'}{b^2},$$

określające tworzące paraboloidy hiperbolicznej przecinające się w punkcie x', y', z'. Płaszczyzna styczna do paraboloidy hiperbolicznej zawiera więc w sobie obie tworzące, jakie przez punkt styczności przechodzą. Normalna w punkcie x', y', z' paraboloidy hiperbolicznej ma równania:

$$\frac{x-x'}{\frac{x'}{a^2}}=\frac{y-y'}{-\frac{y'}{b^2}}=\frac{z-z'}{-1}. \tag{15}$$

Ażeby wyznaczyć liczbę normalnych, jakie z dowolnego punktu ξ, η, ζ w przestrzeni do paraboloidy hiperbolicznej wyprowadzić się dadzą, postąpimy jak przy paraboloidzie elliptycznej. Punkta przecięcia x', y', z' normalnych z powierzchnią oznaczone tu będą równaniami:

$$\frac{\xi-x'}{\frac{x'}{a^2}}=\frac{\eta-y'}{-\frac{y'}{b^2}}=\frac{\zeta-z'}{-1}=k,\quad \frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=2z',$$

skąd na wyznczenie wartości k otrzymamy równanie piątego stopnia:

$$\frac{a\xi^2}{(a^2+k)^2}-\frac{b\eta^2}{(b^2-k)^2}-2(k+\zeta)=0,$$

dowodzące, że przez dowolny punkt w przestrzeni da się poprowadzić w ogólności pięć normalnych do paraboloidy hiperbolicznej. Punkta przecięcia tych normalnych z paraboloidą hiperboliczną leżą tu jak przy paraboloidzie elliptycznej na powierzchni obrotowej, przechodzącej przez wierzchołek paraboloidy i mającej oś obrotu równoległą do osi paraboloidy.

Płaszczyzna środkowa sprzężona z kierunkiem λ, μ, ν ma przy paraboloidzie hiperbolicznej: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ równanie kształtu:

$$\frac{x\cos\lambda}{a^2}-\frac{y\cos\mu}{b^2}-\cos\nu=0, \tag{16}$$

jest przeto równoległą do osi OZ, która tu jest osią powierzchni. Wszystkie średnice, jako przekroje płaszczyzn środkowych, są zatem między sobą równoległe, a zarazem równoległe do osi paraboloidy. Mamy tu także, jak przy paraboloidzie elliptycznej, nieskończenie wiele układów sprzężonych osi ukośnokątnych, dla których równanie powierzchni otrzymuje postać:

$$\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}=2z.$$

Obrawszy bowiem jakąkolwiek średnicę jako oś z-ów, a jej punkt przecięcia z powierzchnią jako punkt początkowy, a płaszczyznę styczną w tym punkcie, jako płaszczyznę XY, możemy jeszcze przyjąć na tej płaszczyźnie dwie proste z sobą sprzężone, jako osi OX i OY, a otrzymamy w takim razie zawsze równanie paraboloidy hiperbolicznej w formie powyżej podanej.

Ćwiczenia LXIX.

1) Wykazać, że przekrój paraboloidy elliptycznej: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ płaszczyzną: $Ax+By+Cz=D$ jest albo ellipsą albo parabolą.

2) Wykazać, że paraboloida elliptyczna: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ ma dwa układy przekrojów kołowych równoległych do dwu płaszczyzn określonych pod założeniem, że $a^2>b^2$ równaniem: $\frac{z^2}{a^2}-y^2\left\{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right\}=0$.

3) Okazać, że do odmian paraboloidy elliptycznej należą: paraboloida obrotowa walec paraboliczny i linia prosta.

4) Wyprowadzić równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $P(\xi, \eta, \zeta)$ paraboloidy elliptycznej: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$.

5) Wyprowadzić równania normalnej w punkcie: $P(\xi, \eta, \zeta)$ paraboloidy elliptycznej: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$.

6) Wykazać, że suma rzutów na oś paraboloidy elliptycznej, prostopadłych wykreślonych z wierzchołka paraboloidy na trzy płaszczyzny styczne do siebie prostopadłe jest stałą.

7) Okazać, że miejscem geometrycznem wierzchołka kąta bryłowego prostościennego opisanego na paraboloidzie elliptycznej jest płaszczyzna prostopadła do osi paraboloidy.

8) Okazać, że przez każdy punkt przestrzeni można poprowadzić w ogólności, pięć normalnych do paraboloidy elliptycznej.

9) Wykazać, że równanie: $a_{11}x^2+2a_{23}yz+2a_{14}x+...+a_{44}=0$, w którem $a_{22}a_{13}=a_{12}a_{23}$, jakoteż $a_{33}a_{12}=a_{23}a_{13}$ przedstawia w ogólności paraboloidę, której oś jest równoległa do prostej $x=0$, $a_{12}y+a_{13}z=0$.

10) Wykazać, że przekrój paraboloidy hiperbolicznej: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ jest w ogólności albo hiperbolą albo parabolą.

11) Wyprowadzić warunek, pod jakim płaszczyzna: $Ax+By+Cz=0$ przecina paraboloidę hiperboliczną: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ podług hiperboli równobocznej.

12) Wykazać, że paraboloida hiperboliczna: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ ma na sobie dwa układy prostych.

13) Okazać, że rzuty poziome prostych jednego układu paraboloidy hiperboliczne są równoległe do jednej z dwu prostych, podług których płaszczyzna XOY przecina paraboloidę hiperboliczną: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$, a rzuty poziome prostych drugiego układu są równoległe do drugiej prostej tego przekroju.

14) Wykazać, że przez każdy punkt paraboloidy hiperbolicznej: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ przechodzą dwie proste należące do dwu różnych układów.

15) Okazać, że proste jednego układu tworzących paraboloidy hiperbolicznej są względem siebie wichrowate.

16) Okazać, że prosta jednego układu tworzących na paraboloidzie hiperbolicznej przecina wszystkie proste drugiego układu.

17) Wykazać, że miejscem geometrycznem punktów paraboloidy hiperbolicznej, przez które przechodzą dwie tworzące do siebie prostopadłe jest hiperbola.

18) Wykazać, że rzuty prostych paraboloidy hiperbolicznej: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ na płaszczyznę XOZ są styczne do paraboli, podług której płaszczyzna XOZ przecina tę powierzchnię.

19) Wykazać, że proste jednego układu tworzących, należących do paraboloidy hiperbolicznej są równoległe do jednej płaszczyzny.

20) Dowieść, że paraboloida hiperboliczna ma dwie płaszczyzny kierownicze, do których jej proste tworzące są równoległe.

21) Okazać, że powierzchnią powstałą przez ruch prostej, która przecina dwie proste wichrowate, a jest zarazem równoległa do pewnej stałej płaszczyzny, jest paraboloida hiperboliczna.

22) Okazać, że prosta ruchoma: $z=l$, $y=mx$, równoległa do XOY a przecinająca dwie proste, jedną o równaniach: $x=0$, $y=0$, drugą o równaniach: $y=b$, $z=ax$ utworzy paraboloidę hiperboliczną o równaniu: $yz=abx$.

23) Wykazać, że płaszczyzna styczna w punkcie: $P(x', y', z')$ paraboloidy hiperbolicznej zawiera dwie proste przez ten punkt powierzchni przechodzące.

24) Wyprowadzić równanie płaszczyzny stycznej i linii normalnej w punkcie $P(\xi, \eta, \zeta)$ paraboloidy hiperbolicznej: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$.

25) Wyznaczyć długość prostopadłej wykreślonej z wierzchołka paraboloidy hiperbolicznej na płaszczyznę styczną w punkcie $P(\xi, \eta, \zeta)$ tej powierzchni.

26) Wykazać, że suma rzutów na oś paraboloidy hiperbolicznej, trzech prostopadłych wykreślonych z wierzchołka paraboloidy na trzy płaszczyzny styczne do siebie prostopadłe, jest wielkością stałą.

27) Okazać, że miejscem geometrycznem wierzchołka kąta bryłowego trójściennego i prostokątnego opisanego na paraboloidzie hiperbolicznej jest płaszczyzna prostopadła do osi tejże paraboloidy.

28) Wykazać, że przez każdy punkt przestrzeni można wyprowadzić w ogólności pięć normalnych do paraboloidy hiperbolicznej.

29) Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele układów ukośnokątnych, do których odniesione równanie paraboloidy hpierbolicznej otrzymuje kształt: $\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}=2z$.

30) Wykazać, że prosta jednego układu tworzących paraboloidy hiperbolicznej poruszająca się po dwu stałych prostych drugiego układu wyznacza na nich odcinki proporcyonalne.

31) Wykazać, że paraboloidzie hiperbolicznej odpowiadają dwie płaszczyzny asymptotyczne.

32) Podać warunek, pod którym dane trzy proste wichrowate będą trzema tworzącemi tego samego układu prostych paraboloidy hiperbolicznej.

33) Wykazać, że punkta paraboloidy hiperbolicznej: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{4z}{c}$, przez które przechodzą dwie tworzące do siebie prostopadłe leżą na płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny XOY w odstępie równym $\frac{b^2-a^2}{c}$.

34) Wyprowadzić równanie powierzchni powstałej przez ruch linii prostej, któraby zawsze przecinała linię prostą: $x+y=0$, $z=0$, pod kątem prostym i przechodziła przez obwód paraboli: $x^2=2pz$, $y=0$.

35) Wyznaczyć miejsce geometryczne środków cięciw powierzchni: $Ax^2+By^2+2Cz+D=0$ równoległych do prostej: $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

36) Wyprowadzić warunek, pod jakim płaszczyzna: $Ax+By+Cz+D=0$ jest płaszczyzną styczną powierzchni:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0.$$

37) Wyprowadzić równanie powierzchni powstałej przez ruch linii prostej po trzech prostych:

$$L_1\begin{cases}x=0\\z=a\end{cases},\quad L_2\begin{cases}y=0\\z=b\end{cases},\quad L_3\begin{cases}x=my\\z=c\end{cases}$$

równoległych do płaszczyzny XOY.

38) Wyprowadzić równanie powierzchni powstałej przez ruch prostej, któraby przecinała dwie proste: $L_1\begin{cases}x=0\\z=a\end{cases}$, $L_2\begin{cases}y=0\\z=-a\end{cases}$ i była równoległą do płaszczyzny:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p.$$

39) Wyznaczyć miejsce geometryczne punktu, którego odległości od danych dwu prostych wichrowatych byłyby zawsze jednakowe.

40) Wykazać, że miejsce geometryczne punktu przecięcia się trzech prostych stycznych do paraboloidy: $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 2z$, a do siebie prostopadłych tworzy paraboloida obrotowa: $x^2+y^2-2(a^2 \pm b^2)z = \pm a^2b^2$.

41) Wykazać, że równanie: $(ax+by)^2 = cx+2abzy$ przedstawia paraboloidę elliptyczną.

42) Wykazać, że równanie: $4z^2-5y^2+8z-20y+2x=0$ przedstawia paraboloidę hiperboliczną.

43) Wykazać, że równanie: $x^2+y^2+z^2-2xy=8$ przedstawia walec elliptyczny.

44) Wykazać, że równanie: $z^2-6y-8x=0$ przedstawia walec paraboliczny.

45) Wyznaczyć środek krzywej przekroju powierzchni: $ax^2+by^2+2cx+2dy+2ez+f=0$ płaszczyzną: $Ax+By+Cz+D=0$.

46) Jeżeli dwa odcinki w przestrzeni względem siebie wichrowate podzielimy na równe części, dowieść, że proste łączące odpowiednie punkta będą tworzącemi paraboloidy hiperbolicznej.

47) Wykazać, że tworząca paraboloidy hiperbolicznej: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ przechodząca przez jej wierzchołek jest tą tworzącą układu, na której tworzące drugiego układu wyznaczają najmniejsze odcinki.

48) Wykazać, że równanie: $4x^2-2y^2-12z^2+12yz+4xy+4x+2y+8z=0$ przedstawia paraboloidę hiperboliczną i wyznaczyć oba układy jej prostych tworzących.

49) Wyznaczyć kąt α, jaki tworzą dwie tworzące przechodzące przez punkt: $P(\xi, 0, \zeta)$ paraboloidy hiperbolicznej: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$.

50) Wykazać, że punkta paraboloidy: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$, przez które przechodzą tworzące do siebie prostopadłe leżą na płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny XOY w odległości: $d = \frac{b^2-a^2}{2}$.

Rozwiązania XLIX. 4) $\frac{x\xi}{a} + \frac{y\eta}{b} - z - \zeta = 0$. 5) $x-\xi = -\frac{x}{a}(z-\zeta)$, $y-\eta = -\frac{y}{b}(z-\zeta)$. 11) $A^2a - B^2b = C^2(b-a)$. 34) $x^2-y^2=2pz$. 35) $Aax+Bby+Cc=0$. 36) $a_{11}(Ca_{24}-Aa_{34})^2+a_{22}(Ca_{14}-a_{22}a_{34})^2 = 2a_{11}a_{22}C\left(\frac{a_{44}C}{2}-a_{34}D\right)$. 37) $(a-c)x(z-b)=(b-c)y(z-a)$. 38) $x(z+a)\cos\alpha+y(z-a)\cos\beta+(z^2-a^2)\cos\gamma=0$. 39) Paraboloida hiperboliczna. 45) $\frac{ax+c}{A} = \frac{by+d}{B} = \frac{c}{C}$, $Ax+By+Cz+D=0$. 48) $2x+y+1+(y-2z)\sqrt{3} = \lambda$, $2x+y+1-(y-2z)\sqrt{3} = \frac{1}{\lambda}(1-3z)$, $2x+y+1+(y-2z)\sqrt{3} = \mu(1-3z)$, $2x+y+1-(y-2z)\sqrt{3} = \frac{1}{\mu}$. 49) $\cos\alpha = \frac{a^2-b^2-2z}{a^2+b^2+2\zeta}$.

Literatura. Matematyka kurs I podług wykładów Dra Placyda Dziwińskiego w ck. szkole politechnicznej we Lwowie w roku naukowym 1886. Część II. B. Geometrya analityczna w przestrzeni. We Lwowie. Autografia nakładem słuchaczy matematyki, 1886. I. Todhunter. Examples of analytical geometry of three dimensions. London 1878.

Tematy do rozprawek naukowych.

1. Znamiona i własności paraboloidy elliptycznej.
2. Znamiona i własności paraboloidy hiperbolicznej.
3. Znamiona i własności powierzchni walcowych drugiego rzędu.

Wykład L.

Ogniska i kierownice powierzchni drugiego rzędu i powierzchnie spółogniskowe.

1. Równanie kuli. Określając kulę jako miejsce geometryczne punktów (x, y, z), których odległość od pewnego stałego punktu $C(\xi, \eta, \zeta)$, zwanego środkiem kuli, jest stałą r, otrzymujemy ogólne równanie kuli w postaci:

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2=r^2 \tag{1}$$

czyli w postaci rozwiniętej:

$$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0, \tag{2}$$

gdy położymy: $a=-\xi$, $b=-\eta$, $c=-\zeta$, $d=\xi^2+\eta^2+\zeta^2-r^2$.

Ogólne równanie kuli jest więc szczególną postacią ogólnego równania stopnia drugiego, kształtu:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0,$$

w którem: $a_{11}=a_{22}=a_{33}$, $a_{12}=a_{13}=a_{23}=0$.

Jeżeli początek układu przyjmiemy na powierzchni kuli, wtedy ogólne równanie kuli możemy sprowadzić do postaci:

$$x^2+y^2+z^2-2(Ax+By+Cz)=0, \tag{3}$$

a jeżeli początek układu przyjmiemy w środku kuli otrzymujemy równanie najprostsze kuli w postaci:

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

2. Potęga punktu względem kuli. Jeżeli x, y, z przedstawiają spółrzędne dowolnego punktu M w przestrzeni, natenczas prawa strona równania kuli sprowadzonego do zera w postaci:

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2-r^2=0, \tag{5}$$

przedstawia kwadrat odległości tego punktu od środka kuli $C(\xi, \eta, \zeta)$ zmniejszony o kwadrat promienia. Różnica ta jest widocznie równa kwadratowi długości stycznej MT wykreślonej do kuli z punktu $M(x, y, z)$.

Prawa strona równania kuli kształtu (5) przedstawia więc dla każdego punktu $M(x, y, z)$ przestrzeni kwadrat długości stycznej wyprowadzonej z tego punktu M do kuli, zwany częstokroć potęgą punktu M względem kuli. Potęga punktu położonego zewnątrz kuli jest dodatnią, potęga punktu wewnętrznego ujemną, a potęga punktu na kuli jest ze względu na tę kulę zerem.

3. Ilość kul w przestrzeni. Ogólne równanie kuli zawiera cztery dowolne parametry, potrzeba zatem czterech warunków geometrycznych, z którychby każdy prowadził do jednego równania między tymi parametrami, ażeby kula była zupełnie wyznaczoną.

Istnieje więc ∞^4 kul w przestrzeni, ∞^3 kul o stałym promieniu, a ∞^1 kul o stałym środku. Cztery dane punkta: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$ wyzna-

czają zupełnie kulę przez nie przechodzącą. Równanie kuli, przechodzącej przez te punkta możemy, opierając się na równaniu (2), przedstawić w postaci wyznacznika piątego rzędu

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2, & x, & y, & z, & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2, & x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2, & x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2, & x_3, & y_3, & z_3, & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2, & x_4, & y_4, & z_4, & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (6)$$

4. **Układ dwóch kul.** Weźmy pod uwagę dwie kule, jedną o środku $C_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ i promieniu r_1, drugą o środku $C_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ i promieniu r_2, natenczas otrzymujemy równania.

$$K_1=(x-\xi_1)^2+(y-\eta_1)^2+(z-\zeta_1)^2-r_1^2=0, \quad K_2=(x-\xi_2)^2+(y-\eta_2)^2+(z-\zeta_2)^2-r_2^2=0.$$

Odejmując od siebie te równania, otrzymujemy równanie pierwszego stopnia kształtu:

$$K_1-K_2=0, \qquad (7)$$

czyli:

$$(\xi_2-\xi_1)x+(\eta_2-\eta_1)y+(\zeta_2-\zeta_1)z-\frac{\xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2-\xi_1^2-\eta_1^2-\zeta_1^2}{2}=0, \qquad (7')$$

które przedstawia płaszczyznę, zawierającą punkta wspólne obu kulom.

Płaszczyzna ta zawiera też punkta, które mają jednakowe potęgi względem obu kul danych i nazywa się płaszczyzną pierwiastną tych dwu kul (Por. Tom I. Wykład XIII, art. 10. str. 117).

Prosta łącząca środki tych kul ma równanie:

$$\frac{x-\xi_1}{\xi_2-\xi_1}=\frac{y-\eta_1}{\eta_2-\eta_1}=\frac{z-\zeta_1}{\zeta_2-\zeta_1}, \qquad (8)$$

jest zatem prostopadłą do płaszczyzny pierwiastnej tychże kul.

5. **Układ trzech kul.** Trzy dane kule $K_1=0$, $K_2=0$, $K_3=0$ prowadzą do trzech płaszczyzn pierwiastnych o równaniach:

$$K_1-K_2=0, \; K_2-K_3=0, \; K_3-K_1=0. \qquad (9)$$

Płaszczyzny te przecinają się podług jednej prostej o równaniach:

$$K_1=K_2=K_3, \qquad (10)$$

która jest miejscem geometrycznem punktów, mających tę samę potęgę względem trzech kul danych i nazywa się osią pierwiastną tychże trzech kul. Oś ta jest prostopadłą do płaszczyzn środków tych kul i zawiera punkta, z których wyprowadzone styczne do kul mają jednakową długość.

6. **Układ czterech kul.** Cztery dane kule $K_1=0$, $K_2=0$, $K_3=0$, $K_4=0$ prowadzą do czterech osi pierwiastnych przecinających się w jednym punkcie:

$$K_1=K_2=K_3=K_4, \qquad (11)$$

zwanym środkiem pierwiastnym czterech kul danych. Punkt ten ma tę samą potęgę względem każdej z tych kul, t. z. styczne do kul z niego wyprowadzone są wszystkie sobie równe. Jest on zatem środkiem kuli zawierającej wszystkie punkta, w których styczne dotykają się tych czterech kul.

7. **Równanie koła w przestrzeni.** Przekrój kuli dowolną płaszczyzną. przechodzącą przez środek tej kuli wyznacza koło o promieniu równym promieniowi tej kuli. Jeżeli zatem $C(\xi, \eta, \zeta)$ jest środkiem, a r promieniem kuli, natenczas koło o środku $C(\xi, \eta, \zeta)$ i promieniu r wyznacza się dwoma równaniami kształtu:

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2=r^2, \quad A(x-\xi)+B(y-\eta)+C(z-\zeta)=0. \qquad (12)$$

Równania te mają sześć parametrów dowolnych ξ, η, ζ, r, $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$, cechujących położenie i wielkość koła. Istnieje zatem w ogólności ∞^6 kół w przestrzeni trójwymiarowej.

Jeżeli początek układu przyjmiemy w środku kuli, a więc $\xi=\eta=\zeta=0$, tedy równania koła przyjmą kształt:

$$x^2+y^2+z^2=r^2, \quad Ax+By+Cz=0 \qquad (13)$$

przedstawiają przy zmiennych parametrach $r, \frac{A}{C}, \frac{B}{C}$, w ogóle ∞^3 kół współśrodkowych o środku leżącym w początku układu.

8. Ogniska i kierownice danej powierzchni rzędu drugiego. Jeżeli powierzchnia drugiego rzędu:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0 \quad (14)$$

da się przedstawić w postaci:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2+(Ax+By+Cz+D)(A'x+B'y+C'z+D')=0, \quad (15)$$

natenczas nazywamy punkt o spółrzędnych α, β, γ ogniskiem, a prostą określoną równaniami:

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad A'x+B'y+C'z+D'=0,$$

o spółczynnikach rzeczywistych lub urojonych odpowiednią kierownicą danej powierzchni.

Płaszczyzny: $Ax+By+Cz+D=0$, $A'x+B'y+C'z+D'=0$ przedstawiają tedy płaszczyzny równoległe do przekrojów kołowych danej powierzchni. Jeżeli one są urojone, wtedy możemy zastąpić iloczyn:

$$(Ax+By+Cz+D)(A'x+B'y+C'z+D')$$

przez sumę kwadratów, a więc równanie (15) przedstawić w postaci:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=(Lx+My+Nz+P)^2+(L'x+M'y+N'z+P')^2. \quad (16)$$

9. Ogniska w powierzchniach środkowych drugiego rzędu. Weźmy pod uwagę powierzchnię środkową:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Jeżeliby ta powierzchnia miała ognisko (α, β, γ), to jej równanie powinnoby się sprowadzić do postaci:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=(Ax+By+Cz+D)(A'x+B'y+C'z+D').$$

Ponieważ płaszczyzny kołowe powierzchni środkowej są równoległe do jednej z osi powierzchni, przeto możemy iloczyn:

$$(Ax+By+Cz+D)(A'x+B'y+C'z+D')$$

zastąpić przez jedną z sum:

$$A(x-\xi)^2+B(y-\eta)^2, \quad A(x-\xi)^2+C(z-\zeta)^2, \quad B(y-\eta)^2+C(z-\zeta)^2,$$

otrzymujemy tedy, przyjmując przekroje kołowe równoległe do osi z-ów, równanie:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=A(x-\xi)^2+B(y-\eta)^2, \quad (17)$$

które miałoby przedstawiać tę samą powierzchnię, co równanie:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \quad (18)$$

Przedewszystkiem otrzymujemy w tym celu z powodu, że środek powierzchni jest początkiem układu, warunki:

$$\alpha=A\xi, \quad \beta=B\eta, \quad \gamma=0,$$

wobec tego równanie (17) przyjmuje kształt:

$$(1-A)x^2+(1-B)y^2+z^2=\frac{1-A}{A}\alpha^2+\frac{1-B}{B}\beta^2,$$

[illegible] równości:

$$[illegible] = \frac{1-A}{A}\alpha^2 + \frac{1-B}{B}\beta^2,$$

[illegible]

$$[illegible] \frac{b^2-c^2}{b^2}, \quad 1-A=\frac{c^2}{a^2}, \quad 1-B=\frac{c^2}{b^2},$$

$$[illegible]\alpha^2 + \frac{1-B}{B}\beta^2 = \frac{c^2}{a^2-c^2}\alpha^2 + \frac{c^2}{b^2-c^2}\beta^2,$$

[illegible] ogniska (α, β, γ) równania:

$$\frac{\alpha^2}{a^2-c^2} + \frac{\beta^2}{b^2-c^2} = 1, \quad \gamma=0 \tag{19}$$

[illegible] powierzchni środkowej drugiego rzędu składają się więc z trzech [illegible] drugiego rzędu, zwanych **krzywemi ogniskowemi**, położo[illegible] płaszczyznach głównych tej powierzchni, a określonych równa[illegible]

$$z=0, \quad \frac{x^2}{a^2-c^2} + \frac{y^2}{b^2-c^2} = 1; \quad y=0, \quad \frac{x^2}{a^2-b^2} + \frac{z^2}{c^2-b^2} = 1;$$

$$x=0, \quad \frac{y^2}{b^2-a^2} + \frac{z^2}{c^2-a^2} = 1. \tag{20}$$

Punkta kołowe powierzchni należą do krzywych ogniskowych, spółrzędne punktów kołowych na XOZ, oznaczone równaniami:

$$y=0, \quad x=\pm a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}, \quad z=\pm c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}},$$

czynią mianowicie zadość równaniu krzywej ogniskowej: $\frac{x^2}{a^2-b^2} + \frac{z^2}{c^2-b^2} = 1$, leżącej na płaszczyźnie XOZ.

10. Wnioski. Jeżeli daną powierzchnią środkową jest ellipsoida: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, gdzie $a > b > c$, natenczas, na mocy równań (20) jedną krzywą ogniskową jest ellipsa na płaszczyznie XOY (fig. 208), drugą hiperbola na płaszczyźnie XOZ (fig. 209), trzecią ellipsa urojona na płaszczyźnie YOZ (fig. 210).

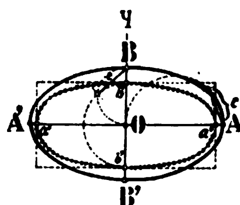


Fig. 208.

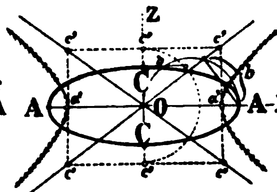


Fig. 209.

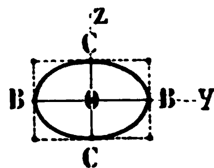
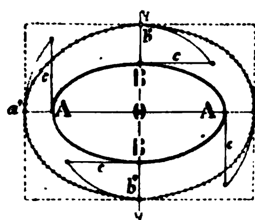


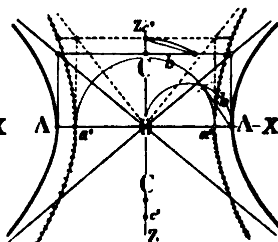
Fig. 210.

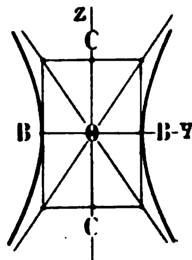
Jeżeli daną powierzchnią srodkową jest hiperboloida o jednej powłoce: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, przyczem $a > b$, natenczas równania krzywych ogniskowych przedstawiają się w postaci

$$z=0, \quad \frac{x^2}{a^2+c^2} + \frac{y^2}{b^2+c^2} = 1; \quad y=0, \quad \frac{x^2}{a^2-b^2} - \frac{z^2}{b^2+c^2} = 1; \quad x=0, \quad \frac{y^2}{q^2-a^2} - \frac{z^2}{c^2+a^2} = 1.$$

..a z nich jest ellipsą na płaszczyźnie XOY (fig. 211), druga hiperbolą na XOZ (fig. 212) trzecia ellipsą urojoną na YOZ (fig. 213).


Fig. 211.


Fig. 212.

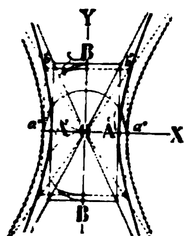

Fig. 213.

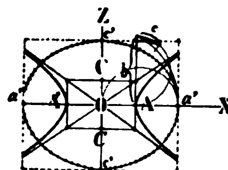
Jeżeli daną powierzchnią środkową jest hiperboloida o dwu powłokach: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, przyczem $a^2>b^2>c^2$, wtedy krzywe ogniskowe mają równania:

$$z=0,\quad \frac{x^2}{a^2+c^2}-\frac{y^2}{b^2-c^2}=1,$$

$$y=0,\quad \frac{x^2}{a^2+b^2}+\frac{z^2}{b^2-c^2}=1,$$

$$x=0,\quad \frac{y^2}{a^2+b^2}+\frac{z^2}{a^2+c^2}=-1;$$


Fig. 214.


Fig. 215.

pierwsza z nich jest hiperbolą na XOY (fig. 214), druga ellipsą na XOZ (fig. 215), trzecia ellipsą urojoną.

Jeżeli daną powierzchnią środkową jest stożek: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, przyczem $a^2>b^2>c^2$, wtedy krzywe ogniskowe mają równania:

$$z=0,\quad \frac{x^2}{a^2+c^2}+\frac{y^2}{b^2+c^2}=0;\quad y=0,\quad \frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2+c^2}=0;\quad x=0,\quad -\frac{y^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{a^2+c^2}=0,$$

a z nich jest jedna tylko rzeczywistą, złożoną z pary prostych leżących na płaszczyźnie XOZ.

11. Kierownice powierzchni środkowych. Przekroje płaszczyzn rzeczywistych lub urojonych, określonych równaniami:

$$A(x-\xi)^2+B(y-\eta)^2=0,\quad A(x-\xi)^2+C(z-\zeta)^2=0,\quad B(y-\eta)^2+C(z-\zeta)^2=0, \tag{21}$$

wyznaczają odpowiednie kierownice powierzchni środkowych. Spółrzędne punktów, w których kierownice przecinają płaszczyzny główne powierzchni można wyrazić w funkcyach spółrzędnych α, β, γ odpowiedniego ogniska. Otrzymujemy mianowicie na mocy relacyj art. 9 następujące równania:

$$z=0,\quad \xi=\frac{a^2\alpha}{a^2-c^2},\quad \eta=\frac{b^2\beta}{b^2-c^2};\quad y=0,\quad \zeta=\frac{c^2\gamma}{c^2-b^2},\quad \xi=\frac{a^2\alpha}{a^2-b^2};$$

$$x=0,\quad \eta=\frac{b^2\beta}{b^2-a^2},\quad \zeta=\frac{c^2\gamma}{c^2-a^2}. \tag{22}$$

Z równań tych wynika, że:

$$\frac{\xi\sqrt{a^2-c^2}}{a^2}=\frac{\alpha}{\sqrt{a^2-c^2}},\quad \frac{\eta\sqrt{b^2-c^2}}{b^2}=\frac{\beta}{\sqrt{b^2-c^2}},$$

zatem równanie:

$$\frac{a^2-c^2}{a^4}\xi^2+\frac{b^2-c^2}{b^4}\eta^2=1, \tag{23}$$

przedstawiające miejsce geometryczne śladów, jakie kierownice powierzchni wyznaczają na płaszczyźnie XOY, w postaci krzywej rzędu drugiego; kierownice tworzą zatem walec, którego podstawą jest krzywa rzędu drugiego, powyżej otrzymana. Walec taki nazywamy w a l c e m k i e r o w n i c z y m. Każdej krzywej ogniskowej danej powierzchni drugiego rzędu odpowiada tedy oddzielny walec kierowniczy.

Równania trzech takich walców mają kolejno kształty:

$$\frac{a^2-c^2}{a^4}x^2+\frac{b^2-c^2}{b^4}y^2=1,\quad \frac{b^2-a^2}{b^4}y^2+\frac{c^2-a^2}{c^4}z^2=1,\quad \frac{c^2-b^2}{c^4}z^2+\frac{a^2-b^2}{a^4}x^2=1. \tag{24}$$

Jeden z nich jest w przypadku ellipsoidy $a^2>b^2>c^2$ walcem elliptycznym, opartym o XOY, drugi walcem urojonym opartym o YOZ, trzeci walcem hiperbolicznym opartym o XOZ.

12. Biegunowa punktu (ξ, η) ze względu na krzywą: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ przekroju $z=0$, powierzchni: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (fig. 216) przedstawia się równaniem:

$$\frac{x\xi}{a^2}+\frac{y\eta}{b^2}=1;$$

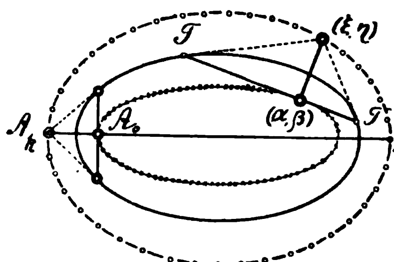


Fig. 216.

zastępując ξ, η przez ich wartości w spółrzędnych (α, β) ogniska pod (22) wyrażone, otrzymujemy równanie:

$$\frac{\alpha x}{a^2-c^2}+\frac{\beta y}{b^2-c^2}=1, \tag{25}$$

które przedstawia styczną w punkcie (α, β) krzywej ogniskowej:

$$\frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}=1,$$

leżącej na płaszczyźnie XOY.

A zatem: *Ślad kierownicy odpowiadającej ognisku (α, β) jest biegunem stycznej wykreślonej w tym punkcie krzywej ogniskowej ze względu na odpowiedni przekrój powierzchni.*

13. Prosta łącząca ognisko (α, β) ze śladem (ξ, η) odpowiedniej kierownicy (fig. 216) ma równanie: $\frac{x-\alpha}{\xi-\alpha}=\frac{y-\beta}{\eta-\beta}$.

Zastępując ξ, η przez ich wartości w spółrzędnych (α, β) ogniska pod (22) wyrażone, otrzymujemy równanie:

$$\frac{x-\alpha}{\frac{\alpha}{a^2-c^2}}=\frac{y-\beta}{\frac{\beta}{b^2-c^2}} \tag{26}$$

przedstawiające normalną w punkcie (α, β) krzywej ogniskowej:

$$\frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}=1.$$

Stąd wynika, że *prosta łącząca ognisko ze spodkiem odpowiedniej kierownicy jest normalną do krzywej ogniskowej w temże ognisku.*

Nietrudno wykazać, że płaszczyzna przesunięta przez ognisko powierzchni i odpowiednią kierownicę, przecina daną powierzchnię podług krzywej, która ma w tym punkcie swe ognisko, a w tej prostej swą kierownicę.

14. Ogniska w powierzchniach bezśrodkowych. Weźmy pod uwagę powierzchnię bezśrodkową, określoną równaniem:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z. \tag{27}$$

Jeżeliby ta powierzchnia miała ognisko (α, β, γ), równanie jej mogłoby się sprowadzić do jednej z postaci:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=A(x-\xi)^2+C(z-\zeta)^2, \tag{28}$$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=B(y-\eta)^2+C(z-\zeta)^2. \tag{29}$$

Z pierwszego równania otrzymujemy po stosownem uporządkowaniu wyrazów równanie drugiego stopnia w postaci:

$$(1-A)x^2+y^2+(1-C)z^2-2(\alpha-A\xi)x-2\beta y\;\;2(\gamma-C\zeta)z+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-A\xi^2-C\zeta^2=0,$$

które porównane z danem równaniem: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2z=0$ prowadzi do relacyj:

$$1-C=0,\quad \alpha-A\xi=0,\quad \beta=0,\quad a^2(1-A)=b^2=\gamma-C\zeta,\quad \alpha^2+\gamma^2=A\xi^2+C\zeta^2,$$

Z relacyj tych otrzymujemy.

$$C=1,\quad A=\frac{a^2-b^2}{a^2},\quad \xi=\frac{\alpha a^2}{a^2-b^2},\quad \zeta=\gamma-b^2,\quad \alpha^2+\gamma^2=\frac{\alpha^2a^2}{a^2-b^2}+(\gamma-b^2)^2,$$

przeto: $\alpha^2\left(1-\frac{a^2}{a^2-b^2}\right)=b^4-2b^2\gamma=b^2(b^2-2\gamma)$, czyli: $\frac{\alpha^2}{a^2-b^2}=2\gamma-b^2$,

a więc na wyznaczenie spółrzędnych (α, β, γ) odpowiedniego ogniska równania:

$$\beta=0,\quad \alpha^2=(a^2-b^2)(2\gamma-b^2).$$

Z tego wynika, że paraboloida elliptyczna: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ posiada jedną krzywą ogniskową określoną równaniami:

$$y=0,\quad x^2=(a^2-b^2)(2z-b^2), \tag{30}$$

które przedstawiają parabolę, leżącą na płaszczyźnie XOZ, zwróconą w dodatnim kierunku osi z-ów, gdy $a>b$ (fig. 217).

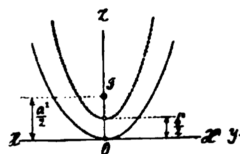


Fig. 217.

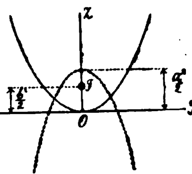


Fig. 218.

Podobnie znajdziemy z równania (29) warunki: $\alpha=0$, $\beta^2=(b^2-a^2)(2\gamma-a^2)$, z których wypływa, że paraboloida elliptyczna: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ posiada jeszcze drugą krzywą ogniskową określoną równaniami:

$$x=0,\quad y^2=(b^2-a^2)(2z-a^2), \tag{31}$$

które przedstawiają parabolę (fig. 218) położoną na płaszczyźnie YOZ, zwróconą w przypadku $a>b$ w ujemnym kierunku osi z-ów.

Zastępując w powyższych równaniach b^2 przez $-b^2$, otrzymujemy na wyznaczenie krzywych ogniskowych paraboloidy hiperbolicznej: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$, równania:

$$y=0,\quad x^2=(a^2+b^2)(2z+b^2);\quad x=0,\quad y^2=-(a^2+b^2)(2z-a^2), \tag{32}$$

przedstawiające dwie parabole, jedną na płaszczyźnie XOZ, drugą na płaszczyźnie YOZ.

15. Kierownice w powierzchniach bezśrodkowych. Przekroje płaszczyzn rzeczywistych lub urojonych określonych równaniami:

$$A(x-\xi)^2+C(z-\zeta)^2=0,\quad B(y-\eta)^2+C(z-\zeta)^2=0,$$

gdzie na podstawie art. 14: $A=\frac{a^2-b^2}{a^2}$, $B=\frac{b^2-a^2}{b^2}$, $C=1$ wyznaczają odpowiednie kierownice.

Spółrzędne punktów, w których te kierownice przecinają płaszczyzny główne powierzchni możemy wyrazić w funkcyach spółrzędnych α, β, γ odpowiedniego ogniska.

Otrzymujemy mianowicie:

$$y=0,\quad \xi=\frac{a^2\alpha}{a^2-b^2},\quad \zeta=\gamma;\quad x=0,\quad \eta=\frac{b^2\beta}{b^2-a^2},\quad \zeta=\gamma. \tag{33}$$

Uwzględniając równania krzywych ogniskowych, podane w art. 14, otrzymamy równania śladów odpowiednich kierownic w postaciach:

$$\eta=0,\quad \frac{a^2-b^2}{a^4}\xi^2=2\zeta-b^2;\quad \xi=0,\quad \frac{b^2-a^2}{b^4}\eta^2=2\zeta-a^2;$$

kierownice odpowiednie krzywym ogniskowym powierzchni bezśrodkowej $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ tworzą zatem walce paraboliczne o równaniach:

$$(a^2-b^2)x^2=2a^4z-a^4b^2,\quad (b^2-a^2)y^2=2b^4z-a^2b^4, \tag{34}$$

jako walce kierownicze.

16. Ogniska pępkowe i ogniska modułowe powierzchni. Jeżeli równanie powierzchni drugiego rzędu da się sprowadzić do postaci:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=(Ax+By+Cz+D)(A'x+B'y+C'z+D'), \tag{35}$$

w której spółczynniki: A, B, C, D, A', B', C', D' są rzeczywiste, wówczas pierwsza strona powyższej równości przedstawia kwadrat odległości r dowolnego punktu: $P(x, y, z)$ powierzchni od ogniska: $F(\alpha, \beta, \gamma)$, które nazywamy ogniskiem pępkowem tej powierzchni, druga strona podzielona przez:

$$k=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,.\,\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}$$

przedstawia iloczyn odległości d i d' punktu $P(x, y, z)$ powierzchni od obu płaszczyzn: $Ax+By+Cz+D=0$ i $A'x+B'y+C'z+D'=0$, zwanych płaszczyznami kierowniczemi powierzchni; powyższe równanie sprowadza się więc do postaci:

$$r^2=k.\frac{dd'}{\alpha},\quad \text{czyli:}\ \frac{r^2}{dd'}=k. \tag{36}$$

To znaczy: *Kwadrat odległości każdego punktu powierzchni drugiego rzędu od jej ogniska pępkowego pozostaje w stałym stosunku do iloczynu odległości tego punktu od dwu stałych płaszczyzn.*

Jeżeli równanie powierzchni drugiego rzędu da się sprowadzić do postaci:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=(Ax+By+Cz+D)(A'x+B'y+C'z+D'),$$

o spółczynnikach urojonych sprzężonych:

$$A=L+L'i,\quad B=M+M'i,\quad C=N+N'i,\quad D=P+P'i,$$
$$A'=L-L'i,\quad B'=M-M'i,\quad C'=N-N'i,\quad D'=P-P'i,$$

a więc do postaci:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=(Lx+My+Nz+P)^2+(L'x+M'y+N'z+P')^2, \quad (37)$$

o spółczynnikach rzeczywistych: L, M, N, P, L', M', N', P', wówczas prawa strona równania przedstawia kwadrat odległości r dowolnego punktu: $P(x, y, z)$ powierzchni od ogniska $F(\alpha, \beta, \gamma)$, które nazywamy ogniskiem modułowem tej powierzchni; druga strona równości podzielona przez pewien stały czynnik przedstawia kwadrat oddalenia d punktu $P(x, y, z)$ powierzchni od prostej, określonej równaniami:

$$Lx+My+Nz+P=0,\quad L'x+M'y+N'z+P'=0,$$

zwanej kierownicą modułową, mierzonego równolegle do pewnej płaszczyzny kierowniczej; powyższe równanie sprowadza się więc do postaci:

$$r^2=k.d^2, \text{ czyli: } \frac{r}{d}=\sqrt{k}. \quad (38)$$

To znaczy: *Odległość punktu powierzchni drugiego rzędu od jej ogniska modułowego pozostaje w stałym stosunku do jego oddalenia od kierownicy modułowej, mierzonego równolegle do pewnej płaszczyzny kierowniczej.*

17. Uwaga o ogniskach pępkowych powierzchni drugiego rzędu. Szukając punktu, któryby miał tę własność, że kwadrat jego odległości od pewnego stałe go punktu (α, β, γ) pozostawałby w stałym stosunku do iloczynu jego odległości od dwu stałych płaszczyzn:

$$Ax+By+Cz+D=0,\quad A'x+B'y+C'z+D'=0,$$

otrzymamy jako miejsce geometryczne szukanego punktu pewną powierzchnię drugiego rzędu.

Ten stały stosunek nazywamy modułem pępkowym, stały punkt ogniskiem pępkowem, a dwie stałe płaszczyzny płaszczyznami kierowniczemi pępkowemi, ich przekrój odpowiednią kierownicą pępkową.

Miejsce geometryczne szukanego punktu zawiera w sobie dziesięć stałych dowolnych, a mianowicie trzy spółrzędne α, β, γ, cechujące położenie przyjętego ogniska, po trzy parametry, cechujące położenie każdej z dwu płaszczyzn kierowniczych i przyjęty stosunek ε, a więc o jeden parametr więcej, jak ich potrzeba do wyznaczenia pewnej powierzchni drugiego rzędu.

Dana powierzchnia drugiego rzędu może więc mieć w ogólności nieskończenie wiele ognisk pępkowych, tworzących linię krzywą zwaną pępkową krzywą ogniskową, nieskończenie wiele kierownic równoległych, tworzących pępkowy walec kierowniczy, którego ślad na płaszczyźnie głównej powierzchni nazywamy pępkową krzywą kierowniczą.

18. Uwaga o ogniskach powierzchni modułowych drugiego rzędu. Szukając punktu, którego oddalenie od pewnego stałego punktu $F(\alpha, \beta, \gamma)$ pozostawałoby w stałym stosunku do oddalenia tegoż punktu od pewnej stałej prostej, mierzonego równolegle do stałej płaszczyzny, otrzymamy jako miejsce geometryczne szukanego punktu pewną pewierzchnię drugiego rzędu.

Ten stały stosunek nazywamy modułem, stały punkt ogniskiem modułowem, stałą prostą nazywamy kierownicą modułową, a stałą płaszczyznę płaszczyzną kierowniczą otrzymanej tej powierzchni.

Miejsce geometryczne szukanego punktu zawiera w sobie znowu dziesięć stałych dowolnych, a mianowicie trzy spółrzędne α, β, γ przyjętego ogniska, cztery parametry przyjętej kierownicy, dwa stosunki kierownicze przyjętej płaszczyzny kierowniczej i przyjęty stosunek ε, a więc także o jeden parametr więcej, jak ich potrzeba do wyznaczenia powierzchni rzędu drugiego.

Dana powierzchnia drugiego rzędu ma więc w ogólności nieskończenie wiele ognisk modułowych, tworzących pewne linie krzywe, zwane modułowemi krzywemi ogniskowemi i nieskończenie wiele kierownic równoległych tworzących pewną powierzchnię walcową, zwaną modułowym walcem kierowniczym, którego ślad na płaszczyźnie głównej danej powierzchni nazywamy modułową krzywą kierowniczą.

19. Powierzchnie spółogniskowe. Dwie powierzchnie nazywamy spółogniskowemi, jeżeli ich przekroje główne mają wspólne ogniska rzeczywiste lub urojone, innemi słowy, jeżeli przy wspólnym środku mają jednakowe kierunki osi głównych, a kwadraty ich osi różnią się o stałą wielkość.

Niech będą więc równania:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{i} \quad \frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1$$

równaniami dwu powierzchni spółogniskowych, tedy między ich osiami zachodzą relacye:

$$a^2-a'^2=b^2 \quad b'^2=c^2-c'^2=\lambda, \text{ czyli: } a'^2=a-\lambda,\ b'^2=b^2-\lambda,\ c'^2=c^2-\lambda.$$

Równanie:

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1, \tag{38}$$

przedstawia zatem przy dowolnym parametrze λ wszystkie powierzchnie spółogniskowe z powierzchnią: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

20. Powierzchnie spółogniskowe z ellipsoidą, przechodzące przez dany punkt przestrzeni. Niech będzie dany punkt $P(\xi, \eta, \zeta)$ i dana ellipsoida: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$ Wszystkie powierzchnie z nią spółogniskowe określone są równaniem:

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1.$$

Jeżeliby te powierzchnie miały przechodzić przez punkt $P(\xi, \eta, \zeta)$, wówczas na wyznaczenie parametru λ otrzymamy równanie:

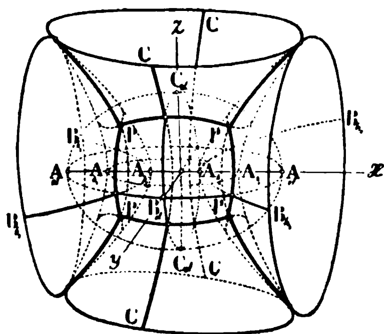


Fig. 219.

$$\frac{\xi^2}{a^2-\lambda}+\frac{\eta^2}{b^2-\lambda}+\frac{\zeta^2}{c^2-\lambda}=1, \tag{39}$$

czyli:

$$(\lambda-a^2)(\lambda-b^2)(\lambda-c^2)+\xi^2(\lambda-b^2)(\lambda-c^2)+$$
$$+\eta^2(\lambda-c^2)(\lambda-a^2)+\zeta^2(\lambda-a^2)(\lambda-b^2)=0.$$

Otrzymane równanie trzeciego stopnia ze względu na λ dostarcza trzech pierwiastków rzeczywistych. Jeżeli bowiem przyjmiemy, że $a^2>b^2>c^2$, natenczas, kładąc w wielomianie równania na λ, kolejno a^2, b^2, c^2, $-\infty$, otrzymamy szereg wartości tego wielomianu o znakach $+$, $-$, $+$, $-$, z czego wynika, że istnieją na λ trzy wartości rzeczywiste λ_1, λ_2, λ_3, przyczem $a^2>\lambda_1>b^2$, $b^2>\lambda_2>c^2$, $c^2>\lambda_3>-\infty$, wobec tego różnice $a^2-\lambda$, $b^2-\lambda$, $c^2-\lambda$ będą miały, gdy $\lambda=\lambda_1$, znaki $+$, $-$, $-$, gdy $\lambda=\lambda_2$ znaki $+$, $+$, $-$, gdy $\lambda=\lambda_3$ znaki $+$, $+$, $+$.

Przez dany punkt przestrzeni przechodzą zatem trzy powierzchnie spółogniskowe z daną ellipsoidą, z tych jest jedna ellipsoidą, jedna hiperboloidą o jednej powłoce, a jedna hiperboloidą o dwóch powłokach (fig. 219).

21. Normalne do trzech powierzchni spółogniskowych, przechodzących przez dany punkt przestrzeni. Niech będzie $P(\xi, \eta, \zeta)$ punktem ellipsoidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, wspólnym z powierzchnią spółogniskową:

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1,$$

natenczas otrzymujemy równania warunkowe:

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1, \quad \frac{\xi^2}{a^2-\lambda}+\frac{\eta^2}{b^2-\lambda}+\frac{\zeta^2}{c^2-\lambda}=1,$$

które odjęte od siebie dają tożsamość:

$$\frac{\xi^2}{a^2(a^2-\lambda)}+\frac{\eta^2}{b^2(b^2-\lambda)}+\frac{\zeta^2}{c^2(c^2-\lambda)}=0. \tag{40}$$

Oznaczając przez λ, μ, ν kierunek normalnej w punkcie $P(\xi, \eta, \zeta)$ ellipsoidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, a przez λ', μ', ν' kierunek normalnej w punkcie $P(\xi, \eta, \zeta)$ powierzchni spółogniskowej: $\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1$, otrzymamy szereg stosunków:

$$\frac{\cos\lambda}{\frac{\xi}{a^2}}=\frac{\cos\mu}{\frac{\eta}{b^2}}=\frac{\cos\nu}{\frac{\zeta}{c^2}}=\frac{1}{k}, \qquad \frac{\cos\lambda'}{\frac{\xi}{a^2-\lambda}}=\frac{\cos\mu'}{\frac{\eta}{b^2-\lambda}}=\frac{\cos\nu'}{\frac{\zeta}{c^2-\lambda}}=\frac{1}{k'},$$

z których wynika, że:

$$\frac{\xi}{a^2}=k\cos\lambda, \quad \frac{\eta}{b^2}=k\cos\mu, \quad \frac{\zeta}{c^2}=k\cos\nu,$$

$$\frac{\xi}{a^2-\lambda}=k'\cos\lambda', \quad \frac{\eta}{b^2-\lambda}=k'\cos\mu', \quad \frac{\zeta^2}{c^2-\lambda}=k'\cos\nu'.$$

Wobec tego równanie (40) sprowadza się do postaci:

$$\cos\lambda\cos\lambda'+\cos\mu\cos\mu'+\cos\nu\cos\nu'=0,$$

co dowodzi, że *normalne wykreślone w punkcie wspólnym trzem powierzchniom współogniskowym tworzą układ prostych do siebie prostopadłych.*

22. Powierzchnie spółogniskowe z daną powierzchnią bezśrodkową. Niech będzie daną paraboloida elliptyczna, określona równaniem:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2z=0, \tag{41}$$

natenczas równanie kształtu:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}-2z-\lambda=0, \tag{42}$$

o dowolnym parametrze λ przedstawia układ powierzchni spółogniskowych z daną paraboloidą.

Przekroje główne tych powierzchni określone równaniami:

$$x=0, \quad y^2=2(b^2+\lambda)z+\lambda(b^2+\lambda), \tag{43}$$

$$y=0, \quad x^2=2(a^2+\lambda)z+\lambda(a^2+\lambda), \tag{44}$$

mają te same ogniska, co przekroje główne danej paraboloidy.

Pierwszy przekrój jest bowiem parabolą, która ma swój wierzchołek na osi OZ w odległości $-\frac{\lambda}{2}$ od początku układu a odległość jej ogniska od początku: $\frac{b^2+\lambda}{2}-\frac{\lambda}{2}=\frac{b^2}{2}$ jest równa takiejże odległości odpowiedniego przekroju głównego paraboloidy, t. j. paraboli $y^2=2b^2x$. To samo tyczy się drugiego przekroju głównego, określonego równaniem (44).

Ogniska przekrojów głównych powierzchni, określonych równaniem (42) przystają więc do ognisk głównych przekrojów danej paraboloidy.

Powierzchnie spółogniskowe są, jak się okazuje z równania (42), zawsze paraboloidami elliptycznemi z wyjątkiem przypadku, gdy parametr λ otrzymuje wartości leżące między a^2 i b^2.

Dane powierzchnie spółogniskowe z paraboloidą: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$, przechodzące przez dany punkt $P(\xi, \eta, \zeta)$ przestrzeni określone równaniami:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda_1}+\frac{y^2}{b^2+\lambda_1}-2z-\lambda_1=0, \quad \frac{x^2}{a^2+\lambda_2}+\frac{y^2}{b^2+\lambda_2}-2z-\lambda_2=0,$$

mają w tym punkcie płaszczyzny styczne o równaniach:

$$\frac{x\xi}{a^2+\lambda_1}+\frac{y\eta}{b^2+\lambda_1}-(z+\zeta)-\lambda_1=0, \quad \frac{x\xi}{a^2+\lambda_2}+\frac{y\eta}{b^2+\lambda_2}-(z+\zeta)-\lambda_2=0,$$

Płaszczyzny te są widocznie do siebie prostopadłe, gdyż sprawdza się tu warunek prostopadłości:

$$\frac{\xi^2}{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)}+\frac{\eta^2}{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)}+1=0.$$

Skoro bowiem:

$$\frac{\xi^2}{a^2+\lambda_1}+\frac{\eta^2}{b^2+\lambda_1}=2\zeta+\lambda_1, \quad \frac{\xi^2}{a^2+\lambda_2}+\frac{\eta^2}{b^2+\lambda_2}=2\zeta+\lambda_2,$$

to odejmując od siebie te dwa równania, otrzymujemy:

$$\frac{(\lambda_2-\lambda_1)\xi^2}{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)}+\frac{(\lambda_2-\lambda_1)\eta^2}{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)}=\lambda_1-\lambda_2,$$

zatem tożsamość:

$$\frac{\xi^2}{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)}+\frac{\eta^2}{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)}+1=0. \tag{45}$$

Mamy zatem twierdzenie: *Powierzchnie spółogniskowe z powierzchnią bezśrodkową drugiego rzędu przechodzące przez dany punkt przestrzeni przecinają się pod kątem prostym.*

Ćwiczenia L.

1) Wykazać, że trzy równania: $x = a\cos\lambda$, $y = b\cos\mu$, $z = c\cos\nu$ przedstawiają ellipsoidę trójosiową i podać znaczenie kierunku λ, μ, ν.

2) Wykazać, że odległość p płaszczyzny stycznej do ellipsoidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ od środka tej powierzchni przedstawia się wzorem: $p^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos\beta + c^2\cos^2\gamma$, gdzie kąty α, β, γ określają kierunek pionu płaszczyzny stycznej.

3) Wykazać, że suma kwadratów trzech prostopadłych wykreślonych ze środka ellipsoidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ do trzech płaszczyzn stycznych do tejże ellipsoidy a do siebie prostopadłych jest stałą, równą $a^2+b^2+c^2$.

4) Wykazać, że z każdego punktu przestrzeni można wykreślić sześć prostych normalnych do ellipsoidy, z których dwie są zawsze rzeczywiste, a wszystkie te normalne leżą na jednym stożku rzędu drugiego.

5) Wykazać, że przekroje płaskie hiperboloidy o jednej powłoce i jej stożka asymptotycznego są krzywe podobne i współśrodkowe.

6) Okazać, że przez dany punkt przestrzeni można wykreślić w ogólności sześć normalnych do powierzchni hiperboloidy o jednej powłoce i że te normalne leżą na jednym stożku drugiego rzędu.

7) Wykazać, że suma kwadratów trzech prostopadłych wykreślonych ze środka hiperboloidy o dwu powłokach: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ na trzy płaszczyzny styczne do siebie prostopadłe jest ilością stałą, równą: $a^2-b^2-c^2$.

8) Wykazać, że równanie hiperboloidy o dwu powłokach: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, odniesione do układu średnic sprzężonych można zawsze przedstawić w postaci:

$$\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=1, \text{ przyczem: } a'^2-b'^2-c'^2=a^2-b^2-c^2.$$

9) Wykazać, że miejscem geometrycznem wierzchołków kątów bryłowych prostokątnych, stycznych do ellipsoidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, jest kula o promieniu: $r=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

10) Okazać, że miejscem geometrycznem wierzchołka kąta bryłowego prostokątnego opisanego na hiperboloidzie o jednej powłoce: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ jest kula:

$$x^2+y^2+z^2=a^2+b^2-c^2.$$

11) Wykazać, że wierzchołki kątów bryłowych prostokątnych opisanych na hiperboloidzie o dwu powłokach: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ mieszczą się na kuli: $x^2+y^2+z^2=a^2-b^2-c^2$.

12) Wyprowadzić ogólne równanie kuli i podać warunki, pod którymi ogólne równanie drugiego stopnia:

$$f=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$$

jest równaniem kuli.

13) Wykazać, że równanie kuli przechodzącej przez początek układu można zawsze sprowadzić do postaci:

$$x^2+y^2+z^2-2(ax+by+cz)=0.$$

14) Wyprowadzić równanie kuli o promieniu r, stycznej do trzech płaszczyzn spółrzędnych XOY, XOZ, YOZ.

15) Wykazać, że wszelka powierzchnia drugiego rzędu, która przechodzi przez przekroje powierzchni: $f=a_{11}x^2+\ldots+a_{44}=0$ z płaszczyznami: $A=0$, $B=0$ ma równanie: $f-\lambda AB=0$,

16) Wykazać, że w punktach przecięcia prostej: $A=0$, $B=0$ z powierzchnią $f=0$ mają powierzchnie o równaniu: $f-\lambda AB=0$ te same płaszczyzny styczne.

17) Dwie powierzchnie nazywamy podobnemi i podobnie ułożonemi, jeżeli promienie punktów jednej powierzchni wychodzące z punktu O, pozostają w stałym stosunku do odpo-

wiednich do promieni punktów drugiej powierzchni wychodzących z innego punktu O'; okazać, że powierzchnie drugiego rzędu:

$$f=0 \text{ i } f-\lambda(Ax+By+Cz+D)=0$$

są powierzchniami podobnemi i podobnie ułożonemi.

18) Wykazać, że dwie podobne i podobnie ułożone powierzchnie drugiego rzędu przecinają się podług jednej krzywej płaskiej, a druga płaska krzywa przecięcia leży w nieskończoności.

19) Wykazać, że trzy podobne i podobnie ułożone powierzchnie drugiego rzędu przecinają się podług krzywych płaskich, których płaszczyzny przechodzą przez tę samą linii prostą.

20) Wykazać, że wszystkie kule są podobnemi i podobnie ułożonemi powierzchniam drugiego rzędu, które się przecinają podług koła urojonego leżącego w nieskończoności.

21) Podać równania wszystkich powierzchni drugiego rzędu, które przechodzą przez przekrój kuli: $K=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=0$ z powierzchnią drugiego rzędu $f=0$.

22) Wykazać, że kula przcinająca powierzchnię drugiego rzędu podług koła przecina ją jeszcze podług drugiego koła.

23) Wykazać, że równanie: $f-\lambda(Ax+By+Cz+D)^2=0$ przedstawia wszystkie powierzchnie, które są styczne do powierzchni $f=0$ wzdłuż krzywej przekroju powierzchni $f=0$ z płaszczyzną $Ax+By+Cz+D=0$.

24) Wykazać, że powierzchnia:

$$a(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)^2+b(A_2x+B_2y+C_2z+D)^2+c(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)^2+$$
$$+d(A_4x+B_4y+C_4z+D_4)^2=0,$$

przedstawia powiorzchnię drugiego rzędu, dla której każda z czterech płaszczyzn:

$$A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0, \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

jest biegunem punktu, w którym trzy inne płaszczyzny się przecinają: powiadamy wtedy, że te cztery płaszczyzny tworzą czworościan sprzężony ze sobą ze względu na tę powierzchnię.

25) Wykazać, że w powierzchni drugiego rzędu trzy sprzężone płaszczyzny środkowe i płaszczyzna w nieskończoności tworzą czworościan ze względu na tę powierzchnię ze sobą sprzężony.

26) Jakie znaczenie geometryczne ma równanie:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-r^2=(Ax+By+Cz+D)(A'x+B'y+C'z+D').$$

27) Okazać, że przekroje kołowe powierzchni drugiego rzędu wyznaczonej równaniami:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-r^2=(Ax+By+Cz+D)(A'x+B'y+C'z+D'),$$

określone są płaszczyznami:

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad A'x+B'y+C'z+D'=0.$$

28) Wykazać, że przekrój płaszczyzn:

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad A'x+B'y+C'z+D'=0,$$

wyznacza oś powierzchni drugiego rzędu określonej równaniem:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-r^2=(Ax+By+Cz+D)(A'x+B'y+C'z+D').$$

29) Wykazać, że ognisko powierzchni drugiego rzędu jest nieskończenie małą kulą, która ma z powierzchnię drugiego rzędu podwójną styczność w odpowiednich punktach kierownicy.

30) Wykazać, że płaszczyzna przechodząca przez ognisko powierzchni drugiego rzędu i odpowiednią kierownicę przecina powierzchnię, podług krzywej o tym ognisku i tej kierownicy.

31) Wykazać, że płaszczyzna prostopadła do płaszczyzny krzywej ogniskowej przecina powierzchnię drugiego rzędu podług krzywej, której ognisko leży na krzywej ogniskowej.

32) Dowieść, że krzywa ogniskowa powierzchni drugiego rzędu przechodzi przez punkta kołowe powierzchni.

33) Wykazać, że kwadrat odległości każdego punktu powierzchni drugiego rzędu od ogniska pępkowego pozostaje w stałym stosunku do odległości tego punktu od dwu płaszczyzn przechodzących przez kierownicę, a równoległych do płaszczyzn kołowych powierzchni.

34) Wykazać, że odległość punktu powierzchni drugiego rzędu od ogniska modułowego pozostaje w stałym stosunku do odległości od odpowiedniej kierownicy, jeżeli ta odległość mierzoną jest równolegle do jednej z płaszczyzn kołowych powierzchni.

Wyprowadzić równania powierzchni spółogniskowych z powierzchniami:

35) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, 36) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, 37) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$,

38) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, 39) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$, 40) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$, 41) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,

42) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. 43) $y^2=2px$, 44) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$.

45) Wyznaczyć krzywe ogniskowe powierzchni współogniskowych o równaniu:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1.$$

46) Wykazać, że przez dany punkt można przeprowadzić trzy powierzchnie spółogniskowe z daną powierzchnią drugiego rzędu.

47) Wykazać, że dwie powierzchnie spółogniskowe przecinają się zawsze pod kątem prostym.

48) Okazać, że dwie płaszczyzny równoległe styczne do dwu powierzchni spółogniskowych mają tę własność, że różnica kwadratów ich odległości od środka powierzchni jest wielkością stałą.

49) Wykazać, że płaszczyzny styczne do ellipsoidy, a równoległe do płaszczyzn stycznych stożka asymptotycznego hiperboloidy z daną ellipsoidą spółogniskowej mają jednakową odległość od środka ellipsoidy.

50) Wykazać, że przekrój ellipsoidy płaszczyzną styczną do stożka asymptotycznego hiperboloidy z nią spółogniskowej ma stałą powierzchnię.

51) Dowieść, że normalne powierzchni współogniskowych przechodzących przez jeden punkt, są do siebie prostopadłe.

52) Jeżeli trzy powierzchnie współogniskowe przechodzą przez dany punkt P, okazać, że przekrój jednej z tych powierzchni płaszczyzną równoległą do jej płaszczyzny stycznej w punkcie P ma osie równoległe do normalnych wykreślonych w punkcie P do pozostałych dwu powierzchni współogniskowych.

53) Wykazać, że osie stożka stycznego do danej powierzchni drugiego rzędu są normalne do powierzchni z nią współogniskowych, a przechodzących przez wierzchołek tegoż stożka.

54) Wykazać, że miejscem geometrycznem wierzchołków stożków obrotowych, opierających się na danej elllipsie jest hiperbola leżąca na płaszczyznie prostopadłej do płaszczyzny danej ellipsy.

55) Dowieść, że proste normalne do układu powierzchni współogniskowych wychodzące z jednego punktu tworzą stożek rzędu drugiego.

56) Przez daną prostą poprowadzono pęk płaszczyzn stycznych do układu powierzchni współogniskowych, dowieść, że normalne w punktach styczności wykreślone tworzą paraboloidę hiperboliczną.

57) Znaleźć miejsce geometryczne biegunów danej płaszczyzny: $Ax+By+Cz+D=0$ ze względu na układ powierzchni spółogniskowych, określonych równaniem:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1.$$

58) Wykazać, że ellipsa ogniskowa ellipsoidy zawiera ogniska modułowe, a jej hiperbola ogniskowa zawiera ogniska pępkowe powierzchni.

59) Wykazać, że ellipsa ogniskowa hiperboloidy o jednej powłoce, jak również jej hiperbola ogniskowa, zawierają jej ogniska modułowe.

60) Wykazać, że ellipsa ogniskowa hiperboloidy o dwóch powłokach zawiera ogniska pępkowe, a hiperbola ogniska modułowe.

61) Wykazać, że linie ogniskowe stożka asymptotycznego danej hiperboloidy są asymptotami hiperboli ogniskowej tejże hiperboloidy.

62) Wykazać, że na około powierzchni środkowej drugiego rzędu można opisać dwa walce obrotowe, których tworzące są równoległe do asymptot jej hiperboli ogniskowej.

63) Okazać, że paraboloida: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ posiada dwie parabole ogniskowe, z których każda jest spółogniskowa z odpowiednim przekrojem głównym paraboloidy.

64) Wyznaczyć krzywe ogniskowe powierzchni: $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}+2z=0$.

65) Wykazać, że krzywe ogniskowe danej powierzchni przedstawiają miejsce wierzchołków stożków obrotowych stycznych do tejże powierzchni.

66) Wykazać, że powierzchnie:

$$Ax^2+By^2+Cz^2=1,\quad (A+\lambda)x^2+(B+\lambda)y^2+(C+\lambda)z^2=1$$

mają te same płaszczyzny kołowe.

67) Wykazać, że miejsce punktów styczności płaszczyzn stycznych do układu powierzchni spółogniskowych, a równoległych do pewnej stałej płaszczyzny jest hiperbola.

68) Wykazać, że suma kątów, jakie dowolna tworząca stożka drugiego rzędu tworzy z jego prostemi ogniskowemi jest ilością stałą.

69) Wykazać, że płaszczyzny przechodzące przez dowolną tworzącą stożka i przez jego linie ogniskowe są do płaszczyzny stycznej przeprowadzonej wzdłuż tejże tworzącej stożka jednakowo nachylone.

70) Wykazać, że każdy punkt prostej, poruszającej się swemi trzema stałemi punktami A, B, C po trzech płaszczyznach do siebie prostopadłych opisuje ellipsoidę.

71) Wykazać, że miejscem geometrycznem punktów równooddalonych od dwu prostych wichrowatych jest paraboloida hiperboliczna.

72) Wykazać, że paraboloida hiperboliczna może być uważana jako miejsce geometryczne punktu, którego odległość od stałego punktu (ogniska) jest równa jego odległości od stałej prostej (kierownicy), jeżeli ta druga odległość jest mierzona równolegle do stałej płaszczyzny (płaszczyzny kierowniczej).

73) Daną jest parabola: $y^2=2px$, $z=0$; wyznaczyć miejsce geometryczne punktu, z którego wyprowadzone trzy proste do siebie prostopadłe opierałyby się na tejże paraboli.

74) Wyznaczyć miejsce geometryczne punktu, którego odległość d od prostej określonej równaniami $y=0$, $z=x\operatorname{tang}\alpha$, pozostaje do odległości d' od płaszczyzny XOY w stałym stosunku $d:d'=\varepsilon$.

75) Wyznaczyć miejsce geometryczne punktu, którego odległość d od prostej $z=c$, $y=x\operatorname{tang}\alpha$, pozostaje do odległości d' od prostej $z=-c$, $y=x\operatorname{tang}\alpha$ w stałym stosunku $d:d'=1:\varepsilon$, gdzie $\varepsilon \gtrless 1$.

Rozwiązania L. 14) $x^2+y^2+z^2+2r(x+y+z)+2r^2=0$. 20) Równanie wszystkich kul jest: $x^2+y^2+z^2+\lambda(Ax+By+Cz+D)=0$. 21) $f-\lambda k=0$. 57) Prosta: $\frac{Dx}{A}+a^2=\frac{Dy}{B}+b^2=$ $=\frac{Dz}{C}+c^2$, prostopadła do danej płaszczyzny. 64) $y=0$, $x^2+2z+2=0$; $x=0$, $y^2=2z+3$. 73) $y^2+z^2=2px$. 74) Stożek: $\sin^2\alpha\,.\,x^2+y^2+(\cos^2\alpha-\varepsilon^2)z^2-\sin 2\alpha\,.\,xz=0$. 75) Hiperboloida o jednej powłoce: $\sin^2\alpha\,.\,x^2+\cos^2\alpha\,.\,y^2+z^2+\frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\sin 2\alpha\,.\,xy+2\,\frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\,cz+c^2=0$.

Literatura. Dr. Fr. Graefe. Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie des Raumes insbesondere der Flächen zweiten Grades. Leipzig. 1888. I. Koehler: Exercices de géometrie analytique et de géometrie supérieure. Deuxiéme partie. Paris 1888.

Tematy do rozprawek naukowych:

1. Krzywe ogniskowe powierzchni środkowych drugiego rzędu.
2. Krzywe ogniskowe powierzchni bezśrodkowych drugiego rzędu.
3. Teorya powierzchni spółogniskowych rzędu drugiego.

Wykład LI.

Zasady ogólnej teoryi powierzchni.

1. Ogólne równanie powierzchni. Równanie powierzchni możemy przed-wić w ogólności w jednej z następujących postaci: albo 1) w postaci wy-nej:

$$z=f(x,\ y) \qquad (1)$$

bo (2) w postaci uwikłanej:

$$F(x,\ y\ z)=0 \qquad (2)$$

bo (3) za pomocą dwóch równań o jednym zmiennym parametrze t w po-ci:

$$f(x,\ y,\ z,\ t)=0, \quad \varphi(x,\ y,\ z,\ t)=0 \qquad (3)$$

o (4) za pomocą trzech równań o dwóch dowolnych parametrach u, v w po-ci:

$$x=f(u,\ v), \quad y=\varphi(u,\ v), \quad z=\psi(u,\ v). \qquad (4)$$

2. Linie styczne i płaszczyzna styczna w danym punkcie powierzchni: yczna w punkcie $P(x,\ y,\ z)$ powierzchni $z=f(x,\ y)$ określa się, jak wiemy art. 7. str. 609, równaniami:

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{p\,dx+q\,dy}, \quad \text{czyli:} \quad \frac{X-x}{1}=\frac{Y-y}{p+q\lambda},$$

dzie: $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$, a $\lambda=\frac{dy}{dx}$ jest dowolnym parametrem.

Wszystkie proste styczne w punkcie $P(x,\ y,\ z)$ powierzchni $z=f(x,\ y$ łą na płaszczyźnie:

$$p(X-x)+q(Y-y)-(Z-z)=0 \qquad (4)$$

wanej płaszczyzną styczną w punkcie: $P(x,\ y,\ z)$ powierzchni: $z=f(x,\ y)$.

Równanie płaszczyzny stycznej w punkcie: $P(x,\ y,\ z)$ powierzchni okre-onej równaniem: $F(x,\ y,\ z)=0$ sprowadza się tedy (patrz str. 609) do po-aci:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0. \qquad (5)$$

Jeżeli powierzchnia określona jest trzema równaniami:

$$x=f(u,\ v), \quad y=\varphi(u,\ v), \quad z=\psi(u,\ v)$$

dwu dowolnych parametrach u i v, wtedy otrzymujemy różniczki:

$$dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv, \quad dy=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv, \quad dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv,$$

że:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=p\,dx+q\,dy,$$

przeto otrzymujemy na podstawie tego związku relacyę:

$$\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv=p\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)+q\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right),$$

czyli:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}-p\frac{\partial x}{\partial u}-q\frac{\partial y}{\partial u}\right)du+\left(\frac{\partial z}{\partial v}-p\frac{\partial x}{\partial v}-q\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv=0,$$

która, wobec tego, że parametry u, v są od siebie niezależne prowadzi do dwu równań:

$$p\frac{\partial x}{\partial u}+q\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial u},\quad p\frac{\partial x}{\partial v}+q\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial v},$$

z których otrzymujemy pochodne cząstkowe: $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$ w postaci:

$$p=\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}},\quad q=\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}}$$

Równanie płaszczyzny stycznej w punkcie: $P(x, y, z)$ powierzchni określonej równaniami: $x=f(u, v)$, $y=\varphi(u, v)$, $z=\psi(u, v)$ przedstawia się zatem w postaci:

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}(X-x)+\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial u}, & \frac{\partial x}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial v}, & \frac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix}(Y-y)+\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}(Z-z)=0. \tag{6}$$

3. Normalna i płaszczyzny normalne w danym punkcie powierzchni. Normalna w danym punkcie $P(x, y, z)$ powierzchni: $z=f(x, y)$ jako prostopadła do płaszczyzny stycznej w tym punkcie określona jest równemi stosunkami: $\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z-z}{-1}$, czyli dwoma równaniami:

$$X-x+p(Z-z)=0,\quad Y-y+q(Z-z)=0. \tag{7}$$

Wszelka płaszczyzna przesunięta przez prostą normalną w danym punkcie powierzchni nazywa się **płaszczyzną normalną** w tymże punkcie powierzchni. Równanie jakiejkolwiek płaszczyzny normalnej w punkcie $P(x, y, z)$ powierzchni $z=f(x, y)$ można zatem przedstawić w postaci:

$$[X-x+p(Z-z)]+\lambda[Y-y+q(Z-z)]=0, \tag{8}$$

gdzie λ jest dowolnym parametrem, cechującym jedną z płaszczyzn normalnych w tym punkcie.

4. Punkta osobliwe powierzchni. Punkt na powierzchni, który ma tę własność, że styczne do powierzchni przez niego przeprowadzone nie leżą na jednej płaszczyźnie, nazywamy **punktem nadzwyczajnym** albo też **punktem osobliwym** powierzchni dla odróżnienia od punktów o pewnej jednoznacznie wyznaczalnej płaszczyźnie stycznej, które nazywamy **punktami zwyczajnymi** powierzchni.

Punkt $P(x, y, z)$ powierzchni $F(x, y, z)=0$ jest punktem nadzwyczajnym, skoro wszystkie trzy pierwsze pochodne cząstkowe są w tym punkcie zerem, t. j. skoro obok związku: $F(x, y, z)=0$ spełniają się jeszcze trzy następujące równania:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial z}=0;$$

równanie płaszczyzny stycznej w takim punkcie:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0$$

sprowadza się do tożsamości $0=0$, płaszczyzna styczna jest więc w tym punkcie nieoznaczona, pochodne cząstkowe: $p=\frac{\partial z}{\partial x}$ i $q=\frac{\partial z}{\partial y}$ przedstawiają się wtedy w postaci: $\frac{0}{0}$.

Ażeby zbadać miejsce geometryczne prostych stycznych w takim punkcie nadzwyczajnym weźmy pod uwagę szereg Taylora:

$$F(x+h, y+k, z+l)=F(x, y, z)+\left(\frac{\partial F}{\partial x}h+\frac{\partial F}{\partial x}k+\frac{\partial F}{\partial z}l\right)+$$
$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}h^2+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}k^2+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}l^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}hk+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}kl+2\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial x}lh\right]+R_3.$$

Wobec: $F(x, y, z)=0$, $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial z}=0$ przyjmując przyrosty h, k, l nieskończenie małemi i opuszczając R_3 otrzymujemy równanie:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}h^2+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}k^2+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}l^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}hk+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}kl+2\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial x}lh=0,$$

wskazujące położenie punktów sąsiednich punktu: $P(x, y, z)$.

Równanie to jest równaniem stopnia drugiego, jednorodne z względu na h, k, l, przedstawia zatem powierzchnię stożkową rzędu drugiego.

Mamy zatem twierdzenie: *Wszelka powierzchnia ma w otoczeniu swego punktu nadzwyczajnego kształt stożka* (fig. 223).

Innemi słowy: Styczne w punkcie nadzwyczajnym: $F=\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial z}=0$ tworzą powierzchnię stożkową.

Zastępując przyrosty h, k, l przez różnice: $X-x$, $Y-y$, $Z-z$, gdzie x, y, z są spółrzędne przyjętego punktu nadzwyczajnego powierzchni: $F(x, y, z)=0$, a X, Y, Z spółrzędne bieżące, otrzymujemy równanie stożka stycznego w punkcie nadzwyczajnym $P(x, y, z)$ w postaci:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(X-x)^2+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(Y-y)^2+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(Z-z)^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(X-x)(Y-y)+$$
$$+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}(Y-y)(Z-z)+2\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial x}(Z-z)(X-x)=0. \qquad (9)$$

Przyjmując punkt nadzwyczajny za początek układu, zastępując więc h, k, l przez x, y, z i kładąc:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=a_{11}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=a_{22}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}=a_{33}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=a_{12}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}=a_{23}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}=a_{13},$$

otrzymujemy równanie tego stożka w postaci:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{13}xz=0, \tag{10}$$

jednorodnej ze względu na zmienne x, y, z.

5. **Szczególne postacie punktów nadzwyczajnych** zależą od kształtu stożka równaniem (10) określonego:

α) Jeżeli otrzymany stożek jest stożkiem urojonym, wówczas rozważany punkt nadzwyczajny nie ma rzeczywistych punktów sąsiednich, a taki nadzwyczajny nazywamy tedy punktem odosobnionym.

β) Jeżeli otrzymane równanie stożka rozkłada się na dwa czynniki stopnia pierwszego, a więc, jeżeli równanie:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz=0,$$

sprowadza się do postaci:

$$(ax+by+cz)(a'x+b'y+c'z)=0, \tag{11}$$

wówczas stożek stycznych w otoczeniu takiego punktu nadzwyczajnego składa się z dwu płaszczyzn przecinających się. Taki punkt stożkowy nazywamy punktem biplanarnym (fig. 220).

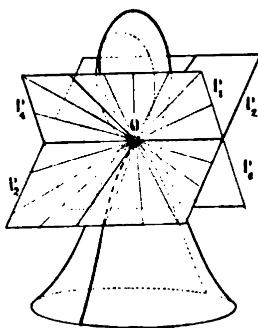


Fig. 220.

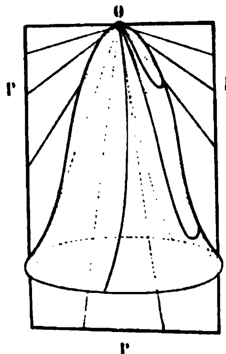


Fig. 221.

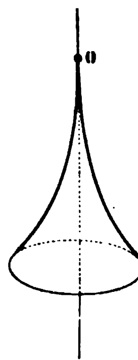


Fig. 222.

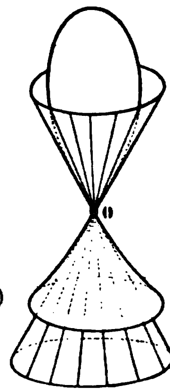


Fig. 223.

γ) Jeżeli otrzymane równanie stożka przedstawia się jako zupełny kwadrat funkcyi stopnia pierwszego, a więc sprowadza się do postaci:

$$(ax+by+cz)^2=0, \tag{12}$$

natenczas stożek składa się z dwóch płaszczyzn na siebie wpadających, a taki punkt stożkowy nazywamy punktem uniplanarnym (fig. 221).

δ) Jeżeli otrzymane równanie sprowadza się do sumy kwadratów dwu funkcyi stopnia pierwszego:

$$(ax+by+cz)^2+(a'x+b'y+c'z)^2=0, \tag{13}$$

wówczas stożek ma kształt linii prostej określonej równaniami:

$$ax+by+cz=0, \quad a'x+b'y+c'z=0,$$

a taki punkt stożkowy nazywamy wtedy ostrzem (fig. 222).

ε) Jeżeli otrzymany stożek jest stożkiem rzeczywistym drugiego rzędu, wtedy nazywamy też taki punkt nadzwyczajny punktem stożkowym drugiego rzędu (fig. 223).

Gdyby w takim punkcie nadzwyczajnym obok:

$$F=0,\quad \frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial z}=0$$

były także wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu zerami, a więc gdyby było:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}=0,$$

a więc gdyby spółrzędne punktu $P(x, y, z)$ czyniły zadość powyższym dziesięciu warunkom, wtedy powierzchnia miałaby w otoczeniu takiego punktu kształt stożka rzędu trzeciego. Taki punkt nadzwyczajny nazywamy też **punktem stożkowym rzędu trzeciego.**

Analogicznie otrzymamy określenie **punktu stożkowego rzędu** n**-go.**

6. **Uwaga.** Wyznaczanie punktów stożkowych drugiego rzędu polega na wyznaczaniu wartości x, y, z, czyniących zadość czterem równaniom:

$$F=0,\quad \frac{\partial F}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial z}=0.$$

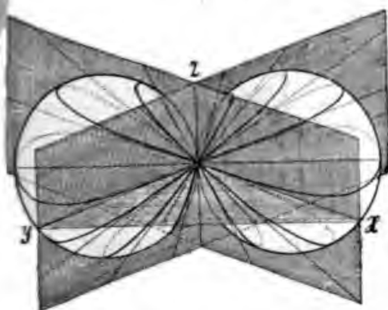


Fig. 224.

Możemy tedy wyznaczyć wartości x, y, z na podstawie trzech z powyższych równań i sprawdzić czy otrzymane wartości czynią także zadość czwartemu równaniu. Tym sposobem możemy otrzymać jeden lub więcej punktów stożkowych na danej powierzchni: $F(x, y, z)=0$. W szczególnych przypadkach możemy otrzymać całą krzywą złożoną z punktów stożkowych, co się stanie wówczas, gdy spółrzędne punktów czyniąc zadość dwom z danych równań przedstawiających krzywę przestrzenną, sprawdzają także dwa pozostałe równania. Taką szczególną krzywą ma np. powierzchnia siebie samą przecinająca.

Przykłady. α) Powierzchnia czwartego rzędu: $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2xy+b^2yz+c^2zx$ ma w punkcie $(x=0,\ y=0,\ z=0)$ punkt stożkowy, o stożku stycznych: $a^2xy+b^2yz+c^2zx=0$. β) Powierzchnia czwartego rzędu $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2xy$ (fig. 224) ma w punkcie $(x=0,\ y=0$ $z=0)$ punkt biplanarny o płaszczyznach stycznych $x=0,\ y=0$.

7. **Stożki styczne do danej powierzchni.** Styczne do danej powierzchni $F(x, y, z)=0$ wyprowadzone z pewnego punktu $S(\xi, \eta, \zeta)$ przestrzeni tworzą stożek obwijający powierzchnię, zwany **stożkiem stycznym do tej powierzchni.** Chcąc otrzymać równanie stożka stycznego do powierzchni $F(x, y, z)=0$, mającego wierzchołek w punkcie $S(\xi, \eta, \zeta)$, weźmy pod uwagę prostą styczną w punkcie $P(x, y, z)$ tej powierzchni.

Jej równania mają kształt:

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{p\,dx+q\,dy},$$

czyli:

$$X-x=\frac{1}{p+q\lambda}(Z-z);\quad Y-y=\frac{\lambda}{p+q\lambda}(Z-z),$$

gdzie: $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$, λ jest dowolnym parametrem. Jeżeli ta styczna ma przejść przez punkt $S(\xi, \eta, \zeta)$ przestrzeni, wówczas muszą się spełnić relacye:

$$\xi-x=\frac{1}{p+q\lambda}(\zeta-z),\quad \eta-y=\frac{\lambda}{p+q\lambda}(\zeta-z),$$

przyczem spółrzędne x, y, z mają czynić zadość równaniu $F(x, y, z)=0$.

Mamy zatem 5 równań, z których wyrugowawszy cztery parametry zmienne x, y, z, λ, otrzymamy równanie szukanego stożka stycznego do powierzchni $F(x, y, z)=0$ o wierzchołku $S(\xi, \eta, \zeta)$.

Do równania stożka stycznego możemy dojść także w sposób następujący.

Oznaczmy przez α, β, γ kąty, jakie styczna w punkcie $P(x, y, z)$ powierzchni tworzy z osiami układu, przez r odległość punktu styczności: $P(x, y, z)$ od wierzchołka $S(\xi, \eta, \zeta)$, a przez R odległość punktu zmiennego $M(X, Y, Z)$ stycznej od wierzchołka, wtedy mamy:

$$\cos\alpha=\frac{x-\xi}{r}=\frac{X-\xi}{R}, \quad \cos\beta=\frac{y-\eta}{r}=\frac{Y-\eta}{R}, \quad \cos\gamma=\frac{z-\zeta}{r}=\frac{Z-\zeta}{R},$$

a stąd: $$x=\xi+\frac{r}{R}(X-\xi), \quad y=\eta+\frac{r}{R}(Y-\eta), \quad z=\zeta+\frac{r}{R}(Z-\zeta).$$

Kładąc $\frac{r}{R}=t$, otrzymamy:

$$x=\xi+t(X-\xi), \quad y=\eta+t(Y-\eta), \quad z=\zeta+t(Z-\zeta).$$

Wstawiwszy te wartości w równanie powierzchni $F(x, y, z)=0$, otrzymujemy równanie:

$$F[\xi+t(X-\xi), \quad \eta+t(Y-\eta), \quad \zeta+t(Z-\zeta)]=0,$$

a że styczna w punkcie $P(x, y, z)$ powierzchni ma z powierzchnią jeszcze sąsiedni punkt $P'(x+dx, y+dy, z+dz)$ spólny w odległości $r+dr$ od wierzchołka $S(\xi, \eta, \zeta)$, dla którego parametr t otrzymuje wartość $t+dt$, przeto, chcąc otrzymać warunek dodatkowy, należałoby podstawić w powyższem równaniu za t wartość $t+dt$ i odjąć to równanie od otrzymanego. Do tego warunku dojdziemy wprost, różniczkując powyższe równanie ze względu na zmienny parametr t. Otrzymujemy wtedy równanie:

$$(X-\xi)\frac{\partial F}{\partial x}+(Y-\eta)\frac{\partial F}{\partial y}+(Z-\zeta)\frac{\partial F}{\partial z}=0, \tag{14}$$

które w połączeniu z równaniem:

$$F[\xi+t(X-\xi), \eta+t(Y-\eta), \zeta+t(Z-\zeta)]=0, \tag{14'}$$

określa szukany stożek, którego równanie między zmiennemi spółrzędnemi X, Y, Z dostaje się po wyrugowaniu z obydwu równań zmiennego parametru t.

8. Mając np. wyprowadzić tą drogą równanie stożka stycznego do ellipsoidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ o wierzchołku $S(\xi, \eta, \zeta)$ połóżmy w równaniu ellipsoidy:

$$x=\xi+t(X-\xi), \quad y=\eta+t(Y-\eta), \quad z=\zeta+t(Z-\zeta),$$

a otrzymamy równanie:

$$\frac{[\xi+t(X-\xi)]^2}{a^2}+\frac{[\eta+t(Y-\eta)]^2}{b^2}+\frac{[\zeta+t(Z-\zeta)]^2}{c^2}=1,$$

które, uporządkowane podług potęg parametru t, sprowadza się do postaci:

$$t^2\left\{\left(\frac{X-\xi}{a}\right)^2+\left(\frac{Y-\eta}{b}\right)^2+\left(\frac{Z-\zeta}{c}\right)^2\right\}+2t\left\{\xi\frac{X-\xi}{a^2}+\eta\frac{Y-\eta}{b^2}+\zeta\frac{Z-\zeta}{c^2}\right\}+\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1=0.$$

Kładąc na razie dla uproszczenia:

$$\left(\frac{X-\xi}{a}\right)^2+\left(\frac{Y-\eta}{b}\right)^2+\left(\frac{Z-\zeta}{c}\right)^2=P, \quad \xi\frac{X-\xi}{a^2}+\eta\frac{Y-\eta}{b^2}+\zeta\frac{Z-\zeta}{c^2}=Q, \quad \frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1=R,$$

otrzymujemy równanie: $$t^2P+2tQ+R=0, \tag{a}$$

które zróżniczkowane podług t prowadzi do warunku dodatkowego:

$$2tP+2Q=0, \text{ a więc: } t=-\frac{Q}{P}.$$

Równanie (α) otrzymuje przeto kształt:

$$\frac{Q^2}{P}-2\frac{Q^2}{P}+R=0, \text{ a więc: } Q^2=PR, \text{ czyli:}$$

$$\left[\frac{\xi(X-\xi)}{a^2}+\frac{\eta(Y-\eta)}{b^2}+\frac{\zeta(Z-\zeta)}{c^2}\right]^2=\left[\left(\frac{X-\xi}{a}\right)^2+\left(\frac{Y-\eta}{b}\right)^2+\left(\frac{Z-\zeta}{c}\right)^2\right]\left[\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1\right],$$

skąd wypływa równanie:

$$\left[\frac{X\xi}{a^2}+\frac{Y\eta}{b^2}+\frac{Z\zeta}{c^2}\right]^2=\left[\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}-1\right]\left[\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1\right], \tag{15}$$

jako najprostsze równanie stożka stycznego do ellipsoidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

9. Kontury powierzchni. Punkta, w których tworzące stożka, stycznego do powierzchni $F(x, y, z)=0$, mającego wierzchołek w punkcie $S(\xi, \eta, \zeta)$, stykają się z tą powierzchnią, tworzą krzywą na powierzchni, określoną trzema równaniami o zmiennym parametrze t, kształtu:

$$F[\xi+t(X-\xi),\ \eta+t(Y-\eta),\ \zeta+t(Z-\zeta)]=0,$$

$$(X-\xi)\frac{\partial F}{\partial x}+(Y-\eta)\frac{\partial F}{\partial y}+(Z-\zeta)\frac{\partial F}{\partial z}=0, \quad F(X, Y, Z)=0,$$

zwaną k o n t u r e m p o w i e r z c h n i widzianej z punktu $S(\xi, \eta, \zeta)$.

Kontur ten możemy także w ten sposób otrzymać: jeżeli x, y, z są spółrzędnemi punktu, należącego do konturu powierzchni, to czynią one zadość powierzchni $F(x, y, z)=0$ i płaszczyźnie stycznej:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0,$$

przez ten punkt przechodzącej. Płaszczyzna ta przechodzi jednak także przez punkt $S(\xi, \eta, \zeta)$ jest więc także:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(\eta-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(\zeta-z)=0.$$

Uważając spółrzędne x, y z za zmienne, otrzymujemy tedy na wyznaczenie konturu powierzchni $F(x,y,z)=0$, odpowiadającego punktowi $S(\xi, \eta, \zeta)$ dwa równania:

$$F(x, y, z)=0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(\xi-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(\eta-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(\zeta-z)=0,$$

przedstawiające dwie powierzchnie, których przekrój daje szukany kontur powierzchni.

Powierzchnię określoną równaniem:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(\eta-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(\zeta-z)=0,$$

o zmiennych spółrzędnych x, y, z, przechodzącą przez kontur powierzchni $F(x,y,z)$, odpowiadający punktowi $S(\xi, \eta, \zeta)$ nazywamy p o w i e r z c h n i ą b i e g u n o w ą punktu $S(\xi, \eta, \zeta)$ ze względu na powierzchnię $F(x, y, z)=0$.

10. Uwaga. Jeżeli $F(x, y, z)=0$ jest równaniem n-go stopnia ze względu na zmienne x, y, z, to równanie:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(\eta-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(\zeta-z)=0$$

*

jest równaniem $(n-1)$go stopnia ze względu na te zmienne. Zastąpiwszy bowiem x, y, z przez $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$, otrzymujemy równanie:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\xi+\frac{\partial F}{\partial y}\eta+\frac{\partial F}{\partial z}\zeta+\frac{\partial F}{\partial t}=0,$$

którego wszystkie wyrazy są $(n-1)$ stopnia. A zatem: *Powierzchnia biegunowa punktu $S(\xi, \eta, \zeta)$ ze względu na powierzchnię n-go rzędu jest powierzchnią $(n-1)$-go rzędu. Kontur powierzchni n-go rzędu jest więc krzywą $n(n-1)$-go rzędu.*

11. Promienie krzywizny przekrojów płaskich danej powierzchni. Przekrój płaski powierzchni $z=f(x, y)$ jest określony dwoma równaniami kształtu:

$$Ax+By+Cz+D=0,\quad z=f(x, y). \tag{16}$$

Promień krzywizny ϱ w punkcie $P(x, y, z)$ tego przekroju określa, według art. 6 str. 722, wzór: $\varrho=\frac{ds^3}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}$.

Otrzymujemy tu na podstawie równań (16) równania następujące:

$$Adx+Bdy+Cdz=0,\qquad dz=p\,dx+q\,dy,$$
$$Ad^2x+Bd^2y+Cd^2z=0,\quad d^2z=p\,d^2x+q\,d^2y+dp\,dx+dq\,dy,$$

ważne dla każdego punktu przekroju.

Z pierwszych dwu równań po lewej stronie otrzymujemy szereg stosunków:

$$\frac{A}{dy\,d^2z-dz\,d^2y}=\frac{B}{dz\,d^2x-dx\,d^2z}=\frac{C}{dx\,d^2y-dy\,d^2x},\ \text{czyli:}\ \frac{A}{P}=\frac{B}{Q}=\frac{C}{R}.$$

Z dwu równań po prawej stronie otrzymujemy natomiast równanie:

$$0=pQ-qP-dz\,(dp\,dx+dq\,dy),\quad \text{czyli:}\ pQ-qP=dz\,(dp\,dx+dq\,dy),$$

skąd ze względu na to, że $Q=\frac{B}{A}P$, otrzymujemy równanie:

$$B\frac{P}{A}p-Pq=dz\,(dp\,dx+dq\,dy),$$

a zatem:

$$P=\frac{A\,dz\,(dp\,dx+dq\,dy)}{Bp-Aq},\quad Q=\frac{B\,dz\,(dp\,dx+dq\,dy)}{Bp-Aq},\quad R=\frac{C\,dz\,(dp\,dx+dq\,dy)}{Bp-Aq},$$

a stąd:

$$P^2+Q^2+R^2=\frac{(A^2+B^2+C^2)\,dz^2\,(dp\,dx+dq\,dy)^2}{(Bp-Aq)^2},$$

a że:
$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2,$$

przeto:

$$\varrho^2=\frac{(Bp-Aq)^2\,(dx^2+dy^2+dz^2)^3}{(A^2+B^2+C^2)\,dz^2\,(dp\,dx+dq\,dy)^2}. \tag{17}$$

Z równań:

$$A\,dx+B\,dy+C\,dz=0,\quad p\,dx+q\,dy-dz=0,$$

wynikają stosunki:

$$\frac{dx}{B+Cq}=-\frac{dy}{A+Cp}=\frac{dz}{Bp-Aq}=k. \tag{18}$$

zatem: $dx^2+dy^2+dz^2=k^2\,[(A+Cp)^2+(B+Cq)^2+(Bp-Aq)^2]$.

A że: $dp=r\,dx+s\,dy,\quad dq=s\,dx+t\,dy,$

przeto: $dp\,dx+dq\,dy=r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2.$

Z uwzględnieniem relacyj (18) jest zatem:

$$dp\,dx+dq\,dy=k^2[r(B+Cq)^2+2s(B+Cq)(A+Cp)+t(A+Cp)^2],$$

przeto:

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dp\,dx+dq\,dy}=\frac{(A+Cp)^2+(B+Cq)^2+(Bp-Aq)^2}{r(B+Cq)^2+2s(B+Cq)(A+Cp)+t(A+Cp)^2},$$

przyczem:

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dz^2}=\frac{(A+Cp)^2+(B+Cq)^2+(Bp-Aq)^2}{(Bp-Aq)^2}.$$

Wstawiwszy otrzymane wartości w wzór (17) dostajemy:

$$\varrho^2=\frac{[(A+Cp)^2+(B+Cq)^2+(Bp-Aq)^2]^3}{(A^2+B^2+C^2)[r(B+Cq)^2+2s(B+Cq)(A+Cp)+t(A+Cp)^2]},$$

a więc:

$$\varrho=\frac{[(A+Cp)^2+(B+Cq)^2+(Bp-Aq)^2]^{3/2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,[(B+Cq)^2r+2(B+Cq)(A+Cp)s+(A+Cp)^2t]}, \qquad (19)$$

jako wzór na promień krzywizny w punkcie $P(x, y, z)$ przekroju powierzchni $z=f(x, y)$ z płaszczyzną: $Ax+By+Cz+D=0$.

12. Promienie krzywizny przekrojów normalnych powierzchni. Przekrojem normalnym w danym punkcie powierzchni nazywamy przekrój, którego płaszczyzna przechodzi przez normalną w tym punkcie powierzchni.

Niech będzie: $A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0$ równaniem płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P(x, y, z)$ powierzchni $z=f(x, y)$. Normalna w tym punkcie ma równania:

$$\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z-z}{-1}.$$

Jeżeli płaszczyzna, powyższem równaniem określona, ma przechodzić przez normalną w punkcie: $P(x, y, z)$ powierzchni, musi się spełnić relacya:

$$Ap+Bq-C=0.$$

Istnieje zatem w danym punkcie powierzchni pęk płaszczyzn normalnych. Chcąc wybrać zeń jedną z tych płaszczyzn, należy dodać jeszcze jeden warunek.

Jako taki warunek przyjmijmy stosunek: $\frac{dy}{dx}=\lambda$, a że na mocy (18) dla krzywej przekroju: $\frac{dy}{dx}=-\frac{A+Cp}{B+Cq}$, przeto otrzymujemy warunek dodatkowy w postaci: $\frac{A+Cp}{B+Cq}=-\lambda$, czyli: $A+Cp+(B+Cq)\lambda=0$.

Na wyznaczenie spółczynników A, B, C równania dowolnej płaszczyzny normalnej w danym punkcie powierzchni mamy zatem równania:

$$Ap+Bq-C=0, \quad A+B\lambda+C(p+q\lambda)=0,$$

z których wynikają stosunki:

$$\frac{A}{\begin{vmatrix} q, & -1 \\ \lambda, & p+q\lambda \end{vmatrix}}=\frac{B}{\begin{vmatrix} -1, & p \\ p+q\lambda, & 1 \end{vmatrix}}=\frac{C}{\begin{vmatrix} p, & q \\ 1, & \lambda \end{vmatrix}},$$

czyli:

$$\frac{A}{pq+(1+q^2)\lambda}=\frac{B}{-1-p^2-pq\lambda}=\frac{C}{p\lambda-q}.$$

Równanie wszelkiej płaszczyzny normalnej w danym punkcie $P(x, y, z)$ powierzchni $z=f(x, y)$ możemy zatem przedstawić w postaci:

$$(pq+q^2\lambda+\lambda)(X-x)-(pq\lambda+p^2+1)(Y-y)+(p\lambda-q)(Z-z)=0,$$

gdzie λ jest dowolnym parametrem. Celem wyznaczenia promienia krzywizny w danym punkcie przekroju normalnego na podstawie wzoru (19) mamy tu:

$$A=pq+q^2\lambda+\lambda, \quad B=-pq\lambda-p^2-1, \quad C=p\lambda-q,$$

$$A+Cp=(p^2+q^2+1)\lambda, \quad B+Cq=-(p^2+q^2+1), \quad Aq-Bp=(p^2+q^2+1)(p+q\lambda),$$

$$A^2+B^2+C^2=(p^2+q^2+1)[1+p^2+2pq\lambda+(1+q^2)\lambda^2],$$

$$(A+Cp)^2+(B+Cq)^2+(Aq-Bp)^2=(p^2+q^2+1)^2[1+p^2+2pq\lambda+(1+q^2)\lambda^2],$$

$$\varrho^2=\frac{(p^2+q^2+1)[1+p^2+2pq\lambda+(1+q^2)\lambda^2]^2}{[r+2s\lambda+t\lambda^2]^2}.$$

Otrzymujemy zatem:

$$\varrho=\sqrt{p^2+q^2+1}\cdot\frac{(1+p^2)+2pq\lambda+(1+q^2)\lambda^2}{r+2s\lambda+t\lambda^2} \tag{20}$$

wzór na wyznaczenie promienia krzywizny w dowolnym przekroju normalnym powierzchni.

13. Główne promienie krzywizny. Wielkość promienia krzywizny w danym punkcie przekroju normalnego powierzchni jest na podstawie wzoru (20) funkcyą ułamkową wymierną stopnia drugiego ze względu na parametr dowolny λ, posiada więc swą wartość największą i najmniejszą. Chcąc je wyznaczyć, otrzymujemy:

$$\frac{d\varrho}{d\lambda}=\sqrt{p^2+q^2+1}\,\frac{(r+2s\lambda+t\lambda^2)[2pq+2(1+q^2)\lambda]-[1+p^2+2pq\lambda+(1+q^2)\lambda^2]2(s+t\lambda)}{(r+2s\lambda+t\lambda^2)^2}$$

skąd kładąc $\frac{d\varrho}{d\lambda}=0$ otrzymujemy równanie drugiego stopnia ze względu na λ, w postaci:

$$[(1+q^2)s-pqt]\lambda^2+[(1+q^2)r-(1+p^2)t]\lambda+pqr-(1+p^2)s=0 \tag{21}$$

dostarczające dwie wartości na λ, z których jedna λ_1 wskazuje na ten przekrój normalny, w którym promień krzywizny jest największy ($\varrho_{max}=\varrho_1$), druga λ_2 zaś na ten przekrój normalny, w którym promień krzywizny jest najmniejszy ($\varrho_{min}=\varrho_2$).

Największy i najmniejszy promień krzywizny przekrojów normalnych przez dany punkt powierzchni przechodzących nazywamy *głównymi promieniami krzywizny* w danym punkcie powierzchni (fig. 225 i 226). Wartości tych promieni określa równanie:

$$\varrho=\sqrt{p^2+q^2+1}\cdot\frac{1+p^2+2pq\lambda+(1+q^2)\lambda^2}{r+2s\lambda+t\lambda^2},$$

przyczem na mocy warunku $\frac{d\varrho}{d\lambda}=0$ zachodzą równe stosunki:

$$\frac{1+p^2+2pq\lambda+(1+q^2)\lambda^2}{r+2s\lambda+t\lambda^2}=\frac{pq+(1+q^2)\lambda}{s+t\lambda}=\frac{1+p^2+pq\lambda}{r+s\lambda}. \tag{22}$$

Mamy tedy dla głównych promieni krzywizny dwa równania kształtu

$$\varrho=\sqrt{p^2+q^2+1}\,\frac{pq+(1+q^2)\lambda}{s+t\lambda}, \quad \varrho=\sqrt{p^2+q^2+1}\,\frac{1+p^2+pq\lambda}{r+s\lambda},$$

czyli: $\frac{\varrho(s+t\lambda)}{\sqrt{p^2+q^2+1}}=pq+(1+q^2)\lambda, \quad \frac{\varrho(r+s\lambda)}{\sqrt{p^2+q^2+1}}=1+p^2+pq\lambda,$

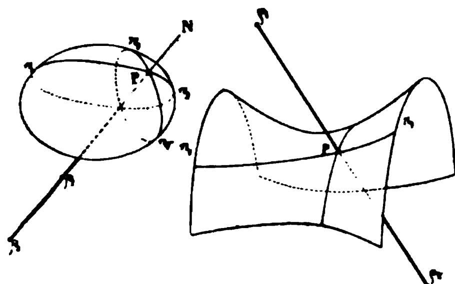


Fig. 225. Fig. 226.

które uporządkowane podług λ przedstawiają się w postaci:

$$\lambda\left\{\frac{\varrho t}{\sqrt{p^2+q^2+1}}-(1+q^2)\right\}=pq-\frac{\varrho s}{\sqrt{p^2+q^2+1}}.$$

$$\lambda\left\{\frac{\varrho s}{\sqrt{p^2+q^2+1}}-pq\right\}=1+p^2-\frac{\varrho r}{\sqrt{p^2+q^2+1}},$$

skąd, po wyrugowaniu parametru λ, otrzymujemy równanie:

$$\{\varrho s-pq\sqrt{p^2+q^2+1}\}^2=\{\varrho t-(1+q^2)\sqrt{p^2+q^2+1}\}\{\varrho r-(1+p^2)\sqrt{p^2+q^2+1}\},$$

które uporządkowane podług ϱ jest równaniem drugiego stopnia kształtu:

$$(rt-s^2)\varrho^2-[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]\varrho\sqrt{p^2+q^2+1}+(p^2+q^2+1)^2=0. \quad (23)$$

Pierwiastki tego równania wyznaczają bezpośrednio oba główne promienie krzywizny w danym punkcie powierzchni.

W szczególności otrzymujemy na podstawie powyższego równania:

a) sumę głównych promieni krzywizny:

$$\varrho_1+\varrho_2=\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{rt-s^2}\sqrt{p^2+q^2+1}, \quad (24)$$

b) iloczyn głównych promieni krzywizny:

$$\varrho_1\varrho_2=\frac{(p^2+q^2+1)^2}{rt-s^2}. \quad (25)$$

14. Wzajemne położenie głównych płaszczyzn krzywizny w danym punkcie powierzchni. Chcąc wyznaczyć wzajemne położenie płaszczyzn głównych krzywizny, należałoby wyznaczyć kąt między niemi zawarty. Przyjmijmy dany punkt powierzchni jako początek układu, płaszczyznę styczną w tym punkcie, jako płaszczyznę XOY, a normalną w tym punkcie jako oś OZ, otrzymamy wtedy dla tego punktu: $x=y=z=0$, $p=0$, $q=0$.

Równanie cechujące położenie płaszczyzn głównych kształtu:

$$[(1+q^2)s-pqt]\lambda^2+[(1+q^2)r-(1+p^2)t]\lambda+pqr-(1+p^2)s=0,$$

sprowadza się wtedy do postaci:

$$s\lambda^2+(r-t)\lambda-s=0, \text{ czyli: } \lambda^2+\frac{r-t}{s}\lambda-1=0, \quad (26)$$

daje więc na λ dwie wartości λ_1 i λ_2 takie, że $\lambda_1\lambda_2=-1$, a że: $\lambda_1=\text{tang}\,\alpha_1$, $\lambda_2=\text{tang}\,\alpha_2$, gdzie α_1, α_2 przedstawiają kąty, jakie ślady płaszczyzn głównych na płaszczyźnie XOY tworzą z osią OX, przeto mamy $\text{tang}\,\alpha_1\,\text{tang}\,\alpha_2=-1$, a zatem: *Płaszczyzny głównych krzywizn są do siebie prostopadłe.*

15. Przyjmując ślady płaszczyzn głównych na płaszczyźnie stycznej, przyjętej za płaszczyznę XOY, czyli t. zw. kierunki główne w danym punkcie jako osie OX i OY, mieć będziemy $\alpha_1=0$, $\alpha_2=\frac{\pi}{2}$, zatem $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\infty$, co możliwe, jeżeli w równaniu na λ obok $x=y=z=0$, $p=q=0$ będzie także $s=0$.

Równanie wyznaczające główne promienie krzywizny kształtu:

$$(rt-s^2)\varrho^2-[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]\varrho\sqrt{p^2+q^2+1}+(p^2+q^2+1)^2=0,$$

sprowadza się w przyjętych założeniach do postaci:

$$rt\varrho^2-(r+t)\varrho+1=0, \quad \text{czyli: } \varrho^2-\frac{r+t}{rt}\varrho+\frac{1}{rt}=0.$$

Promienie główne krzywizny mają tedy wartości:

$$\varrho_1=\frac{1}{r}, \quad \varrho_2=\frac{1}{t},$$

czyli są w takim razie odwrotnemi wartościami drugich pochodnych cząstkowych funkcyi z względem zmiennych niezależnych x i y.

16. Wzór Eulera, wyznaczający promień krzywizny w dowolnym przekroju normalnym. Promień krzywizny w dowolnym przekroju normalnym przedstawia się na mocy art. 12 w postaci:

$$\varrho=\sqrt{p^2+q^2+1}\,\frac{(1+p^2)+2pq\lambda+(1+q^2)\lambda^2}{r+2s\lambda+t\lambda^2}.$$

Przyjmując dany punkt jako początek układu, płaszczyznę styczną za płaszczyznę XOY, normalną za oś OZ, a kierunki główne za osie OX i OY mamy:

$$x=y=z=0, \quad p=q=s=0, \quad r=\frac{1}{\varrho_1}, \quad t=\frac{1}{\varrho_2},$$

zatem:

$$\varrho=\frac{1+\lambda^2}{\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\lambda^2}, \quad \text{czyli: } \frac{1}{\varrho}=\frac{\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\lambda^2}{1+\lambda^2}.$$

Dowolna płaszczyzna normalna otrzymuje w przyjętym układzie równanie: $y=\lambda x$, gdzie $\lambda=\operatorname{tang}\alpha$, jeżeli przez α oznaczymy kąt, jaki ślad tej płaszczyzny normalnej tworzy z nową osią x-ów (fig. 227).

Otrzymujemy tedy wzór:

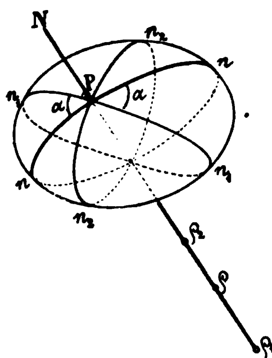


Fig. 227.

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\operatorname{tang}^2\alpha}{1+\operatorname{tang}^2\alpha}=\frac{\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\operatorname{tang}^2\alpha}{\sec^2\alpha},$$

czyli:

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{\cos^2\alpha}{\varrho_1}+\frac{\sin^2\alpha}{\varrho_2} \tag{27}$$

wzór, znaczy pod nazwą wzoru Eulera.

Wniosek: Suma odwrotnych wartości dwóch promieni krzywizny ϱ i ϱ' w dwu przekrojach normalnych do siebie prostopadłych jest ilością stałą. Jest bowiem:

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{\cos^2\alpha}{\varrho_1}+\frac{\sin^2\alpha}{\varrho_2}, \quad \frac{1}{\varrho'}=\frac{\sin^2\alpha}{\varrho_1}+\frac{\cos^2\alpha}{\varrho_2},$$

zatem:

$$\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho'}=\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}.$$

17. Wzór Meusniera, wyznaczający promień krzywizny w dowolnym przekroju skośnym. Zatrzymując powyżej określony układ naturalny w danym punkcie powierzchni, przyjętym za początek układu, otrzymujemy równanie jakiejkolwiek płaszczyzny skośnej przez tenże punkt przechodzącej w postaci:

$$Ax+By+Cz=0.$$

Płaszczyzna ta przecina płaszczyznę styczną, przyjętą za płaszczyznę XOY podług prostej o równaniu:

$$Ax+By=0.$$

Oznaczmy przez α kąt, jaki ta prosta tworzy z osią OX, a przez ω kąt, jaki tworzy płaszczyzna skośna z płaszczyzną normalną, przesuniętą przez prostą: $Ax+By=0$, natenczas otrzymamy $\operatorname{tang}\alpha=-\frac{A}{B}$; możemy zatem równanie płaszczyzny skośnej przedstawić w postaci:

$$x\sin\alpha-y\cos\alpha+Cz=0,$$

równanie płaszczyzny normalnej: $y=x\operatorname{tang}\alpha$, otrzyma wtedy kształt:

$$x\sin\alpha-y\cos\alpha=0,$$

kąt ω, zawarty między dwiema płaszczyznami:

$$Ax+By+Cz+D=0 \text{ i } A'x+B'y+C'z+D'=0$$

określa się wzorem:

$$\cos^2\omega=\frac{AA'+BB'+CC'}{(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2)},$$

otrzymujemy zatem:

$$\cos^2\omega=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+C^2)}=\frac{1}{1+C^2},$$

więc: $C^2=\operatorname{tang}^2\omega$, czyli: $C=\pm\operatorname{tang}\omega$.

Równanie płaszczyzny skośnej otrzymuje zatem kształt:

$$x\sin\alpha-y\cos\alpha\pm z\operatorname{tang}\omega=0.$$

Wyznaczając promień krzywizny ϱ' przekroju skośnego podług wzoru:

$$\varrho^2=\frac{[(A+Cp)^2+(B+Cq)^2+(Bp-Aq)^2]^3}{(A^2+B^2+C^2)[r(B+Cq)^2-2s(B+Cq)(A+Cp)+t(A+Cp)^2]^2},$$

otrzymujemy tu ze względu na to, że:

$A=\sin\alpha$, $B=-\cos\alpha$, $C=\operatorname{tang}\omega$, $p=q=s=0$, $r=\frac{1}{\varrho_1}$, $t=\frac{1}{\varrho_2}$, wzór:

$$\varrho'^2=\frac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^3}{(1+\operatorname{tang}^2\omega)\left(\frac{1}{\varrho_1}\cos^2\alpha+\frac{1}{\varrho_2}\sin^2\alpha\right)^2}=\frac{\cos^2\omega}{\left(\frac{\cos^2\alpha}{\varrho_1}+\frac{\sin^2\alpha}{\varrho_2}\right)^2},$$

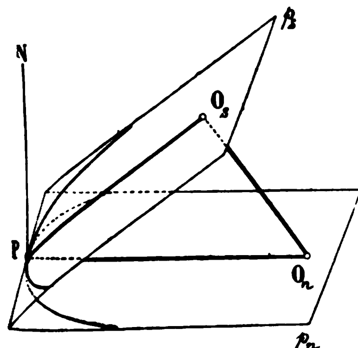


Fig. 228.

a więc:

$$\varrho'=\frac{\cos\omega}{\frac{\cos^2\alpha}{\varrho_1}+\frac{\sin^2\alpha}{\varrho_2}},$$

Oznaczając przez ϱ promień krzywizny w przekroju normalnym płaszczyzną przesuniętą przez ślad płaszczyzny skośnej na płaszczyźnie stycznej (fig. 228), mamy:

$$\frac{\cos^2\alpha}{\varrho_1}+\frac{\sin^2\alpha}{\varrho_2}=\frac{1}{\varrho},$$

otrzymujemy zatem wzór znany pod nazwą wzoru Meusniera w postaci:

$$\varrho'=\varrho\cos\omega. \qquad (28)$$

To znaczy: *Promień krzywizny w dowolnym przekroju skośnym jest rzutem promienia krzywizny w przekroju normalnym na tęż płaszczyznę skośną, jeżeli płaszczyzna normalna ma z płaszczyzną skośną ten sam ślad na płaszczyźnie stycznej w danym punkcie powierzchni.*

Ćwiczenia LI.

1) Wykazać, że powierzchnia n-go rzędu jest wyznaczona w ogólności zapomocą $\left[\binom{n+3}{3}-1\right]$ punktów.

2) Ile punktów wyznacza powierzchnię drugiego, ile trzeciego, a ile czwartego rzędu?

3) Wykazać, że linia prosta przecina powierzchnię n-go rzędu w ogólności w n (a nie więcej) punktach.

4) Wykazać, że przekrój płaski powierzchni n-go rzędu jest w ogólności krzywą n go (a nie wyższego) rzędu.

5) Znaleźć miejsce punktów, w których proste wychodzące z początku układu prostopadle do płaszczyzn stycznych ellipsoidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ przecinają te płaszczyzny.

6) Zbadać powierzchnię kształtu: $z = a\,.\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{y}{x}$.

7) Zbadać powierzchnię określoną równaniem: $xyz = c(x^2-y^2)$ i wyznaczyć jej punkta osobliwe.

8) Wykazać, że powierzchnie, określone równaniami:

$$(x^2+y^2)(a^2-z^2)-c^2y^2=0, \quad (x-c)^2+y^2+z^2-a^2=0$$

dotykają się nawzajem; rzut krzywej styczności przedstawia się na jednej z płaszczyzn rzutowych jako koło, na drugiej jako parabola.

9) Wyprowadzić równanie powierzchni, któraby miała tę własność, że płaszczyzna styczna w punkcie $P(x, y, z)$ przecina oś z-ów w odległości równej odstępowi tego punktu od początku układu.

10) Wierzchołek stożka stycznego do ellipsoidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ porusza się po ellipsoidzie:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}+\frac{(z-\gamma)^2}{c^2}=\lambda^2,$$

wykazać, że jego płaszczyzny styczności są styczne do powierzchni:

$$\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}-1\right)^2=\lambda^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right).$$

11) Wykazać, że równanie:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=1$$

przedstawia stożek, skoro: $\frac{a^2_{14}}{a_{11}}+\frac{a^2_{24}}{a_{22}}+\frac{a^2_{34}}{a_{33}}=a_{44}$.

12) Z każdego punktu powierzchni:

$$4z(ax^2+by^2)+ab(x^2+y^2)=0,$$

jako wierzchołka wykreślone zostały stożki styczne do powierzchni: $abz-(ax^2+by^2)=0$, wykazać, że płaszczyzny styczności tworzą powierzchnię:

$$4z(ax^2+by^2)-(a^2x^2+b^2y^2)=0.$$

13) Wyprowadzić równanie linii prostej stycznej w danym punkcie krzywej przekroju ellipsoidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ze stożkiem: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

14) Wykazać, że spodki prostopadłych wykreślonych z początku układu na styczne krzywej: $x=a\cos\varphi$, $y=a\sin\varphi$, $z=b\varphi$ tworzą linię krzywą, leżącą na powierzchni:

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{a^2}=\frac{a^2}{b^2}.$$

Zbadać powierzchnie, określone następującemi równaniami:

15) $(Ax+By+Cz+D)^2+(A'x+B'y+C'z+D')^2+(A''x+B''y+C''z+D'')^2=K$.

16) $(Ax+By+Cz+D)^2+(A'x+B'y+C'z+D')^2-(A''x+B''y+C''z+D'')^2=K$.

17) $(Ax+By+Cz+D)^2+(A'x+B'y+C'z+D')^2=K$.

18) $(Ax+By+Cz+D)^2-(A'x+B'y+C'z+D')^2=K$.

19) Wykazać, że prostopadłe wykreślone z początku układu do wspólnych płaszczyzn stycznych ellipsoid: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ i $\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1$ tworzą stożek:

$$(a^2-a'^2)x^2+(b^2-b'^2)y^2+(c^2-c'^2)z^2=0.$$

20) Znaleźć miejsce geometryczne punktów, w których prostopadłe wyprowadzone z początku układu na płaszczyzny zamykające z płaszczyznami spółrzędnemi stałą objętość $V=a^3$ przecinają te płaszczyzny.

21) Okazać, że płaszczyzna styczna w pewnym punkcie powierzchni:

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2-2bcyz-2acxz-2abxy=0$$

przecina powierzchnię:

$$ayz+bxz+cxy=0$$

podług dwu prostych do siebie prostopadłych.

22) Wyprowadzić warunek, jakiemu poddane być muszą wierzchołki stożków stycznych do ellipsoidy, aby środki ellips styczności były równooddalone od środka ellipsoidy.

23) Wyprowadzić warunki, pod jakimi dwie powierzchnie drugiego rzędu, przechodzące przez początek układu, a określone równaniami:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2z=0,$$

$$A_{11}x^2+A_{22}y^2+A_{33}z^2+2A_{12}xy+2A_{13}xz+2A_{23}yz+2z=0$$

mają w tymże początku układu oba główne promienia krzywizny sobie równe.

24) Wykazać, że punkta hiperboloidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, w których główne promienie krzywizny są równe, ale przecinego znaku mieszczą się na krzywej, której rzut na płaszczyznę XOY jest ellipsą o równaniu:

$$\frac{a^2+c^2}{a^2}x^2+\frac{b^2+c^2}{b^2}y^2=a^2+b^2.$$

25) Wykazać, że powierzchnia określona równaniem:

$$z=(y-b)\operatorname{tang}\frac{x}{a}$$

ma w każdym punkcie główne promienie krzywizny jednakowe co do wielkości a przeciwne co do znaku.

26) Zbadać powierzchnię określoną równaniem: $xyz=a^3$ i wyznaczyć główne promienie krzywizny w każdym punkcie tej powierzchni.

27) Znaleźć główne promienie krzywizny dla powierzchni: $z-c=\sqrt{xy}$.

28) Zbadać powierzchnię:

$$4z(ax^2+by^2)+ab(x^2+y^2)=0$$

29) Na danej powierzchni wykreślono pewną linię krzywą, wykazać, że promień krzywizny w danym punkcie tej krzywej jest taki sam jak promień krzywizny w przekroju powierzchni z płaszczyzną ściśle styczną w tymże punkcie linii krzywej.

30) Wyprowadzić równanie drugiego stopnia wyznaczające główne promienie krzywizny w danym punkcie powierzchni: $f(x)+\varphi(y)+\psi(z)=0$.

31) Główne promienie krzywizny w danym punkcie powierzchni są a i b; przyjąwszy ten punkt za początek układu a płaszczyznę styczną za XY, a płaszczyzny główne za XZ i YZ, wykazać, że koła krzywizny w przekrojach normalnych przez ten punkt przechodzących tworzą powierzchnię:

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}\right)=2z(x^2+y^2).$$

32) Znaleźć promień krzywizny w dowolnym przekroju normalnym powierzchni:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2z=0.$$

przechodzącym przez początek układu.

33) Sumę głównych promieni krzywizny w danym punkcie powierzchni wyrazić w spółrzędnych tego punktu.

34) Jeżeli ρ_1 i ρ_2 są głównemi promieniami krzywizny w danym punkcie powierzchni, a φ i ψ są kątami, jakie normalne w tym punkcie tworzą z osiami x-ów i y-ów, okazać, że:

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{d\cos\varphi}{dx}+\frac{d\cos\psi}{dy}.$$

35) Wykazać, że powierzchnia o równaniu:

$$f(x)+\varphi(y)+\psi(z)=0$$

ma w danym punkcie $P(x, y, z)$ główne promienie krzywizny sobie równe, skoro:

$$f''(x)=\varphi''(y)=\psi''(z).$$

36) Wykazać, że normalne w punkcie osobliwym powierzchni $F(x, y, z)=0$ tworzą stożek o równaniu:

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}\right)^2\right]\left(X-x\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}\right)\left(Y-y\right)\left(Z-z\right)+\text{\&c}=0.$$

37) Wyznaczyć punkta osobliwe powierzchni:

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)-a^2(b^2+c^2)x^2-b^2(c^2+a^2)y^2-c^2(a^2+b^2)z^2+a^2b^2c^2=0.$$

38) Wykazać, że powierzchnia: $a^2x^2+b^2y^2=z^3(c-z)$ ma w początku układu ostrze jako punkt osobliwy, w którym stożek stycznych wpada w oś z-ów.

39) Wyznaczyć promienie krzywizny przekrojów płaskich powierzchni:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{34}z=0,$$

przechodzących przez punkt $P(0, 0, 0)$ a leżących na płaszczyznach: $y=0$, $x=0$.

40) Wykazać, że suma krzywizn w dwu przekrojach normalnych danego punktu, a do siebie prostopadłych jest ilością stałą.

41) Wykazać, że równanie stożka stycznego do powierzchni: $f(x, y, z)=0$ o wierzchołku $S(\xi, \eta, \zeta)$ wypływa z równań:

$$F(t)=f[\xi+t(X-\xi),\ \eta+t(Y-\eta),\ \zeta+t(Z-\zeta)]=0,\quad F'(t)=0,$$

po wyrugowaniu zmiennej t.

42) Wykazać, że krzywa styczności walca równoległego do prostej:

$$L(x=az+\alpha,\quad y=bz+\beta),$$

a stycznego do powierzchni $f(x, y, z)=0$ określa się równaniami:

$$f(x, y, z)=0,\quad a\frac{\partial f}{\partial x}+b\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

Rozwiązania LI. 5) $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$. 6) Powierzchnia śrubowa. 9) $z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. 13) $\frac{Xx'}{a^2}+\frac{Yy'}{b^2}=\frac{1}{2}$, $Z=\frac{1}{\sqrt{2}}$. 20) $(x^2+y^2)^3=6a^2xyz$. 23) $a_{11}+a_{22}=A_{11}+A_{22}$, $a^2_{12}-a_{11}a_{22}=A^2_{12}-A_{11}A_{22}$. 39) $\left(\frac{a_{13}}{a_{11}},\ \frac{a_{13}}{a_{22}}\right)$.

Literatura. G. Monge: Application de l'analyse à la géometrie. Cinquiéme édition par M. Liouville. Paris 1850. Dr. Reinhold Hoppe: Lehrbuch der analytischen Geometrie. II Teil Leipzig 1890. George Salmon: A treatise on the analytic Geometry of three dimensions. Dublin 1882.

Tematy do rozprawek naukowych.

1. Teorya powierzchni określonych równaniami kształtu: $z=f(x, y)$.
2. Teorya powierzchni określonych równaniami kształtu: $F(x, y, z)=0$.
3. Teorya powierzchni określonych układem równań kształtu: $x=f(u, v)$, $y=\varphi(u, v)$, $z=\psi(u, v)$.

Wykład LII.

Teorya krzywizny powierzchni.

1. Środki krzywizny powierzchni. W teoryi krzywych płaskich nazywamy punkt przecięcia się normalnych w pewnym punkcie z normalną w punkcie sąsiednim środkiem krzywizny w danym punkcie linii krzywej. Chcąc zastosować to określenie do powierzchni zbadajmy, jakie położenie względem normalnej w danym punkcie powierzchni mają normalne w punktach sąsiednich.

Normalna w punkcie $P(x, y, z)$ powierzchni: $z=f(x, y)$ jest określona równaniem:

$$X-x+p(Z-z)=0, \quad Y-y+q(Z-z)=0. \tag{1}$$

Około tego punktu istnieje nieskończenie wiele (∞^1) punktów sąsiednich danej powierzchni, mających spółrzędne:

$$x+dx, \quad y+dy, \quad z+dz=z+pdx+qdy,$$

gdzie stosunek: $\frac{dy}{dx}=\lambda$ jest dowolnym parametrem.

Normalna w którymkolwiek z tych punktów sąsiednich otrzymuje równania:

$$X-x-dx+(p+dp)(Z-z-dz)=0, \quad Y-y-dy+(q+dq)(Z-z-dz)=0 \quad (1')$$

Warunki, pod którymi normalna ta przetnie normalną w punkcie $P(x, y, z)$ otrzymujemy, odejmując od siebie kolejno co dwa równania, czyli co najedno wychodzi, różniczkując równania (1') według x i y; otrzymujemy wtedy równania warunkowe:

$$-dx-pdz+(Z-z)dp=0, \quad -dy-qdz+(Z-z)dq=0,$$

a stąd:

$$Z-z=\frac{dx+pdz}{dp}=\frac{dy+q\,dz}{dq},$$

Ażeby więc dwie normalne sąsiednie miały punkt wspólny, musi spełnić się warunek:

$$\frac{dx+pdz}{dp}=\frac{dy+qdz}{dq}. \tag{2}$$

Ponieważ jednak:

$$dz=pdx+qdy, \quad dp=rdx+sdy, \quad dq=sdx+tdy,$$

przeto warunek powyższy sprowadza się postaci:

$$\frac{dx+p(pdx+qdy)}{r\,dx+s\,dy}=\frac{dy+q\,(pdx+qdy)}{s\,dx+t\,dy},$$

Kładąc: $\frac{dy}{dx}=\lambda$, otrzymujemy stąd równanie:

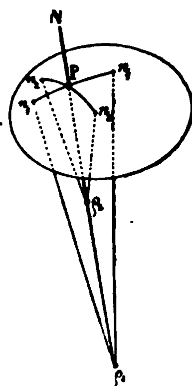
$$\frac{1+p^2+pq\lambda}{r+s\lambda}=\frac{(1+q^2)\lambda+pq}{s+t\lambda},$$

przedstawiające warunek, pod którym normalna w punkcie $P(x, y, z)$ przecina się z normalną sąsiednią. Uporządkowawszy powyższe równanie podług λ otrzymujemy:

$$[(1+q^2)s-pqt]\lambda^2+[(1+q^2)r-(1+p^2)t]\lambda+pqr-(1+p^2)s=0, \quad (4)$$

a więc równanie drugiego stopnia ze względu na dowolny parametr: $\lambda=$ Istnieją więc dwie wartości na λ spełniające powyższy warunek.

Innemi słowy: Pomiędzy wszystkiemi normalnemi, jakie wykreślić można w nieskończenie małem otoczeniu danego punkt $P(x, y, z)$ powierzchni istnieją tylko dwie takie, która przecinają normalną punktu $P(x, y, z)$; wszystkie inne normalne są względem normalnej punktu $P(x, y, z)$ powierzchni wichrowate. Powyższe dwa punkta przecięcia się normalnych sąsiednich nazywamy dwoma środkami krzywizny w punkcie $P(x,y,z)$ danej powierzchni (fig. 229).


Fig. 229.

Odpowiednie promienie krzywizny jako odległości punktu $P(x, y, z)$ od tychże dwu środków krzywizny wyznaczymy z wzoru:

$$\varrho^2=(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2,$$

który ze względu na to, że:

$$X-x=-p(Z-z), \quad Y-y=-q(Z-z),$$

otrzymuje kształt:

$$\varrho^2=(p^2+q^2+1)(Z-z)^2, \text{ czyli: } \varrho=\sqrt{p^2+q^2+1}\,(Z-z).$$

A że:

$$Z-z=\frac{dx+pdy}{dp}=\frac{1+p^2+pq\lambda}{r+s\lambda},$$

tudzież:

$$Z-z=\frac{dy+qdz}{dq}=\frac{(1+q^2)\lambda+pq}{s+t\lambda},$$

przeto otrzymujemy na odnośne promienie krzywizny dwa równania:

$$\varrho=\frac{1+p^2+pq\lambda}{r+s\lambda}\sqrt{p^2+q^2+1}, \quad \varrho=\frac{(1+q^2)\lambda+pq}{s+t\lambda}\sqrt{p^2+q^2+1}, \quad (5)$$

z których po wyrugowaniu λ, otrzymujemy równanie drugiego stopnia ze względu na ϱ w postaci:

$$(rt-s^2)\varrho^2-[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]\sqrt{p^2+q^2+1}\,\varrho+(p^2+q^2+1)^2=0 \quad (6)$$

zgodnej z postacią pod 23 w art. 13 poprzedniego wykładu otrzymaną, wyznaczające dwa główne promienie krzywizny, odpowiadające przyjętemu punktowi $P(x, y, z)$ powierzchni: $z=f(x, y)$; odległości danego punktu od jego dwóch środków krzywizny wyznaczają więc największy i najmniejszy promień krzywizny wszelkich krzywych przez ten punkt przechodzących, czyli główne promienie krzywizny.

2. Powierzchnia środków krzywizny. Środki krzywizny odpowiadające wszystkim punktom danej powierzchni $z=f(x, y)$ tworzą pewną powierzchnię zwaną powierzchnią środków krzywizny danej powierzchni.

Spółrzędne X, Y, Z środków krzywizny są w punkcie $P(x, y, z)$ spół-rzędnemi punktów przecięcia dwu sąsiednich normalnych, określają się we-dług (1) wzorami:

$$X-x=-p(Z-z),\quad Y-y=-q(Z-z),\quad Z-z=\frac{\varrho}{\sqrt{p^2+q^2+1}},$$

których otrzymujemy równania:

$$X=x-\frac{p\varrho}{\sqrt{p^2+q^2+1}},\quad Y=y-\frac{q\varrho}{\sqrt{p^2+q^2+1}},\quad Z=z\frac{\varrho}{\sqrt{p^2+q^2+1}}. \qquad (7)$$

Wyrugowawszy z tych równań przy pomocy równania $z=f(x, y)$ zmienne y, z, otrzymamy jedno równanie między zmiennemi X, Y, Z w postaci $(X, Y, Z)=0$ jako równanie powierzchni środków krzywizny danej powierz-chni: $z=f(x, y)$.

Do każdego punktu powierzchni należą dwa środki krzywizny odpo-wiadające dwu wartościom na ϱ, otrzymujemy więc na mocy wzorów (6) dwa równania, a więc dwie powierzchnie środków krzywizny, jedną powierz-chnię środków największej, drugą powierzchnię środków najmniejszej krzy-wizny. W ogólności tworzą obie te powierzchnie dwie powłoki jednej po-wierzchni, zwanej ogólnie powierzchnią środków krzywizny.

3. **Uwaga.** Powierzchnia środków krzywizny danej powierzchni odpowiada w teoryi krzywych płaskich krzywej środków krzywizny, zwanej ewolutą danej krzywej. Jak nor-malna krzywej płaskiej jest styczną do ewoluty w odpowiednim środku krzywizny, tak też jest każda normalna do powierzchni styczną do jej powierzchni środków krzywizny i to styczną w dwu punktach, t. j. w dwu odpowiednich środkach krzywizny, gdyż każdą normalną przecinają dwie sąsiednie normalne w dwu różnych punktach, mianowicie w środ-kach największej i najmniejszej krzywizny.

4. **Kryterya krzywizny.** Główne promienie krzywizny ϱ_1 i ϱ_2 dają pojęcie o krzywiźnie w danym punkcie powierzchni: $z=f(x, y)$ i jej rodza-jach. Uwzględniając, że iloczyn głównych promieni krzywizny wyraża się wzorem:

$$\varrho_1\varrho_2=\frac{(p^2+q^2+1)^2}{rt-s^2},$$

a promień krzywizny ϱ w dowolnym przekroju normalnym określony jest wzorem Eulera:

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{\cos^2\alpha}{\varrho_1}+\frac{\sin^2\alpha}{\varrho_2},$$

dochodzimy do następujących wniosków:

a) Jeżeli $rt-s^2>0$, natenczas jest iloczyn $\varrho_1\varrho_2$ dodatni, główne promie-nie krzywizny są wtedy oba jednakowego znaku. Tego samego znaku są też promienie krzywizny we wszystkich przekrojach normalnych. Środki krzy-wizny leżą wtedy po jednej stronie normalnej punktu $P(x, y, z)$ powierzchni. Powierzchnia jest w tym punkcie w jedną stronę skrzywiona. Punkt taki nazywamy p u n k t e m e l l i p t y c z n y m;

b) Jeżeli $rt-s^2<0$, natenczas iloczyn $\varrho_1\varrho_2$ jest ujemny, główne promie-nie krzywizny są wtedy znaku przeciwnego, promienie krzywizny leżą między granicami ϱ_1 i ϱ_2, są więc częściowo dodatnie, częściowo ujemne. Środki krzywizny leżą tedy po przeciwnych stronach normalnej punktu $P(x, y, z)$ powierzchni. Powierzchnia jest w tym punkcie siodełkowatą. Punkt taki nazywamy punktem hiperbolicznym. W takim punkcie istnieją prze-

kroje normalne, w których promienie krzywizny są nieskończenie wielkie, a położenie odnośnych płaszczyzn normalnych określone jest wzorem:

$$\frac{\cos^2\alpha}{\varrho_1}+\frac{\sin^2\alpha}{\varrho_2}=0,\ \text{czyli: } \operatorname{tang}\alpha=\pm\sqrt{\frac{-\varrho_2}{\varrho_1}}.$$

Są to dwie płaszczyzny ułożone symetrycznie względem płaszczyzn głównych tego punktu Ich przekroje wykazują w tym punkcie krzywiznę $\frac{1}{\varrho}$ równą zeru, podczas gdy przekroje normalne wykazują bądź dodatnią, bądź ujemną krzywiznę.

c) Jeżeli $rt-s^2=0$, natenczas iloczyn $\varrho_1\varrho_2=\infty$, zatem przynajmniej jeden z głównych promieni krzywizny w tym punkcie jest nieskończenie wielki. Powierzchnia wykazuje wtedy w jednym przekroju głównym krzywiznę równą zeru, a we wszystkich swych przekrojach normalnych krzywiznę tego samego znaku. Punkt taki nazywamy punktem parabolicznym.

Gdyby w takim punkcie były oba główne promienie krzywizny nieskończenie wielkie $\varrho_1=\infty$, $\varrho_2=\infty$, wtedy byłyby wszystkie promienie krzywizny nieskończenie wielkie, a punkt taki byłby punktem płaskim.

5. Krzywa wskazująca (Indicatrix) Dupina. Pojęcie o krzywiźnie w danym punkcie $P(x, y, z)$ powierzchni $z=f(x, y)$ o głównych promieniach krzywizny ϱ_1 i ϱ_2 może dać przekrój powierzchni płaszczyzną przeprowadzoną w pewnem oddaleniu równolegle do płaszczyzny stycznej w tym punkcie.

Weźmy pod uwagę obok punktu $P(x, y, z)$ powierzchni $z=f(x, y)$ punkt inny $Q(x+x', y+y', z+z')$ tej powierzchni, mamy wtedy związek:

$$z+z'=f(x+x', y+y'),$$

z którego na mocy szeregu Taylora otrzymujemy:

$$z+z'=f(x, y)+\frac{\partial z}{\partial x}x'+\frac{\partial z}{\partial y}y'+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}x'^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}x'y'+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}y'^2\right]+R_3,$$

czyli:

$$z'=px'+qy'+\frac{rx'^2}{2}+sx'y'+\frac{ty'^2}{2}+R_3. \qquad (8)$$

Przyjmując punkt $P(x, y, z)$ za początek układu, a płaszczyznę styczną w tym punkcie za płaszczyznę XOY, ślady dwóch płaszczyzn głównych na tejże płaszczyźnie stycznej za osie OX i OY otrzymamy:

$$x=y=z=0,\ p=q=0,\ s=0,\ r=\frac{1}{\varrho_1},\ t=\frac{1}{\varrho_2},$$

Oznaczając przez h odstęp płaszczyzn równoległych, a więc, kładąc $z'=h$, otrzymujemy na podstawie wzoru (8) wzór:

$$h=\frac{x'^2}{2\varrho_1}+\frac{y'^2}{2\varrho_2}. \qquad (9)$$

A zatem: *Płaszczyzna poprowadzona równolegle do płaszczyzny stycznej danego punktu powierzchni w nieskończenie małem oddaleniu przecina powierzchnię podług krzywej drugiego rzędu, zwanej krzywą wskazującą Dupin'a.*

Główne osie krzywej Dupin'a wskazują główne kierunki krzywizny w danym punkcie powierzchni.

Krzywa ta jest:

a) ellipsą (fig. 230), skoro oba główne promienie krzywizny ϱ_1 i ϱ_2 i odstęp h mają jednakowe znaki, czyli, jeżeli $rt-s^2>0$, a więc powierzchnia jest skrzywioną w jedną stronę normalnej;

β) hiperbolą (a właściwie w nieskończenie małem otoczeniu punktu styczności ma postać hiperboli) (fig. 231), jeżeli oba główne promienie krzywizny mają przeciwne znaki, jeżeli więc $rt - s^2 < 0$, czyli, jeżeli powierzchnia jest w danym punkcie siodełkowatą.



Fig. 230.

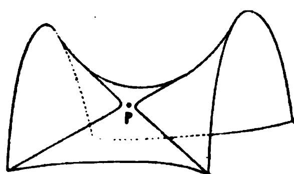


Fig. 231.

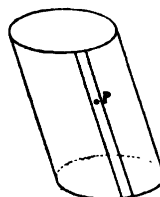


Fig. 232.

γ) Jeżeli z dwu głównych promieni krzywizny ϱ_1 i ϱ_2 jest jeden nieskończenie wielki, wtedy krzywa Dupin'a w nieskończenie małem sąsiedztwie punktu styczności sprowadza się do paraboli, względnie do dwu prostych równoległych (fig. 232), otrzymując, gdy $\varrho_1 = \infty$ równanie:

$$y = \pm\sqrt{2\varrho_2 h}, \text{ a dla } \varrho_2 = \infty, \text{ równanie } x = \pm\sqrt{2\varrho_1 h}.$$

6. Krzywizna Gaussa. Krzywizna k w danym punkcie krzywej płaskiej określa się, jak wiadomo, stosunkiem kąta styczności do różniczki łuku, czyli wzorem: $k = \frac{d\varepsilon}{ds}$. Stosunek ten można uzmysłowić geometrycznie w ten sposób: Wykreślmy w dwu sąsiednich punktach P, Q krzywej w odstępie $PQ = ds$ normalne, a z dowolnego punktu O, jako środka, koło o promieniu 1, poprowadźmy proste równoległe do obu normalnych, proste te przetną koło w punktach P' i Q', odległość $P'Q'$ będzie tedy miarą kąta styczności $d\varepsilon$, otrzymujemy tedy: $k = \frac{d\varepsilon}{ds} = \frac{P'Q'}{PQ}$. Miarę krzywizny w danym punkcie krzywej płaskiej możemy więc określić jako stosunek między elementem koła o promieniu równym jednostce, a elementem krzywej, gdzie końcowe promienie łuku koła są równoległe do normalnych w końcach elementu krzywej.

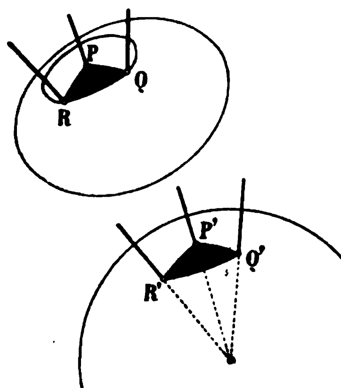


Fig. 233.

Gauss uogólnia to określenie krzywizny krzywych płaskich do powierzchni w sposób następujący. Wyobraźmy sobie na danej powierzchni dowolnie ograniczoną część powierzchni PQR (fig. 233), a w punktach ograniczenia wykreślone normalne do powierzchni, obierzmy sobie obok powierzchni dowolny punkt O, jako środek kuli o promieniu równym jednostce i wykreślmy z tego punktu promienie równoległe do normalnych wykreślonych w powyżej przyjętych punktach powierzchni, natenczas promienie te wyznaczą na kuli pewną krzywą $P'Q'R'$, odpowiadającą przyjętej krzywej na powierzchni.

Skończonemu polu ograniczonej powierzchni odpowiada również skończone pole na kuli. Stosunek między tem polem kuli a odpowiedniem polem powierzchni możemy uważać za miarę krzywizny tejże części powierzchni.

Ażeby w myśl tego uogólnienia wyznaczyć krzywiznę w danym punkcie powierzchni $z=f(x,y)$ obierzmy nieskończenie mały element f tej powierzchni i wykreślmy odpowiedni element φ na kuli, natenczas stosunek $\frac{\varphi}{f}$ będzie szukaną miarą krzywizny. Jako nieskończenie mały element powierzchni możemy przyjąć trójkąt prostokątny, powstały w ten sposób, że obok punktu $P(x, y, z)$ powierzchni przyjmiemy dwa nieskończenie bliskie punkta Q i R w kierunkach osi OX i OY, jako wierzchołki trójkąta (fig. 233), a więc punkta:

$$P(x, y, z),\quad Q(x+dx, y, z+d_x z),\quad R(x, y+dy, z+d_y z),$$

czyli:

$$P(x, y, z),\quad Q(x+dx, y, z+pdx),\quad R(x, y+dy, z+qdy).$$

Trójkąt PQR rzuci się tedy na płaszczyźnie XOY jako trójkąt o powierzchni $\frac{1}{2}dx\,dy$, a że wielkość trójkąta płaskiego jest równa wielkości jego rzutu podzielonej przez cos kąta, jaki płaszczyzna trójkąta tworzy z płaszczyzną rzutową, a kątem tym jest w tym przypadku kąt γ, jaki styczna w punkcie $P(x, y, z)$ tworzy z płaszczyzną XOY, a więc określa się wzorem:

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}},$$

przeto oznaczając powierzchnię trójkąta PQR przez d^2F, otrzymamy wzór:

$$d^2F=\frac{1}{2}dx\,dy\sqrt{p^2+q^2+1}.$$

Wykreślmy teraz odpowiedni trójkąt $P'Q'R'$ na kuli, a otrzymamy, jako wierzchołki odpowiednie punktom:

$$P(x, y, z),\quad Q(x+dx, y, z+pdx),\quad R(x, y+dy, z+qdy),$$

powierzchni, punkta:

$$P'(X, Y, Z),\quad Q'\left(X+\frac{\partial X}{\partial x}dx,\ Y+\frac{\partial Y}{\partial x}dx,\ Z+\frac{\partial Z}{\partial x}dx\right),$$
$$R'\left(X+\frac{\partial X}{\partial y}dy,\ Y+\frac{\partial Y}{\partial y}dy,\ Z+\frac{\partial Z}{\partial y}dy\right),$$

na kuli.

Rzut tego trójkąta na płaszczyznę XOY otrzymuje powierzchnię określoną wzorem:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} X, & Y, & 1 \\ X+\frac{\partial X}{\partial x}dx, & Y+\frac{\partial Y}{\partial x}dx, & 1 \\ X+\frac{\partial X}{\partial y}dy, & Y+\frac{\partial Y}{\partial y}dy, & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x}dx, & \frac{\partial Y}{\partial x}dx \\ \frac{\partial X}{\partial y}dy, & \frac{\partial Y}{\partial y}dy \end{vmatrix} = \frac{1}{2}dx\,dy\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x}, & \frac{\partial Y}{\partial x} \\ \frac{\partial X}{\partial y}, & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Wobec tego powierzchnia trójkąta $(P'Q'R')$, którą oznaczmy przez $d^2\Phi$, ze względu na to, że płaszczyzna trójkąta $P'Q'R'$ jest równoległą do płaszczyzny trójkąta PQR, otrzymuje wartość:

$$d^2\Phi=\frac{1}{2}dx\,dy\sqrt{p^2+q^2+1}\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x}, & \frac{\partial Y}{\partial x} \\ \frac{\partial X}{\partial y}, & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix}, \tag{10}$$

zatem stosunek:

$$k=\frac{d^2\Phi}{d^2F}=\begin{vmatrix}\frac{\partial X}{\partial x}, & \frac{\partial Y}{\partial x}\\ \frac{\partial X}{\partial y}, & \frac{\partial Y}{\partial y}\end{vmatrix}=\frac{\partial X}{\partial x}\cdot\frac{\partial Y}{\partial y}-\frac{\partial X}{\partial y}\cdot\frac{\partial Y}{\partial x}. \tag{11}$$

Pozostaje nam tedy wyznaczyć tylko spółrzędne X, Y, Z punktu P' na kuli, odpowiadającego punktowi $P(x, y, z)$ na powierzchni.

Jeżeli środek kuli o promieniu równym jednostce przyjmiemy w początku układu, a z punktu tego wyprowadzimy prostą równoległą do normalnej w punkcie $P(x, y, z)$ powierzchni, wtedy oznaczając przez α, β, γ kąty, jakie ta normalna tworzy z osiami układu, otrzymujemy:

$$X=\cos\alpha,\quad Y=\cos\beta,\quad Z=\cos\gamma,$$

a że:

$$\frac{\cos\alpha}{p}=\frac{\cos\beta}{q}=\frac{\cos\gamma}{-1}=\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}},$$

przeto będzie:

$$X=\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+1}},\quad Y=\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+1}},\quad Z=-\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}.$$

Wobec tego otrzymujemy:

$$\frac{\partial X}{\partial x}=\frac{(1+q^2)r+pqs}{(p^2+q^2+1)^{3/2}},\quad \frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{(1+p^2)s+pqr}{(p^2+q^2+1)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{(1+q^2)s+pqt}{(p^2+q^2+1)^{3/2}},\quad \frac{\partial Y}{\partial y}=\frac{(1+p^2)t+pqs}{(p^2+q^2+1)^{3/2}},$$

zatem:

$$\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y}-\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{(rt-s^2)(1+p^2+q^2)}{(p^2+q^2+1)^3},$$

a więc wzór:

$$k=\frac{rt-s^2}{(p^2+q^2+1)^2}, \tag{12}$$

określający miarę krzywizny powierzchni, zwaną krzywizną Gaussa.

Szukając związku między krzywizną Gaussa a głównymi promieniami krzywizny ϱ_1, ϱ_2, których iloczyn wyraża się wzorem:

$$\varrho_1\varrho_2=\frac{(p^2+q^2+1)^2}{rt-s^2},\ \text{otrzymujemy wzór:}\ k=\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}. \tag{13}$$

A zatem: *Krzywizna Gaussa w danym punkcie powierzchni jest równa odwrotnej wartości iloczynu głównych promieni krzywizny w tym punkcie.*

7. Krzywizna dodatnia, ujemna i zerowa. Krzywiznę Gaussa w danym punkcie powierzchni nazywamy też zupełną krzywizną powierzchni w tymże punkcie.

Punkta, w których krzywizna zupełna k jest dodatnią, a więc punkta, w których główne promienie krzywizny ϱ_1 i ϱ_2 są tego samego znaku, czyli t. zw. punkta elliptyczne na powierzchni, nazywamy też punktami o dodatniej krzywiźnie zupełnej, a powierzchnie, w których wszystkie punkta mają krzywiznę dodatnią ($k>0$), nazywamy powierzchniami o krzywiźnie dodatniej.

Punkta, w których krzywizna k jest ujemną, a więc punkta, w których główne promienie krzywizny ϱ_1 i ϱ_2 są przeciwnych znaków, czyli punkta hiperboliczne, nazywamy też punktami o ujemnej krzywi-

źnie zupełnej, a powierzchnie, w których wszystkie punkta mają krzywiznę ujemną ($k<0$), nazywamy powierzchniami o krzywiźnie ujemnej.

Punkta, w których krzywizna k jest równa zeru, a więc punkta, w których przynajmniej jeden z głównych promieni krzywizny jest nieskończenie wielki, czyli t. zw. punkta paraboliczne, nazywamy też punktami o krzywiźnie równej zeru, a powierzchnie, w których wszystkie punkta mają krzywiznę zupełną, równą zeru ($k=0$), nazywamy powierzchniami o krzywiźnie zerowej.

Jeżeli krzywizna zupełna otrzymuje w poszczególnych punktach powierzchni stale tę samą wartość niezależną od spółrzędnych punktu, natenczas nazywamy taką powierzchnię powierzchnią o stałej krzywiźnie. Według tego dzielimy powierzchnie o stałej krzywiźnie na *a*) powierzchnie o stałej krzywiźnie dodatniej, określone warunkiem:

$$k=\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}=\frac{rt-s^2}{(p^2+q^2+1)^2}=c^2,$$

b) powierzchnie o stałej krzywiźnie ujemnej (fig. 234) określone warunkiem:

$$k=\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}=\frac{rt-s^2}{(p^2+q^2+1)^2}=-c^2$$

c) powierzchnie o stałej krzywiźnie zerowej, określone warunkiem:

$$k=\frac{1}{\varrho_1\varrho_1}=\frac{rt-s^2}{(p^2+q^2+1)^2}=0, \text{ czyli: } rt-s^2=0.$$



Fig. 234.

8. Punkta kuliste czyli punkta pępkowe powierzchni. Szukając kierunku głównych płaszczyzn w danym punkcie $P(x, y, z)$ powierzchni na podstawie wzoru:

$$[(1+q^2)s-pqt]\lambda^2+[(1+q^2)r-(1+p^2)t]\lambda+pqr-(1+p^2)s=0,$$

możemy natrafić na przypadek, w którym szukany kierunek jest nieoznaczony, gdy równanie powyższe ma na λ nieskończenie wiele pierwiastków, przypadek, w którym wszystkie trzy spółczynniki równania są zerami, a więc spełniają się równania warunkowe:

$$(1+q^2)s-pqt=0, \quad (1+q^2)r-(1+p^2)t=0, \quad (1+p^2)s-pqr=0. \qquad (14)$$

Z tych trzech równań jest jedno wynikiem dwu innych, a więc dwa z nich wystarczają do wyznaczenia spółrzędnych x, y, z takich punktów.

Powierzchnia ma w takich punktach nieskończenie wiele kierunków głównych, promienie krzywizny wszystkich przekrojów normalnych przez ten punkt przeprowadzonych są wtedy jednakowe. Powierzchnia ma więc w tym punkcie kształt kuli, a punkt taki nazywamy punktem kulistym albo punktem pępkowym (pępkiem) powierzchni. Krzywa wskazująca Dupina jest w takim punkcie kołem.

Punkta kuliste określone równaniami (14), występują na powierzchniach w ogólności jako oddzielne punkta, w szczególnych przypadkach mogą tworzyć pewne krzywe na powierzchni. Powierzchnią o samych punktach kulistych jest tylko powierzchnia kuli.

9. Rozwijalność powierzchni na innej powierzchni. Krzywizna Gaussa spowodowała teoryę rozwijalności jednej powierzchni na drugiej. Powierzchnia

; na drugiej powierzchni rozwijalną, jeżeli można ją na tej drugiej porzchni rozwinąć bez zmiany jej wymiarów. Odpowiednie elementa obu ich powierzchni muszą mieć tedy jednakową wielkość, innemi słowy krzyma Gaussa jest w odpowiednich punktach dwu powierzchni na sobie rozalnych jednakową.

Powierzchnie rozwijalne na płaszczyźnie, zwane zwykle powierzchniami wijalnemi, mają w każdym punkcie krzywiznę zupełną równą zeru, ich ıkta czynią więc zadość równaniu różniczkowemu cząstkowemu drugiego du, kształtu:

$$rt-s^2=0,$$

re też nazywamy równaniem różniczkowem powierzchni rozwiıych na płaszczyźnie.

Powierzchnie rozwijalne na kuli o promieniu a mają we wszystkich ıktach stałą krzywiznę zupełną k równą $\frac{1}{a^2}$. Równanie różniczkowe cząowe kształtu:

$$\frac{rt-s^2}{(p^2+q^2+1)^2}=\frac{1}{a^2}, \tag{15}$$



Fig. 235.

jest więc równaniem różniczkowem wszystkich powierzchni rozwijalnych na kuli o promieniu a. Powierzchnie o stałej krzywiźnie dodatniej są więc powierzchniami rozwijalnemi na kuli.

Powierzchnie rozwijalne na powierzchni o stałej krzywiźnie ujemnej: $k=-\frac{1}{a^2}$, zwanej pseudosferą o promieniu a, jaką jest traktrysoida (fig. 235), t. j powierzchnia powstała przez obrót traktrysy około jej asymptoty mają we wszystkich punktach stałą krzywiznę zupełną k równą $-\frac{1}{a^2}$, równanie różniczkowe cząstkowe kształtu:

$$\frac{rt-s^2}{(p^2+q^2+1)^2}=-\frac{1}{a^2},$$

t więc równaniem różniczkowem wszystkich powierzchni rozwijalnych pseudosferze o promieniu a. Powierzchnie o stałej krzywiźnie ujemnej więc powierzchniami rozwijalnemi na pseudosferze.

10. Spółrzędne krzywolinijne na powierzchniach. Jeżeli powierzchnia eślona jest trzema równaniami kształtu:

$$x=f(u, v), \quad y=\varphi(u, v) \quad z=\psi(u, v),$$

lwu parametrach zmiennych u, v, natenczas każdej parze przyjętych warci u_1, v_1 parametrów u i v odpowiada pewien punkt tej powierzchni. żdy punkt występuje tu jako przekrój dwu krzywych $u=u_1$, $v=v_1$, z któh jedna należy do układu krzywych u, druga do układu krzywych v, iemi pokryta jest powierzchnia powyższemi równaniami określona. Szczene wartości u_1, v_1 parametrów u, v, nazywamy spółrzędnemi krzylinijnemi punktu na danej powierzchni, a krzywe u i v nazywamy sywemi parametrowemi tej powierzchni.

Spółrzędne krzywolinijne punktu na powierzchni nazywają niekiedy także spółrzędnemi Gaussa. Są one ściślej związane z naturą powierzchni samej bez względu na jej położenie w przestrzeni, dla tego używa się ich z korzyścią przy badaniu powierzchni i wyszukiwaniu jej własności lub własności pewnych krzywych na niej wykreślonych, których równanie określa dowolny związek między parametrami u, v w postaci $\varphi(u, v)=0$. Ilość układów krzywolinijnych na danej powierzchni: $F(x, y, z)=0$ jest nieograniczona; każdy taki układ otrzymamy, wyrażając spółrzędne x, y, z punktu ruchomego jako takie funkcye dwu niezależnych parametrów u i v, ażeby przez wyrugowanie tych parametrów z odpowiednich trzech równań:

$$x=f(u, v),\ y=\varphi(u, v),\ z=\psi(u, v)$$

wypadło równanie dane kształtu: $F(x, y, z)=0$.

11. Różniczka łuku na powierzchni, określonej trzema równaniami, kształtu: $x=f(u, v)$, $y=\varphi(u, v)$, $z=\psi(u, v)$. Element łuku krzywej w przestrzeni określa wzór:

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2.$$

Mamy tu na podstawie danych równań:

$$dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv=a\,du+a'\,dv,\quad dy=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv=b\,du+b'\,dv,$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv=c\,du+c'dv,$$

gdzie: $a=\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial u},\quad a'=\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial v};\quad b=\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial \varphi}{\partial u},\quad b'=\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial \varphi}{\partial v};$

$$c=\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial \psi}{\partial u},\quad c'=\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial \psi}{\partial v};$$

zatem: $$ds^2=(a\,du+a'\,dv)^2+(b\,du+b'\,dv)^2+(c\,du+c'\,dv)^2,$$

a stąd: $$ds^2=(a^2+b^2+c^2)\,du^2+2(aa'+bb'+cc')\,du\,dv+(a'^2+b'^2+c'^2)\,dv^2,$$

czyli wzór: $$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2, \tag{16}$$

przedstawiający odległość dwu punktów, odpowiadających parametrom (u, v) i $(u+du, v+dv)$, leżących na powierzchni:

$$x=f(u, v),\quad y=\varphi(u, v),\quad z=\psi(u, v),$$

czyli element łuku na tej powierzchni, wykreślonego z punktu $P(u, v)$, w kierunku określonym stosunkiem: $\frac{du}{dv}$.

Spółczynniki:

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=a^2+b^2+c^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=aa'+bb'+cc',$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=a'^2+b'^2+c'^2,$$

mają dla wszystkich elementów, wychodzących z tego samego punktu (u, v) powierzchni: $x=f(u, v)$, $y=\varphi(u, v)$, $z=\psi(u, v)$, w tymże punkcie te same wartości i nazywają się zasadniczemi wielkościami pierwszego rzędu w danym punkcie powierzchni.

Jeżeli na dwu powierzchniach, których równania przedstawione są w tych samych parametrach u, v, wielkości zasadnicze E, F, G są te same, natenczas na podstawie równania (16) są takie długości wszystkich odpowiednich elementów równe, skąd wnosimy, że powierzchnie, mające ze względu na te same parametry u, v, jednakowe wielkości zasadnicze są na sobie rozwijalne.

Uwaga. Jeżeli spółrzędne x i y są same parametrami, a więc powierzchnia ma równanie $z=f(x, y)$, wtedy otrzymujemy:

$$E=1+p^2, \quad F=pq, \quad G=1+q^2,$$

zatem wzór na element łuku na powierzchni $z=f(x, y)$, w postaci:

$$ds^2=(1+p^2)\,dx^2+2pq\,dx\,dy+(1+q^2)\,dy^2. \tag{17}$$

12. Kąt zawarty między dwoma łukami na powierzchni. Jeżeli α, β, γ, przedstawiają kąty, jakie element łuku, przechodzący przez dany punkt (u, v) powierzchni:

$$x=f(u, v), \quad y=\varphi(u, v), \quad z=\psi(u, v)$$

tworzy z osiami układu, wtedy mamy:

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta=\frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma=\frac{dz}{ds},$$

zatem:

$$\cos\alpha=\frac{\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv}{\sqrt{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}}, \quad \cos\beta=\frac{\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv}{\sqrt{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv}},$$

$$\cos\gamma=\frac{\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv}{\sqrt{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}}.$$

Kładąc: $\frac{dv}{du}=\lambda$, otrzymujemy stąd wzory:

$$\cos\alpha=\frac{\frac{\partial x}{\partial u}+\lambda\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{E+2F\lambda+G\lambda^2}}, \quad \cos\beta=\frac{\frac{\partial y}{\partial u}+\lambda\frac{\partial y}{\partial v}}{\sqrt{E+2F\lambda+G\lambda^2}}, \quad \cos\gamma=\frac{\frac{\partial z}{\partial u}+\lambda\frac{\partial z}{\partial v}}{\sqrt{E+2F\lambda+G\lambda^2}},$$

wyznaczające styczną odpowiadającą parametrowi λ.

Dwa łuki w punkcie $P(u, v)$, z których jeden odpowiada parametrowi λ, drugi parametrowi λ' zawierają kąt ω, którego wielkość wyznacza się wzorem:

$$\cos\omega=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'=$$

$$=\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial u}+\lambda\frac{\partial x}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}+\lambda'\frac{\partial x}{\partial v}\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial u}+\lambda\frac{\partial y}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}+\lambda'\frac{\partial y}{\partial v}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\lambda\frac{\partial z}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\lambda'\frac{\partial z}{\partial v}\right)}{\sqrt{(E+2F\lambda+G\lambda^2).(E+2F\lambda'+G\lambda'^2}},$$

czyli:

$$\cos\omega=\frac{E+F(\lambda+\lambda')+G\lambda\lambda'}{\sqrt{(E+2F\lambda+G\lambda^2)(E+2F\lambda'+G\lambda'^2)}}.$$

Dwa łuki w danym punkcie $P(u, v)$ przecinają się zatem pod kątem prostym, skoro:

$$E+F(\lambda+\lambda')+G\lambda\lambda'=0.$$

Jeżeli z dwu elementów łuku, wychodzących z punktu $P(u, v)$, wpada jeden w krzywą $u=c$ stałej, drugi w krzywą $v=c$ stałej, wówczas otrzymujemy w pierwszym przypadku $du=0$, zatem $\lambda=\infty$, w drugim $dv=0$, zatem $\lambda'=0$, kąt zawarty między temi krzywemi wyznacza się wtedy wzorem:

$$\cos\alpha=\frac{F}{\sqrt{EG}}, \text{ skąd wynika: } \sin\alpha=\sqrt{\frac{EG-F^2}{EG}}.$$

Warunek prostopadłości krzywych u i v przedstawia się tedy w postaci: $F=0$, a różniczka łuku określa się wzorem:

$$ds^2=E\,du^2+G\,dv^2.$$

13. Promień krzywizny przekroju normalnego powierzchni $x=f(u,v)$, $y=\varphi(u,v)$, $z=\psi(u,v)$. Płaszczyzna styczna w punkcie (u, v) powierzchni $x=f(u,v)$, $y=\varphi(u,v)$, $z=\psi(u,v)$ ma równanie:

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$

gdzie spółczynniki A, B, C są wyznacznikami funkcyjnymi we wzorze (6) str. 414 określonymi. Dowolna płaszczyzna normalna w punkcie $P(u,v)$, jako prostopadła do płaszczyzny stycznej w tym punkcie, przetnie powierzchnię podług krzywej, której promień krzywizny ϱ możemy bezpośrednio w ten sposób wyznaczyć. Niech będzie $PQ=ds$ elementem łuku tego przekroju, a δ odległością punktu $Q(u+du, v+dv)$ od płaszczyzny stycznej, tedy będzie $ds^2=2\varrho\delta$, zatem $\varrho=\frac{ds^2}{2\delta}$.

Odległość δ punktu $Q(u+du, v+dv)$ od płaszczyzny stycznej w punkcie $P(u, v)$ będzie nieskończenie małą rzędu drugiego, wyznaczoną wzorem:

$$\delta=\frac{1}{2!}\,\frac{A\,d^2x+2B\,d^2y+C\,d^2z}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

a że:

$$d^2x=\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}du\,dv+\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}dv^2,\qquad d^2y=\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}du\,dv+\frac{\partial^2 y}{dv^2}dv^2,$$

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}du\,dv+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}dv^2,$$

przeto otrzymujemy: $\delta=\frac{1}{2}[R\,du^2+2S\,du\,dv+T\,dv^2]$,

gdzie:
$$R=\frac{A\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+B\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+C\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\qquad S=\frac{A\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}+B\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}+C\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$T=\frac{A\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+B\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}+C\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{18}$$

A że: $ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$,

przeto otrzymujemy:

$$\varrho=\frac{ds^2}{2\delta}=\frac{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}{R\,du^2+2S\,du\,dv+T\,dv^2},$$

skąd kładąc $\frac{dv}{du}=\lambda$, otrzymujemy wzór:

$$\varrho=\frac{E+2F\lambda+G\lambda^2}{R+2S\lambda+T\lambda^2}, \tag{19}$$

przedstawiający promień krzywizny w przekroju normalnym punktu $P(u, v)$, określonym parametrem λ.

14. Główne promienie krzywizny w punktach powierzchni $x=f(u,v)$, $y=\varphi(u,v)$, $z=\psi(u,v)$. Główne krzywizny znajdziemy z warunku: $\frac{d\varrho}{d\lambda}=0$.

Otrzymujemy tedy z (19) równanie na λ w postaci:

$$\begin{vmatrix} R+2S\lambda+T\lambda^2, & S+T\lambda \\ E+2F\lambda+G\lambda^2, & F+G\lambda \end{vmatrix}=0,$$

czyli równanie stopnia drugiego kształtu:

$$\begin{vmatrix} R, & S \\ E, & F \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R, & T \\ E, & G \end{vmatrix}\lambda + \begin{vmatrix} T, & S \\ G, & F \end{vmatrix}\lambda^2 = 0. \tag{20}$$

Główne promienie krzywizny wyznaczone będą tedy stosunkami:

$$\varrho = \frac{E+2F\lambda+G\lambda^2}{R+2S\lambda+T\lambda^2} = \frac{F+G\lambda}{S+T\lambda} = \frac{E+F\lambda}{R+S\lambda},$$

czyli równaniami: $(S+T\lambda)\varrho = F+G\lambda$, $(R+S\lambda)\varrho = E+F\lambda$,

z których po wyrugowaniu parametru λ, otrzymujemy równanie stopnia drugiego ze względu na ϱ:

$$(RT-S^2)\varrho^2-(GR+ET-2FS)\varrho+(EG-F^2)=0, \tag{21}$$

wyznaczające oba główne promienie krzywizny ϱ_1, ϱ_2 w danym punkcie powierzchni:

$$x=f(u, v), \; y=\varphi(u, v), \; z=\psi(u, v).$$

Na podstawie tego równania znajdujemy:

a) krzywiznę Gaussa, czyli zupełną krzywiznę:

$$\frac{1}{\varrho_1\varrho_2} = \frac{RT-S^2}{EG-F^2}, \tag{22}$$

b) średnią krzywiznę:

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2} = \frac{GR+ET-2FS}{EG-F^2}.$$

Punkta kuliste $(\varrho_1=\varrho_2)$ będą określone równaniami:

$$\frac{E}{R} = \frac{F}{S} = \frac{G}{T}, \tag{23}$$

a punkta pseudosferyczne $(\varrho_1=-\varrho_2)$ równaniem:

$$GR+ET-2FS=0. \tag{24}$$

Wielkości R, S, T określone wzorami (18), a występujące przy badaniu krzywizny powierzchni o równaniach: $x=f(u, v)$, $y=\varphi(u, v)$, $z=\psi(u, v)$, nazywają się zwykle zasadniczemi wielkościami drugiego stopnia.

Ćwiczenia LII.

1) Wykazać, że przekrój powierzchni płaszczyzną równoległą i nieskończenie bliską do płaszczyzny stycznej w danym punkcie powierzchni jest w ogólności krzywą rzędu drugiego (w nieskończenie małem otoczeniu punktu styczności).

2) Wykazać, że odległość punktu: $(x+dx, y+dy, z+dz)$, powierzchni $z=f(x, y)$ od płaszczyzny stycznej w punkcie $P(x, y, z)$ tej powierzchni otrzymuje wartość:

$$\delta = \frac{r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2}{2\sqrt{p^2+q^2+1}}.$$

3) Wykazać, że kierunki główne w punkcie $P(x, y, z)$ powierzchni $z=f(x, y)$ określa równanie stopnia drugiego ze względu na $\lambda=\frac{dy}{dx}$, które możemy przedstawić w postaci:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2, & -\lambda, & 1 \\ 1+p^2, & pq, & 1+q^2 \\ r & s & t \end{vmatrix} = 0.$$

4) Wykazać, że t. zw. średnia krzywizna w danym punkcie $P(x, y, z)$ powierzchni $z=f(x, y)$ ma wartość:

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2} = \frac{(1+p^2)t+(1+q^2)r-2pqs}{(1+p^2+q^2)^{3/2}}.$$

5) Wykazać, że t. zw. **zupełna krzywizna** w danym punkcie $P(x, y, z)$ powierzchni $z = f(x, y)$ ma wartość:

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2} = \frac{rt - s^2}{(p^2+q^2+1)^2}.$$

6) Wykazać, że punkt $P(x, y, z)$ powierzchni $z = f(x, y)$ jest jej punktem kulistym skoro spełniają się relacye:

$$\begin{vmatrix} 1+p^2, & pq \\ r & s \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} pq, & 1+q^2 \\ s & t \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1+q^2, & 1+p^2 \\ t & r \end{vmatrix} = 0,$$

z których jedna jest następstwem dwu pozostałych.

7) Wykazać, że główne promienie krzywizny ρ_1 i ρ_2 w danym punkcie $P(x, y, z)$ powierzchni $z = f(x, y)$ są równe, lecz znaku przeciwnego, skoro:

$$(1+q^2)r + (1+p^2)t - 2pqs = 0.$$

8) Okazać, że normalne do płaszczyzn przecinających paraboloidę: $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z$ podług krzywych, mających w punkcie początkowym promienie krzywizny równe r, leżą na powierzchni stożkowej:

$$(x^2+y^2)^2 = r^2\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}\right)^2.$$

9) Znaleźć główne promienie krzywizny w tym punkcie, w którym oś x-ów przecina powierzchnię:

$$2az^2 + z(x^2+2xy+y^2-2a^2) - 4axy = 0.$$

10) Wyznaczyć promień krzywizny przekroju normalnego w punkcie powierzchni:

$$2az^2 + z(x^2+2xy+y^2-2a^2) - 4axy = 0,$$

leżącym na osi z-ów, skoro styczna w tym punkcie przekroju jest prostopadłą do osi x-ów.

11) Wyznaczyć punkta kuliste na powierzchni: $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z$.

12) Wyznaczyć punkta kuliste (pępki) powierzchni $xyz = a^3$.

13) Wykazać, że promień krzywizny w punkcie kulistym powierzchni $xyz = a^3$ jest równy odległości tego punktu kulistego od początku układu.

14) Wykazać, że kula o promieniu: $r = \frac{abc}{ab+ac+bc}$, której środek leży w początku układu dotyka się powierzchni: $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} + \left(\frac{z}{c}\right)^{2/3} = 1$ w jej punktach kulistych.

15) Wyznaczyć punkta kuliste powierzchni:

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = 4a^2(x^2+y^2).$$

16) Wykazać, że punkta paraboloidy elliptycznej, w których krzywizna Gaussa jest jednakową, tworzą linie krzywe rzucające się na płaszczyznę prostopadłą do osi paraboloidy jako ellipsy podobne.

17) Wykazać, że powierzchnia, powstała przez obrót traktrysy około jej asymptoty (fig. 235) jest pseudosferą, mającą w każdym punkcie jednakową krzywiznę, równą $-\frac{1}{a^2}$, jeżeli a jest stałą długością stycznej zawartą między punktem styczności a asymptotą.

18) Wykazać, że powierzchnia śrubowa wichrowata (powstała przez ruch prostej po osi OZ i po linii śrubowej: $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$, $z = a\varphi$, równolegle do płaszczyzny XOY) ma w każdym punkcie sumę głównych promieni krzywizny równą zeru.

19) Wykazać, że krzywizna Gaussa w danym punkcie $P(x, y, z)$ ellipsoidy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ otrzymuje wartość: } K = \frac{1}{\rho_1\rho_2} = \frac{\delta^4}{a^2b^2c^2},$$

gdzie δ jest odległością płaszczyzny stycznej od środka ellipsoidy.

20) Wykazać, że punkta powierzchni: $xyz = a(xy+yz+xz)$, w których krzywą wskazującą jest hiperbola równoboczna, leżą na przekroju powierzchni ze stożkiem piątego rzędu:

$$x^4(y+z) + y^4(x+z) + z^4(x+y) = 0$$

21) Wykazać, że punkta powierzchni: $x^3+y^3+z^3-3xyz=a^3$, w których krzywa wskazująca jest hiperbolą równoboczną leżą na przekroju tej powierzchni ze stożkiem drugiego rzędu: $xy+xz+yz=0$ i że ten przekrój jest kołem o równaniach:

$$x+y+z=a, \quad x^2+y^2+z^2=a^2.$$



Fig. 236.

22) Wykazać, że kula jest powierzchnią o stałej dodatniej krzywiźnie.

23) Wykazać, że traktrysoida, t. j. powierzchnia powstała przez obrót traktrysy około jej osi, jest powierzchnią o stałej krzywiźnie ujemnej.

24) Wykazać, że katenoida (powierzchnia powstała przez obrót linii łańcuchowej około jej osi) (fig. 236) jest powierzchnią o stałej średniej krzywiźnie równej zeru.

25) Wykazać, że element ds łuku linii krzywej, leżącej na powierzchni, określonej równaniami: $x=f(u, v)$, $y=\varphi(u, v)$, $z=\psi(u, v)$ wyraża się wzorem:

$$ds^2=\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right]du^2+2\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)du\,dv+$$

$$+\left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right]dv^2=E\,du^2+F\,du\,dv+G\,dv^2.$$

26) Wyznaczyć odległość punktu $(x+h, y+k, z+l)$ powierzchni: $x=f(u, v)$, $y=\varphi(u, v)$, $z=\psi(u, v)$ od płaszczyzny stycznej w punkcie $P(x, y, z)$ tej powierzchni.

27) Wykazać, że odległość punktu $(u+du, v+dv)$ powierzchni: $x=f(u, v)$, $y=\varphi(u, v)$, $z=\psi(u, v)$ od płaszczyzny stycznej w punkcie (u, v) tej powierzchni otrzymuje wartość:

$$\delta=\frac{1}{2}(R\,du^2+2S\,du\,dv+T\,dv^2).$$

28) Wykazać, że promień krzywizny w dowolnym przekroju normalnym, przechodzącym przez punkt (u, v) powierzchni: $x=f(u, v)$, $y=\varphi(u, v)$, $z=\psi(u, v)$ określa się wzorem:

$$\rho=\frac{E+2F\lambda+G\lambda^2}{R+2S\lambda+T\lambda^2}, \text{ gdzie } \lambda=\frac{dv}{du}.$$

29) Wykazać, że główne promienie krzywizny w danym punkcie (u, v) powierzchni: $x=f(u, v)$, $y=\varphi(u, v)$, $z=\psi(u, v)$ określają się równaniem:

$$(RT-S^2)\rho^2+(2ST-EF-GR)\rho+(EG-F^2)=0.$$

30) Wykazać, że krzywizna Gaussa w danym punkcie (u, v) powierzchni: $x=f(u, v)$, $y=\varphi(u, v)$, $z=\psi(u, v)$ wyznacza się wzorem: $k=\dfrac{RT-S^2}{EG-F^2}$.

31) Wykazać, że kierunki główne w punkcie (u, v) powierzchni: $x=f(u, v)$, $y=\varphi(u, v)$, $z=\psi(u, v)$ określa równanie stopnia drugiego ze względu na $\lambda=\dfrac{dv}{du}$, które możemy przedstawić w postaci:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2, & -\lambda, & 1 \\ E, & F, & G \\ R, & S, & T \end{vmatrix}=0,$$

32) Wykazać, że t. z. wielkości zasadnicze E, F, G, R, S, T powierzchni $x=f(x, v)$, $x=\varphi(u, v)$, $z=\psi(u, v)$ nie zamieniają swych wartości przy zmianie układu $OXYZ$.

33) Wykazać, że punkt (u, v) powierzchni: $x=f(u, v)$, $y=\varphi(u, v)$, $z=\psi(u, v)$ jest punktem kulistym, skoro między wielkościami zasadniczemi powierzchni w tym punkcie zachodzą relacye: $\dfrac{R}{E}=\dfrac{S}{F}=\dfrac{T}{G}$.

34) Wykazać, że równania: $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=\dfrac{b}{a}\sqrt{u^2-a^2}$ o dwu parametrach u, v przedstawiają hiperboloidę obrotową o jednej powłoce.

35) Wyznaczyć wielkości zasadnicze E, F, G, R, S, T powierzchni: $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=\dfrac{b}{a}\sqrt{u^2-a^2}$.

86) Wyznaczyć wielkości zasadnicze E, F, G, R, S, T powierzchni obrotowej:

$$x = u\cos v,\quad y = u\sin v,\quad z = f(u).$$

87) Wyznaczyć główne promienie krzywizny ρ_1, ρ_2. w danym punkcie (u, v) powi chni obrotowej: $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = f(u)$.

88) Wyprowadzić równanie i kształt powierzchni środów krzywizny dla hiperb o jednej powłoce.

89) Wyprowadzić równanie i kształt powierzchni środków krzywizny dla pa loidy elliptycznej.

Rozwiązania LII. 11) $x = 0$, $y = -\sqrt{ab-b^2}$, $z = \frac{1}{2}(a-b)$. 26) $\frac{Ah+Bk+}{\sqrt{A^2+B^2+}}$



Fig. 237. Fig. 238. Fig. 239.

85) $1+\frac{b^2u^2}{a^2(u^2-a^2)}$, 0, u^2; $\frac{-a^2b^2}{(u^2-a^2)[a^2(u^2-a^2)+b^2u^2]^{3/2}}$, 0, $\frac{u^2b^2}{[a^2(u^2-a^2)+b^2u^2]^{1/2}}$.



Fig. 240. Fig. 241. Fig. 242.

86) $1+[f'(u)]^2$, 0, u^2, $\frac{f''(u)}{u(1+[f'(u)]^2)^{1/2}}$, 0, $\frac{f''(u)}{(1+[f'(u)]^2)^{3/2}}$. 87) $\rho_1 = \frac{(1+[f'(u)]^2)}{f''(u)}$

$\rho_2 = \frac{u(1+[f'(u)]^2)^{1/2}}{f''(u)}$. 88) fig. 237, 238, 239. Modele powłok oddzielnych i ich połącz

89) fig. 240, 241, 242. Modele oddzielnych powierzchni środków krzywizny parabol elliptycznej i ich połączenia.

Literatura. Ch. Dupin: Développements de Géometrie. Paris 1813. V. Kon rell i K. Kommerell: Allgemeine Theorie der Raumcurven und Flächen. II Band. zig 1903. Carl Friedrich Gauss: Allgemeine Flächentheorie (Disquisitiones gene circa superficies curvas), deutsch herausgegeben v. A. Wangerin, Leipzig 1889.

Tematy do rozpraw naukowych.

1. Krzywizna i powierzchnia środków krzywizny ellipsoidy.
2. Krzywizna i powierzchnia środków krzywizny hiperboloidy o jednej powłoce
3. Krzywizna i powierzchnia środków krzywizny paraboloidy elliptycznej.

Wykład LIII.

Teorya tworzenia powierzchni.

1. Powierzchnie powstałe przez ruch linii prostej. Linia prosta w przestrzeni określona jest dwoma równaniami zwyczajnemi kształtu:

$$x=az+\alpha, \quad y=bz+\beta, \tag{1}$$

zawierającemi cztery dowolne parametry a, b, α, β, z których pierwsze a, b cechują kierunek, drugie α, β, położenie prostej w przestrzeni.

Istnieje zatem w przestrzeni w ogólności ∞^4 prostych, a potrzeba czterech warunków, przedstawiających związki między czterema parametrami a, b, α, β, z którychby można wyrachować wartości parametrów, aby prosta w przestrzeni była wyznaczona. Trzy dane warunki wyznaczają trzy parametry jako funkcye czwartego np. $b=f(a)$, $\alpha=\varphi(a)$, $\beta=\psi(a)$.

Równania:

$$x=az+\varphi(a), \quad y=f(a)z+\psi(a), \tag{2}$$

o dowolnym parametrze a określają tedy ∞^1 prostych w przestrzeni, cechują zatem pewien ruch prostej w przestrzeni, skutkiem którego powstaje powierzchnia, którą nazywamy powierzchnią prostokreślną.

Równania:

$$x=az+\varphi(a), \quad y=f(a)z+\psi(a),$$

o dowolnym parametrze a, przedstawiają więc ogólne równania powierzchni prostokreślnych.

Dwa dane związki między czterema parametrami a, b, α, β linii prostej, wyznaczające dwa parametry jako funkcye dwu pozostałych, określają ∞^2 prostych w przestrzeni, tworzących zbiór prostych, zwany kompleksem rzędu drugiego; jeden związek między czterema parametrami prostej, wyznaczający jeden parametr jako funkcyę trzech pozostałych, określa ∞^3 prostych w przestrzeni, tworzących zbiór prostych, zwany kompleksem rzędu trzeciego.

2. Powierzchnie walcowe. Jeżeli prosta w przestrzeni porusza się po danej linii krzywej równolegle do swego pierwotnego położenia, natenczas tak powstałą powierzchnię prostokreślną nazywamy powierzchnią walcową. Przy takim ruchu prostej pozostają parametry a i b niezmienione, a zmieniają się tylko parametry α i β w pewnej zależności od siebie. Niech będzie $\beta=\varphi(\alpha)$, natenczas równania prostej ruchomej przedstawiają się w postaci:

$$x=az+\alpha, \quad y=bz+\varphi(\alpha),$$

gdzie a i b są pewnemi stałemi liczbami, α zaś jest dowolnym parametrem. Po wyrugowaniu parametru α otrzymujemy jedno równanie o trzech zmiennych x, y, z, kształtu:

$$y-bz=\varphi(x-az), \tag{3}$$

jako ogólne równanie powierzchni walcowych.

Kładąc $z=0$ otrzymujemy $y=\varphi(x)$ jako równanie przekroju powierzchni walcowej z płaszczyzną XOY, zwanego zwykle kierownicą powierzchni.

Jeżeli za kierownicę powierzchni przyjmiemy dowolną krzywą w przestrzeni, określoną równaniami:

$$f_1(x,\ y,\ z)=0,\quad f_2(x,\ y,\ z)=0,$$

wtedy warunki, pod którymi prosta $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$, opiera się na tej krzywej, przedstawią się dwoma równaniami:

$$f_1(az+\alpha,\ bz+\beta,\ z)=0,\quad f_2(az+\alpha,\ bz+\beta,\ z)=0,$$

z których po wyrugowaniu zmiennej z otrzymamy jedno równanie między zmiennemi parametrami α, β prostej ruchomej w postaci: $f(\alpha,\ \beta)=0$, z której otrzymujemy ogólne równanie powierzchni walcowych w postaci:

$$f(x-az,\ y-bz)=0. \tag{4}$$

Jeżeli prosta ruchoma określona jest jako przekrój dwu płaszczyzn o równaniach:

$$Ax+By+Cz+D=\alpha,\quad A'x+B'y+C'z+D'=\beta,$$

w których wszystkie spółczynniki są stałe z wyjątkiem parametrów α, β, natenczas przedstawi się ogólne równanie powierzchni walcowych w postaci:

$$f(Ax+By+Cz+D,\quad A'x+B'y+C'z+D')=0. \tag{5}$$

3. Równanie różniczkowe cząstkowe powierzchni walcowych. Różniczkując ogólne równanie powierzchni walcowych kształtu:

$$y-bz=\varphi(x-az),$$

kolejno cząstkowo podług zmiennych niezależnych x i y, otrzymujemy, kładąc: $\frac{\partial z}{\partial x}=p$, $\frac{\partial z}{\partial y}=q$, dwa równania różniczkowe w postaci:

$$-bp=\varphi'(x-az).(1-ap),\quad 1-bq=\varphi'(x-az).(-aq),$$

z których możemy wyrugować dowolną funkcyę φ, cechującą szczególny kształt powierzchni walcowej.

Otrzymujemy tedy równanie: $abpq=(1-ap)(1-bq)$,

czyli:

$$ap+bq-1=0, \tag{6}$$

zwane równaniem różniczkowem cząstkowem powierzchni walcowych.

Równanie to wypowiada wspólną własność wszystkich powierzchni walcowych, niezależną od kierownicy, mianowicie tę własność charakterystyczną, że płaszczyzna styczna w danym punkcie jakiejkolwiek powierzchni walcowej jest styczną w każdym punkcie tworzącej przechodzącej przez ten punkt. a wszystkie płaszczyzny styczne przecinają się podług prostych równoległych do tworzących powierzchni walcowej, których kierunki określone są stałymi parametrami a i b.

Różniczkując otrzymane powyżej równanie różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu jeszcze raz kolejno podług zmiennych x i y i kładąc:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=r,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=s,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=t,$$

otrzymujemy równania: $ar+bs=0,\quad as+bt=0,$

z których możemy wyrugować parametry a i b, stąd zaś otrzymamy równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu, kształtu: $rt-s^2=0$, które wypowiada, że wszelkie powierzchnie walcowe mają w każdym punkcie krzywiznę równą zeru, czyli, że należą do powierzchni rozwijalnych na płaszczyźnie.

4. Powierzchnie stożkowe. Jeżeli prosta w przestrzeni porusza się po danej linii krzywej, przechodząc zawsze przez pewien punkt stały, natenczas tak powstałą powierzchnię nazywamy p o w i e r z c h n i ą s t o ż k o w ą.

Niech będzie dany stały punkt $S(\xi, \eta, \zeta)$, zwany wierzchołkiem powierzchni stożkowej, natenczas równania wszelkiej prostej, przechodzącej przez ten punkt, przedstawiają się w postaci:

$$x-\xi=a(z-\zeta), \quad y-\eta=b(z-\zeta),$$

gdzie a i b są dowolnemi parametrami.

Jeżeli prosta ruchoma ma się opierać na danej kierownicy: $f_1(x, y, z)=0$, $f_2(x, y, z)=0$, natenczas, po wyrugowaniu zmiennych x, y, z z powyższych czterech równań, otrzymamy pewien związek między parametrami a i b w postaci:

$$F(a, b)=0, \text{ a stąd: } b=\varphi(a).$$

Równania prostej ruchomej otrzymują tedy kształt:

$$x-\xi=a(z-\zeta), \quad y-\eta=\varphi(a)(z-\zeta),$$

z których po wyrugowaniu dowolnego parametru a, otrzymujemy równanie:

$$\frac{y-\eta}{z-\zeta}=\varphi\left(\frac{x-\xi}{z-\zeta}\right), \tag{7}$$

względnie:

$$F\left(\frac{y-\eta}{z-\zeta}, \frac{x-\xi}{z-\zeta}\right)=0, \tag{8}$$

jako ogólne równanie powierzchni stożkowych.

W przypadku szczególnym, gdy wierzchołek powierzchni stożkowej leży w punkcie początkowym układu sprowadza się powyższe równanie do postaci:

$$\frac{y}{z}=\varphi\left(\frac{x}{z}\right), \text{ względnie: } F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)=0.$$

Ogólne równanie (7) powierzchni stożkowych jest równaniem jednorodnem ze względu na zmienne $x-\xi$, $y-\eta$, $z-\zeta$, gdzie ξ, η, ζ są spółrzędnemi wierzchołka. Nawzajem wszelkie równanie jednorodne zmiennych $x-\xi$, $y-\eta$, $z-\zeta$ przedstawia powierzchnię stożkową o wierzchołku $S(\xi, \eta, \zeta)$, kładąc bowiem: $\frac{x-\xi}{z-\zeta}=a$, $\frac{y-\eta}{z-\zeta}=b$, otrzymamy z danego równania jednorodnego równanie $F(a, b)=0$, jako związek między parametrami a, b prostej, przechodzącej przez punkt $S(\xi, \eta, \zeta)$, tworzącej zatem powierzchnię stożkową. Nie trudno okazać, że ogólnie wszelkie równanie jednorodne kształtu:

$$F(Ax+By+Cz+D, A'x+B'y+C'z+D', A''x+B''y+C''z+D'')=0,$$

przedstawia powierzchnię stożkową, której wierzchołek jest punktem przecięcia trzech płaszczyzn:

$$Ax+By+Cz+D=0, \; A'x+B'y+C'z+D'=0, \; A''x+B''y+C''z+D''=0.$$

5. Równanie różniczkowe cząstkowe powierzchni stożkowych. Różniczkując ogólne równanie powierzchni stożkowych, kształtu:

$$\frac{y-\eta}{z-\zeta}=\varphi\left(\frac{x-\xi}{z-\zeta}\right),$$

kolejno cząstkowo podług zmiennych x i y otrzymujemy równania:

$$-\frac{y-\eta}{(z-\zeta)^2}p=\varphi'\left(\frac{x-\xi}{z-\zeta}\right).\frac{z-\zeta-(x-\xi)p}{(z-\zeta)^2},$$

$$\frac{z-\zeta-(y-\eta)q}{(z-\zeta)^2}=\varphi'\left(\frac{x-\xi}{z-\zeta}\right).\frac{-(x-\xi)q}{(z-\zeta)^2},$$

z których po wyrugowaniu dowolnej funkcyi φ, cechującej szczególny kształt powierzchni stożkowej, otrymujemy równanie:

$$p(x-\xi)+q(y-\eta)-(z-\zeta)=0, \tag{9}$$

które jest **r ó w n a n i e m r ó ż n i c z k o w e m c z ą s t k o w e m p o w i e r z c h n i s t o ż k o w y c h.**

Równanie to wypowiada wspólną własność wszystkich powierzchni stożkowych, niezależną od kierownicy, a polegającą na tem, że płaszczyzna styczna w danym punkcie powierzchni stożkowej jest styczną wzdłuż całej tworzącej przez ten punkt przechodzącej, a wszystkie płaszczyzny styczne do danej powierzchni stożkowej przechodzą przez jej wierzchołek $S(\xi, \eta, \zeta)$.

Różniczkując otrzymane równanie (9) jeszcze raz kolejno cząstkowo ze względu na zmienne niezależne x, y, otrzymujemy równania:

$$p+(x-\xi)r+(y-\eta)s-p=0, \quad (x-\xi)s+q+(y-\eta)t-q=0,$$

czyli:
$$(x-\xi)r+(y-\eta)s=0, \quad (x-\xi)s+(y-\eta)t=0,$$

z których możemy wyrugować spółrzędne ξ, η, ζ wierzchołka, a otrzymamy różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu kształtu:

$$rt-s^2=0,$$

dowodzące, że powierzchnie stożkowe należą także do powierzchni o krzywiźnie równej zeru, czyli są powierzchniami rozwijalnemi na płaszczyźnie.

6. Ogólne równanie powierzchni rozwijalnych na płaszczyźnie. Powierzchnią rozwijalną na płaszczyźnie nazywamy w ogólności powierzchnię prostokreślną, w której dwie po sobie następujące tworzące leżą na jednej płaszczyźnie, a więc przecinają się wzajemnie. Równanie wszelkiej powierzchni prostokreślnej możemy na mocy art. 1 przedstawić w postaci dwu równań:

$$x=az+\varphi(a), \quad y=f(a)z+\psi(a)$$

o dowolnym parametrze a.

Danej wartości parametru a odpowiada pewna prosta tworząca tejże powierzchni prostokreślnej; tworząca po niej bezpośrednio następująca odpowiada parametrowi: $a+da$, otrzymuje zatem równania:

$$x=(a+da)z+\varphi(a+da), \quad y=f(a+da)z+\psi(a+da).$$

Ażeby te proste przecinały się, muszą spełnić się warunki, które wynikają z kolejnego odejmowania powyższych równań, lub co na jedno wychodzi z różniczkowania pierwszych dwu równań podług parametru, w postaci:

$$0=z+\varphi'(a), \quad 0=zf'(a)+\psi'(a),$$

z których otrzymujemy warunek:

$$\psi'(a)=f'(a)\,\varphi'(a),$$

zatem:
$$\psi(a)=\int f'(a)\,\varphi'(a)da.$$

Ogólne równania wszelkich powierzchni rozwijalnych przedstawiają się zatem w postaci:

$$x=a.z+\varphi(a), \quad y=f(a).z+\int f'(a)\,\varphi'(a)da. \tag{10}$$

7. **Równanie różniczkowe powierzchni rozwijalnych.** Szczególne postacie powierzchni rozwijalnych zależą od kształtu funkcyj f i φ, występujących w równaniach (10). Różniczkując powyższe równania kolejno cząstkowo podług zmiennych x i y, otrzymujemy cztery równania w postaci:

$$1=ap+z\frac{\partial a}{\partial x}+\varphi'(a)\frac{\partial a}{\partial x},\quad 0=aq+z\frac{\partial a}{\partial y}+\varphi'(a)\frac{\partial a}{\partial y},$$

$$0=f(a).p+z.f'(a)\frac{\partial a}{\partial x}+f'(a)\varphi'(a)\frac{\partial a}{\partial x},\quad 1=f(a).q+z.f'(a)\frac{\partial a}{\partial y}+f'(a)\varphi'(a)\frac{\partial a}{\partial y}.$$

Wyrugowawszy z tych równań funkcye φ i φ', a to mnożąc pierwsze równanie przez $f'(a)$, trzecie przez -1, następnie drugie przez $f'(a)$, a czwarte przez -1 i dodając co dwa tak powstałe równania, otrzymujemy:

$$f'(a)=apf'(a)-pf(a),\quad -1=aqf'(a)-qf(a),$$

z których możemy znowu wyrugować funkcyę $f'(a)$. Otrzymujemy mianowicie:

$$p+qf'(a)=0, \tag{11}$$

zatem równanie różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu w postaci:

$$ap+f(a).q-1=0 \tag{12}$$

o dowolnej funkcyi $f(a)$.

Różniczkując jeszcze raz to równanie kolejno cząstkowo podług x i y, otrzymujemy dwa równania różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu:

$$ar+f(a).s+[p+qf'(a)]\frac{\partial a}{\partial x}=0,\quad as+f(a).t+[p+qf'(a)]\frac{\partial a}{\partial y}=0,$$

które ze względu na to, że na podstawie (11): $p+qf'(a)=0$, sprowadzają się do postaci:

$$ar+f(a).s=0,\quad as+f(a).t=0,$$

skąd, po wyrugowaniu dowolnej funkcyi $f(a)$, otrzymujemy równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu, kształtu:

$$rt-s^2=0, \tag{13}$$

nie zawierające żadnej funkcyi dowolnej, wypowiadające wspólną własność wszystkich powierzchni rozwijalnych, zwane też *równaniem różniczkowem powierzchni rozwijalnych*.

8. **Krzywa zwrotu na powierzchni rozwijalnej.** Tworzące powierzchni prostokreślnej rozwijalnej następujące nieskończenie blisko po sobie, przecinając się kolejno tworzą krzywą przestrzenną, leżącą na tejże powierzchni, a zwaną *krzywą zwrotu powierzchni rozwijalnej*.

Z ogólnego równania powierzchni rozwijalnej:

$$x=az+\varphi(a),\quad y=f(a)z+\int f'(a)\varphi'(a)\,da,$$

otrzymujemy równania krzywej zwrotu w postaci trzech równań o jednym parametrze dowolnym a, kształtu:

$$x=-a\varphi'(a)+\varphi(a),\quad y=-f(a)\varphi'(a)+\int f'(a)\varphi'(a)\,da,\quad z=-\varphi'(a). \tag{14}$$

Wszelka tworząca powierzchni rozwijalnej ma z krzywą zwrotu wspólne dwa punkta po sobie następujące, mianowicie swe punkta przecięcia się z poprzedzającą i następującą tworzącą, jest więc styczną do krzywej zwrotu, można zatem powierzchnię rozwijalną uważać jako powierzchnię powstałą przez ruch linii prostej, która pozostaje stale styczną do danej krzywej

przestrzennej, która w tym razie staje się krzywą zwrotu tejże powierzchni rozwijalnej.

9. Równanie powierzchni rozwijalnej, mającej daną krzywą zwrotu. Niech będzie daną krzywa w przestrzeni określona trzema równaniami o dowolnym parametrze t, w postaci:

$$x=f(t),\quad y=\varphi(t),\quad z=\psi(t),$$

natenczas równania stycznej w dowolnym punkcie (t) tej krzywej przedstawiają się w postaci trzech równych stosunków, kształtu:

$$\frac{x-f(t)}{f'(t)}=\frac{y-\varphi(t)}{\varphi'(t)}=\frac{z-\psi(t)}{\psi'(t)}.$$

Oznaczając zmienną wartość tych równych stosunków przez u, otrzymamy trzy równania o dwu zmiennych parametrach t i u w postaci:

$$x=f(t)+uf'(t),\quad y=\varphi(t)+u\varphi'(t),\quad z=\psi(t)+u\psi'(t),\tag{15}$$

przedstawiające równania powierzchni rozwijalnej, dla której dana krzywa

$$x=f(t),\quad y=\varphi(t),\quad z=\psi(t)$$

jest krzywą zwrotu. Z równań powierzchni rozwijalnej w ten sposób podanych łatwo jest poznać jej krzywą zwrotu, na której opiera się kształt i nazwa odnośnej powierzchni rozwijalnej.

10. Płaszczyzna styczna w danym punkcie powierzchni rozwijalnej. Płaszczyzna styczna w danym punkcie (x, y, z) powierzchni rozwijalnej, określonej równaniami:

$$x=f(t)+uf'(t),\quad y=\varphi(t)+u\varphi'(t),\quad z=\psi(t)+u\psi'(t),$$

ma równanie:

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$

gdzie:
$$A=\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial t}, & \frac{\partial z}{\partial t}\\ \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u}\end{vmatrix},\quad B=\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial t}, & \frac{\partial x}{\partial t}\\ \frac{\partial z}{\partial u}, & \frac{\partial x}{\partial u}\end{vmatrix},\quad C=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial t}, & \frac{\partial y}{\partial t}\\ \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}\end{vmatrix}.$$

Mamy tu:

$$\frac{\partial x}{\partial t}=f'(t)+uf''(t),\quad \frac{\partial x}{\partial u}=f'(t),\quad \frac{\partial y}{\partial t}=\varphi'(t)+u\varphi''(t),\quad \frac{\partial y}{\partial u}=\varphi'(t),$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\psi'(t)+u\psi''(t),\quad \frac{\partial z}{\partial u}=\psi'(t),$$

zatem: $A=u[\varphi''(t)\psi'(t)-\psi''(t)\varphi'(t)],\quad B=u[\psi''(t)f'(t)-f''(t)\psi'(t)],$

$$C=u[f''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)f'(t)].$$

Wszystkie trzy spółczynniki A, B, C zawierają czynnik u, równanie płaszczyzny stycznej jest więc zależne wyłącznie od wartości parametru t. Płaszczyzna styczna w pewnym punkcie powierzchni rozwijalnej jest styczną wzdłuż całej tworzącej, przechodzącej przez ten punkt powierzchni. Z tej własności płaszczyzn stycznych do powierzchni rozwijalnych wynika bezpośrednio, że przez daną linię prostą nie można w ogólności przeprowadzić płaszczyzny stycznej do danej powierzchni rozwijalnej; jeżeli bowiem P jest punktem przecięcia tej prostej z powierzchnią, musiałaby płaszczyzna przesunięta przez tę prostą i przez tworzącą powierzchni rozwijalnej,

przechodzącą przez P, być płaszczyzną styczną w punkcie P, co w ogólności nie koniecznie musi być.

Przez dany punkt przestrzeni możemy w ogólności poprowadzić skończoną ilość płaszczyzn stycznych do danej powierzchni rozwijalnej. Ilość tych płaszczyzn stanowi klasę powierzchni.

11. Powierzchnie wichrowate w ogólności. Powierzchnię prostokreślną nazywamy wichrowatą, jeżeli dwie po sobie następujące tworzące tej powierzchni nie leżą na jednej płaszczyźnie. Ogólne równania wszelkich powierzchni wichrowatych przedstawiają się w postaci:

$$x=az+\varphi(a),\quad y=f(a)z+\psi(a), \tag{16}$$

gdzie a jest dowolnym parametrem, a funkcye dowolne f, φ, ψ cechują szczególny kształt powierzchni wichrowatej.

Funkcye te mogą być wyznaczone, gdy dane są trzy kierownice C_1, C_2, C_3, na których ma się opierać prosta ruchoma, tworząca odnośną powierzchnię. Otrzymamy tedy na wyznaczenie spółczynników a, α, b, β trzy równania warunkowe, przedstawiające warunki przecięcia się prostej ruchomej z danemi trzema kierownicami w postaci:

$$f_1(a,\ \alpha,\ b,\ \beta)=0,\quad f_2(a,\ \alpha,\ b,\ \beta)=0,$$
$$f_3(a,\ \alpha\ b,\ \beta)=0. \tag{17}$$

Warunki te określają b, α, β, jako funkcye czwartego parametru a, a więc żądane trzy funkcye $f(a)$, $\varphi(a)$, $\psi(a)$.

Najprostszą z powierzchni wichrowatych w ten sposób powstałych będzie ta, w której trzy dane kierownice C_1, C_2, C_3 są liniami prostemi; powierzchnią tą jest, jak wiadomo, hiperboloida o jednej powłoce (fig. 243).



Fig. 243.

Szczególny rodzaj powierzchni wichrowatych tworzą takie powierzchnie prostokreślne, w których jedna z trzech kierownic jest w nieskończoności. Powierzchnie takie powstają przez ruch prostej, opierającej się na dwu kierownicach C_1 i C_2, a równoległej do pewnej stałej płaszczyzny, zwanej płaszczyzną kierowniczą. Takie powierzchnie prostokreślne nazywamy też powierzchniami wichrowatemi o jednej płaszczyźnie kierowniczej.

Pomiędzy powierzchniami wichrowatemi o jednej płaszczyźnie kierowniczej, zasługują na szczególniejszą uwagę te, w których jedna z dwu kierownic jest linią prostą, a druga linią krzywą. Takie powierzchnie wichrowate nazywamy konoidami, a szczególny rodzaj kierownicy krzywolinijnej cechuje też kształt i nazwę odnośnego konoidu.

12. Przykłady konoidów. α) **Paraboloida hiperboliczna.** Najprostszy rodzaj konoidów powstaje, jeżeli prosta porusza się po dwu prostych wichrowatych, równolegle do pewnej stałej płaszczyzny. Jest nią, jak wiadomo, paraboloida hiperboliczna (fig. 244).



Fig. 244.

β) **Konoid kołowy** powstaje, jeżeli linia prosta porusza się po innej linii prostej i po kole równolegle do danej pła-

szczyzny. Niech będzie np. daną linia prosta leżąca na płaszczyźnie XOZ, równoległa do osi x-ów, o równaniach $y=0$, $z=h$ i koło na płaszczyźnie XOY o równaniach: $x^2+y^2=r^2$, $z=0$, a prosta ruchoma niech będzie stale równoległą do płaszczyzny YOZ, natenczas równanie prostej ruchomej przedstawia się w postaci $x=\alpha$, $y=bz+\beta$. Na wyznaczenie związków między spółczynnikami α, b, β otrzymujemy:

$$bh+\beta=0,\quad \alpha^2+\beta^2=r^2, \text{ zatem } \beta=\sqrt{r^2-\alpha^2},\quad b=-\frac{\sqrt{r^2-\alpha^2}}{h},$$

a więc równania prostej ruchomej w postaci:

$$x=\alpha,\quad y=-\frac{\sqrt{r^2-\alpha^2}}{h}z+\sqrt{r^2-\alpha^2},$$

skąd, po wyrugowaniu parametru α, otrzymujemy równanie:

$$(r^2-x^2)(z-h)^2-y^2h^2=0, \tag{18}$$

jako równanie szukanego konoidu kołowego.

13. Płaszczyzny styczne do powierzchni wichrowatych. Dwie nieskończenie bliskie tworzące I i II powierzchni wichrowatej nie mają w ogólności żadnego punktu spólnego. Wszelka płaszczyzna przesunięta przez tworzącą I przecina tworzącą II w pewnym punkcie P. Prosta łącząca ten punkt z jakimkolwiek punktem tworzącej I leży na tej płaszczyźnie; płaszczyzna ta jest zatem styczną w punkcie P. Obracając ją około tworzącej I, otrzymamy na tworzącej II coraz inne punkta przecięcia, które będą punktami styczności tej płaszczyzny z powierzchnią. Jeżeli płaszczyzna obracająca się około tworzącej I zajmie położenie równoległe do tworzącej II, natenczas punkt styczności P przyjdzie do nieskończoności.

Poprowadźmy przez tworzącą I płaszczyznę prostopadłą do pewnej płaszczyzny przesuniętej przez tworzącą I, a stycznej w punkcie A powierzchni, natenczas płaszczyzna ta prostopadła do płaszczyzny stycznej w A będzie płaszczyzną normalną w tym punkcie. Płaszczyzna ta, jako przechodząca przez krawędź I, jest jednak sama płaszczyzną styczną w innym punkcie B tej powierzchni, mianowicie w tym punkcie, w którym ona przecina sąsiednią tworzącą II.

A zatem: *1) Wszelka płaszczyzna przechodząca przez tworzącą powierzchni wichrowatej jest w jednym punkcie powierzchni płaszczyzną styczną, a w innym płaszczyzną normalną;*

2) Jeżeli dwie płaszczyzny przesunięte przez pewną tworzącą powierzchni wichrowatej są do siebie prostopadłe, natenczas punkt styczności jednej z nich jest tym punktem, w którym druga płaszczyzna jest płaszczyzną normalną i nawzajem.

14. Takie dwa punkta A i B powierzchni wichrowatej, które posiadają tę własność, że jedna i ta sama płaszczyzna jest płaszczyzną styczną w punkcie A, a płaszczyzną normalną w punkcie B, mają następujące uwagi godne własności. Jeżeli płaszczyzna przesunięta przez tworzącą I ma swój punkt styczności A w nieskończoności, natenczas punkt B, w którym ona jest płaszczyzną normalną do powierzchni, wpada w miejsce najkrótszego oddalenia tworzącej I względem sąsiedniej tworzącej II. Płaszczyzna przesunięta przez tworzącą I prostopadle do płaszczyzny stycznej, do tworzącej II równoległej, przetnie bowiem tworzącą II w punkcie B, z którego wychodzi wspólna prostopadła do tworzącej I i II, wyznaczająca miejsce ich najkrótszej odległości.

Jeżeli punkt A zmienia swe położenie na tworzącej, natenczas zmienia go także punkt B; jeżeli punkt A zajmie miejsce najkrótszej odległości

dwóch tworzących po sobie następujących, natenczas punkt B przejdzie do nieskończoności i nawzajem.

15. Krzywa zwężenia (strykcyjna) danej powierzchni wichrowatej. Miejsca najkrótszego oddalenia dwóch tworzącyah danej powierzchni wichrowatej, po sobie następujących, tworzą pewną krzywą na tejże powierzchni, zwaną krzywą zwężenia powierzchni, albo krzywą strykcyjną tejże powierzchni.

Według Chasles'a nazywa się miejsce najkrótszego oddalenia tworzącej I względem nieskończenie bliskiej następnej tworzącej II także punktem centralnym tworzącej I, linia strykcyjna określa się więc jako miejsce punktów centralnych wybranych na każdej tworzącej danej powierzchni wichrowatej.

Nie trudno zauważyć, że wspólna prostopadła w miejscu najkrótszego oddalenia dwu tworzących sąsiednich danej powierzchni wichrowatej nie jest elementem linii strykcyjnej czyli innemi słowy nie jest styczną do linii strykcyjnej, na każdej tworzącej jest bowiem tylko jedno miejsce najkrótszego oddalenia tejże tworzącej względem tworzącej następnej, a dwa takie punkta dwu tworzących po sobie następujących, jako dwa następne punkta linii strykcyjnej, nie leżą na wspólnej prostopadłej obu tych tworzących.

16. Powierzchnie powstałe przez ruch koła. Ogólne równania koła w przestrzeni przedstawiają się w postaci dwu równań kształtu:

$$\begin{aligned} &(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2=R^2, \\ &A(x-\xi)+B(y-\eta)+C(z-\zeta)=0, \end{aligned} \tag{19}$$

zawierają więc sześć stałych dowolnych: ξ, η, ζ, R, $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$, musiałoby zatem istnieć pięć warunków, które przedstawiałyby pięć stałych jako pewne funkcye pozostałej szóstej stałej, aby ruch koła w przestrzeni określić. Przyjmijmy ζ, jako tę szóstą stałą niezależną, a pozostałe pięć stałych, jako jej funkcye, to otrzymamy równania:

$$\begin{aligned} &[x-f_1(\zeta)]^2+[y-f_2(\zeta)]^2+(z-\zeta)^2=f_3(\zeta), \\ &\varphi_1(\zeta)(x-f_1(\zeta)]+\varphi_2(\zeta)[y-f_2(\zeta)]+z-\zeta=0, \end{aligned} \tag{20}$$

jako ogólne równania powierzchni powstałych przez ruch koła.

Pomiędzy powierzchniami tego rodzaju zajmiemy się głównie powierzchniami obrotowemi i powierzchniami kanałowemi.

17. Powierzchnie obrotowe. Powierzchnia obrotowa powstaje, jeżeli koło o zmiennym promieniu tak się porusza, że jego środek posuwa się po pewnej linii prostej, a jego płaszczyzna pozostaje stale prostopadłą do tejże linii prostej. Tę stałą prostą nazywamy osią obrotu powierzchni.

Przyjmijmy oś obrotu za oś z-ów, natenczas równania koła ruchomego przedstawiają się w postaci:

$$x^2+y^2+(z-c)^2=R^2, \quad z=c.$$

Pierwsze przedstawia kulę o środku $C(0, 0, c)$ i promieniu r, drugie płaszczyznę równoległą do XOY, przechodzącą przez środek $C(0, 0, c)$, oba równania zawierają więc jeszcze dwie stałe dowolne R i c.

Ażeby ruch tego koła był określony musi być podany związek między temi stałemi, przyjmijmy, że $R^2=\varphi(c)$, natenczas sprowadzamy równania powyższe do postaci:

$$x^2+y^2+(z-c)^2=\varphi(c), \quad z=c,$$

o jednej stałej dowolnej c; wyrugowawszy ją otrzymujemy jedno równanie kształtu:

$$x^2+y^2=\varphi(z), \tag{21}$$

jako ogólne równanie wszelkich powierzchni obrotowych, których oś obrotu wpada w oś OZ.

Przekroje powierzchni płaszczyznami prostopadłemi do osi obrotu nazywamy równoleżnikami powierzchni obrotowej. Są one kołami o równaniach: $z=h$, $x^2+y^2=\varphi(h)$.

Przekroje powierzchni płaszczyznami przechodzącemi przez oś obrotu nazywamy południkami powierzchni obrotowej. Są one krzywemi przystającemi, południk powierzchni obrotowej: $x^2+y^2=\varphi(z)$ leżący na płaszczyźnie XOZ, określony jest równaniami: $y=0$, $x^2=\varphi(z)$.

18. Określając koło jako przekrój kuli o stałym środku $C(\alpha, \beta, \gamma)$. płaszczyzną: $a(x-\alpha)+b(y-\beta)+c(z-\gamma)=d$, o stałym kierunku, określonym spółczynnikami a, b, c, otrzymamy równania:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2,$$
$$a(x-\alpha)+b(y-\beta)+c(z-\gamma)=d,$$

a dodając warunek $R^2=\varphi(d)$, otrzymamy równanie:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\varphi[a(x-\alpha)+b(y-\beta)+c(z-\gamma)], \tag{22}$$

jako ogólne równanie powierzchni obrotowej, której osią obrotu jest prosta:

$$\frac{x-\alpha}{a}=\frac{y-\beta}{b}=\frac{z-\gamma}{c}.$$

Jeżeli oś obrotu przechodzi przez początek układu $C(0, 0, 0)$ w kierunku oznaczonym liczbami a, b, c, natenczas powyższe równanie sprowadza się do postaci:

$$x^2+y^2+z^2=\varphi(ax+by+cz), \tag{23}$$

a w przypadku, gdy oś obrotu wpada w oś OZ, a więc, gdy $a=b=0$, $c=1$, otrzymuje kształt:

$$x^2+y^2=\varphi(z)$$

powyżej pod (21) otrzymany.

19. Równanie różniczkowe cząstkowe powierzchni obrotowych. Różniczkując ogólne równanie powierzchni obrotowych, których osią obrotu jest oś z-ów, przedstawiające się w postaci: $x^2+y^2=\varphi(z)$, kolejno cząstkowo podług x i y, otrzymujemy równania różniczkowe:

$$2x=\varphi'(z).p, \quad 2y=\varphi'(z).q,$$

z których po wyrugowaniu funkcyi dowolnej φ, cechującej szczególny kształt powierzchni, otrzymujemy równanie różniczkowe pierwszego rzędu:

$$\frac{y}{x}=\frac{q}{p}, \text{ czyli: } yp-xq=0. \tag{24}$$

Różniczkując analogicznie ogólne równanie powierzchni obrotowej o dowolnej osi obrotu, przedstawiające się w postaci:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\varphi[a(x-\alpha)+b(y-\beta)+c(z-\gamma)],$$

otrzymujemy dwa równania różniczkowe cząstkowe:

$$2(x-\alpha)+2(z-\gamma)p=\varphi'[a(x-\alpha)+b(y-\beta)+c(z-\gamma)](a+cp),$$
$$2(y-\beta)+2(z-\gamma)q=\varphi'[a(x-\alpha)+b(y-\beta)+c(z-\gamma)](b+cq),$$

z których, po wyrugowaniu dowolnej funkcyi: $\varphi'[a(x-\alpha)+b(y-\beta)+c(z-\gamma)]$, otrzymujemy równanie różniczkowe cząstkowe bez funkcyi dowolnej w postaci:

$$\frac{x-\alpha+(z-\gamma)p}{y-\beta+(z-\gamma)q}=\frac{a+cp}{b+cq},$$

czyli:

$$[b(z-\gamma)-c(y-\beta)]p+[c(x-\alpha)-a(z-\gamma)]q=a(y-\beta)-b(x-\alpha), \tag{25}$$

które możemy przedstawić w postaci wyznacznika:

$$\begin{vmatrix} p & q & -1 \\ a & b & c \\ x-\alpha, & y-\beta, & z-\gamma \end{vmatrix}=0, \tag{26}$$

jako równanie różniczkowe wszelkich powierzchni obrotowych o dowolnej osi obrotu, określonej równaniami: $\frac{x-\alpha}{a}=\frac{y-\beta}{b}=\frac{z-\gamma}{c}$.

Równania różniczkowe cząstkowe (24) i (25) wypowiadają wspólną własność wszystkich powierzchni obrotowych niezależną od kształtu południka, która opiewa:

Normalna w jakimkolwiek punkcie powierzchni obrotowej przecina oś obrotu.

Innemi słowy: *Płaszczyzna styczna w jakimkolwiek punkcie powierzchni obrotowej jest prostopadłą do płaszczyzny, przechodzącej przez ten punkt i przez oś obrotu czyli prostopadłej do płaszczyzny południkowej tego punktu.*

20. Powierzchnie kanałowe. Powierzchnia kanałowa powstaje, jeżeli koło o stałym promieniu tak się porusza, że jego środek przebiega daną krzywą przestrzenną, a jego płaszczyzna pozostaje stale płaszczyzną normalną tejże krzywej (fig. 245).

Niech będzie daną krzywa w przestrzeni określona równaniami:

$$x=f(z), \quad y=\varphi(z),$$

zwana kierownicą powierzchni kanałowej. Ogólne równania koła, kształtu:

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2=R^2,$$
$$A(x-\xi)+B(y-\eta)+C(z-\zeta)=0,$$

podpadają tu następującym pięciu warunkom:

$$\xi=f(\zeta), \quad \eta=\varphi(\zeta), \quad \frac{A}{d\xi}=\frac{B}{d\eta}=\frac{C}{d\zeta},$$

a że $d\xi=f'(\zeta)d\zeta$, $d\eta=\varphi'(\zeta)d\zeta$, sprowadzają się zatem do postaci:

$$\left.\begin{aligned}&[x-f(\zeta)]^2+[y-\varphi(\zeta)]^2+(z-\zeta)^2=R^2,\\&f'(\zeta)[x-f(\zeta)]+\varphi'(\zeta)[y-\varphi(\zeta)]+(z-\zeta)=0.\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Fig. 245.

Równania te zawierają jeden dowolny parametr ζ i są ogólnemi równaniami wszelkich powierzchni kanałowych.

21. Równanie różniczkowe cząstkowe powierzchni kanałowych. Różniczkując ogólne równania powierzchni kanałowych podane pod (27) kolejno cząstkowo podług zmiennych niezależnych x i y, otrzymujemy najpierw z pierwszego równania dwa następujące:

$$\left[x-f(\zeta)\right]\left[1-f'(\zeta)\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right]+\left[y-\varphi(\zeta)\right]\left[-\varphi'(\zeta)\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right]+\left(z-\zeta\right)\left(p-\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)=0,$$
$$\left[x-f(\zeta)\right]\left[-f'(\zeta)\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right]+\left[y-\varphi(\zeta)\right]\left[1-\varphi'(\zeta)\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right]+\left(z-\zeta\right)\left(q-\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)=0,$$

czyli:

$$x-f(\zeta)+p\Big(z-\zeta\Big)-\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big\{\Big[x-f(\zeta)\Big]f'(\zeta)+\Big[y-\varphi(\zeta)\Big]\varphi'(\zeta)+\Big(z-\zeta\Big)\Big\}=0,$$

$$y-\varphi(\zeta)+q\Big(z-\zeta\Big)-\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big\{\Big[x-f(\zeta)\Big]f'(\zeta)+\Big[y-\varphi(\zeta)\Big]\varphi'(\zeta)+\Big(z-\zeta\Big)\Big\}=0,$$

które za uwzględnieniem drugiego równania sprowadzają się do postaci:

$$x-f(\zeta)+p(z-\zeta)=0,\quad y-\varphi(\zeta)+q(z-\zeta)=0, \tag{28}$$

Otrzymane równania różniczkowe cząstkowe rzędu pierwszego zawierają jeszcze obie funkcye dowolne $f(\zeta)$ i $\varphi(\zeta)$, cechujące kierownicę danej powierzchni, i wypowiadają własność tej powierzchni, że wszelka normalna do powierzchni kanałowej przecina kierownicę tej powierzchni. Różniczkując oba te równania jeszcze raz kolejno podług zmiennych x i y, otrzymujemy następujące cztery równania różniczkowe:

$$1+p^2+r(z-\zeta)=[f'(\zeta)+p]\frac{\partial\zeta}{\partial x},\quad pq+s(z-\zeta)=[f'(\zeta)+p]\frac{\partial\zeta}{\partial y},$$

$$pq+s(z-\zeta)=[\varphi'(\zeta)+q]\frac{\partial\zeta}{\partial x},\quad 1+q^2+t(z-\zeta)=[\varphi'(\zeta)+q]\frac{\partial z}{\partial y},$$

z których możemy funkcye dowolne $f'(\zeta)$ i $\varphi'(\zeta)$ wyrugować.

Odejmując mianowicie od iloczynu pierwszego i czwartego równania iloczyn drugiego i trzeciego równania, otrzymujemy równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu, kształtu:

$$[1+p^2+r(z-\zeta)][1+q^2+t(z-\zeta)]-[pq+s(z-\zeta)]^2=0, \tag{29}$$

zawierające w sobie jeszcze stałą dowolną ζ. Stałą tę dowolną możemy zastąpić danym promieniem R koła ruchomego.

Z równania:

$$[x-f(\zeta)]^2+[y-\varphi(\zeta)]^2+(z-\zeta)^2=R^2,$$

w połączeniu z równaniami (28):

$$x-f(\zeta)=-p(z-\zeta),\quad y-\varphi(\zeta)=-q(z-\zeta),$$

otrzymujemy bowiem: $(z-\zeta)^2(p^2+q^2+1)=R^2$, zatem: $z-\zeta=\frac{R}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$.

Podstawiając tę wartość w równanie (29), otrzymujemy:

$$\left(1+p^2+\frac{Rr}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\right)\cdot\left(1+q^2+\frac{Rt}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\right)-\left(pq+\frac{Rs}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\right)^2=0,$$

a stąd równanie:

$$(rt-s^2)R^2-\{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t\}\sqrt{p^2+q^2+1}\,.R+(p^2+q^2+1)^2=0, \tag{30}$$

jako równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu przynależne wszystkim powierzchniom kanałowym, powstałym przez ruch koła o stałym promieniu R, niezależnie od obranej kierownicy. Równanie to jest ze względu na R zgodne z równaniem wyprowadzonem pod (6) na str. 830, wyznaczającem główne promienie krzywizny w danym punkcie powierzchni, z czego wynika że w powierzchniach kanałowych jest w każdym punkcie jeden z głównych promieni krzywizny zawsze stały, równy promieniowi koła ruchomego.

Jeżeli kierownicą powierzchni kanałowej jest krzywa płaska: $z=0$, $y=f(x)$, wtedy ogólne równanie powierzchni kanałowej, otrzymuje kształt:

$$(x-\xi)^2+[y-f(\xi)]^2+z^2=R^2,\quad (x-\xi)+[y-f(\xi)]f'(\xi)=0, \tag{31}$$

a odnośne równanie różniczkowe sprowadza się do postaci:

$$(p^2+q^2+1)z^2=R^2$$

jest więc równaniem różniczkowem cząstkowem rzędu pierwszego.

Ćwiczenia LIII.

1) Wyprowadzić równanie powierzchni walcowej, której kierownicą jest linia krzywa $z = 0$, $F(x, y) = 0$, a tworzące są równoległe do prostej: $x = az$, $y = bz$.

2) Jaki kształt ma równanie walca parabolicznego, którego kierownicą jest parabola: $y^2 = 2px$, leżąca na płaszczyźnie XOY, a tworzące są równoległe do prostej: $x = az$, $y = bz$.

3) Jaki kształt ma równanie walca kołowego, którego kierownicą jest koło: $x^2+y^2 = 1$, leżące na płaszczyźnie xy, a tworzące są dowolnie nachylone.

4) Wyprowadzić równanie powierzchni walcowej, której kierownicą jest logarytmika: $y = e^x$, $z = 0$, a kierunek tworzących jest określony liczbami: a, b, 1.

5) Wykazać, że równanie: $x^2+y^2+2z^2-2xz+2yz-1 = 0$ przedstawia walec kołowy, którego tworzące są równoległe do prostej: $x = z$, $y = -z$.

6) Wykazać, że krzywa styczności walca opisanego na powierzchni: $f(x, y, z) = 0$ mającego tworzące równoległe do prostej: $x = az$, $y = bz$, przedstawia się równaniami:

$$f(x, y, z) = 0 \quad a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

7) Wyprowadzić równanie walca opisanego na kuli: $x^2+y^2+z^2 = r^2$, a mającego tworzące równoległe do prostej $x = az$, $y = bz$.

8) Wykazać, że równanie stożka opierającego się na krzywej $z = h$, $f(x, y) = 0$, a mającego wierzchołek w początku układu przedstawia się w postaci:

$$f\left(\frac{hx}{z}, \frac{hy}{z}\right) = 0.$$

9) Wykazać, że równanie stożka opierającego się na krzywej: $z = 0$, $f(x, y) = 0$, a mającego wierzchołek w punkcie: $S(\xi, \eta, \zeta)$ przedstawia się w postaci:

$$f\left(\frac{\zeta x-\xi z}{z-\zeta}, \frac{\zeta y-\eta z}{z-\zeta}\right) = 0.$$

10) Wykazać, że równanie:

$$3x^2+2y^2-2xz+4yz-4x-8z-8 = 0$$

przedstawia stożek o wierzchołku: $S(0, 2, -2)$.

11) Wyprowadzić równanie powierzchni powstałej przez ruch linii prostej, która przecina stale:

$$\text{1) prostą } L\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \quad \text{2) koło } K\begin{cases} x = +a \\ z^2+y^2 = r^2 \end{cases}, \quad \text{3) koło } K'\begin{cases} x = -a \\ z^2+y^2 = r^2 \end{cases}$$

12) Wyprowadzić równanie powierzchni powstałej przez ruch prostej, która opiera się stale: 1) na kole $K\begin{cases} z = 0 \\ x^2+y^2 = r^2 \end{cases}$, 2) na prostej $L\begin{cases} z = c \\ y = 0 \end{cases}$, 3) na prostej $L'\begin{cases} z = -c \\ x = 0 \end{cases}$.

13) Wykazać, że wszelką powierzchnię prostokreślną możemy przedstawić układem równań kształtu:

$$x = az+\varphi(a), \quad y = f(a) \cdot z+\psi(a),$$

gdzie a jest dowolnym parametrem.

14) Wykazać, że ogólne równania powierzchni, powstałych przez ruch prostej, opierającej się stale na prostej $L\begin{cases} x-az-\alpha = 0 \\ y-bz-\beta = 0 \end{cases}$ możemy zawsze przedstawić w postaci:

$$x \cdot \varphi\left(\frac{x-az-\alpha}{y-bz-\beta}\right)+y \cdot \psi\left(\frac{x-az-\alpha}{y-bz-\beta}\right)+1 = 0.$$

15) Wykazać, że ogólne równanie powierzchni powstałej przez ruch prostej, która pozostaje stale równoległą do płaszczyzny $ax+by+cz = 0$ możemy przedstawić w postaci:

$$x\varphi(ax+by+cz)+y\psi(ax+by+cz)+1 = 0.$$

16) Wyprowadzić ogólne równanie powierzchni powstałej przez ruch linii prostej, opierającej się stale na dwu prostych:

$$L\begin{cases} x-az-\alpha = 0 \\ y-bz-\beta = 0 \end{cases} \text{ i } L'\begin{cases} x-a'z-\alpha' = 0 \\ y-b'z-\beta' = 0 \end{cases}$$

17) Wyprowadzić ogólne równanie powierzchni, powstałej przez ruch linii prostej. która opiera się stale na prostej: $L\begin{cases} x-az-\alpha=0 \\ y-bz-\beta=0 \end{cases}$ i powstaje zawsze równoległą do płaszczyzny: $Ax+By+Cz=0$.

18) Wyprowadzić ogólne równanie powierzchni, powstałej przez ruch prostej, opierającej się stale na osi ZZ' i przecinającej ją pod kątem ω.

19) Jakie równanie ma powierzchnia powstała przez ruch prostej, która przecina prostą $L_1\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ i prostą $L_2\begin{cases} z=0 \\ y=b \end{cases}$, a do prostej L_1 jest nachyloną pod stałym kątem ω.

20) Jakie równanie ma powierzchnia prostokreślna, jeżeli jej tworzące przecinają oś OZ pod stałym kątem ω, a nadto opierają się na ellipsie:

$$E\left(z=0,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right).$$

21) Wyprowadzić równanie powierzchni, powstającej przez ruch prostej, któraby przecinała oś XX' pod danym kątem ω, a od osi YY' miała stale odległość równą p.

22) Wykazać, że ogólne równanie konoidy, której tworzące opierają się na osi OZ i są równoległe do płaszczyzny XOY, możemy przedstawić w postaci:

$$F\left(z,\ \frac{y}{x}\right)=0.$$

23) Wykazać, że normalne w punktach prostej, leżącej na dowolnej powierzchni wichrowatej, tworzą paraboloidę hiperboliczną.

24) Okazać, że przez wszelką tworzącą powierzchni wichrowatej możemy zawsze przeprowadzić taką powierzchnię wichrowatą drugiego rzędu, że obie powierzchnie będą miały we wszystkich punktach tej tworzącej te same płaszczyzny styczne.

25) Wyprowadzić równanie konoidu kołowego, którego tworzące opierają się na osi OZ i na kole $x=a$, $y^2+z^2=r^2$, a są równoległe do płaszczyzny XOY.

26) Wykazać, że krzywa zwężenia na paraboloidzie hiperbolicznej: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ składa się z dwu parabol, określonych równaniami:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z,\quad \frac{x}{a^2}\pm\frac{y}{b^2}=0.$$

27) Wyprowadzić równanie różniczkowe powierzchni powstałej przez ruch linii prostej przecinającej dwie dane krzywe i równoległej do płaszczyzny XOY.

28) Wyznaczyć równanie powierzchni utworzonej przez linię prostą, która porusza się równolegle do płaszczyzny XOY, a przecina oś z-ów i krzywę daną równaniami:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

29) Zbadać powierzchnię utworzoną przez linię prostą, która porusza się równolegle do płaszczyzny XOY i przecina krzywe:

$$C_1\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad y=0\right\},\qquad C_2\left\{\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad x=0\right\}.$$

30) Wykazać, że ogólne równanie różniczkowe cząstkowe wszelkich powierzchni powstałych przez ruch prostej, pozostającej stale równoległą do płaszczyzny: $Ax+By+Cz=0$ przedstawia się w postaci:

$$(B+Cq)^2r-2(B+Cq)(A+Cp)s+(A+Cp)^2t=0.$$

gdzie:
$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y},\quad r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\quad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

31) Wyprowadzić równanie powierzchni utworzonej przez prostą, która przecina dwie proste: $L_1\begin{cases} y=mx \\ z=c \end{cases}$, $L_2\begin{cases} y=-mx \\ z=-c \end{cases}$ i koło, o promieniu r, którego płaszczyzna jest równoległą do tychże dwu prostych, a którego środek dzieli najkrótszą odległość tych prostych na dwie równe części.

32) Wyprowadzić równanie różniczkowe wszelkich powierzchni prostokreślnych utworzonej przez linię prostą, która przecina prostą: $\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$ i pozostaje równoległą do płaszczyzny: $Ax+By+Cz=0$.

33) Wyprowadzić ogólne równanie wszelkich powierzchni prostokreślnych, których tworzące przecinają daną linię prostą i są do niej prostopadłe.

34) Znaleźć powierzchnię utworzoną przez linię prostą, którąby była stale równoległa do płaszczyzny XOY, przecinała oś OZ i krzywą: $C(xyz=a^3,\ x^2+y^2=b^2)$.

35) Wyprowadzić równanie powierzchni powstałej przez obrót linii łańcuchowej:

$$y=0,\quad x=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}}+e^{-\frac{z}{a}}\right),\ \text{około osi } OZ \text{ (fig. 246).}$$

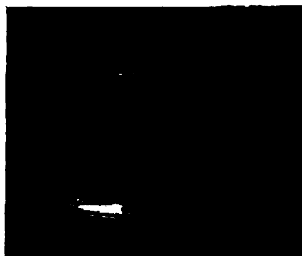


Fig. 246.

36) Jakie równanie otrzymuje powierzchnia powstała przez obrót linii łańcuchowej:

$$y=0,\quad z=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)\ \text{około osi } OZ.$$

37) Wyprowadzić równanie powierzchni powstałej przez obrót linii prostej: $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$ około osi OZ.

38) Wykazać, że równanie wszelkiej powierzchni obrotowej, który osią obrotu jest prosta:

$$\frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z}{\cos\gamma},$$

możemy przedstawić w postaci:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=\varphi(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)$$

39) Wyprowadzić równanie powierzchni obrotowej, powstałej przez obrót krzywej: $C\begin{cases}x=f(z)\\ y=\varphi(z)\end{cases}$ około osi OZ.

40) Jakie równanie otrzymuje powierzchnia powstała przez obrót krzywej:

$$C\{y=0,\ az^2+bx^2+2ex+d=0\}\ \text{około osi } OZ.$$

41) Jakie równanie otrzymuje powierzchnia powstała przez obrót hiperboli: $C(y=0,\ xz=a^2)$ około jednej z jej asymptot.

42) Wyprowadzić równanie powierzchni, powstałej przez ruch koła o stałym promieniu a, jeżeli środek koła porusza się po osi XX', a płaszczyzna koła przechodzi stale przez prostą $L\begin{cases}x=0\\ y=b\end{cases}$.

43) Wyprowadzić ogólne równanie powierzchni powstałej przez ruch koła o stałym promieniu r, jeżeli płaszczyzna koła pozostaje stale równoległą do płaszczyzny XOY, a środek koła opisuje pewną krzywą, leżącą na płaszczyźnie XOZ.

44) Wyprowadzić równanie powierzchni powstałej przez ruch koła o stałym promieniu r, jeżeli płaszczyzna koła pozostaje stale równoległą do płaszczyzny XOY, a środek koła opisuje daną krzywą w przestrzeni: $x=\varphi(z)$, $y=\psi(z)$.

45) Wyprowadzić równanie powierzchni powstałej przez ruch koła o stałym promieniu r, jeżeli środek koła opisuje krzywą $y=\varphi(x)$, leżącą na płaszczyźnie XOY, a płaszczyzna koła przechodzi przez oś OZ.

46) Jakie równanie ma powierzchnia powstała przez ruch koła, o stałym promieniu r, jeżeli środek koła opisuje prostą $L\begin{cases}z=0\\ y=b\end{cases}$, a płaszczyzna koła przechodzi przez oś OZ.

47) Wyprowadzić ogólne równanie powierzchni, powstałej przez ruch koła o stałym promieniu r, jeżeli środek koła opisuje pewną krzywą przestrzenną, a płaszczyzna koła przechodzi stale przez oś OZ.

48) Jakie równanie otrzymuje powierzchnia powstała przez ruch koła o stałym promieniu r, jeżeli środek koła opisuje linię śrubową:

$$x=a\cos\frac{z}{na},\qquad y=a\sin\frac{z}{na},$$

a płaszczyzna koła przechodzi przez oś OZ.

49) Wyprowadzić równanie powierzchni, powstałej przez ruch koła o stałym promieniu r, jeżeli promień koła porusza się po prostej $L\begin{cases} x=0 \\ y=b \end{cases}$, a obwód koła dotyka się stale osi OZ.

50) Wyprowadzić równanie powierzchni, powstałej przez ruch koła zmiennego, jeżeli płaszczyzna koła przechodzi przez oś OZ, środek koła pozostaje w początku układu, a obwód koła przecina ellipsę: $E(z=0,\ b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2)$.

51) Znaleźć powierzchnię obrotową, któraby miała tę własność, że główne promienie krzywizny w każdym z jej punktów byłaby równe, ale przeciwnego znaku.

52) Wyznaczyć promień krzywizny w przekroju normalnym ellipsoidy obrotowej: $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, jeżeli płaszczyzna przekroju tworzy z płaszczyzną południkową dany kąt α.

53) Wykazać, że promień krzywizny przekroju normalnego w danym punkcie powierzchni rozwijalnej jest proporcyonalny do kwadratu sinusa kąta, jaki ten przekrój zamyka z tworzącą powierzchni rozwijalnej.

54) Wykasać, że promienie krzywizny przekrojów normalnych w punktach danej tworzącej powierzchni rozwijalnej są proporcyonalne do odległości tych punktów od punktu przecięcia się tej tworzącej z tworzącą nieskończenie blisko położoną.

Rozwiązania LIII. 1) $F(x-az,\ y-bz)=0$ 2) $(y-bz)^2=2p(x-az)$. 3) $(x-az)^2+(y-bz)^2=1$. 4) $y-bz=e^{x-az}$. 7) $(b^2+1)x^2+(a^2+1)y^2+(a^2+b^2)z^2-2abxy-2axz-2byz=(a^2+b^2+1)r^2$. 11) $a^2(y^2+z^2)-r^2x^2=0$ lub $x^2z^2+a^2y^2-r^2x^2=0$.
12) $c^2y^2(z+c)^2+c^2x^2(z-c)^2-r^2(z+c)^2(z-c)^2=0$. 16) $\frac{x-az-\alpha}{y-bz-\beta}=\varphi\left(\frac{x-a'z-\alpha'}{y-b'z-\beta'}\right)$.
17) $Ax+By+Cz=\varphi\left(\frac{x-az-\alpha}{y-bz-\beta}\right)$. 18) $z=\operatorname{cotg}\omega\,.\sqrt{x^2+y^2}+\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. 19) $(x^2+y^2)(y-b)^2=\operatorname{tang}^2\omega\,.\,y^2z^2$. 20) $(b^2x^2+a^2y^2)[z-\operatorname{cotg}\omega\sqrt{x^2+y^2}]^2=a^2b^2\operatorname{cotg}^2\omega\,(x^2+y^2)$.
21) $[z\sin\omega+\sqrt{x^2+y^2}\cos\omega]^2y^2=p^2(x^2\cos^2\omega+y^2)$. 25) $a^2y^2+x^2z^2-r^2x^2=0$. 28) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2$. 29) $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=1$. 31) $(mc^2x-cyz)^2+m^2(mcxz-c^2y)^2=m^2c^2(c^2-z^2)^2$.
34) $b^2xyz=a^3(x^2+y^2)$. 35) $x^2+y^2=\frac{a^2}{4}\left\{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right\}^2$. 36) $z=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}}+e^{-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}}\right)$.
37) $x^2+y^2=(az+\alpha)^2+(bz+\beta)^2$. 39) $x^2+y^2=[f(z)]^2+[\varphi(z)]^2$. 40) $[b(x^2+y^2)+az^2+d]^2=4c^2(x^2+y^2)$. 41) $z^2(x^2+y^2)=a^4$. 42) $(y^2+z^2)(y-b)^2=(a^2-x^2)y^2$. 43) $z=\varphi(x+\sqrt{r^2-y^2})$.
44) $[x-\varphi(z)]^2+[y-\psi(z)]^2=r^2$. 45) $x^2(z^2-r^2)+(x^2+y^2)\left\{x-\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right\}^2=0$. 46) $y^2(z^2-r^2)+(x^2+y^2)(y-b)^2=0$. 47) $x^2\left\{z-\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right\}^2+\left(x^2+y^2\right)\left\{x\ \ \psi\left(\frac{y}{x}\right)\right\}^2=r^2x^2$.
48) $\left(z-na\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)^2+(\sqrt{x^2+y^2}-a)^2=r^2$. 49) $(y^2+z^2)(y-2b)+x^2y=0$.
50) $(a^2y^2+b^2x^2)(x^2+y^2+z^2)=a^2b^2(x^2+y^2)$. 51) Powierzchnia powstała przez obrót linii łańcuchowej: $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ około osi x-ów.

Literatura. Joachimsthal: Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung. Leipzig 1870
Knoblauch: Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen. Leipzig 1888.
Ludwig Immanuel Magnus: Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie des Raumes. Berlin 1837.

Tematy do rozprawek naukowych:

1. Teorya powierzchni prostokreślnych.
2. Teorya powierzchni obrotowych.
3. Teorya powierzchni rurowych.

Wykład LIV.

Dalszy ciąg teoryi tworzenia powierzchni.

1. Powierzchnia powstała przez ruch dowolnej krzywej. Niech będzie ogólnie dana krzywa ruchoma w przestrzeni, określona równaniami:

$$f_1(x, y, z, a)=0, \; f_2(x, y, z, a)=0, \tag{1}$$

o dowolnym parametrze a.

Każdej wartości parametru a odpowiada pewne położenie krzywej ruchomej. Jeżeli parametr a zmienia się ciągle, natenczas krzywa ruchoma utworzy powierzchnię. Rugując tedy z obu danych równań parametr a, otrzymamy równanie tej powierzchni jako miejsca geometrycznego wszystkich położeń powyższej krzywej ruchomej.

Jeżeli równania krzywej ruchomej przedstawione są dwoma równaniami:

$$f_1(x, y, z, a, b)=0, \; f_2(x, y, z, a, b)=0, \tag{2}$$

o dwu parametrach dowolnych a i b, wtedy istnieje ∞^2 położeń krzywej ruchomej. Ażeby tedy krzywa ruchoma utworzyła powierzchnię, musi istnieć pewien związek między parametrami a i b w postaci:

$$\varphi(a, b)=0. \tag{3}$$

Pod tem założeniem możemy parametrom a i b nadawać tylko takie wartości, które czynią zadość danemu warunkowi, w takim razie będzie istniało tylko ∞^1 położeń krzywej ruchomej, które utworzą pewną powierzchnię przez ruch krzywej powstałą, a równanie tej powierzchni, otrzymamy, jeżeli z powyższych trzech równań wyrugujemy oba parametry a i b.

Ogólnie jeżeli krzywa ruchoma w przestrzeni jest przedstawiona dwoma równaniami:

$$f_1(x, y, z, a_1, a_2, ..., a_n)=0, \; f_2(x, y, z, a_1, a_2, ..., a_n), \tag{4}$$

o n parametrach dowolnych $a_1, a_2, ..., a_n$, to jej ruch w przestrzeni będzie określony, gdy będzie danych $(n-1)$ równań między tymi n parametrami, w postaci:

$$\varphi_1(a_1, a_2, .., a_n)=0, \; \varphi_2(a_1, a_2, .., a_n)=0, ..., \varphi_{n-1}(a_1, a_2, ..., a_n)=0, \tag{5}$$

które dozwalają wyznaczyć $(n-1)$ parametrów jako funkcye pozostałego n go parametru. Możemy tedy wyrugować z danych $(n+1)$ równań wszystkie parametry, a otrzymamy jedno równanie między spółrzędnemi x, y, z jako równanie powierzchni powstałej przez tak określony ruch krzywej w przestrzeni.

Warunki w ilości $(n-1)$, potrzebne do określenia ruchu krzywej, mającej w swych równaniach n parametrów dowolnych, możemy otrzymać w ten sposób, że podamy $(n-1)$ stałych krzywych w przestrzeni, zwanych **kierownicami** powierzchni, na których krzywa ruchoma ma się opierać, przecinając je.

2. Przykłady powstawania powierzchni rzędu drugiego przez ruch krzywych drugiego rzędu.

α) **Ellipsoida** powstaje przez ruch ellipsy zmiennej, której wierzchołki poruszają się po dwóch ellipsach, mających jedną oś wspólną i leżących w płaszczyznach do siebie prostopadłych. Obierzmy płaszczyzny dwóch ellips stałych COA i COB za płaszczyzny ZOX i ZOY, a ich oś wspólną CC' za oś z-ów i przyjmijmy, że płaszczyzna ellipsy ruchomej AOB jest równoległą do płaszczyzny XOY (fig. 247). Oznaczmy w ellipsach stałych COA i COB półosie $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$ i weźmy pod uwagę jakiekolwiek położenie ellipsy ruchomej AOB, np. $A_1O_1B_1$. Dowolny punkt P tej ellipsy niech ma współrzędne $x=ON$, $y=MN$, $z=MP$, wtedy będzie dla ellipsy OA_1B_1 widocznie

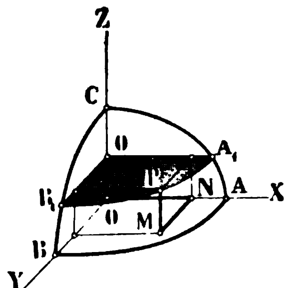


Fig. 247.

$$\frac{X^2}{OA_1{}^2}+\frac{Y^2}{OB^2_1}=1,$$ z ellipsy OAC wypada atoli: $$\frac{OA^2_1}{a^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1;$$

z ellipsy OBC zaś: $$\frac{OB^2_1}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$$ będzie więc:

$$OA^2_1=a^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right),\quad OB^2_1=b^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$$

Wstawiwszy te wartości w równanie ellipsy OA_1B_1, otrzymamy związek, jaki zachodzi między spółrzędnymi każdego punktu ellipsy ruchomej w każdem jej położeniu, czyli równanie ellipsoidy w postaci:

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}=1,\ \text{czyli:}\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

β) Hiperboloida o jednej powłoce powstaje przez ruch ellipsy zmiennej, której wierzchołki poruszają się po dwóch hiperbolach, mających wspólną oś urojoną i położonych w płaszczyznach do siebie prostopadłych.

Obierzmy płaszczyzny dwóch stałych hiperbol za płaszczyzny ZOX i ZOY, a płaszczyznę ellipsy ruchomej równoległą do płaszczyzny XOY (fig. 248). Oznaczmy ich półosie $OA=a$, $OB=b$, a połówkę wspólnej osi urojonej $OC=c$ i weźmy pod uwagę jakiekolwiek położenie ellipsy ruchomej AOB, np. $A_1O_1B_1$. Dowolny punkt P tej ellipsy niech ma współrzędne $ON=x$, $MN=y$, $PM=z$, to jej równaniem będzie:

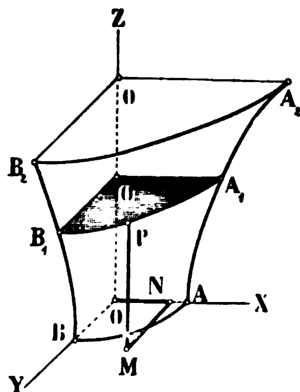


Fig. 248.

$$\frac{x^2}{O_1A^2}+\frac{y^2}{O_1B^2}=1;$$

z hiperboli AA_1 otrzymamy atoli:

$$\frac{O_1A^2_1}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

z hiperboli BB_1 zaś:

$$\frac{O_1B^2_1}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

będzie więc:

$$O_1A^2_1=a^2\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right),\quad O_1B^2_1=b^2\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right).$$

Wstawiwszy te wartości w równanie ellipsy $O_1A_1B_1$, otrzymamy:

$$\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)}=1,\quad \text{czyli:}\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

jako szukane równanie hiperboloidy o jednej powłoce.

γ) Hiperboloida o dwóch powłokach, powstaje przez ruch ellipsy, której wierzchołki poruszają się po dwóch hiperbolach, mających wspólną oś rzeczywistą i położonych w płaszczyznach do siebie prostopadłych.

Weźmy płaszczyzny stałych hiperbol, mających wspólną oś poprzeczną $AA' = 2a$, za płaszczyzny spółrzędne XOZ i YOZ i przyjmijmy, że ellipsa porusza się równolegle do płaszczyzny YOZ. Oznaczmy przez c połowę osi urojonej dla hiperboli AC_1C, położonej na płaszczyźnie XOZ, zaś przez b połowę osi urojonej dla hiperboli AB_1B, położonej na płaszczyźnie XOY i weźmy pod uwagę jakiekolwiek położenie ellipsy ruchomej, np. $B_1S_1C_1$, gdzie S_1B_1 i S_1C_1 są jej półosiami. Dowolny punkt P tej ellipsy niech ma współrzędne $x = OS_1$, $y = MS_1$, $z = MP$ (fig. 249), wówczas otrzymamy jej równanie w kształcie:

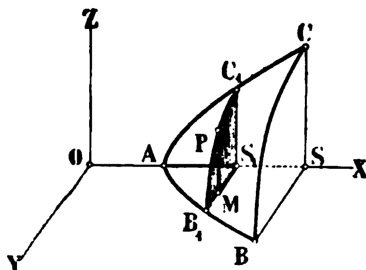


Fig. 249.

$$\frac{y^2}{S_1B_1^2} + \frac{z^2}{S_1C_1^2} = 1.$$

Z hiperboli AC_1 otrzymamy jednakże:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{S_1C_1^2}{c^2} = 1,$$

z hiperboli AB_1 zaś:
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{S_1B_1^2}{b^2} = 1,$$

będzie więc: $S_1C_1^2 = c^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)$, $S_1B_1^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)$.

Wstawiwszy te wartości w równanie ellipsy C_1PB_1 otrzymamy:

$$\frac{y^2}{b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)} = 1, \quad \text{czyli: } \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1,$$

a stąd:
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

jako szukane równanie hiperboloidy o dwóch powłokach.

δ) Paraboloida elliptyczna powstaje przez ruch paraboli poruszającej się wierzchołkiem po innej stałej paraboli, jeżeli płaszczyzny tych parabol są do siebie prostopadłe, a osie parabol równoległe i w tę samą stronę zwrócone.

Przyjmijmy płaszczyznę stałej paraboli za płaszczyznę XOZ, jej wierzchołek za początek układu, a jej oś za oś z-ów (fig. 250). Równanie tej paraboli na płaszczyźnie ZOX będzie tedy:

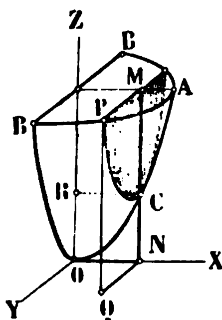


Fig. 250.

$$x^2 = 2pz,$$

jeżeli p jest jej parametrem.

Niech będzie teraz CP jakiemkolwiek położeniem paraboli ruchomej, której parametrem niech będzie q. Przyjmijmy dowolnie punkt P na tej paraboli, niech będzie nadto $ON = x$, $PM = y$, $MN = z$, wtedy będzie:

$$PM^2 = y^2 = 2q \,.\, MC = 2q(MN - NC),$$

czyli:
$$y^2 = 2qz - 2qNC.$$

Z paraboli OC dostaniemy zaś:

$$CR^2 = 2p \,.\, OR, \text{ czyli: } x^2 = 2p \,.\, CN,$$

przeto: $CN = \frac{x^2}{2p}$.

Otrzymamy:
$$y^2 = 2qz - \frac{qx^2}{p}, \quad \text{czyli: } \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z,$$

jako równanie paraboloidy elliptycznej.

ε) Paraboloidą hiperboliczną, która powstaje przez ruch paraboli poruszającej się wierzchołkiem po innej stałej paraboli, jeżeli płaszczyzny tych parabol są do siebie prostopadłe, a osi równoległe, jednakże w stronę przeciwną zwrócone.

Przyjmijmy płaszczyznę stałej paraboli za płaszczyznę XOZ, jej wierzchołek za początek układu, a jej oś za oś z-ów. Równanie tej paraboli na płaszczyźnie XOZ będzie

tedy: $x^2=2pz$, jeżeli p jest jej parametrem. Niech będzie teraz CP jakiemkolwiek położeniem paraboli ruchomej o stałym parametrze q. Przyjmijmy na niej dowolny punkt P, spółrzędne jego niech będą $OQ=x$, $QM=y$, $PM=z$ (fig. 251).

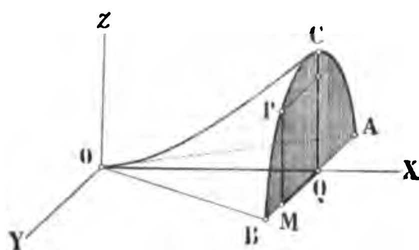


Fig. 251.

Z paraboli CP otrzymujemy tedy:

$$PM^2=2q \, . \, CN=2q(CQ-NQ),$$

czyli: $$y^2=2q(CQ-z);$$

z paraboli OC dostaniemy zaś:

$$CQ^2=2p \, . \, OQ,$$

czyli: $x^2=2p \, . \, CQ$, przeto: $CQ=\frac{x^2}{2p}$.

Otrzymamy więc:

$$y^2=2q\left(-\frac{x^2}{2p}-z\right), \text{ czyli: } \frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z,$$

równanie paraboloidy hiperbolicznej.

3. Powierzchnie śrubowe. Powierzchnią śrubową w ogólności, nazywamy powierzchnię, która powstaje w ten sposób, że dowolna krzywa obraca się około pewnej osi, a zarazem przesuwa się równolegle do tej osi, jednakże tak, że stosunek między szybkością obrotu a szybkością przesunięcia jest ilością stałą.

Każdy punkt tworzącej opisuje przy tym ruchu linią śrubową, a wszystkie te linie śrubowe mają jednakowe kroki.

Przecinając powierzchnię śrubową, płaszczyzną przesuniętą przez oś powierzchni śrubowej otrzymujemy krzywą, którą nazywamy linią południkową powierzchni śrubowej. Linie południkowe powierzchni śrubowej są do siebie przystające. Jeżeli linia południkowa powierzchni śrubowej wykonywa ten sam ruch śrubowy, co krzywa tworząca, natenczas powstaje ta sama powierzchnia śrubowa.

Najogólniejsza linia śrubowa może więc powstać przez ruch śrubowy krzywej płaskiej około osi leżącej na płaszczyźnie tej krzywej.

Przyjąwszy oś OZ za oś powierzchni śrubowej, krzywą na płaszczyźnie XOZ o równaniu $z=f(x)$ jako krzywą południkową powierzchni śrubowej, wtedy obracając dowolny z jej punktów o kąt φ na około osi OZ i przesuwając go zarazem wzdłuż osi o wielkość $a\varphi$, otrzymamy na wyznaczenie nowych spółrzędnych tego punktu równania:

$$x=r\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi, \quad z=f(r)+a\varphi,$$

o dowolnych parametrach r i φ, skąd po wyrugowaniu r i φ, otrzymujemy:

$$z=f(\sqrt{x^2+y^2})+a \, . \, \text{arctang}\,\frac{y}{x}, \quad (6)$$

jako ogólne równanie powierzchni śrubowych (fig. 252, 253 i 254).



Fig. 252. Fig. 253. Fig. 254.

W szczególności powierzchnia o równaniu: $z=a\,\text{arctang}\,\frac{y}{x}$ jest powierzchnią śrubową wichrowatą powstałą przez ruch śrubowy prostej prostopadłej do osi OZ.

Jeżeli $a=0$, natenczas ruch śrubowy przechodzi w prosty ruch obrotowy, równanie otrzymuje tedy kształt: $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ i przedstawia powierzchnię obrotową o osi z-ów.

Powierzchnie obrotowe możemy przeto uważać jako szczególny przypadek powierzchni śrubowych.

4. Powierzchnie powstałe przez ruch powierzchni. Niech będzie daną powierzchnia, określona równaniem: $f(x, y, z, t)=0$, w którem t jest dowolnym parametrem, natenczas zmiana parametru t wywołuje zmianę w położeniu powierzchni, czyli ruch powierzchni powyższem równaniem określonej. Weźmy pod uwagę nieskończenie bliskie położenie, odpowiadające parametrowi $t+dt$, określone równaniem:

$$f(x, y, z, t+dt)=0,$$

natenczas oba równania: $f(x, y, z, t)=0$, $f(x, y, z, t+dt)=0$ przedstawiają razem przekrój dwu powierzchni po sobie następujących w miejscu odpowiadającem pewnej wartości parametru t. Równania te możemy zastąpić dwoma równaniami następującemi:

$$f(x, y, z, t)=0, \quad \frac{df(x, y, z, t)}{dt}=0.$$

Ze zmianą wartości parametru t zmieniają się położenia obu powierzchni, a więc także położenie ich krzywej przecięcia. Krzywa ta poruszając się w przestrzeni tworzy powierzchnię, określoną równaniami:

$$f=0, \quad \frac{df}{dt}=0, \tag{7}$$

o dowolnym parametrze t.

Powierzchnię tę nazywamy powierzchnią obwijającą układ powierzchni, określonych równaniem: $f(x, y, z, t)=0$, albo także *powierzchnią obwiednią* układu $f(x, y, z, t)=0$.

Przekrój dwu nieskończenie bliskich powierzchni tego układu nazywa się według Monge'a, *krzywą charakterystyczną* powierzchni obwiedniej. Wzdłuż krzywej charakterystycznej ma powierzchnia ruchoma te same płaszczyzny styczne, co powierzchnia obwiednia.

Równanie płaszczyzny stycznej w danym punkcie powierzchni $f=0$ ma bowiem za spółczynniki pochodne cząstkowe: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$, a te są dla pewnej stałej wartości parametru t takie same także dla powierzchni, określonej równaniami: $f=0$, $\frac{\partial f}{\partial t}=0$, z których parametr t został wyrugowany, t. j. dla powierzchni obwiedniej.

Powierzchnia obwiednia dotyka się więc każdej powierzchni ruchomej (tworzącej) wzdłuż przynależnej krzywej charakterystycznej, czyli obwija ją wzdłuż tej krzywej.

5. Przykład. Powierzchnie powstałe przez ruch płaszczyzny. Niech będzie danem równanie płaszczyzny ruchomej w postaci:

$$z = tx + f(t) \cdot y + \varphi(t),$$

gdzie t jest dowolnym parametrem, a $f(t)$ i $\varphi(t)$ pewnemi danemi funkcyami.

Różniczkując to równanie ze względu na parametr t, otrzymujemy:

$$0 = x + f'(t) \cdot y + \varphi'(t),$$

oba równania razem:

$$z = t \cdot x + f(t) \cdot y + \varphi(t), \quad x + f'(t) y + \varphi'(t) = 0, \tag{8}$$

przedstawiają po wyrugowaniu parametru t, powierzchnię powstałą przez ruch płaszczyzny. Różniczkując powyższe pierwsze równania cząstkowo podług zmiennych x i y, otrzymujemy:

$$p=t+[x+f'(t)\cdot y+\varphi'(t)]\frac{\partial t}{\partial x},\quad q=f(t)+[x+f'(t)\cdot y+\varphi'(t)]\frac{\partial t}{\partial y},$$

skąd, uwzględniając drugie równanie w (8), otrzymujemy równania:

$$p=t,\quad q=f(t),$$

zatem, po wyrugowaniu parametru t, równanie różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu, przynależne powierzchniom przez ruch płaszczyzny powstałym, w postaci:

$$q=f(p),\ \text{czyli}:\ \frac{\partial z}{\partial y}=f\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right). \tag{9}$$

Każda powierzchnia, której odpowiada równanie różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu kształtu: $q=f(p)$, jest powierzchnią rozwijalną na płaszczyźnie. Różniczkując bowiem powyższe równanie cząstkowe podług zmiennych x i y, otrzymujemy równania:

$$s=f'(p)\,.\,r,\quad t=f'(p)\,.\,s,$$

a stąd, po wyrugowaniu dowolnej funkcyi $f'(p)$, dostajemy równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu, kształtu;

$$rt-s^2=0, \tag{10}$$

cechujące powierzchnie rozwijalne.

Wszelka powierzchnia powstała przez ruch płaszczyzny jest zatem powierzchnią rozwijalną; linią charakterystyczną jest tu przekrój dwu płaszczyzn po sobie następujących, zatem linia prosta.

6. Powierzchnie graniczne. Jeżeli równanie między trzema zmiennemi x, y, z zawiera w swym składzie dwa parametry zmienne u i v, a więc przedstawia się w postaci:

$$f(x,\ y,\ z,\ u,\ v)=0,$$

natenczas przedstawia ono podwójnie nieskończony układ powierzchni czyli ∞^2 powierzchni w przestrzeni.

Dwie po sobie następujące powierzchnie, odpowiadające pewnej wartości parametru u i wartości następnej $u+du$, przy pewnej stałej wartości parametru v, określają jako swój przekrój krzywą w przestrzeni, wyznaczoną równaniami:

$$f(x,\ y,\ z,\ u,\ v)=0,\quad f(x,\ y,\ z,\ u+du,\ v)=0$$

czyli:
$$f=0,\quad \frac{\partial f}{\partial u}=0.$$

Analogicznie, dwie po sobie następujące powierzchnie, odpowiadające pewnej wartości parametru v i wartości następnej $v+dv$, przy pewnej stałej wartości parametru u, określają jako swój przekrój krzywę w przestrzeni, wyznaczoną równaniami:

$$f(x,\ y,\ z,\ u,\ v)=0,\quad f(x,\ y,\ z,\ u,\ v+dv)=0,\ \text{czyli}:\ f=0,\quad \frac{\partial f}{\partial v}=0.$$

Obie krzywe określają punkta przecięcia, określone trzema równaniami:

$$f=0,\quad \frac{\partial f}{\partial u}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial v}=0, \tag{11}$$

z których, po wyrugowaniu parametrów u i v, otrzymuje się równanie $F(x,\ y,\ z)=0$, jako równanie powierzchni, zwanej **powierzchnią graniczną** danego układu powierzchni.

Powierzchnia graniczna jest styczną do każdej powierzchni danego układu w ich punkcie wspólnym. Weźmy bowiem pod uwagę jedną z powierzchni układu, określoną równaniem: $f(x, y, z, u, v)=0$ przy pewnych stałych wartościach u i v, natenczas płaszczyznę styczną w pewnym punkcie tej powierzchni wyznacza różniczka zupełna:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz;$$

płaszczyznę styczną w pewnym punkcie powierzchni granicznej, określonej równaniami:

$$f=0, \quad \frac{\partial f}{\partial u}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial v}=0$$

określa zaś różniczka zupełna:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv,$$

która wobec: $\frac{\partial f}{\partial u}=0$, $\frac{\partial f}{\partial v}=0$ sprowadza się także do postaci:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$

jest więc taką samą, jak dla powierzchni: $f(x, y, z, u, v)$ o stałej wartości parametrów u i v.

Płaszczyzna styczna w punkcie powierzchni granicznej, leżącym na pewnej powierzchni danego układu powierzchni, wpada więc w płaszczyznę styczną w tym punkcie do tejże powierzchni układu.

Powierzchnia graniczna obwija więc podwójnie nieskończony układ powierzchni, dotykając się każdej z nich w pewnym punkcie.

7. Przykład. Powierzchnia graniczna podwójnie nieskończonego układu płaszczyzn ma w ogólności równania kształtu:

$$z=ux+vy+\varphi(u, v), \quad 0=x+\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \quad 0=y+\frac{\partial\varphi}{\partial v}, \tag{12}$$

z których po wyrugowaniu parametrów u i v wypływa równanie tej powierzchni w postaci: $F(x, y, z)=0$.

Kształt tej powierzchni zależy od kształtu funkcyi $\varphi(u, v)$. Przyjmijmy, że: $\varphi(u, v)=\sqrt{a^2u^2+b^2v^2+c^2}$, natenczas odnośna powierzchnia graniczna otrzymuje równania

$$z=ux+vy+\sqrt{a^2u^2+b^2v^2+c^2}, \quad 0=x+\frac{a^2u}{\sqrt{a^2u^2+b^2v^2+c^2}}, \quad 0=y+\frac{b^2v}{\sqrt{a^2u^2+b^2v^2+c^2}}.$$

Wstawiwszy w pierwszem z tych równań w miejsce x i y wartości, wypływające z drugiego i trzeciego równania, otrzymujemy:

$$z=-\frac{a^2u^2+b^2v^2}{\sqrt{a^2u^2+b^2v^2+c^2}}+\sqrt{a^2u^2+b^2v^2+c^2}, \quad \text{zatem:} \quad z=\frac{c^2}{\sqrt{a^2u^2+b^2v^2+c^2}}.$$

Spółrzędne punktów szukanej powierzchni granicznej określone są więc trzema równaniami kształtu:

$$x=-\frac{a^2u}{\sqrt{a^2u^2+b^2v^2+c^2}}, \quad y=-\frac{b^2v}{\sqrt{a^2u^2+b^2v^2+c^2}}, \quad z=\frac{c^2}{\sqrt{a^2u^2+b^2v^2+c^2}},$$

z których możemy z łatwością wyrugować oba parametry zmienne u i v. Mianowicie otrzymujemy stąd równanie:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

cechujące ellipsoidę jako szukaną powierzchnię graniczną.

8. Równania powierzchni w spółrzędnych płaszczyzny. Plücker był pierwszy, który okazał, że wszelką powierzchnię możemy przedstawić jako powierzchnię graniczną jej płaszczyzn stycznych.

Niech będzie daną powierzchnia, określona równaniem:

$$f(x, y, z)=0.$$

Równanie płaszczyzny stycznej w pewnym punkcie $P(x, y, z)$ tej powierzchni:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial f}{\partial z}(Z-z)=0,$$

możemy sprowadzić do postaci Plückerowskiej:

$$ux+vy+wz=1,$$

w której spółczynniki u, v, w, zwane spółrzędnemi płaszczyzny, otrzymują wartości:

$$u=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}},\quad v=\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}},\quad w=\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}} \qquad (13)$$

przyczem $f(x, y, z)=0$.

Wyrugowawszy z tych czterech równań spółrzędne x, y, z punktów powierzchni, otrzymamy równanie tej powierzchni w spółrzędnych u, v, w jej płaszczyzn stycznych, w postaci:

$$F(u, v, w)=0.$$

9. Przykład. Równanie ellipsoidy w spółrzędnych jej płaszczyzn stycznych. Z równania ellipsoidy w spółrzędnych punktu: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ otrzymujemy równanie jej płaszczyzny stycznej w postaci:

$$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}+\frac{Zz}{c^2}-1=0.$$

Spółrzędne (u, v, w) płaszczyzny stycznej w punkcie (x, y, z) tejże ellipsoidy określone są zatem wzorami:

$$u=\frac{x}{a^2},\qquad v=\frac{y}{b^2},\qquad w=\frac{z}{c^2},$$

z których otrzymujemy:

$$\frac{x^2}{a^2}=a^2u^2,\quad \frac{y^2}{b^2}=b^2v^2,\quad \frac{z^2}{c^2}=c^2w^2,$$

zatem równanie ellipsoidy w spółrzędnych jej płaszczyzn stycznych w postaci:

$$a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2=1.$$

10. Powierzchnie spodkowe danej powierzchni. Niech będzie daną powierzchnia $F(x, y, z)=0$ i dany punkt O w przestrzeni. Wykreślmy z punktu O prostą prostopadłą do jakiejkolwiek płaszczyzny stycznej do danej powierzchni, natenczas spodki tych prostopadłych, wyznaczone na poszczególnych płaszczyznach stycznych, utworzą nową powierzchnię powstałą z danej powierzchni, zwaną powierzchnią spodkową danej powierzchni.

Przyjmijmy stały punkt O w początku układu i oznaczmy przez u, v, w spółrzędne płaszczyzny stycznej do danej powierzchni: $F(x, y, z)=0$, natenczas równanie tej płaszczyzny możemy napisać w postaci:

$$ux+vy+wz=1.$$

Prosta prostopadła do tej płaszczyzny, wychodząca z początku układu, przebija tę płaszczyznę w punkcie x, y, z, którego spółrzędne czynią zadość relacyom:

$$\frac{x}{u}=\frac{y}{v}=\frac{z}{w},$$

z których, na podstawie twierdzeń o równych stosunkach, otrzymujemy:

$$\frac{x}{u}=\frac{y}{v}=\frac{z}{w}=\frac{x^2+y^2+z^2}{ux+vy+wz}=\frac{x^2+y^2+z^2}{1},$$

a zarazem:

$$\frac{x}{u}=\frac{y}{v}=\frac{z}{w}=\frac{ux+vy+wz}{u^2+v^2+w^2}=\frac{1}{u^2+v^2+w^2},$$

a stąd wzory:

$$u=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \quad v=\frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \quad w=\frac{z}{x^2+y^2+z^2},$$

a zarazem:

$$x=\frac{u}{u^2+v^2+w^2}, \quad y=\frac{v}{u^2+v^2+w^2}, \quad z=\frac{w}{u^2+v^2+w^2},$$

wykazujące zależność między spółrzędnemi płaszczyzn, a spółrzędnemi punktów, w których proste wyprowadzone z początku układu prostopadle do tych płaszczyzn, je przebijają.

Mając więc daną powierzchnię określoną równaniem w spółrzędnych jej płaszczyzn stycznych w postaci:

$$F(u, v, w)=0,$$

trzymamy równanie jej powierzchni spodkowej w postaci:

$$F\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)=0. \tag{14}$$

Nawzajem jeżeli punkt $P(x, y, z)$ opisuje powierzchnię $F(x, y, z)=0$ natenczas płaszczyzna poprowadzona przez punkt P prostopadle do promienia OP obwija powierzchnię, której równanie w spółrzędnych płaszczyzny przedstawia się w postaci:

$$F\left(\frac{u}{u^2+v^2+w^2}, \frac{v}{u^2+v^2+w^2}, \frac{w}{u^2+v^2+w^2}\right)=0. \tag{15}$$

Z danej powierzchni możemy wyprowadzić kolejno szereg powierzchni, jako powierzchni spodkowych, które nazywamy powierzchniami spodkowemi wyższych rzędów, kolejno pierwszą, drugą, ..., n-tą spodkową. Naodwrót nazywamy powierzchnię obwiednią płaszczyzn stycznych wykreślonych w końcach promieni wodzących poszczególnych punktów danej powierzchni spodkową ujemną, odróżniając kolejno spodkowe ujemne pierwszą, drugą, .., n-tą, spodkową ujemną.

11. Przykład. Spodkowa dodatnia i ujemna ellipsoidy. Stosując powyższe postępowanie do ellipsoidy:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

czyli:

$$a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2=1,$$

otrzymamy równanie powierzchni spodkowej danej ellipsoidy w postaci:

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=(x^2+y^2+z^2)^2.$$

Jeżeli zaś punkt $P(x, y, z)$ opisuje ellipsoidę: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, natenczas płaszczyzna prostopadła w P do promienia OP obwija powierzchnię, określoną w spółrzędnych płaszczyzny równaniem:

$$\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}=(u^2+v^2+w^2)^2.$$

12. Powierzchnie równoległe do danej powierzchni. Powierzchnia graniczna podwójnie nieskończonego układu kul o stałym promieniu r, których środki leżą na danej powierzchni, ma od tej powierzchni zawsze jednakową odległość r, nazywamy ją przeto powierzchnią równoległą do danej powierzchni.

Wszelka powierzchnia ma nieskończenie wiele (∞^1) powierzchni równoległych, gdyż promień r może przybierać nieskończenie wiele wartości.

Powierzchnie równoległe do płaszczyzny są płaszczyznami, powierzchnie równoległe do kuli są kulami z nią spółśrodkowemi.

Powierzchnia, równoległa do powierzchni: $z=f(x, y)$ w odstępie r, określona jest trzema równaniami:

$$[x-\xi]^2+[y-\eta]^2+[z-f(\xi, \eta)]^2=r^2,$$

$$[x-\xi]-[z-f(\xi, \eta)]\frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \xi}=0,$$

$$[y-\eta]-[z-f(\xi, \eta)]\frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \eta}=0,$$

o dwu zmiennych parametrach ξ i η.

Powierzchnię równoległą do danej powierzchni możemy także określić jako powierzchnię, którą podwójnie nieskończony układ normalnych w poszczególnych punktach powierzchni przecina pod kątem prostym.

Cwiczenia LIV.

1) Wykazać, że równanie:

$$z^2=[\sqrt{x^2+y^2}-a][b-\sqrt{x^2+y^2}]$$

przedstawia powierzchnię powstałą przez obrót koła około linii prostej leżącej na płaszczyźnie tego koła

2) Wykazać, że powierzchnia: $x^2+y^2+z^2-3xyz=r^3$ jest powierzchnią obrotową, której oś obrotowa jest określona równaniami: $x=y=z$.

3) Wykazać, że krzywa zwężenia hiperboloidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ jest jej przekrojem z powierzchnią:

$$\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)^2\frac{a^2}{x^2}+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)^2\frac{b^2}{y^2}=\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)^2\frac{c^2}{z^2}.$$

4) Wykazać, że ogólne równanie powierzchni obrotowych, których osią obrotu jest oś z-ów, możemy przedstawić w postaci trzech równań:

$$x=u\cos v, \quad y=u\sin v, \quad z=f(u),$$

o dwu dowolnych parametrach u i v.

5) Wykazać, że w każdej powierzchni obrotowej normalna w danym punkcie powierzchni spada z normalną linii południkowej tego punktu.

6) Wykazać, że w każdym punkcie powierzchni obrotowej jeden z głównych promieni krzywizny jest równy promieniowi krzywizny południka, a drugi równy odcinkowi normalnej, zawartemu między tym punktem a osią obrotu.

7) Wykazać, że równania:

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = \varphi(u) + av,$$

o zmiennych parametrach u i v przedstawiają powierzchnię śrubową.

8) Kule o stałym promieniu r przechodzą przez początek układu, znaleźć powierzchnię obwiednią stożków wychodzących z punktu $S(a, b, c)$, a stycznych do tychże kul.

9) Kula: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz=0$ przecina inną kulę, przechodzącą przez początek układu a mającą środek na ellipsoidzie: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; wykazać, że obwiednia płaszczyzn przecięcia się tworzy powierzchnię: $\frac{1}{ax}+\frac{1}{by}+\frac{1}{cz}=0$.

10) Dane są dwie parabole:

$$C_1(z^2=4ax,\ y=0), \quad C_2(y^2=4a'x,\ z=0),$$

znaleźć obwiednią płaszczyzn stycznych do tychże parabol.

11) Wyznaczyć powierzchnię, powstałą przez ruch kuli, która ma środek na powierzchni paraboloidy: $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=2x$, a promień równy odległości tego punktu od pewnej stałej płaszczyzny prostopadłej do osi tej paraboloidy.

12) Wyznaczyć obwiednią ellipsoid o stałej objętości, których jedna oś rośnie nieograniczenie, a przekroje zawierające dwie inne osie są ellipsami podobnemi

13) Znaleźć obwiednią płaszczyzny: $ux+vy+wz=1$, jeżeli zmienne parametry u, v, w czynią zadość równaniom:

$$au+bv+cw=1, \quad a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2=1.$$

14) Wykazać, że obwiednią płaszczyzn:

$$\frac{x}{\sin\varphi\cos\psi}+\frac{y}{\sin\varphi\sin\psi}+\frac{z}{\cos\varphi}=a$$

jest powierzchnia: $x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3}=a^{2/3}$.

15) Wykazać, że obwiednią płaszczyzn: $Ax+By+Cz=D$, których spółczynniki czynią zadość równaniom:

$$A+B+C=0, \quad A^2+B^2+C^2=1,$$

jest walec drugiego rzędu:

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=3a^2.$$

16) Wyznaczyć obwiednią płaszczyzn:

$$\frac{x}{a}\cos(\varphi-\psi)+\frac{y}{b}\sin(\varphi-\psi)+\frac{z}{c}\sin(\varphi+\psi)=\sin(\varphi-\psi),$$

gdzie φ i ψ są dowolne parametry.

Wyprowadzić równania w spółrzędnych u, v, w płaszczyzn stycznych dla następujących powierzchni drugiego rzędu:

17) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$ 18) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$ 19) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$

20) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z.$ 21) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z.$

22) Wykazać, że płaszczyzna ruchoma odcinająca ze stożka: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ stałą objętość obwija hiperboloidę o dwu powłokach, której równanie w spółrzędnych u, v, w płaszczyzny ma kształt: $c^2w^2-a^2u^2-b^2v^2=1$.

23) Wykazać, że równanie w spółrzędnych u, v, w płaszczyzny kształtu:

$$\frac{u^2}{a^2+\lambda}+\frac{v^2}{b^2+\lambda}+\frac{w^2}{c^2+\lambda}=1,$$

gdzie λ jest dowolnym parametrem, przedstawia układ powierzchni drugiego rzędu, mających te same przekroje kołowe.

24) Wyprowadzić równanie powierzchni spodkowej dla ellipsoidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, jeżeli prostopadłe do jej płaszczyzn stycznych wychodzą z początku układu.

25) Wyprowadzić równanie powierzchni, której powierzchnią spodkową ze względu na początek układu jest ellipsoida: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

26) Wyprowadzić równanie powierzchni spodkowej, odpowiadającej początkowi układu, jeżeli płaszczyzny przechodzą przez dany punkt (a, b, c) przestrzeni.

27) Wyprowadzić równanie powierzchni, jaką obwija płaszczyzna, której spodkową jest płaszczyzna: $ax+by+cz=1$.

28) Znaleźć miejsce spodka prostopadłej z początku układu do powierzchni $By^2+Cz^2=x$.

29) Wyprowadzić równanie pierścienia kołowego w takiem położeniu, że oś obrotu koła o promieniu a wpada w oś OZ, a środek leży na płaszczyźnie XOY w odległości c.

30) Koło o promieniu r porusza się tak, że jego środek opisuje krzywą: $x=\varphi(z)$; $y=\psi(z)$, a jego płaszczyzna pozostaje stale równoległą do płaszczyzny XOY. Wyprowadzić równanie powierzchni powstałej przez tenże ruch koła.

31) Jaką powierzchnię opisuje koło o promieniu r, poruszające się równolegle do płaszczyzny XOY, jeżeli jego środek opisuje linię śrubową:

$$x=a\cos\frac{z}{na},\quad y=a\sin\frac{z}{na}.$$

32) Wyprowadzić równanie powierzchni powstałej przez obrót krzywej:

$$C_2[az^2+bx^2+2cx+d=0,\quad y=0] \text{ około osi } OZ.$$

33) Wyprowadzić równanie powierzchni obrotowej powstałej przez obrót hiperboli równobocznej ($xz=a^2$, $y=0$) około jednej z jej asymptot.

34) Wykazać, że równanie: $z=a.r.\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}+\varphi(x^2+y^2)$ przedstawia ogólną powierzchnię śrubową, której osią jest oś z ów.

35) Wyprowadzić równanie powierzchni śrubowej powstałej przez ruch śrubowy koła $K[(x-a)^2+z^2=r^2,\ y=0]$ około osi OZ.

Rozwiązania LIV. 8) $(ax+by+cz)^2=r^2[(x+a)^2+(y+b)^2+(z+c)^2]$.
10) $4x=\left(\frac{y}{\sqrt{a'}}+\frac{z}{\sqrt{a}}\right)^2$. 11) $(x+a)\left(x-a+\frac{y^2}{a+x-b}+\frac{z^2}{a+x-c}\right)=0$. 12) $(x^2+a^2y^2)^2=\frac{5^2}{z^2}$.
13) $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1\right)^2=2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$. 16) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. 17) $a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2=1$.
18) $a^2u^2+b^2v^2-c^2w^2=1$. 19) $a^2u^2-b^2v^2-c^2w^2=1$. 20) $a^2u^2+b^2v^2=-2w$. 21) $a^2u^2-b^2v^2=-2w$.
23) $(a^2+\lambda)x^2+(b^2+\lambda)y^2+(c^2+\lambda)z^2=1$. 26) $ax+by+cz=x^2+y^2+z^2$. 27) $au+bv+cw=u^2+v^2+w^2$.
28) $4(x^2+y^2+z^2)+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=0$. 29) $(x^2+y^2+z^2+c^2-a^2)^2-4c^2(x^2+y^2)=0$. 30) $[y-\psi(z)]^2+$ $+[x-\varphi(z)]^2=r^2$. 31) $x^2+y^2-2ay\sin\frac{z}{na}-2ax\cos\frac{z}{na}+a^2-r^2=0$. 32) $(az^2+by^2+bx^2+d)^2=$ $=4c^2(x^2+y^2)$. 33) $z^2(x^2+y^2)=a^4$. 35) $z=na\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}+\sqrt{r^2-x^2-y^2-a^2+2a\sqrt{y^2+x^2}}$.

Literatura. Dr. Max Simon: Analytische Geometrie des Raumes. Leipzig 1906. Gaston Darboux: Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. Paris 1887. Bürklen: Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie des Raumes. Leipzig 1906.

Tematy do rozpraw naukowych.

1. Teorya powierzchni śrubowych.
2. Powierzchnie powstałe przez ruch kuli.
3. Teorya powierzchni równoległych.

Wykład LV.

Zasady teoryi przekształcania powierzchni.

1. Powierzchnie algebraiczne. Oznaczając przez $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$ funkcye jednorodne stopnia 0, 1, 2, ..., n-go ze względu na zmienne spółrzędne x, y, z punktu powierzchni, otrzymamy ogólne równanie powierzchni algebraicznej n-go rzędu w postaci:

$$u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n=0. \tag{1}$$

Równanie to zawiera w ogólności $\binom{n+3}{3}$ spółczynników dowolnych, z czego wynika, że do wyznaczenia pewnej powierzchni n-go rzędu potrzeba w ogólności znać $\nu=\binom{n+3}{3}-1$ punktów w przestrzeni, należących do tej powierzchni. W szczególnych przypadkach jest ta ilość niewystarczającą.

Niech będą bowiem dane dwie powierzchnie n-go rzędu: $F_n=0$, $F'_n=0$, natenczas równanie: $F_n+\lambda F'_n=0$,
o dowolnym parametrze λ, przedstawia układ powierzchni n-go rzędu, przechodzących przez punkta wspólne obu powierzchniom: $F_n=0$ i $F'_n=0$. Te wspólne punkta utworzą krzywą przestrzenną n^2-go rzędu, jako przekrój dwu powierzchni n-go rzędu, z czego wynika, że zagadnienie wyznaczenia powierzchni n-go rzędu któraby przechodziła przez dane $\nu=\binom{n+3}{3}-1$ punktów, staje się nieoznaczonem, gdy dane punkty leżą na krzywej przestrzennej n^2-go rzędu.

2. Układy liniowe powierzchni. Z danych dwu powierzchni n-go rzędu $F=0$, $\Phi=0$, otrzymamy nieskończony układ powierzchni, przechodzących przez ich wspólną krzywą przekroju, określony równaniem:

$$F+\lambda\Phi=0. \tag{2}$$

Układ taki nazywamy l i n i o w y m u k ł a d e m p i e r w s z e g o s t o p n i a, utworzonym z dwu danych powierzchni. Przez każdy punkt w przestrzeni przechodzi jedna powierzchnia tego układu.

Z danych trzech powierzchni n-go rzędu: $F=0$, $\Phi=0$, $\Psi=0$, otrzymamy układ n^2 powierzchni, przechodzących przez punkta wspólne danym trzem powierzchniom, określony równaniem:

$$F+\lambda\Phi+\mu\Psi=0. \tag{3}$$

Taki układ powierzchni nazywamy l i n i o w y m u k ł a d e m d r u g i e g o s t o p n i a. Równanie tego układu powierzchni zawiera dwie stałe

dowolne λ i μ, a więc przez każde dwa punkta przestrzeni przechodzi jedna powierzchnia tego układu.

Podobnie możemy utworzyć z czterech powierzchni $F_1=0$, $F_2=0$, $F_3=0$, $F_4=0$ układ liniowy trzeciego stopnia, określony równaniem:

$$F_1+\lambda F_2+\mu F_3+\nu F_4=0, \tag{4}$$

a każda z powierzchni tego układu wyznaczona jest trzema dowolnymi punktami przestrzeni.

Rozważania te możemy odnieść do układów liniowych dowolnego stopnia. W szczególności nazywamy układ liniowy powierzchni przechodzących przez jeden i ten sam punkt wiązką, a układ liniowy powierzchni, przechodzących przez tę samą parę punktów nazywamy pękiem powierzchni.

3. Przez stosowne połączenia powierzchni, należących do dwu różnych układów liniowych, możemy utworzyć nowe powierzchnie, jako miejsce geometryczne wszystkich tych krzywych, podług których przecinają się odpowiednie pary powierzchni dwu różnych układów.

Tak otrzymamy np. z dwu układów liniowych pierwszego stopnia:

$$F^{(n)}+\lambda\Phi^{(n)}=0, \quad F^{(p)}+\lambda\Phi^{(p)}=0,$$

z których jeden utworzony jest z powierzchni n-go rzędu, drugi z powierzchni p-go rzędu, powierzchnię algebraiczną $(n+p)$-go rzędu, której równanie wskutek wyrugowania parametru przedstawi się w postaci:

$$\begin{vmatrix} F^{(n)}, & \Phi^{(n)} \\ F^{(p)}, & \Phi^{(p)} \end{vmatrix}=0. \tag{5}$$

Powierzchnia ta zawiera widocznie obie krzywe podstawowe danych dwu układów powierzchni.

W szczególności otrzymujemy przez połączenie danych jednokreślnych dwu pęków płaszczyzn: $E_1+\lambda E_2=0$, $E_3+\lambda E_4=0$ powierzchnię prostokreślną drugiego rzędu, określoną równaniem:

$$\begin{vmatrix} E_1, & E_2 \\ E_3, & E_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1x+B_1y+C_1z+D_1, & A_2x+B_2y+C_2z+D_2 \\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3, & A_4x+B_4y+C_4z+D_4 \end{vmatrix}=0.$$

4. Rząd i klasa powierzchni algebraicznych. Stopień równania powierzchni w spółrzędnych jej punktów nazywamy rzędem, a stopień jej równania w spółrzędnych jej płaszczyzn stycznych nazywamy klasą powierzchni.

Jeżeli równanie powierzchni w spółrzędnych punktu w postaci: $f(x, y, z)=0$ jest równaniem n-go stopnia, wtedy są pochodne: $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ funkcyami $(n-1)$-go stopnia. Związki między współrzędnemi (x, y, z) punktu na powierzchni, a spółrzędnemi (u, v, w) płaszczyzny stycznej w tym punkcie, określone stosunkami:

$$\frac{u}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{v}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{w}{\frac{\partial f}{\partial z}}=-\frac{1}{x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}}, \tag{6}$$

z warunkiem $f(x, y, z)=0$, prowadzą więc celem wyrażenia spółrzędnych x, y, z przez spółrzędne u, v, w, do trzech równań, z których dwa są stopnia $(n-1)$-go, a jedno stopnia n-go. Wskutek wyrugowania zmiennych x, y, z, otrzymujemy więc ze względu na zmienne u, v, w równanie $(n-1)(n-1)n$-go czyli $n(n-1)^2$-go stopnia.

A zatem: *Równanie n-go stopnia w spółrzędnych punktu zamienia się na równanie $n(n-1)^2$-go stopnia w spółrzędnych płaszczyzny i nawzajem.*

Ztąd wniosek: *Powierzchnia n-go rzędu jest zarazem powierzchnią $n(n-1)^2$ klasy i nawzajem.*

Rząd i klasa pozostają takie same tylko przy powierzchniach drugiego rzędu. Powierzchnie drugiego rzędu są zarazem powierzchniami drugiej klasy, powierzchnie trzeciego rzędu są już w ogólności powierzchniami 12-tej klasy i t. d.

Geometrycznie rząd powierzchni wskazuje na ilość punktów, w których linia prosta przecinać może powierzchnię, klasa powierzchni wskazuje na ilość płaszczyzn stycznych do powierzchni, jakie przeprowadzić można przez daną prostą przestrzeni.

5. Powierzchnie biegunowo-wzajemne. Jeżeli dwie powierzchnie F i Φ tak są ze sobą związane, że każdemu punktowi jednej odpowiada pewna płaszczyzna styczna drugiej powierzchni, jako jego płaszczyzna biegunowa ze względu na pewną powierzchnię pomocniczą rzędu drugiego i nawzajem, natenczas powierzchnie takie nazywamy według Poncelet'a powierzchniami biegunowo-wzajemnemi.

Jeżeli powierzchnia F jest powierzchnią n go rzędu (a więc prosta przecina ją w n punktach), natenczas jej powierzchnia biegunowo-wzajemna będzie miała n płaszczyzn stycznych, przechodzących przez jedną prostą, więc będzie powierzchnią n-tej klasy, a zatem w ogólności powierzchnią: $n(n-1)^2$-go rzędu.

Powierzchnia pomocnicza drugiego rzędu, służąca do tworzenia powierzchni biegunowo-wzajemnych, może być w ogólności dowolną; przyjmijmy ją jako kulę o promieniu r, określoną równaniem:

$$x^2+y^2+z^2-r^2=0,$$

i wyznaczmy dla danej powierzchni $F(x, y, z)=0$ powierzchnię biegunowo-wzajemną. Przyjmując dowolnie punkt $P(x_1, y_1, z_1)$ na powierzchni $F(x, y, z)=0$, otrzymamy równanie płaszczyzny biegunowej tego punktu ze względu na kulę w postaci:

$$xx_1+yy_1+zz_1-r^2=0,$$

która, porównana z równaniem Plückerowskiem płaszczyzny, kształtu:

$$ux+vy+wz-1=0,$$

prowadzi do relacyj: $u=\frac{x_1}{r^2}$, $v=\frac{y_1}{r^2}$, $w=\frac{z_1}{r^2}$,

które podają spółrzędne u, v, w płaszczyzny stycznej do powierzchni biegunowo-wzajemnej z powierzchnią $F(x, y, z)=0$. Z równań tych otrzymujemy spółrzędne x_1. y_1, z_1, odpowiedniego punktu powierzchni $F(x, y, z)$, określone wzorami:

$$x_1=r^2u, \quad y_1=r^2v, \quad z_1=r^2w.$$

Wstawiwszy te wartości w równanie $F(x, y, z)=0$ powierzchni, otrzymamy równanie:

$$F(r^2u, r^2v, r^2w)=0, \tag{7}$$

przedstawiające powierzchnię biegunowo-wzajemną w spółrzędnych jej płaszczyzn stycznych. Jeżeli, nawzajem, powierzchnia dana określona jest równa-

niem: $F(u, v, w)=0$ w spółrzędnych jej płaszczyzn stycznych, natenczas jej powierzchnia biegunowo-wzajemna ze względu na kulę o promieniu r otrzymuje w spółrzędnych punktu x, y, z równanie kształtu:

$$F\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right)=0. \tag{8}$$

Przyjmując $r=1$, otrzymujemy równania:

$$F(x, y, z)=0, \quad F(u, v, w)=0, \tag{9}$$

jako równania powierzchni biegunowo-wzajemnych ze względu na kulę o promieniu 1.

A zatem: *Z równania danej powierzchni otrzymujemy wprost równanie powierzchni biegunowo-wzajemnej ze względu na kulę o promieniu równym jedności, zastępując spółrzędne punktu x, y, z przez spółrzędne u, v, w płaszczyzny i nawzajem.*

Tak otrzymamy np. powierzchnię biegunowo-wzajemną z elllipsoidą: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, określoną równaniem w spółrzędnych jej płaszczyzn stycznych: $\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}=1$, a więc równaniem kształtu:

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=1,$$

w spółrzędnych jej punktów.

6. Powierzchnie jednokreślne czyli homograficzne. Wszelkiej powierzchni $F(x, y, z)=0$ odpowiada na podstawie wzorów jednokreślności, podanych w Tomie I str. 302, art. 3, kształtu:

$$x=\frac{A_1X+B_1Y+C_1Z+D_1}{A_4X+B_4Y+C_4Z+D_4}, \quad y=\frac{A_2X+B_2Y+C_2Z+D_2}{A_4X+B_4Y+C_4Z+D_4},$$

$$z=\frac{A_3X+B_3Y+C_3Z+D_3}{A_4X+B_4Y+C_4Z+D_4},$$

nowa powierzchnia o równaniu:

$$F\left(\frac{A_1X+B_1Y+C_1Z+D_1}{A_4X+B_4Y+C_4Z+D_4}, \frac{A_2X+B_2Y+C_2Z+D_2}{A_4X+B_4Y+C_4Z+D_4}, \frac{A_3X+B_3Y+C_3Z+D_3}{A_4X+B_4Y+C_4Z+D_4}\right)=0,$$

czyli:

$$\Phi(X, Y, Z)=0,$$

która posiada tę własność, że każdemu punktowi powierzchni F, odpowiada jeden punkt powierzchni Φ i nawzajem.

Takie przekształcenie powierzchni F na powierzchnię Φ nazywamy przekształceniem jednokreślnem albo homograficznem, a odnośne powierzchnie F i Φ nazywamy powierzchniami jednokreślnemi, albo homograficznemi.

Przekształcenie homograficzne nie zmienia rzędu powierzchni. Wszelka powierzchnia homograficzna danej powierzchni drugiego rzędu staje się także powierzchnią drugiego rzędu. Możemy tedy korzystać z dowolności stałych spółczynników, występujących we wzorach jednokreślności, obierając je tak, aby dana powierzchnia pewnego np. drugiego rzędu przekształciła się na inną prostszą powierzchnię tego samego rzędu.

Chcąc np. przekształcić ellipsoidę: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ na kulę o promie-
równym jednostce, należy użyć wzorów jednokreślności w postaci:

$$x=aX,\quad y=bY,\quad z=cZ.$$

dstawiając te wartości w dane równanie ellipsoidy, otrzymamy równanie,

$$X^2+Y^2+Z^2=1,$$

więc równanie kuli, jako równanie powierzchni homograficznej.

Nawzajem możemy użyć przekształceń jednokreślnych także w tym u, aby z pewnej szczególnej prostszej powierzchni dojść do powierzchni ogólniejszej tego samego rzędu. Tym sposobem możemy za pomocą przekształ- homograficznych z własności pewnej powierzchni wyprowadzić odnośne liwie ogólniejsze własności odpowiednich powierzchni tego samego rzędu.

7. Powierzchnie jednokładne czyli homologiczne. Szczególny przypa- jednokreślności stanowi środkowa kolineacya (T. I. str. 313 art. 2), na mocy rej dwie figury środkowo-kolineacyjne mają wspólny punkt $P(x_0, y_0, z_0)$, o punkt podwójny (środek kolineacyi) i wspólną płaszczyznę punktów po- ójnych (płaszczyzna kolineacyi).

Wzory przekształceń środkowo-kolineacyjnych przedstawiają się w po- aci:

$$x-x_0=\frac{X-x_0}{AX+BY+CZ+D},\quad y-y_0=\frac{Y-y_0}{AX+BY+CZ+D},$$

$$z-z_0=\frac{Z-z_0}{AX+BY+CZ+D},$$

ie punkt $S(x_0, y_0, z_0)$ jest środkiem a płaszczyzna: $AX+BY+CZ+D=0$, aszczyzną kolineacyi, a sprowadzają się w przypadku, gdy środek kolinea- i leży w początku układu do postaci:

$$x=\frac{X}{AX+BY+CZ+D},\quad y=\frac{Y}{AX+BY+CZ+D},\quad z=\frac{Z}{AX+BY+CZ+D},$$

Podstawiając te wartości w równanie powierzchni: $F(x, y, z)=0$, otrzy- amy powierzchnię o równaniu:

$$F\left(\frac{X}{AX+BY+CZ+D},\ \frac{Y}{AX+BY+CZ+D},\ \frac{Z}{AX+BY+CZ+D}\right)=0,$$

yli:

$$\Phi(X, Y, Z)=0,$$

aną powierzchnią homologiczną z daną powierzchnią.

Stosując wzory przekształcenia homologicznego (w przypadku, gdy śro- k kolineacyi leży w początku układu) do kuli o równaniu:

$$x^2+y^2+z^2-R^2=0,$$

rzymamy równanie:

$$X^2+Y^2+Z^2-R^2(AX+BY+CZ+D)^2=0, \tag{10}$$

dstawiające powierzchnię obrotową rzędu drugiego jako powierzchnię lą homologiczną.

Powierzchnia ta przedstawia tę własność, że odległość każdego z jej nktów od początku układu pozostaje w stałym stosunku od jego odległo-

ści od płaszczyzny: $Ax+By+Cz+D=0$, początek układu jest więc jednem z jej ognisk, którego płaszczyzną kierowniczą jest płaszczyzna:

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Tym sposobem moglibyśmy użyć przekształceń homologicznych do wyprowadzania z własności kuli odpowiednich własności dla powierzchni obrotowych drugiego rzędu.

8. Przekształcenie powierzchni za pomocą promieni odwrotnych (inwersya). Przydzielmy każdemu punktowi $P(x, y, z)$ przestrzeni, mającemu odległość r od punktu układu inny punkt $P'(X, Y, Z)$ na promieniu OP tak, żeby odległość R tego nowego punktu P' od początku układu była określona równaniem:

$$R=\frac{c^2}{r}, \tag{11}$$

gdzie c jest dowolną liczbą stałą, a otrzymamy z danej powierzchni utworzonej z punktów $P(x, y, z)$ nową powierzchnię, utworzoną z punktów $P'(X, Y, Z)$. Takie przekształcenie powierzchni nazywamy przekształceniem za pomocą promieni odwrotnych, albo krótko inwersyą. Punkt O nazywamy środkiem inwersyi. Wszystkie punkta położone na kuli o promieniu c około punktu O, jako środka, spadają razem ze swymi odpowiedniemi punktami, wszystkie punkta wewnątrz tej kuli mają swe punkta odpowiednie po za nią i nawzajem; środek inwersyi jest osobliwym punktem, który ma swój punkt odpowiedni w nieskończoności.

Z warunku:

$$R=\frac{c^2}{r},$$

znajdziemy z łatwością związek między spółrzędnemi x, y, z punktu P a spółrzędnemi X, Y, Z punktu odwrotnego P' określony wzorami:

$$X=\frac{c^2x}{x^2+y^2+z^2},\quad Y=\frac{c^2y}{x^2+y^2+z^2},\quad Z=\frac{c^2z}{x^2+y^2+z^2} \tag{12}$$

i nawzajem:

$$x=\frac{c^2X}{X^2+Y^2+Z^2},\quad y=\frac{c^2Y}{X^2+Y^2+Z^2},\quad z=\frac{c^2Z}{X^2+Y^2+Z^2}. \tag{13}$$

Na podstawie tych wzorów otrzymamy z danej powierzchni $F(x, y, z)=0$ nową powierzchnię o równaniu:

$$F\left(\frac{c^2X}{X^2+Y^2+Z^2},\ \frac{c^2Y}{X^2+Y^2+Z^2},\ \frac{c^2Z}{X^2+Y^2+Z^2}\right)=0, \tag{14}$$

czyli:

$$\Phi(X, Y, Z)=0,$$

jako inwersyą danej powierzchni.

Wedle tego wypada jako inwersya płaszczyzny: $Ax+By+Cz+D=0$ kula o równaniu:

$$c^2(AX+BY+CZ)+D(X^2+Y^2+Z^2)=0,$$

która staje się tą samą płaszczyzną, gdy $D=0$.

Kuli: $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$ odpowiada jako inwersya kula o równaniu:

$$c^4+c^2(AX+BY+CZ)+D(X^2+Y^2+Z^2)=0,$$

która przechodzi w płaszczyznę, gdy $D=0$.

Linii prostej jako przekrojowi dwu płaszczyzn odpowiada tedy jako inwersya koło jako przekrój dwu kul; podobnież kołu odpowiada znowu koło. Łatwo poznać, że inwersya należy do przekształceń, przy których podobnie jak przy figurach podobnych utrzymują się kąty figur pierwotnych.

9. Równania powierzchni w spółrzędnych jednorodnych. Aby równania powierzchni uczynić jednorodnemi, wprowadzamy w miejsce spółrzędnych zwyczajnych punktu (x, y, z) lub płaszczyzny (u, v, w), t. z. spółrzędne jednorodne, któremi są spółrzędne czworościenne (x_1, x_2, x_3, x_4) punktu lub spółrzędne czworościenne (u_1, u_2, u_3, u_4) płaszczyzny (Patrz T. I. Wykład XXII) określone wzorami ogólnymi:

$$x=\frac{A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3+A_4x_4}{D_1x_1+D_2x_2+D_3x_3+D_4x_4},\qquad u=\frac{a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3+a_4u_4}{d_1u_1+d_2u_2+d_3u_3+d_4u_4},$$

$$y=\frac{B_1x_1+B_2x_2+B_3x_3+B_4x_4}{D_1x_1+D_2x_2+D_3x_3+D_4x_4},\quad \text{względnie:}\quad v=\frac{b_1u_1+b_2u_2+b_3u_3+b_4u_4}{d_1u_1+d_2u_2+d_3u_3+d_4u_4},$$

$$z=\frac{C_1x_1+C_2x_2+C_3x_3+C_4x_4}{D_1x_1+D_2x_2+D_3x_3+D_4x_4},\qquad w=\frac{c_1u_1+c_2u_2+c_3u_3+c_4u_4}{d_1u_1+d_2u_2+d_3u_3+d_4u_4},$$

lub też wzorami szczególnemi:

$$x=\frac{x_1}{x_4},\quad y=\frac{x_2}{x_4},\quad z=\frac{x_3}{x_4},\quad \text{względnie:}\quad u=\frac{u_1}{u_4},\quad v=\frac{u_2}{u_4},\quad w=\frac{u_3}{u_4}. \tag{15}$$

Z pomocą tych podstawień zamienia się równanie powierzchni n go rzędu kształtu $F(x, y, z)=0$ na równanie jednorodne kształtu: $F(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$, względnie równanie powierzchni n-tej klasy kształtu: $F(u, v, w)=0$ na równanie jednorodne kształtu: $F(u_1, u_2, u_3, u_4)=0$.

W szczególności równanie ogólne powierzchni drugiego rzędu przedstawia się w spółrzędnych jednorodnych w postaci:

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+a_{44}x_4^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{14}x_1x_4+$$
$$+2a_{23}x_2x_3+2a_{24}x_2x_4+2a_{34}x_3x_4=0,$$

a równanie powierzchni drugiej klasy w postaci:

$$A_{11}u_1^2+A_{22}u_2^2+A_{33}u_3^2+A_{44}u_4^2+2A_{12}u_1u_2+2A_{13}u_1u_3+2A_{14}u_1u_4+$$
$$+2A_{23}u_2u_3+2A_{24}u_2u_4+2A_{34}u_3u_4=0.$$

Wprowadzenie spółrzędnych jednorodnych w teoryi powierzchni rzędu drugiego nadaje odnośnym wzorom odpowiednią symetryę i umożliwia w wysokim stopniu zastosowanie odpowiednich symbolów skróconych, jest przeto szczególnie przy badaniu rzutowych własności powierzchni nadzwyczaj korzystne. Dodać przy tem należy, że możliwa dwojaka interpretacya wzorów i wyników rachunku, opartego na równaniu jednorodnem stopnia drugiego względem czterech zmiennych, polegająca na tem, że się te zmienne uważa bądź jako spółrzędne punktu, bądź jako spółrzędne płaszczyzny prowadzi jednocześnie do dwu twierdzeń dotyczących powierzchni drugiego rzędu i drugiej klasy. Wskazówki w tym kierunku znaleźć można w tomie I, w wykładach LIX i następnych, które dotyczą badania krzywych stożkowych na podstawie spółrzędnych jednorodnych punktu lub prostej.

Stosowanie spółrzędnych jednorodnych jest też wskazanie w ogólnej teoryi powierzchni n-go rzędu, jeżeli chodzi o zbadanie własności rzutowych powierzchni n-go rzędu.

10. Powierzchnie biegunowe punktu ze względu na daną powierzchnię n-go rzędu. Mając daną powierzchnię określoną równaniem w spółrzędnych jednorodnych w postaci:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$$

znajdziemy punkta, w których prosta przechodząca przez dane dwa punkta:

$$P'(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4), \quad P''(x''_1, x''_2, x''_3, x''_4)$$

przecina tę powierzchnię, określone spółrzędnemi:

$$x_1=\lambda x'_1+\mu x''_1, \quad x_2=\lambda x'_2+\mu x''_2, \quad x_3=\lambda x'_3+\mu x''_3, \quad x_3=\lambda x'_4+\mu x''_4,$$

gdzie na wyznaczenie stosunku parametrów $\lambda:\mu$ otrzymujemy jako wynik podstawienia powyższych wartości na x_1, x_2, x_3, x_4 w równanie danej powierzchni: $F_1(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$, równanie n-go stopnia w postaci:

$$F(\lambda x'_1+\mu x_1'', \lambda x'_2+\mu x''_2, \lambda x'_3+\mu x''_3, \lambda x'_4+\mu x''_4)=0.$$

Rozwijając to równanie i oznaczając znakiem Δ działanie:

$$\Delta=x'_1\frac{d}{dx_1}+x'_2\frac{d}{dx_2}+x'_3\frac{d}{dx_3}+x'_4\frac{d}{dx_4},$$

możemy powyższe równanie przedstawić w postaci:

$$\lambda_n F+\lambda^{n-1}\mu\Delta F+\frac{1}{2!}\lambda^{n-2}\mu^2\Delta^2 F+\ldots=0. \qquad (16)$$

Otóż powierzchnię określoną równaniem:

$$x'_1\frac{dF}{dx_1}+x'_2\frac{dF}{dx_2}+x'_3\frac{dF}{dx_3}+x'_4\frac{dF}{dx_4}=0, \qquad (17)$$

nazywamy p i e r w s z ą p o w i e r z c h n i ą b i e g u n o w ą p u n k t u (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) ze względu na daną powierzchnię $F=0$; powierzchnię określoną równaniem:

$$\left(x'_1\frac{d}{dx_1}+x'_2\frac{d}{dx_2}+x'_3\frac{d}{dx_3}+x'_4\frac{d}{dr_4}\right)^2 F=0, \qquad (18)$$

nazywamy znowu d r u g ą p o w i e r z c h n i ą b i e g u n o w ą p u n k t u (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4), ogólnie powierzchnię określoną równaniem:

$$\left(x'_1\frac{d}{dx_1}+x'_2\frac{d}{dx_2}+x'_3\frac{d}{dx_3}+x'_4\frac{d}{dx_4}\right)^r F=0, \qquad (19)$$

nazywamy r-tą powierzchnią biegunową punktu (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) ze względu na daną powierzchnię: $F(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$.

Równanie r-tej powierzchni biegunowej punktu (x'_i) jest równaniem jednorodnem r-go stopnia ze względu na spółrzędne tego punktu, zwanego b i e g u n e m, a zarazem równaniem $(n-r)$-go stopnia ze wzglęgu na spółrzędne zmienne punktów r-tej powierzchni biegunowej.

11. Płaszczyzna styczna jako pierwsza powierzchnia biegunowa punktu na danej powierzchni. Jeżeli punkt $P(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$ leży na powierzchni: $F(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$, tedy linia prosta, przechodząca przez punkt $P'(x_i)$ przecina powierzchnię $F=0$ w dwu punktach, wpadających w punkt $P'(x'_i)$, jeżeli obok spółczynnika F' przy λ^n także spółczynnik przy $\lambda^{n-1}\mu$ w równaniu (16) staje się zerem, co się stanie skoro:

$$x_1\frac{dF}{dx'_1}+x_2\frac{dF}{dx'_2}+x_3\frac{dF}{dx'_3}+x_4\frac{dF}{dx'_4}=0, \qquad (20)$$

a to równanie jest równaniem płaszczyzny stycznej w punkcie $P(x'_i)$ powierzchni $F(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$.

12. Druga powierzchnia biegunowa punktu parabolicznego na płaszczyźnie i powierzchnia Hessego. Linia prosta przechodząca przez punkt $P'(x_i')$ powierzchni $F(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$ przecina powierzchnię w trzech punktach po sobie następujących, jeżeli w równaniu (16) oprócz spółczynnika przy λ^n i $\lambda^{n-1}\mu$ znika także spółczynnik przy $\lambda^{n-2}\mu^2$, linia prosta leży tedy nie tylko na płaszczyźnie, lecz także na powierzchni biegunowej drugiego rzędu:

$$\left(x_1\frac{d}{dx'_1}+x_2\frac{d}{dx'_2}+x_3\frac{d}{dx'_3}+x_4\frac{d}{dx'_4}\right)^2F=0, \qquad (21)$$

która jest powierzchnią stożkową.

Punkta tego rodzaju są punktami parabolicznemi powierzchni (punktami przegięcia w odnośnym przekroju), a wyróżnik:

$$\sum\pm\frac{\partial^2F}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2F}{\partial x_2^2}\cdot\frac{\partial^2F}{\partial x_3^2}\cdot\frac{\partial^2F}{\partial x_4^2},$$

równania $F=0$ położony równym zeru, przedstawia powierzchnię $4(n-2)$-go rzędu:

$$H(x_1, x_2, x_3, x_4)=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2F}{\partial x_1^2}, & \frac{\partial^2F}{\partial x_1\partial x_2}, & \frac{\partial^2F}{\partial x_1\partial x_3}, & \frac{\partial^2F}{\partial x_1\partial x_4} \\ \frac{\partial^2F}{\partial x_1\partial x_2}, & \frac{\partial^2F}{\partial x_2^2}, & \frac{\partial^2F}{\partial x_2\partial x_3}, & \frac{\partial^2F}{\partial x_2\partial x_4} \\ \frac{\partial^2F}{\partial x_1\partial x_3}, & \frac{\partial^2F}{\partial x_2\partial x_3}, & \frac{\partial^2F}{\partial x_3^2}, & \frac{\partial^2F}{\partial x_3\partial x_4} \\ \frac{\partial^2F}{\partial x_1\partial x_4}, & \frac{\partial^2F}{\partial x_2\partial x_4}, & \frac{\partial^2F}{\partial x_3\partial x_4}, & \frac{\partial^2F}{\partial x_4^2} \end{vmatrix}=0, \qquad (22)$$

której przekrój z daną powierzchnią daje krzywą $4n(n-2)$-go rzędu, jako miejsce geometryczne punktów parabolicznych danej powierzchni. Powierzchnię $H(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$ nazywamy powierzchnią wyznacznikową, albo powierzchnią Hessego, odpowiadającą danej powierzchni.

Jeżeli powierzchnia określona jest równaniem zwyczajnem kształtu: $F(x, y, z)=0$, wtedy otrzymujemy równanie powierzchni Hessego w postaci:

$$H(x, y, z)=\begin{vmatrix} F_{11}, & F_{12}, & F_{13}, & F_1 \\ F_{21}, & F_{22}, & F_{23}, & F_2 \\ F_{31}, & F_{32}, & F_{33}, & F_3 \\ F_1, & F_2, & F_3 & 0 \end{vmatrix}=0, \qquad (23)$$

gdzie:

$$F_1=\frac{\partial F}{\partial x},\quad F_2=\frac{\partial F}{\partial y},\quad F_3=\frac{\partial F_3}{\partial z},\quad F_{11}=\frac{\partial^2F}{\partial x^2},\quad F_{22}=\frac{\partial^2F}{\partial y^2},\quad F_{33}=\frac{\partial^2F}{\partial z^2},$$

$$F_{12}=F_{21}=\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y},\quad F_{13}=F_{31}=\frac{\partial^2F}{\partial x\partial z},\quad F_{23}=F_{32}=\frac{\partial^2F}{\partial y\partial z}.$$

Krzywa punktów parabolicznych występuje tu jako przekrój powierzchni $F(x, y, z)=0$ z powierzchnią $H(x, y, z)=0$.

Dla powierzchni określonej równaniem $z=f(x, y)$ otrzymamy powierzchnię Hessego, określoną równaniem: $rt-s^2=0$, czyli:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2=0, \qquad (24)$$

a miejsce geometryczne punktów parabolicznych powierzchni $z=f(x, y)$ określone jest równaniami:

$$z=f(x, y), \quad rt-s^2=0.$$

Ćwiczenia LV.

1) Wykazać, że równanie powierzchni drugiego rzędu:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0,$$

wyrażone w spółrzędnych u, v, w płaszczyzny możemy sprowadzić do postaci:

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & u \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24}, & v \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33}, & a_{34}, & w \\ a_{14}, & a_{24}, & a_{34}, & a_{44}, & 1 \\ u, & v, & w, & 1, & 0 \end{vmatrix}=0.$$

2) Wykazać, że równanie powierzchni drugiej klasy kształtu:

$$A_{11}u^2+A_{22}v^2+A_{33}w^2+2A_{12}uv+2A_{13}uw+2A_{23}vw+2A_{14}u+2A_{24}v+2A_{34}w+A_{44}=0,$$

wyrażone w spółrzędnych x, y, z punktu można sprowadzić do postaci:

$$\begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12}, & A_{13}, & A_{14}, & x \\ A_{12}, & A_{22}, & A_{23}, & A_{24}, & y \\ A_{13}, & A_{23}, & A_{33}, & A_{34}, & z \\ A_{14}, & A_{24}, & A_{34}, & A_{44}, & 1 \\ x, & y, & z, & 1 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

3) Wykazać, że ogólna powierzchnia drugiej klasy:

$$A_{11}u^2+A_{22}v^2+A_{33}w^2+2A_{12}uv+2A_{13}uw+2A_{23}vw++2A_{14}u+2A_{24}v+2A_{34}w+A_{44}=0,$$

staje się krzywą drugiej klasy, skoro spełni się warunek:

$$\begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12}, & A_{13}, & A_{14} \\ A_{12}, & A_{22}, & A_{23}, & A_{24} \\ A_{13}, & A_{23}, & A_{33}, & A_{34} \\ A_{14}, & A_{24}, & A_{34}, & A_{44} \end{vmatrix}=0.$$

4) Wykazać, że powierzchnia biegunowo-wzajemna powierzchni drugiego rzędu ze względu na powierzchnię pomocniczą tego samego rzędu jest także powierzchnią drugiego rzędu.

5) Wyprowadzić równania powierzchni biegunowo-wzajemnych ze względu na kulę o promieniu $r=1$, odpowiadających powierzchni drugiego rzędu kształtu:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+D=0.$$

6) Wykazać, że powierzchnia biegunowo-wzajemna kuli:

$$(x+\xi)^2+y^2+z^2-R^2=0,$$

ze względu na kulę: $x^2+y^2+z^2-1=0$, otrzymuje równanie:

$$(R^2+\xi^2)x^2+R^2(y^2+z^2)-2\xi x-1=0,$$

jest więc powierzchnią obrotową drugiego rzędu.

7) Wykazać, że powierzchnia biegunowo-wzajemna wszelkiej kuli (ze względu na kulę pomocniczą $r=1$) jest powierzchnią obrotową drugiego rzędu.

8) Wykazać, że powierzchnia biegunowo-wzajemna (ze względu na kulę o promieniu $r=1$) wszelkiej powierzchni obrotowej drugiego rzędu jest ogólną powierzchnią drugiego rzędu.

9) Wykazać, że przekształcenie homograficzne nie zmienia rzędu powierzchni.

10) Wykazać, że w dwu powierzchniach homograficznych stosunek odległości dwu punktów jednej powierzchni od dowolnej płaszczyzny pozostaje w stałym stosunku do stosunku odległości odpowiednich dwu punktów drugiej powierzchni od płaszczyzny homograficznej.

11) Wykazać, że w dwu powierzchniach homograficznych stosunek odległości dowolnego punktu jednej powierzchni od dwu stałych płaszczyzn, pozostaje w stałym stosunku do stosunku odległości punktu odpowiedniego drugiej powierzchni od odpowiednich stałych dwu płaszczyzn homograficznych.

12) Wykazać, że dwie powierzchnie homologiczne drugiego rzędu przecinają się podług dwu krzywych płaskich, z których jedna leży na płaszczyźnie kolineacyi.

13) Wykazać, że dwie powierzchnie drugiego rzędu wpisane w ten sam stożek drugiego rzędu są powierzchniami homologicznemi.

14) Znaleźć punkta, w których prosta łącząca dwa punkty określone spółrzędnemi jednorodnemi:

$$P_1(x'_1,\ x'_2,\ x'_3,\ x'_4),\quad P_2(x''_1,\ x''_2,\ x''_3,\ x''_4)$$

przecina powierzchnię drugiego rzędu: $f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=0$.

15) Wyprowadzić warunek, pod jakim punkta przecięcia się prostej, łączącej punkta: $P'(x'_1,\ x'_2,\ x'_3,\ x'_4)$ i $P''(x''_1,\ x''_2,\ x''_3,\ x''_4)$, z powierzchnią drugiego rzędu: $f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=0$ są harmonicznie sprzężone z parą punktów P' i P''.

16) Wykazać, że płaszczyzna biegunowa punktu: $P'(x'_1,\ x'_2,\ x'_3,\ x'_4)$ względem powierzchni drugiego rzędu: $f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ określa się równaniem:

$$x_1 f'_1+x_2 f'_2+x_3 f'_3+x_4 f'_4=0.$$

17) Wykazać, że pary punktów sprzężonych względem danej powierzchni drugiego rzędu: $f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=0$, leżące na jednej prostej, tworzą inwolucyę, której punktami podwójnymi są punkty przecięcia się tej prostej z daną powierzchnią.

18) Wykazać, że płaszczyzna styczna w punkcie $P(x'_1,\ x'_2,\ x'_3,\ x'_4)$ powierzchni drugiego rzędu: $f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=0$ określa się równaniem jednorodnem:

$$x_1 f'_1+x_2 f'_2+x_3 f'_3+x_4 f'_4=0.$$

19) Wykazać, że stożek styczny do powierzchni drugiego rzędu: $f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=0$ o wierzchołku: $S(x'_1,\ x'_2,\ x'_3,\ x'_4)$ określa się równaniem:

$$f'\cdot f-(x_1 f'_1+x_2 f'_2+x_3 f'_3+x_4 f'_4)^2=0.$$

20) Znaleźć płaszczyzny przechodzące przez prostą występującą jako przekrój dwu płaszczyzn E' i E'' danych w spółrzędnych jednorodnych $E'(u'_1,\ u'_2,\ u'_3,\ u'_4)$, $E''(u''_1,\ u''_2,\ u''_3,\ u''_4)$, a stycznych do powierzchni drugiej klasy: $F(u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4)=0$.

21) Wyprowadzić warunek, pod jakim płaszczyzny styczne do powierzchni drugiej klasy: $F(u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4)=0$, przesunięte przez krawędź przecięcia się dwu płaszczyzn: $E'(u'_1,\ u'_2,\ u'_3,\ u'_4)$, $E''(u''_1,\ u''_2,\ u''_3, u'')$ są harmonicznie sprzężone z parą płaszczyzn E', E''.

22) Wykazać, że biegun płaszczyzny $E'(u'_1,\ u'_2,\ u'_3,\ u'_4)$ względem powierzchni drugiej klasy: $F(u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4)=0$ określa się równaniem jednorodnem:

$$u_1 F'_1+u_2 F'_2+u_3 F'_3+u_4 F'_4=0.$$

23) Wykazać, że punkt styczności płaszczyzny: $E'(u'_1,\ u'_2,\ u'_3,\ u'_4)$ stycznej do powierzchni drugiej klasy: $F(u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4)=0$ określa się równaniem jednorodnem:

$$u_1 F'_1+u_2 F'_2+u_3 F'_3,+u_4 F'_4=0.$$

24) Wykazać, że powierzchnia drugiego rzędu opisana na czworościanie odniesienia otrzymuje równanie jednorodne:

$$a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3+a_{14}x_1x_4+a_{23}x_2x_3+a_{24}x_2x_4+a_{34}x_3x_4=0.$$

25) Wykazać, że powierzchnia drugiej klasy wpisana w czworościan odniesienia otrzymuje równanie jednorodne:

$$A_{12}u_1u_2+A_{13}u_1u_3+A_{14}u_1u_4+A_{23}u_2u_3+A_{24}u_2u_4+A_{34}u_3u_4=0.$$

26) Wyznaczyć rodzaj powierzchni drugiego rzędu, określonej równaniem jednorodnem kształtu:

$$a_{11}x^2_1+a_{22}x^2_2+a_{33}x^2_3+a_{44}x^2_4=0.$$

27) Wyznaczyć rodzaj powierzchni drugiej klasy, określonej równaniem jednorodn

$$A_{11}u^2_1+A_{22}u^2_2+A_{33}u^2_3+A_{44}u^2_4=0.$$

28) Wykazać, że powierzchnia środków krzywizny ellipsoidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, otr muje w spółrzędnych u, v, w jej płaszczyzn stycznych równanie (wskazane przez I. Boot w r. 1875) kształtu:

$$\left(u^2+v^2+w^2\right)^2=\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}\right)\left(a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2-1\right).$$

29) Wykazać, że w powierzchni środków krzywizny ellipsoidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ zachodzą między spółrzędnemi (x, y, z) jej punktów a spółrzędnemi (u, v, w) jej płaszczy stycznych relacye (podane przez Salmona w r. 1858) kształtu:

$$x=\frac{\left[\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2v^2+\left(\frac{a}{c}-\frac{c}{a}\right)^2w^2-\frac{1}{a^2}\right]u}{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}},\quad y=\frac{\left[\left(\frac{b}{c}-\frac{c}{b}\right)^2w^2+\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)^2u^2-\frac{1}{b^2}\right]v}{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}}$$

$$z=\frac{\left[\left(\frac{c}{a}-\frac{a}{c}\right)^2u^2+\left(\frac{c}{b}-\frac{b}{c}\right)^2v^2-\frac{1}{c^2}\right]w}{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}}.$$

30) Wykazać, że powierzchnia środków krzywizny ellipsoidy jest powierzchnią nastego rzędu.

31) Wykazać, że dowolny punkt normalnej w punkcie styczności płaszczy (u', v', w') z powierzchnią drugiej klasy: $a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2=1$ określa się równaniem:

$$a^2uu'+b^2vv'+c^2ww'+\lambda(uu'+vv'+ww')=0,$$

gdzie λ jest dowolnym parametrem.

32) Wykazać, że punkta styczności wszystkich płaszczyzn stycznych przeprowadzonych przez punkt: (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) do powierzchni: $F(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$ leżą na pierwszej wierzchni biegunowej tego punktu, określonej równaniem:

$$x'_1\frac{dF}{dx_1}+x'_2\frac{dF}{dx_2}+x'_3\frac{dF}{dx_3}+x'_4\frac{dF}{dx_4}=0.$$

33) Wykazać, że w danym punkcie powierzchni $z=f(x, y)$ da się wykreślić parab loida ściśle styczna, która będzie paraboloidą elliptyczną, hiperboliczną lub walcem para bolicznym stosownie do tego, czy ten punkt powierzchni jest punktem elliptycznym, hipe bolicznym lub parabolicznym.

34) Dowieść, że wszelka płaszczyzna styczna w danym punkcie P powierzchni prz cina ją podług linii krzywej, która ma w tym punkcie albo punkt odosobniony, albo węz albo punkt zwrotu stosownie do tego, czy ten punkt jest elliptycznym, czy hiperboliczny czy też parabolicznym.

R o z w i ą z a n i a LV. 14) $x_i=\lambda_1x_i'+\lambda_2x_i''$ $(i=1, 2, 3, 4)$, przyczem: λ^2_1f' $+2\lambda_1\lambda_2(x''_1f'_1+x''_2f'_2+x''_3f'_3+x''_4f'_4)+\lambda_2{}^2f''=0$, gdzie: $f_1=\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $f_2=\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $f_3=\frac{\partial f}{\partial x_3}$, $f_4=\frac{\partial f}{\partial x_4}$. 20) $u_i=\lambda_1u_i'+\lambda_2u_i''$ $(i=1, 2, 3, 4)$. przyczem: $\lambda^2_1F'+2\lambda_1\lambda_2(u''_1F'_1+u''_2F'_2+u''_3F'_3+u''_4F'_4)+$ $+\lambda^2_2F''=0$, gdzie: $F_1=\frac{\partial F}{\partial u_1}$, $F_2=\frac{\partial F}{\partial u_2}$, $F_3=\frac{\partial F}{\partial u_3}$, $F_4=\frac{\partial F}{\partial u_4}$.

Literatura. G e o r g e S a l m o n: Analytische Geometrie des Raumes deutsch bea beitet von Dr. Wilhelm Fiedler. Dr. W ł a d y s ł a w Z a j ą c z k o w s k i: Geometry analityczna. Warszawa 1884.

Tematy do rozprawek naukowych.

1. Przekształcenia jednokreślne i jednokładne danej powierzchni i ich zastosowani
2. Teorya powierzchni drugiego rzędu i drugiej klasy na podstawie spółrzędny jednorodnych.
3. Teorya biegunów i powierzchni biegunowych

Wykład LVI.

Powierzchnie określone równaniami różniczkowemi i wybitniejsze linie na powierzchniach.

1. Równania zwyczajne a równania różniczkowe powierzchni. Równania zwyczajne powierzchni przedstawiając związki, jakie zachodzą między spółrzędnemi wszystkich punktów odnośnych powierzchni, prowadzą za pomocą metod różniczkowania do nowych równań, zwanych równaniami różniczkowemi, które wypowiadają własności dotyczące otoczenia punktów na powierzchniach.

W szczególności równania różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu wypowiadają własności dotyczące styczności, t. j. płaszczyzn stycznych i wielkości z niemi związanych w każdym punkcie powierzchni.

Równania różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu wypowiadają własności dotyczące krzywizny, t. j. promieni największej i najmniejszej krzywizny i ich zależności w dowolnym punkcie powierzchni.

Równania różniczkowe zwyczajne pierwszego i drugiego rzędu wyrażają znowu własności stycznych i krzywizny linij krzywych na powierzchni.

W jaki sposób z danego równania różniczkowego dojść do zwyczajnego równania będzie przedmiotem teoryi równań różniczkowych. W niniejszym wykładzie podamy tylko kilka przykładów typowych ważnych głównie ze stanowiska historycznego.

2. Powierzchnie stokowe, czyli powierzchnie posiadające płaszczyzny styczne jednakowo nachylone do danej płaszczyzny. Przyjmijmy jako płaszczyznę stałą XOY i szukajmy powierzchni, których płaszczyzny styczne są nachylone do płaszczyzny XOY pod stałym kątem γ, otrzymamy wtedy warunek:

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}},\quad \text{a stąd: } p^2+q^2+1=\sec^2\gamma,$$

czyli:

$$p^2+q^2=\operatorname{tang}^2\gamma, \tag{1}$$

jako równanie różniczkowe cząstkowe szukanych powierzchni, które nazywamy powierzchniami stokowemi. Są to więc powierzchnie o równaniu $z=f(x,y)$, posiadającem tę własność, że suma kwadratów pierwszych pochodnych cząstkowych funkcyi z względem zmiennych niezależnych x i y, t. j. $p=\frac{\partial z}{\partial x}$ i $q=\frac{\partial z}{\partial y}$ jest ilością stałą.

Uwzględniając, że na podstawie powyższego równania $q=\sqrt{\operatorname{tang}^2\gamma-p^2}$, a więc pochodna cząstkowa q jest funkcyą pochodnej cząstkowej p, dochodzimy do wniosku, że szukane powierzchnie są powierzchniami rozwijalnemi.

Aby otrzymać równanie takiej powierzchni, uważajmy ją jako powstałą przez ruch płaszczyzny o równaniu:

$$z=tx+f(t)\,y+\varphi(t) \qquad (2)$$

o zmiennym parametrze t.

Wyrugowawszy z tego równania i z równania różniczkowego:

$$0=x+f'(t)\,y+\varphi'(t) \qquad (3)$$

zmienny parametr t, otrzymujemy równanie wszelkich powierzchni rozwijalnych, między któremi znajdować się musi także szukana powierzchnia.

Z równania (2) otrzymujemy:

$$p=t+[x+f'(t)\,y+\varphi'(t)]\frac{\partial t}{\partial x}, \quad q=f(t)+[x+f'(t)\,y+\varphi'(t)]\frac{\partial t}{\partial y},$$

zatem na podstawie (3) otrzymujemy równania:

$$p=t, \quad q=f(t), \text{ a że: } q=\sqrt{\operatorname{tang}^2\gamma-t^2},$$

przeto otrzymujemy na wyznaczenie funkcyi $f(t)$ równanie:

$$f(t)=\sqrt{\operatorname{tang}^2\gamma-t^2}.$$

Podstawiwszy tę wartość w równania (2) i (3), otrzymujemy równania:

$$z=tx+\sqrt{\operatorname{tang}^2\gamma-t^2}\,.\,y+\varphi(t), \quad 0=x-\frac{t}{\sqrt{\operatorname{tang}^2\gamma-t^2}}\,y+\varphi'(t), \qquad (4)$$

o zmiennym parametrze t i o dowolnej funkcyi $\varphi(t)$, jako ogólne równania wszelkich powierzchni, których płaszczyzny styczne są nachylone do płaszczyzny XOY pod stałym kątem γ.

Powierzchnie rozwijalne tego rodzaju mają widocznie tę własność, że nie tylko ich płaszczyzny styczne, lecz także ich tworzące są do płaszczyzny XOY jednakowo nachylone.

Płaszczyzna XOY przecina taką powierzchnię podług linii krzywej, którą wszystkie tworzące powierzchni przecinają pod kątem prostym; krzywą tę nazywamy kierownicą odnośnej powierzchni rozwijalnej.

Możemy więc wszelką powierzchnię tego rodzaju także w ten sposób utworzyć, jeżeli linię prostą poruszać będziemy po danej krzywej płaskiej jako kierownicy, tak, aby ta prosta ruchoma była stale prostopadłą do poszczególnych stycznych tejże linii krzywej, a tworzyła zarazem z płaszczyzną tej krzywej pewien kąt stały.

Najprostszym przykładem powierzchni tego rodzaju jest prosty stożek kołowy.

3. Powierzchnie Weingartena (zwane krótko powierzchnie W.). Wiemy, że w każdym punkcie powierzchni istnieją dwa kierunki główne, w których przekroje normalne wykazują największą, względnie najmniejszą krzywiznę. Promienie krzywizny ϱ_1, ϱ_2 tych przekrojów określone dla powierzchni o równaniach $z=f(x, y)$ wzorem:

$$(rt-s^2)\,\varrho^2-[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]\sqrt{p^2+q^2+1}\,\varrho+(p^2+q^2+1)^2=0, \qquad (5)$$

a dla powierzchni o równaniach: $x=f(u, v)$, $y=\varphi(u, v)$, $z=\psi(u, v)$ wzorem:

$$(RT-S^2)\,\varrho^2-[GR+ET-2FS]\varrho+EG-F^2=0, \qquad (6)$$

są funkcyami współrzędnych (x, y), względnie parametrów (u, v) i pochodnych cząstkowych pierwszego i drugiego rzędu w tym punkcie.

Otóż wszelkie powierzchnie, które odnośnie do głównych promieni krzywizny ϱ_1 i ϱ_2 posiadają własność, określoną jakiemkolwiek równaniem kształtu: $F(\varrho_1, \varrho_2)=0$ nazywają się powierzchniami Weingartena, według nazwiska matematyka, który się niemi pierwszy zajmował.

Do powierzchni Weingartena należą w szczególności np. powierzchnie o stałej krzywiźnie zupełnej, określone równaniem:

$$\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}=k, \tag{7}$$

powierzchnie o stałej średniej krzywiźnie, określone równaniem:

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}=k, \tag{8}$$

i tym podobne.

Z równania, określającego dany związek między głównymi promieniami krzywizny w każdym punkcie szukanej powierzchni w postaci: $F(\varrho_1, \varrho_2)=0$, otrzymujemy na podstawie różniczkowania cząstkowego podług zmiennych niezależnych x, y, względnie podług parametrów u, v równania:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \varrho_1}\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial \varrho_2}\frac{\partial \varrho_2}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial F}{\partial \varrho_1}\frac{\partial \varrho_1}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial \varrho_2}\frac{\partial \varrho_2}{\partial y}=0,\end{aligned} \quad \text{względnie:} \quad \begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \varrho_1}\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial \varrho_2}\frac{\partial \varrho_2}{\partial u}=0,\\ \frac{\partial F}{\partial \varrho_1}\frac{\partial \varrho_1}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial \varrho_2}\frac{\partial \varrho_2}{\partial v}=0,\end{aligned}$$

z których wynika równanie:

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}, & \frac{\partial \varrho_2}{\partial x}\\ \frac{\partial \varrho_1}{\partial y}, & \frac{\partial \varrho_2}{\partial y}\end{vmatrix}=0, \quad \text{względnie:} \quad \begin{vmatrix}\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}, & \frac{\partial \varrho_2}{\partial u}\\ \frac{\partial \varrho_1}{\partial v}, & \frac{\partial \varrho_2}{\partial v}\end{vmatrix}=0, \tag{9}$$

jako ogólne równanie różniczkowe wszelkich powierzchni Weingartena.

4. Powierzchnie minimalne. Powierzchnie, które mają tę własność, że w każdym z ich punktów krzywizna średnia: $\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}$ jest równa zeru, czyli główne promienie krzywizny ϱ_1, ϱ_2 są równe, lecz znaku przeciwnego, stanowią szczególny rodzaj powierzchni W., które z powodu osobliwszej ich własności przez Lagrange'a odkrytej nazywają się powierzchniami minimalnemi. Zawierają one bowiem minimum powierzchni, które daną krzywą przestrzenną napina.

Możnaby je praktycznie otrzymać, wtykając drut dowolnie zamknięty w roztwór mydlany, powłoka płynna wyobraża wtedy powierzchnię minimalną.

Powierzchnie minimalne określone są warunkiem:

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}=0, \text{ czyli: } \varrho_1=-\varrho_2, \tag{10}$$

który na podstawie wzoru (5) prowadzi do równania różniczkowego cząstkowego drugiego rzędu kształtu:

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0,$$

czyli:

$$\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}+\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, \tag{11}$$

które nazywamy też równaniem różniczkowem powierzchni minimalnych.

Równanie to możemy na mocy (6) zastąpić ogólniejszem: (12

$$ET+GR-2FS=0,$$

odpowiadającem szukanej powierzchni o równaniach: $x=f(u,v)$, $y=\varphi(u,$ $z=\psi(u,v)$.

Powyższemu równaniu stanie się zadość, gdy przyjmiemy:

$$E=0,\quad G=0,\quad S=0, \text{ czyli:}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=0,\quad \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=0,$$

$$A\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}+B\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}+C\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=0.$$

Równaniu $S=0$ stanie się zadość, gdy przyjmiemy:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=0,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}=0,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=0.$$

Szukane funkcye musiałyby pod tymi warunkami mieć kształt:

$$x=f(u)+f_1(v),\quad y=\varphi(u)+\varphi_1(v),\quad z=\psi(u)+\psi_1(v),$$

zawierający sześć dowolnych funkcyj.

W tych warunkach byłoby:

$$\frac{\partial x}{\partial u}=f'(u),\quad \frac{\partial x}{\partial v}=f'_1(v),\quad \frac{\partial y}{\partial u}=\varphi'(u),\quad \frac{\partial y}{\partial v}=\varphi'_1(v),\quad \frac{\partial z}{\partial u}=\psi'(u),\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\psi'_1(v),$$

zatem wobec: $E=0$, $G=0$ musiałyby się spełniać relacye:

$$[f'(u)]^2+[\varphi'(u)]^2+[\psi'(u)]^2=0,\quad [f'_1(v)]^2+[\varphi'_1(v)]^2+[\psi'_1(v)]^2=0,$$

z których wynika:

$$[\psi'(u)]^2=-\{[f'(u)]^2+[\varphi'(u)]^2\},\quad [\psi'_1(v)]^2=-\{[f'_1(v)]^2+[\varphi'_1(v)]^2\},$$

$$\psi'(u)=i\sqrt{[f'(u)]^2+[\varphi'(u)]^2},\quad \psi'_1(v)=i\sqrt{[f'_1(v)]^2+[\varphi'_1(v)]^2},$$

zatem: $\psi(u)=i\int\sqrt{[f'(u)]^2+[\varphi'(u)]^2}\,du,\quad \psi_1(v)=i\int\sqrt{[f'_1(v)]^2+[\varphi'_1(v)]^2}\,dv.$

Możemy więc ogólne równanie powierzchni minimalnych przedsta w postaciach:

$$x=f(u)+f_1(v),\quad y=\varphi(u)+\varphi_1(v),$$

$$z=i\int\sqrt{[f'(u)]^2+[\varphi'(u)]^2}\,du\pm i\int\sqrt{[f'_1(v)]^2+[\varphi'_1(v)]^2}\,dv,$$

w których mamy już tylko cztery funkcye dowolne.

Połóżmy za przewodem Weierstrassa:

$$f(u)=\int F'(u)\cos u\,du,\quad f_1(v)=\int F'_1(v)\cos v\,dv,$$

$$\varphi(u)=\int F'(u)\sin u\,du,\quad \varphi_1(v)=\int F'_1(v)\sin v\,dv,$$

wtedy otrzymamy powyższe równania w postaciach:

$$x=\int F'(u)\cos u\,du+\int F'_1(v)\cos v\,dv,$$

$$y=\int F'(u)\sin u\,du+\int F'_1(v)\sin v\,dv,$$

$$z=i\int F'(u)\,du-i\int F'_1(v)\,dv,$$

które zawierają już tylko dwie funkcye dowolne: $F(u)$ i $F_1(v)$.

Zastąpmy je innemi dwoma f i φ, za pomocą podstawienia:

$$F(u)=f(u)+i\varphi(u),\quad F_1(v)=f(v)+i\varphi(v),$$

wtedy otrzymamy:

$$x = \int f'(u)\cos u\,du + \int f'(v)\cos v\,dv + i[\int \varphi'(u)\cos u\,du - \int \varphi'(v)\cos v\,dv],$$
$$y = \int f'(u)\sin u\,du + \int f'(v)\sin v\,dv + i[\int \varphi'(u)\sin u\,du - \int \varphi'(v)\sin v\,dv],$$
$$z = \{f(u) - f(v)\}i - \{\varphi(u) + \varphi(v)\}, \qquad 13)$$

jako ogólne równania powierzchni minimalnych.

5. Przykłady. 1) Przyjmując $f(u) = au$, $\varphi(u) = 0$, otrzymamy:

$$x = \int a\cos u\,du + \int a\cos v\,dv = a(\sin u + \sin v),$$
$$y = \int a\sin u\,du + \int a\sin v\,dv = -a(\cos u + \cos v), \quad z = i\,a(u - v),$$

czyli: $x = 2a\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$, $y = -2a\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$, $z = ia(u-v)$,

zatem $x^2 + y^2 = 4a^2\cos^2\frac{u-v}{2}$, a że: $\frac{u-v}{2} = \frac{z}{2ai}$,

przeto: $x^2 + y^2 = 4a^2\cos^2\frac{z}{2ai}$,

a więc: $\sqrt{x^2+y^2} = 2a\cos\frac{z}{2ai} = 2a\cos\frac{zi}{2a} = 2a\frac{e^{\frac{z}{2a}} + e^{-\frac{z}{2a}}}{2}$,

czyli: $\sqrt{x^2+y^2} = a.\left(e^{\frac{z}{2a}} + e^{-\frac{z}{2a}}\right)$.

skąd, kładąc $2a = m$, otrzymujemy równanie:

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{z}{m}} + e^{-\frac{z}{m}}\right).$$

[redacted]

Fig. 255.

Równanie to przedstawia powierzchnię powstałą przez obrót linii łańcuchowej około osi z-ów, czyli t. zw. katenoidę (fig. 255).

Jedną z powierzchni minimalnych jest więc katenoida.

2) Przyjmując $f(u) = 0$, $\varphi(u) = au$, otrzymujemy równania odpowiedniej powierzchni minimalnej w postaci:

$$x = i\left\{\int a\cos u\,du - \int a\cos v\,dv\right\} = i\,a(\sin u - \sin v),$$
$$y = i\left\{\int a\sin u\,du - \int a\sin v\,dv\right\} = -ai(\cos u - \cos v), \quad z = a(u+v),$$

czyli: $x = 2ai\sin\frac{u-v}{2}\cos\frac{u+v}{2}$, $y = 2ai\sin\frac{u-v}{2}\sin\frac{u+v}{2}$, $z = a(u+v)$,

z których wypływa: $\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\frac{u+v}{2} = \operatorname{tang}\frac{z}{2a}$,

a więc: $\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\frac{z}{2a}$, czyli równanie: $z = 2a.\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}$,

przedstawiające zwyczajną powierzchnię śrubową.

Jedną z powierzchni minimalnych jest więc także powierzchnia powstała przez ruch śrubowej prostej prostopadłej do osi z-ów, czyli t. zw. zwyczajna powierzchnia śrubowa.

6. Linie na powierzchniach. Linie na powierzchni określa się zazwyczaj jako przekroje danej powierzchni innemi powierzchniami za pomocą równań kształtu:

$$a)\quad z = f(x, y) \quad z = \varphi(x, y),$$
$$b)\quad F(x, y, z) = 0, \quad \Phi(x, y, z) = 0,$$
$$c)\quad x = f(u, v), \quad y = \varphi(u, v), \quad z = \psi(u, v), \quad F(u, v) = 0.$$

Linie na powierzchni mogą być też określone równaniami różniczkowemi zwyczajnemi, wypowiadającemi własności tychże linij krzywych, dotyczące ich styczności lub krzywizny, a więc równaniami różniczkowemi rzędu pierwszego, drugiego lub rzędów wyższych. W tym przypadku otrzymujemy obok równania danej powierzchni jeszcze jedno równanie różniczkowe, z którego staramy się zwykle otrzymać równanie różniczkowe rzutów

odnośnych linij krzywych na płaszczyznę XOY. Szukane krzywe na powierzchni występują tedy jako przekroje danej powierzchni walcami rzucającemi.

W następnych artykułach zajmiemy się wybitniejszemi liniami krzywemi, występującemi na powierzchniach.

7. Linie krzywiznowe. Z każdego punktu P danej powierzchni wychodzą, jak wiemy, dwa kierunki główne do siebie prostopadłe, mianowicie kierunki największej i najmniejszej krzywizny w tym punkcie. Możemy, idąc z punktu P do punktu sąsiedniego P', a następnie z P' do P'' i t. d., postępować w kierunku największej krzywizny, a otrzymamy linię krzywą na powierzchni, zwaną linią krzywiznową największej krzywizny punktu P. Idąc z punktu P do punktu sąsiedniego Q', a następnie z Q' do Q'' i t. d. w kierunku najmniejszej krzywizny, otrzymamy drugą linię krzywą. do pierwszej prostopadłą, zwaną linią krzywiznową najmniejszej krzywizny punktu P.

Przez każdy punkt powierzchni, przechodzą zatem dwie linie krzywiznowe do siebie prostopadłe, na każdej powierzchni istnieją zatem dwa układy linij krzywiznowych do siebie prostopadłych, mianowicie linie największej i najmniejszej krzywizny.

Ponieważ dwie normalne wykreślone w dwu punktach sąsiednich leżących w kierunkach głównych powierzchni kolejno się przecinają, przeto normalne do powierzchni wykreślone w punktach linii krzywiznowej tworzą zawsze pewną powierzchnię rozwijalną.

Linię krzywiznową na danej powierzchni możemy więc określić, jako krzywą na powierzchni, mającą tę własność, że normalne do powierzchni w punktach tej krzywej wykreślone tworzą powierzchnię rozwijalną.

Normalne wykreślone w punktach jakiejkolwiek krzywej na powierzchni tworzą w ogólności powierzchnię prostokreślną, która jest tylko wówczas powierzchnią na płaszczyźnie rozwijalną, gdy wykreślona krzywa jest linią krzywiznową.

8. Linie krzywiznowe poszczególnych powierzchni. Na podstawie powyższego określenia linij krzywiznowych możemy dla niektórych powierzchni podać wprost położenie linij krzywiznowych.

a) Powierzchnie walcowe mają jako jeden szereg linij krzywiznowych swoje tworzące, gdyż normalne w punktach tworzącej leżą na jednej płaszczyźnie, drugi szereg linij krzywiznowych tworzą przekroje prostopadle do tworzących.

b) Powierzchnie stożkowe mają także jako jeden układ linij krzywiznowych swoje tworzące, drugi układ tworzą przekroje sferyczne stożka kulami spółśrodkowemi, których środek leży w wierzchołku powierzchni stożkowej. Tworzące powierzchni stożkowej stają się bowiem promieniami każdej takiej kuli, kula i powierzchnia stożkowa przecinają się zatem pod kątem prostym, ich krzywe przekroju są zatem prostopadłe do układu tworzących, tworzą więc drugi układ linij krzywiznowych.

c) Powierzchnie rozwijalne na płaszczyźnie mają jako jeden układ linij krzywiznowych układ swych tworzących, drugi układ tworzą krzywe, które wszystkie tworzące danej powierzchni rozwijalnej przecinają pod kątem prostym, czyli t. z. trajektorye prostokątne układu tworzących powierzchni rozwijalnej.

Na ogólnej powierzchni prostokreślnej, względnie na powierzchni wichrowatej nie możemy tak łatwo podać z góry położenie linij krzywiznowych.

d) Powierzchnie obrotowe mają jako jeden układ linij krzywiznowych swoje równoleżniki, gdyż normalne do powierzchni, wykreślone w punktach równoleżnika przechodzą wszystkie przez ten sam punkt osi obrotu, drugi układ linij krzywiznowych na powierzchni obrotowej tworzą jej krzywe południkowe.

e) Powierzchnie kanałowe mają jako jeden układ linij krzywiznowych układ kół ruchomych, tworzących daną powierzchnię kanałową, drugi układ tworzą krzywe przecinające układ tychże kół pod kątem prostym, czyli t. z. trajektorye prostokątne układu kół tworzących powierzchnię kanałową.

9. Analityczne wyznaczanie linij krzywiznowych na danej powierzchni. Z określenia linii krzywiznowej jako linii krzywej, która ma tę własność, że normalne w jej punktach do powierzchni wykreślone kolejno się przecinają, otrzymujemy na podstawie równań dwu sąsiednich normalnych powierzchni $z=f(x, y)$ kształtu: $X-x+p(Z-z)=0,\quad Y-y+q(Z-z)=0,$

$$X-x-dx+(p+dp)(Z-z-dz)=0,\quad Y-y-dy+(q+dq)(Z-z-dz)=0,$$

jako warunek przecięcia się tychże dwu prostych równanie:

$$\frac{dx+pdz}{dp}=\frac{dy+qdz}{dq},$$

czyli:

$$(dx+pdz)dq-(dy+qdz)dp=0. \tag{14}$$

Powyższe równanie sprowadza się na mocy wzorów:

$$dz=pdx+qdy,\quad dp=rdx+sdy,\quad dq=sdx+tdy,$$

do postaci:

$$\left[\left(1+q^2\right)s-pqt\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left[\left(1+q^2\right)r-\left(1+p^2\right)t\right]\frac{dy}{dx}+\left[pqr-\left(1+p^2\right)s\right]=0, \tag{15}$$

wyprowadzonej pod (21) na str. 822, cechującej kierunki główne na powierzchni $z=f(x, y)$ i przedstawiającej zarazem równanie różniczkowe linij krzywiznowych na tej powierzchni.

Jest ono równaniem różniczkowem pierwszego rzędu i stopnia drugiego, cechuje zatem oba układy linij krzywiznowych.

Odpowiednie równanie różniczkowe linij krzywiznowych na powierzchni o równaniu kształtu: $F(x, y, z)=0$ otrzymamy z (14), podstawiając odpowiednie wartości za p i q. Tą drogą otrzymamy równanie:

$$\left\{dx-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}dz\right\}\cdot\frac{-\frac{\partial F}{\partial z}d\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial y}d\frac{\partial F}{\partial z}}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}-\left\{dy-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right\}\cdot\frac{-\frac{\partial F}{\partial z}d\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial x}d\frac{\partial F}{\partial z}}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}=0,$$

które uporządkowane podług dx, dy, dz, sprowadza się do postaci:

$$dx\left\{\frac{\partial F}{\partial y}d\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial F}{\partial z}d\frac{\partial F}{\partial y}\right\}+dy\left\{\frac{\partial F}{\partial z}d\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial x}d\frac{\partial F}{\partial z}\right\}+$$

$$+dz\left\{\frac{\partial F}{\partial x}d\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial F}{\partial y}d\frac{\partial F}{\partial x}\right\}=0,$$

czyli:

$$\begin{vmatrix} dx, & dy, & dz \\ \frac{\partial F}{\partial x}, & \frac{\partial F}{\partial y}, & \frac{\partial F}{\partial z} \\ d\frac{\partial F}{\partial x}, & d\frac{\partial F}{\partial y}, & d\frac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix}=0. \tag{15'}$$

10. Linie krzywiznowe na ellipsoidzie. Dla ellipsoidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ mamy:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2x}{a^2},\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{2y}{b^2},\quad \frac{\partial F}{\partial z}=\frac{2z}{c^2},\qquad d\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2dx}{a^2},\quad d\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{2dy}{b^2},\quad d\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{2dz}{c^2},$$

zatem na podstawie (15) równanie różniczkowe:

$$\frac{dx}{b^2c^2}(y\,dz-z\,dy)+\frac{dy}{c^2a^2}(z\,dx-x\,dz)+\frac{dz}{a^2b^2}(x\,dy-y\,dx)=0, \tag{a}$$

które uporządkowane podług z i dz, otrzymuje kształt:

$$z\left\{\frac{dx\,dy}{c^2a^2}-\frac{dx\,dy}{b^2c^2}\right\}+dz\left\{\frac{y\,dx}{b^2c^2}-\frac{x\,dy}{a^2c^2}+\frac{x\,dy}{a^2b^2}-\frac{y\,dx}{a^2b^2}\right\}=0. \tag{b}$$

Ponieważ:

$$z^2=c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right),\quad z\,dz=c^2\left(-\frac{x\,dx}{a^2}-\frac{y\,dy}{b^2}\right),$$

przeto, pomnożywszy równanie (b) przez z, otrzymamy:

$$c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{dx\,dy}{c^2a^2}-\frac{dy\,dx}{b^2c^2}\right)-c^2\left(\frac{x\,dx}{a^2}+\frac{y\,dy}{b^2}\right)\left(\frac{y\,dx}{b^2c^2}-\frac{x\,dy}{a^2c^2}+\frac{x\,dy}{a^2b^2}-\frac{y\,dx}{a^2b^2}\right)=0$$

czyli:

$$dy^2\,.\,a^2(b^2-c^2)xy-dx\,dy\,[b^2(c^2-a^2)x^2+a^2(b^2-c^2)y^2+a^2b^2(a^2-b^2)]+dx^2\,b^2(c^2\quad a^2)xy=0.$$

Zakładając $a^2>b^2>c^2$, połóżmy dla skrócenia: $\frac{a^2\quad c^2}{a^2}=\alpha^2$, $\frac{b^2-c^2}{b^2}=\beta^2$, $a^2-b^2=e^2$,

a otrzymamy stąd:

$$\beta^2xy\,dy^2+[\alpha^2x^2-\beta^2y^2-e^2]\,dx\,dy-\alpha^2xy\,dx^2=0,$$

czyli:

$$\beta^2xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(\alpha^2x^2-\beta^2y^2-e^2)\frac{dy}{dx}-\alpha^2xy=0, \tag{16}$$

jako **r ó w n a n i e r ó ż n i c z k o w e l i n i j k r z y w i z n o w y c h** na ellipsoidzie.

Celem wyznaczenia funkcyi pierwotnej, czyli całki tego równania pomnóżmy je przez xy i wprowadźmy nową zmienną na mocy podstawienia: $xy\frac{dy}{dx}=t^2$, a otrzymamy:

$$\beta^2t^4+(\alpha^2x^2-\beta^2y^2-e^2)t^2-\alpha^2x^2y^2=0,$$

skąd wypływa:

$$y^2=\frac{\beta^2t^4+(\alpha^2x^2-e^2)t^2}{\beta^2t^2+\alpha^2x^2},\ \text{czyli:}\ y^2=t^2-\frac{e^2t^2}{\beta^2t^2+\alpha^2x^2}. \tag{17}$$

Za pomocą różniczkowania dostajemy stąd:

$$y\,dy=t\,dt-\frac{(\beta^2t^2+\alpha^2x^2)e^2t\,dt-e^2t^2(\beta^2t\,dt+\alpha^2x\,dx)}{(\beta^2t^2+\alpha^2x^2)^2},$$

czyli:

$$y\,dy=t\,dt-\frac{\alpha^2e^2xt\,(x\,dt-t\,dx)}{(\beta^2t^2+\alpha^2x^2)^2},$$

a że na mocy podstawienia: $y\,dy=\frac{t^2\,dx}{x}$, przeto mamy:

$$\frac{t^2dx}{x}=t\,dt-\alpha^2e^2xt\frac{t\,dx-x\,dt}{(\beta^2t^2-\alpha^2x^2)^2},\quad \text{czyli:}\ \frac{t}{x}(t\,dx-x\,dt)=\alpha^2e^2xt\frac{t\,dx-x\,dt}{(\beta^2t^2+\alpha^2x^2)^2}.$$

Równaniu temu stanie się zadość, skoro spełni się relacya:

$$t\,dx=x\,dt,\ \text{czyli:}\ \frac{dt}{t}=\frac{dx}{x},\ \text{zatem:}\ \log t=\log x+\log C,\ \text{czyli:}\ t=Cx,$$

gdzie C jest stałą dowolną. Wstawiwszy tę wartość w (17), otrzymujemy:

$$y^2=C^2x^2-\frac{e^2C^2x^2}{\beta^2C^2x^2+\alpha^2x^2},\ \text{czyli:}\ y^2=C^2x^2-\frac{e^2C^2}{\beta^2C^2+\alpha^2}. \tag{18}$$

Wprowadzając w miejsce stałej dowolnej C inną stałą λ na podstawie związku:

$$C^2=-\frac{\alpha^2(b^2-\lambda)}{\beta^2(a^2-\lambda)}, \tag{c}$$

otrzymujemy z (18) równanie:

$$y^2 = -\frac{\alpha^2(b^2-\lambda)}{\beta^2(a^2-\lambda)}x^2 + \frac{e^2\alpha^2(b^2-\lambda)}{-\alpha^2\beta^2(b^2-\lambda)+\alpha^2\beta^2(a^2-\lambda)} = 0,$$

a więc: $$\frac{\alpha^2x^2}{a^2-\lambda}+\frac{\beta^2y^2}{b^2-\lambda}=\frac{e^2}{a^2-b^2}, \text{ czyli: } \frac{\alpha^2x^2}{a^2-\lambda}+\frac{\beta^2y^2}{b^2-\lambda}=1. \qquad (19)$$

Równanie to w połączeniu z równaniem ellipsoidy:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (20)$$

daje linie krzywiznowe na ellipsoidzie, jako przekroje układu walców drugiego rzędu z ellipsoidą.

Na podstawie równań (19) i (20) pomnożywszy (20) przez c^2, a (19) przez λ i odjąwszy tak otrzymane równania, dostajemy równanie:

$$x^2\left(\frac{c^2}{a^2}-\frac{\alpha^2\lambda}{a^2-\lambda}\right)+y^2\left(\frac{c^2}{b^2}-\frac{\beta^2\lambda}{b^2-\lambda}\right)+z^2=c^2-\lambda, \qquad (21)$$

a że: $$\frac{c^2}{a^2}-\frac{\alpha^2\lambda}{a^2-\lambda}=\frac{a^2c^2-c^2\lambda-(a^2-c^2)\lambda}{a^2\; a^2-\lambda)}=\frac{c^2-\lambda}{a^2-\lambda},$$

$$\frac{c^2}{b^2}-\frac{\beta^2\lambda}{a^2-\lambda}=\frac{b^2c^2-c^2\lambda-(b^2-c^2)\lambda}{b^2(b^2-\lambda)}=\frac{c^2-\lambda}{b^2-\lambda},$$

przeto równanie (21) sprowadza się do postaci:

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1. \qquad (22)$$

Jest to równanie powierzchni spółogniskowych z daną ellipsoidą.

A zatem: *Linie krzywiznowe na ellipsoidzie są przekrojami ellipsoidy z jej powierzchniami spółogniskowemi.*

Poszczególne linie krzywiznowe na ellipsoidzie, w której $a > b > c$, otrzymamy z (22) nadając parametrom λ rozmaite wartości.

Jeżeli $-\infty < \lambda < c^2$, wtedy powierzchnia spółogniskowa jest ellipsoidą, leżącą wewnątrz danej ellipsoidy, nie otrzymujemy tedy żadnych rzeczywistych linij krzywiznowych.

Jeżeli: $c^2 < \lambda < b^2$, otrzymamy rozmaite hiperboloidy o jednej powłoce, ułożone około osi OZ. Wyznaczają one jeden układ linij krzywiznowych, leżących symetrycznie względem płaszczyzny XY. Jeżeli $\lambda = b^2$ sprowadza się hiperboloida do hiperboli leżącej w płaszczyźnie XOZ.

Jeżeli: $b^2 < \lambda < a^2$, otrzymujemy jako powierzchnie z ellipsoidą spółogniskowe rozmaite hiperboloidy o dwu powłokach ułożone około osi OX. Wyznaczają one drugi układ linij krzywiznowych, które leżą symetrycznie względem płaszczyzny YZ.

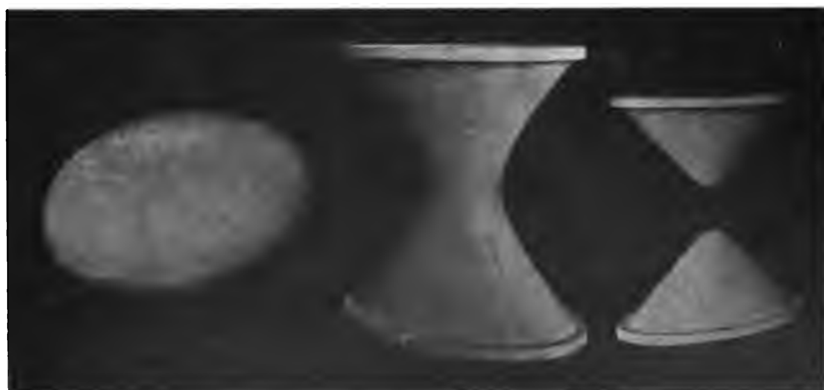


Fig. 256. Fig. 257. Fig. 258.

Załączone figury przedstawiają położenie linij krzywiznowych na powierzchniach środkowych drugiego rzędu: fig. 256 na ellipsoidzie, fig. 257 na hiperboloidzie o jednej powłoce, fig. 258 na hiperboloidzie o dwu powłokach.

11. Wprowadzając dwa dowolne parametry u i v, określone pod założeniem: $c^2 < b^2 <$ warunkami: $c^2 < u < b^2$, $b^2 < v < a^2$, otrzymamy linie krzywiznowe ellipsoidy wyznacz trzema równaniami:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad \frac{x^2}{a^2-u}+\frac{y^2}{b^2-u}+\frac{z^2}{c^2-u}=1, \quad \frac{x^2}{a^2-v}+\frac{y^2}{b^2-v}+\frac{z^2}{c^2-v}=1. \quad (28)$$

Pierwsze i drugie równanie wyznaczają tedy jeden układ, pierwsze i trzecie dru układ linij krzywiznowych.

Na podstawie równań (28), otrzymujemy trzy równania:

$$x^2=a^2\frac{(a^2-u)(a^2-v)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \quad y^2=b^2\frac{(b^2-u)(b^2-v)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}, \quad z^2=c^2\frac{(c^2-u)(c^2-v)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)},$$

o dwu dowolnych parametrach u i v, jako równania parametrowe ellipsoidy utworzon przez układy jej linij krzywiznowych.

Spółrzędne u i v punktu na ellipsoidzie nazywają się zwykle spółrzędnemi elliptycznemi.

12. Dwie powierzchnie przecinające się podług wspólnej linii krzywiznowej. Niech będą dane dwie powierzchnie określone równaniami:

$$F_1(x, y, z)=0, \quad F_2(x, y, z)=0,$$

które przecinają się podług linii, będącej dla obu powierzchni linią krzywiznową, natenczas muszą się na mocy wzoru (14) spełnić relacye:

$$(dx+p_1dz)dq_1=(dy+q_1dz)dp_1, \quad (dx+p_2dz)dq_2=(dy+q_2dz)dp_2, \qquad (a)$$

przyczem: $\quad dz=p_1dx+q_1dy,$ jakoteż: $dz=p_2dx+q_2dy. \qquad (b)$

Obierzmy pewien punkt na krzywej przekroju i poprowadźmy w nim dwie płaszczyzny styczne, jedną do powierzchni $F(x, y, z)=0$, drugą do powierzchni $F_2(x, y, z)=0$, natenczas dostawy kierunkowe tych płaszczyzn otrzymują wartości:

$$\frac{p_1}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+1}}, \quad \frac{q_1}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+1}}, \quad \frac{-1}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+1}},$$

$$\frac{p_2}{\sqrt{p_2^2+q_2^2+1}}, \quad \frac{q_2}{\sqrt{p_2^2+q_2^2+1}}, \quad \frac{-1}{\sqrt{p_2^2+q_2^2+1}},$$

zatem kąt ω, zawarty między temi płaszczyznami będzie określony wzorem:

czyli: $$\cos\omega=\frac{p_1p_2+q_1q_2+1}{\sqrt{(p_1^2+q_1^2+1)(p_2^2+q_2^2+1)}}=\frac{f}{\sqrt{eg}},$$

gdzie: $\quad f=p_1p_2+q_1q_2+1, \quad e=p_1^2+q_1^2+1, \quad g=p_2^2+q_2^2+1,$

zatem:

$$df=p_1dp_2+p_2dp_1+q_1dq_2+q_2dq_1, \quad de=2(p_1dp_1+q_1dq_1), \quad dg=2(p_2dp_2+q_2dq_2)$$

Na podstawie relacyj (a) i (b) otrzymamy jednak, rugując dx, dy, dz, równania następujące:

$$f.de=2e(q_2dq_1+p_2dp_1), \quad f.dg=2g(q_1dq_2+p_1dp_2),$$

przedstawiające warunki, pod którymi krzywa przekroju jest linią krzywiznową jednej i drugiej powierzchni.

Z warunków tych otrzymamy równanie:

$$\frac{f}{2}\left(\frac{de}{e}+\frac{dg}{g}\right)=p_1dp_2+p_2dp_1+q_1dq_2+q_2dq_1=df,$$

czyli równanie różniczkowe:

$$\frac{f}{2}\left(\frac{de}{e}+\frac{dg}{g}\right)=\frac{df}{f}.$$

Całkując to równanie, otrzymamy zatem:

$$\log f=\frac{1}{2}\log(eg)+\log C,$$

czyli: $\log\frac{f}{\sqrt{eg}}=\log C$, a więc: $\frac{f}{\sqrt{eg}}=C$, czyli: $\cos\omega=C$.

A zatem: *Dwie powierzchnie, których przekrój jest ich linią krzywiznową, przecinają się zawsze pod kątem stałym.*

Nawzajem: *Jeżeli krzywa przekroju dwu powierzchni przecinających się pod kątem stałym jest linią krzywiznową dla jednej z tych powierzchni, to jest nią także dla drugiej.*

Skoro bowiem w każdym punkcie przekroju dwu powierzchni: $F_1(x, y, z)=0$ i $F_2(x, y, z)=0$ jest:

$$\cos\omega=C, \text{ czyli: } \frac{f}{\sqrt{eg}}=C, \text{ natenczas jest: } \frac{df}{f}=\frac{1}{2}\left(\frac{de}{e}+\frac{dg}{g}\right),$$

jeżeli obok tego krzywa przekroju jest linią krzywiznową jednej powierzchni, natenczas:

$$p_2dp_1+q_2dq_1 = \frac{f}{2}\frac{de}{e}, \text{ a że: } df=p_1dp_2+p_2dp_1+q_1dq_2+q_2dq_1,$$

przeto: $$df=p_1dp_2+q_1dq_2+\frac{f\,de}{2e},$$

więc: $$p_1dp_2+q_1dq_2=df-\frac{f}{2}\frac{de}{e}=\frac{f}{2}\left(\frac{de}{e}+\frac{dg}{g}\right)-\frac{f}{2}\frac{de}{e},$$

czyli: $$p_1dp_2+q_1dq_2=\frac{f}{2}\frac{dg}{g},$$

co dowodzi, że ta krzywa przekroju jest także linią krzywiznową dla drugiej powierzchni.

13. Linie asymptotyczne na powierzchni. Promień krzywizny w punkcie $P(x, y, z)$ dowolnego przekroju normalnego powierzchni: $z=f(x, y)$ określa się wzorem (20) str. 822 kształtu:

$$\varrho=\sqrt{p^2+q^2+1}\,.\,\frac{(1+p^2)+2pq\lambda+(1+q^2)\lambda}{r+2s\lambda+t\lambda^2},$$

w którym parametr: $\lambda=\frac{dy}{dx}$ cechuje kierunek płaszczyzny normalnej.

Kierunek, w którym promień krzywizny jest nieskończenie wielkim, nazywamy kierunkiem asymptotycznym.

Wartość odpowiedniego parametru λ wyznacza równanie:

$$r+2s\lambda+t\lambda^2=0,$$

które daje dwie wartości na λ, rzeczywiste gdy $rt-s^2<0$, t. j. gdy dany punkt jest punktem o krzywiźnie ujemnej, czyli, gdy wskazująca Dupina jest hiperbolą.

W punktach, które mają krzywiznę ujemną, istnieją zatem dwa kierunki asymptotyczne. Idąc z punktu do punktu sąsiedniego w jednym z kierunków asymptotycznych, otrzymamy na powierzchni dwa układy krzywych, których styczne w danym punkcie są kierunkami asymptotycznemi tego punktu. Krzywe tego rodzaju nazywamy krzywemi asymptotycznemi powierzchni.

Krzywe asymptotyczne na powierzchni cechuje równanie różniczkowe pierwszego rzędu i drugiego stopnia kształtu:

$$r+2s\frac{dy}{dx}+t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0, \tag{24}$$

które też nazywamy równaniem różniczkowem linij asymptotycznych.

Możemy je także przedstawić w postaci:

$$r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2=0,$$

z której wypływa równanie:

$$dx\,(r\,dx+s\,dy)+dy\,(s\,dx+t\,dy)=0,$$

czyli:
$$dx\,dp+dy\,dq=0, \tag{25}$$

charakteryzujące linie asymptotyczne.

Jeżeli powierzchnia dana określona jest równaniami:

$$x=f(u,\ v),\quad y=\varphi(u,\ v),\quad z=\psi(u,\ v),$$

wtedy na mocy wzoru (19) str. 840, otrzymamy równanie różniczkowe krzywych asymptotycznych w postaci:

$$R\,du^2+2S\,du\,dv+T\,dv^2=0. \tag{25'}$$

14. Linie asymptotyczne na powierzchniach obrotowych, określonych równaniami: $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=f(u)$. Mamy tu:

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\cos v,\quad \frac{\partial x}{\partial v}=-u\sin v,\quad \frac{\partial y}{\partial u}=\sin v,\quad \frac{\partial y}{\partial v}=u\cos v,\quad \frac{\partial z}{\partial u}=f'(u),\quad \frac{\partial z}{\partial v}=0,$$

$$A=u\cos v\,.\,f'(u),\quad B=u\sin v\,.\,f'(u),\quad C=-u,$$

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2}=u\sqrt{1+[f'(u)]^2},\quad \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=0,\quad \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=-u\cos v,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}=0,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}=-u\sin v,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=f''(u),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=-\sin v,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}=\cos v,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=0,$$

zatem na podstawie wzorów (18) strony 840 otrzymujemy:

$$R=-\frac{f''(u)}{\sqrt{1+[f'(u)]^2}},\quad S=0\quad T=-\frac{u\,f'(u)}{\sqrt{1+[f'(u)]^2}}.$$

Równanie różniczkowe: $R\,du^2+2S\,du\,dv+T\,dv^2=0$ sprowadza się tu zatem do postaci:

$$-f''(u)\,du^2-u\,f'(u)\,dv^2=0,$$

skąd otrzymujemy:

$$dv^2=-\frac{f''(u)}{u\,f'(u)}\,du^2,\quad \text{zatem:}\quad dv=\sqrt{-\frac{f''(u)}{u\,f'(u)}}\,du,$$

a stąd:
$$v+C=\int\sqrt{-\frac{f''(u)}{u\,f'(u)}}\,du, \tag{26}$$

jako związek między parametrami u i v, który połączony z równaniami powierzchni obrotowych, wobec stałej dowolnej C, wyznacza układ krzywych asymptotycznych na tejże powierzchni.

W szczególności dla hiperboloidy obrotowej: $x^2+y^2-z^2=1$, czyli: $x=u\cos v$ $y=u\sin v$, $z=\sqrt{u^2-1}$, otrzymamy:

$$f(u)=\sqrt{u^2-1},\quad f'(u)=\frac{u}{\sqrt{u^2-1}},\quad f''(u)=-\frac{1}{(u^2-1)^{3/2}},\quad -\frac{f''(u)}{u\,f'(u)}=\frac{(u^2-1)^{1/2}}{(u^2-1)^{3/2}u^2}=\frac{1}{u^2(u^2-1)},$$

$$\int\sqrt{-\frac{f''(u)}{u f'(u)}}du=\int\frac{du}{u^2(u^2-1)}=\frac{1}{u}-\frac{1}{2}\log\frac{u+1}{u-1},$$

stem szukany związek w postaci: $v+C=\frac{1}{u}-\frac{1}{2}\log\frac{u+1}{u-1}$, a więc linie asymptotyczne, jako przekrój hiperboloidy: $x^2+y^2-z^2=1$ z powierzchniami o równaniu:

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{x^2+y^2}+1}{\sqrt{x^2+y^2}-1}=C.$$

15. Proste minimalne. Prostą, przechodzącą przez dany punkt $P(a, b, c)$ przestrzeni, możemy określić równaniami:

$$x=a+\alpha t,\quad y=b+\beta t,\quad z=c+\gamma t, \tag{27}$$

gdzie t jest dowolnym parametrem; a, b, c przedstawiają spółrzędne danego punktu P; α, β, γ są stałe cechujące kierunek tej prostej.

Każdej wartości parametru t odpowiada pewien punkt $M(x, y, z)$ tej prostej. Odległość punktu $M(x, y, z)$ od punktu $P(a, b, c)$ określa się wzorem:

$$d=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=t\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}.$$

Dla prostych rzeczywistych może być ta odległość tylko wówczas zerem, gdy $t=0$, czyli gdy punkt $M(x, y, z)$ spada z punktem $P(a, b, c)$. Dla prostych urojonych staje się odległość d także wówczas zerem, gdy:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0. \tag{28}$$

Otóż proste urojone tego rodzaju są prostemi o długości równej zeru i nazywają się z tego powodu p r o s t e m i n i m a l n e.

Przez każdy punkt w przestrzeni przechodzi ∞^1 prostych minimalnych Ażeby wyznaczyć ich miejsce geometryczne, połóżmy w (28) wartości z (27) wypływające:

$$\alpha=\frac{x-a}{t},\quad \beta=\frac{y-b}{t},\quad \gamma=\frac{z-c}{t},$$

a otrzymamy równanie:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=0. \tag{29}$$

Równanie to możemy uważać jako równanie kuli o promieniu równym zeru, zwanej k u l ą z e r o w ą, albo też jako równanie s t o ż k a u r o j o n e g o d r u g i e g o r z ę d u o wierzchołku $P(a, b, c)$. Przenosząc punkt $P(a, b, c)$ do początku układu otrzymujemy powyższe równanie w postaci:

$$x^2+y^2+z^2=0, \tag{30}$$

przedstawiającej k u l ę z e r o w ą p u n k t u p o c z ą t k o w e g o, czyli s t o ż e k u r o j o n y d r u g i e g o r z ę d u utworzony z prostych minimalnych, wychodzących z początku układu.

Wszelki stożek utworzony z prostych minimalnych powstaje przez przesunięcie równoległe stożka urojonego, wychodzącego z początku układu. Wszystkie stożki urojone mają co dwie tworzące do siebie równoległe. Płaszczyzna nieskończenie daleka przecina wszystkie te stożki i kule zerowe podług jednego i tego samego koła urojonego. To koło urojone jest wspólnem wszystkim kulom, proste minimalne występują tedy jako proste łączące punkta tego nieskończenie dalekiego koła urojonego z dowolnym punktem przestrzeni.

16. Możemy także w inny sposób dojść do prostych minimalnych. Możemy bowiem każdą powierzchnię drugiego rzędu uważać za powierzchnię

prostokreślną o dwu szeregach prostych tworzących, jeżeli dopuścimy także tworzące urojone.

Nieskończenie dalekie punkta tych tworzących na powierzchni kuli tworzą urojone koło wspólne wszystkim kulom.

A zatem: *Urojone tworzące kuli są same proste minimalne.*

Przyjmijmy kulę:

$$x^2+y^2+z^2=1.$$

Aby otrzymać równanie prostych urojonych na kuli połóżmy:

$$\frac{x+yi}{1-z}=\frac{1+z}{x-yi}=u, \tag{31}$$

albo:

$$\frac{x-yi}{1-z}=\frac{1+z}{x+yi}=-\frac{1}{v}. \tag{32}$$

Równania (31) określają tedy pierwszy szereg tworzących urojonych kuli, równanie (32) — drugi. Oba szeregi tworzą proste minimalne, gdyż proste przeprowadzone przez początek układu równolegle do prostych szeregu (31), mają równania:

$$\frac{x+yi}{-z}=\frac{z}{x-yi}=u, \tag{33}$$

a zatem te proste leżą na stożku:

$$x^2+y^2+z^2=0$$

To samo dotyczy prostych (32). Z równań (31) wypływają stosunki:

$$\frac{x}{\frac{1-u^2}{2}}=\frac{y}{\frac{i(1+u^2)}{2}}=\frac{z}{u}=w,$$

z których:

$$x=\frac{w}{2}\left(1-u^2\right),\quad y=\frac{wi}{2}\left(1+u^2\right),\quad z=wu. \tag{34}$$

Są to równania prostych minimalnych przechodzących przez początek układu.

Proste minimalne przechodzące przez punkt (x_0, y_0, z_0) otrzymują równania:

$$x=x_0+\frac{w}{2}\left(1-u^2\right),\quad y=y_0+\frac{wi}{2}\left(1+u^2\right),\quad z=z_0+wu.$$

Z równań tworzących urojonych kuli wypływa ważny sposób przedstawień spółrzędnych kuli jako funkcyj parametrów u i v urojonych tworzących tej kuli. W szczególności równania:

$$x=\frac{1-uv}{u-v},\quad y=\frac{i(1+uv)}{u-v},\quad z=\frac{u+v}{u-v}, \tag{35}$$

przedstawiają kulę: $x^2+y^2+z^2=1$.

17. Krzywe minimalne nazywamy takie krzywe urojone, których styczne są prostemi minimalnemi, czyli których styczne przecinają nieskończenie dalekie koło urojone wspólne wszystkim kulom. Aby otrzymać równania krzywej minimalnej, szukajmy warunków, którym spółrzędne x, y, z jej punktów, jako funkcye parametru u, muszą uczynić zadość.

Równania stycznej w punkcie (x, y, z) mają kształt:

$$X=x+\alpha v,\quad Y=y+\beta v,\quad Z=z+\gamma v.$$

Ażeby ta prosta była minimalną, musi być:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0, \text{ czyli: } ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=0.$$

Krzywe minimalne są krzywe o długości zera. Własność ta służy często za określenie krzywych minimalnych.

Pisząc warunek $ds^2=0$ w postaci:

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2+\left(\frac{dz}{du}\right)^2=0,$$

zauważymy, że równaniu temu stanie się zadość, gdy:

$$\frac{dx}{du}=\frac{w}{2}\left(1-u^2\right),\quad \frac{dy}{du}=\frac{wi}{2}\left(1+u^2\right),\quad \frac{dz}{du}=wu,$$

gdzie w może być jeszcze dowolną funkcyą parametru u. Oznaczmy ją przez $F(u)$, a otrzymamy:

$$x=\frac{1}{2}\int(1-u^2)F(u)\,du,\qquad y=\frac{i}{2}\int(1+u^2)\,F(u)\,du,\qquad z=\int u\,F(u)\,du,\qquad (36)$$

jako równania krzywych minimalnych.

Zastąpmy $F(u)$ przez $f'''(u)$, a otrzymamy na podstawie całkowania przez części równania krzywych minimalnych w postaci:

$$\begin{aligned} x&=\frac{1}{2}(1-u^2)f''(u)+uf'(u)-f(u),\\ y&=\frac{i}{2}(1+u^2)f''(u)-iuf'(u)+if(u),\qquad z=uf''(u)-f'(u).\end{aligned}\qquad (37)$$

Płaszczyzna ściśle styczna w jakimkolwiek punkcie krzywej minimalnej dotyka się nieskończenie dalekiego koła wspólnego wszystkim kulom.

18. Linie geodezyjne. Linią geodezyjną na powierzchni nazywamy taką linię krzywą, która wyznacza najkrótszą odległość między dwoma punktami danej powierzchni.

Weźmy pod uwagę trzy nieskończenie bliskie punkta A, B, C linii geodezyjnej, to łuk ABC musiałby być najkrótszą drogą między punktami A i C powierzchni. Z trzech nieskończenie bliskich punktów A, B, C linii geodezyjnej musiałby więc punkt średni B być takim punktem powierzchni, przez który przechodzi najkrótsza droga między drugimi dwoma punktami A i C. Trzy po sobie następujące punkta A, B, C linii geodezyjnej wyznaczają koło ściśle styczne do tej krzywej, które jest zarazem kołem krzywizny w pewnym przekroju powierzchni. Jeżeli ten przekrój jest skośnym, to promień koła krzywizny jest mniejszym od promienia krzywizny przekroju normalnego przez punkta A i C przechodzącego. Ze wszystkich łuków kołowych, przechodzących przez dane dwa punkta, jest ten łuk najkrótszy, który należy do koła o największym promieniu. Jeżeliby więc łuk ABC był najmniejszym ze wszystkich łuków przechodzących przez punkta A i C powierzchni, to jego promień musiałby być największym, koło krzywiznowe musiałoby być więc leżeć na płaszczyźnie normalnej tego punktu.

A zatem: *Płaszczyzna ściśle styczna w danym punkcie linii geodezyjnej musi być płaszczyzną normalną w danym punkcie powierzchni.*

Jest to charakterystyczna własność linij geodezyjnych, na której możemy oprzeć wyznaczanie linij geodezyjnych na danej powierzchni.

19. Analityczne wyznaczanie linij geodezyjnych na powierzchni: $z=f(x, y)$. Linia geodezyjna na powierzchni posiada według poprzedniego art. tę własność, że jej płaszczyzna ściśle styczna w pewnym punkcie x, y, z określona równaniem:

$$P(X-x)+Q(Y-y)+R(Z-z)=0,$$

przechodzi przez normalną w tym punkcie do powierzchni wykreśloną, t. j. przez prostą:

$$X-x+p(Z-z)=0, \quad Y-y+q(Z-z)=0,$$

musi się zatem spełnić relacya:

$$Pp+Qq-R=0, \tag{38}$$

gdzie: $\quad P=dy\,d^2z-dz\,d^2y, \quad Q=dz\,d^2x-dx\,d^2z, \quad R=dx\,d^2y-dy\,d^2x.$

Uwzględniając te wartości, otrzymujemy równanie różniczkowe:

$$(dy\,d^2z-dz\,d^2y)p+(dz\,d^2x-dx\,d^2z)\,q-(dx\,d^2y-dy\,d^2x)=0,$$

które uporządkowane podług dz^2 i dz sprowadza się do postaci:

$$d^2z(p\,dy-q\,dx)-dz(p\,d^2y-q\,d^2x)-(dx\,d^2y-dy\,d^2x)=0,$$

a że dla każdego punktu na powierzchni $z=f(x, y)$ mamy:

$$d^2z=r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2,$$

przeto otrzymujemy z powyższego równania następujące:

$$(p^2+q^2+1)(dy\,d^2x-dx\,d^2y)+(p\,dy-q\,dx)(r\,d^2x+2s\,dx\,dy+t\,dy^2)=0.$$

Przyjmując x za zmienną niezależną, a więc kładąc $d^2x=0$ i dzieląc równanie przez dx^3, otrzymamy równanie różniczkowe:

$$\left(p^2+q^2+1\right)\frac{d^2y}{dx^2}-\left(p\frac{dy}{dx}-q\right)\left[r+2s\frac{dy}{dx}+t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=0, \tag{39}$$

jako równanie różniczkowe rzutów linij geodezyjnych powierzchni $z=f(x, y)$ na płaszczyznę XOY.

20. Linie geodezyjne na powierzchniach obrotowych. Opierając się na tej własności linii geodezyjnych, że ich główne normalne wpadają w normalne powierzchni, otrzymamy jako równania różniczkowe linij geodezyjnych na powierzchni obrotowej, określonej równaniem:

$$z=f(\sqrt{x^2+y^2}),$$

szereg stosunków:

$$\frac{d^2x}{ds^2}:\frac{d^2y}{ds^2}:\frac{d^2z}{ds^2}=-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{df(\sqrt{x^2+y^2})}{d\sqrt{x^2+y^2}}:-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{df(\sqrt{x^2+y^2})}{d\sqrt{x^2+y^2}}:1,$$

z których wypływa równanie:

$$\frac{d^2x}{ds^2}y-\frac{d^2y}{ds^2}x=0, \tag{40}$$

jako równanie różniczkowe rzutów linij geodezyjnych na płaszczyznę XOY.

Równanie to możemy przedstawić w postaci:

$$\frac{d}{ds}(x\,dy-y\,dx)=0.$$

Wprowadzając spółrzędne biegunowe: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, otrzymamy:

$$x\,dy-y\,dx=r^2\frac{d\varphi}{dx^2+dy^2}=r^2\frac{d\varphi}{ds}.$$

Tym sposobem przekształci się powyższe równanie różniczkowe w następujące:

$$\frac{d}{ds}\left(r^2\frac{d\varphi}{ds}\right)=0,$$

z którego wypływa równanie różniczkowe pierwszego rzędu w postaci:

$$r^2\frac{d\varphi}{ds}=C, \tag{41}$$

gdzie C jest stałą dowolną.

21. Znaczenie geometryczne równania: $r^2\frac{d\varphi}{ds}=C$. Weźmy pod uwagę element PP' jako element linii geodezyjnej i przeprowadźmy przez punkt $P(x, y, z)$, równoleżnik, a przez punkt P' południk, który przetnie równoleżnik w Q, natenczas z trójkąta prostokątnego PQP' otrzymamy:

$$PQ = PP' \sin PP'Q,$$

Oznaczając $\sphericalangle PP'Q$, który możemy uważać za kąt, pod jakim linia geodezyjna przecina południk, przez α i mając na uwadze, że: $PQ=r\,d\varphi$, $PP'=ds$, otrzymamy:

$$r\,d\varphi = ds \,.\, \sin\alpha, \text{ więc: } r\frac{d\varphi}{ds}=\sin\alpha.$$

Równanie: $r^2\frac{d\varphi}{ds}=C$ przedstawia się wobec tego w postaci:

$$r\sin\alpha = C.$$

To znaczy: *W każdym punkcie linii geodezyjnej na powierzchni obrotowej iloczyn z promienia równoleżnika przez sinus kąta nachylenia linii geodezyjnej do południka jest ilością stałą.*

22. Długość łuku linii geodezyjnej na powierzchni obrotowej $z=f(r)$. Z równania: $r^2\frac{d\varphi}{ds}=C$, wypływa:

$$ds^2=\frac{r^4\,d\varphi^2}{C^2}, \tag{42}$$

a że: $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=dr^2+r^2\,d\varphi^2+f'(r)\,dr^2=r^2d\varphi^2+[1+(f'(r))^2]dr^2$,

przeto otrzymujemy z (42):

$$\frac{r^2\,d\varphi^2}{C^2}(r^2-C^2)=[1+[f'(r)]^2]dr^2,$$

a więc:

$$d\varphi=\frac{C}{r}\sqrt{\frac{1+[f'(r)]^2}{r^2-C^2}}\,dr,$$

a że: $d\varphi=\frac{C\,ds}{r^2}$, przeto będzie:

$$ds=r\sqrt{\frac{1+[f'(r)]^2}{r^2-C^2}}\,dr,$$

zatem otrzymujemy:

$$s=\int r\sqrt{\frac{1+[f'(r)]^2}{r^2-C^2}}\,dr+C_1, \tag{43}$$

wzór podający długość łuku linii geodezyjnej jako funkcyę promienia r.

23. Warstwice i linie największego spadu. Przekroje powierzchni płaszczyznami równoległemi do płaszczyzny (poziomej) XOY, nazywają zwykle warstwicami powierzchni, a linie prostopadłe do warstwic nazywają się liniami największego spadu.

Warstwice powierzchni $z=f(x, y)$ określone są równaniami:

$$z=f(x, y), \quad z=c,$$

z których wypada równanie równiczkowe $dz=0$, czyli:

$$p\,dx+q\,dy=0, \tag{44}$$

jako równanie różniczkowe warstwic powierzchni: $z=f(x, y)$.

Linie największego spadu, jako linie do warstwic prostopadłe, mają w każdym punkcie styczne prostopadłe do stycznej, jaką w tym punkcie ma odnośna warstwica powierzchni.

Ponieważ styczna w danym punkcie warstwicy ma na podstawie (44) kierunek określony równaniem:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{p}{q},$$

przeto kierunek stycznej do linii największego spadu, przechodzącej przez ten punkt powierzchni, będzie określony równaniem:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{q}{p},$$

skąd otrzymujemy równanie różniczkowe:

$$q\,dx-p\,dy=0, \tag{45}$$

jako równanie różniczkowe linij największego spadu na danej powierzchni.

24. Linie największego spadu na ellipsoidzie. Z równania ellipsoidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ otrzymujemy za pomocą całkowania częściowego:

$$\frac{x}{a^2}+\frac{z}{c^2}p=0, \quad \frac{y}{b^2}+\frac{z}{c^2}q=0,$$

a stąd:

$$\frac{q}{p}=\frac{a^2y}{b^2x},$$

zatem równanie różniczkowe linij największego spadu na tejże ellipsoidzie przedstawia się w postaci:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a^2y}{b^2x}, \text{ czyli: } \frac{dy}{y}=\frac{a^2}{b^2}\frac{dx}{x}.$$

Całkując to równanie, otrzymujemy:

$$\log y=\frac{a^2}{b^2}\log x+C,$$

skąd kładąc: $\frac{a^2}{b^2}=m$ dostajemy równanie: $y=cx^m$, przedstawiające wobec stałej dowolnej c układ powierzchni walcowych, które przecinają daną ellipsoidę podług krzywych największego spadu.

25. Warstwice i linie największego spadu na powierzchni obrotowej $z=f(r)$. Mamy tu:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}, \quad z=f(\sqrt{x^2+y^2}),$$

zatem:

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{dz}{dr}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$q=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{dz}{dr}\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{dz}{dr}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Równanie różniczkowe linij największego spadu kształtu: $p\,dy-q\,dx=0$ otrzymuje tu więc postać:

$$x\,dy-y\,dx=0, \text{ czyli: } \frac{dy}{y}=\frac{dx}{x},$$

skąd za pomocą całkowania otrzymujemy:

$$\log y=\log x+\log c, \text{ czyli równanie: } y=cx,$$

które przedstawia przy stałej dowolnej c pęk płaszczyzn przechodzących przez oś OZ, jako oś obrotu.

Linie największego spadu są więc południkami powierzchni obrotowej, jeżeli warstwice są równoleżnikami.

26. Isofoty na danej powierzchni. Isofotą czyli linią równego oświetlenia na danej powierzchni nazywamy linię krzywą na powierzchni, mającą tę własność, że płaszczyzny styczne do powierzchni wykreślone w poszczególnych punktach tej linii są do kierunku światła jednakowo nachylone.

Niech α, β, γ oznaczają kąty, jakie promień światła tworzy z osiami układu, płaszczyzna styczna w punkcie $P(x, y, z)$ powierzchni $F(x, y, z)=0$ określona jest równaniem:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0.$$

Kąt nachylenia tej płaszczyzny do kierunku światła wyznacza wzór:

$$\sin\omega=\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial F}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial F}{\partial z}\cos\gamma}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}$$

Kładąc $\sin^2\omega=C$, otrzymamy stąd równanie:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial F}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial F}{\partial z}\cos\gamma\right)^2=C\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right\}, \qquad (46)$$

przedstawiające powierzchnię, której przekrój z powierzchnią $F(x, y, z)=0$ określa isofotę, odpowiadającą danej wartości stałej dowolnej C.

W szczególności isofoty na ellipsoidzie: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ określają się jako przekroje ellipsoidy z powierzchniami:

$$\left(\frac{x}{a^2}\cos\alpha+\frac{y}{b^2}\cos\beta+\frac{z}{c^2}\cos\gamma\right)^2=C\left\{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right\}, \qquad (47)$$

które są stożkami drugiego rzędu, mającymi wierzchołek w początku układu.

Ćwiczenia LVI.

1) Wykazać, że odcinając na prostopadłej do przekroju środkowego ellipsoidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, począwszy od środka i po obu jego stronach, połowy długości obu osi tego przekroju otrzymamy jako miejsce punktów końcowych powierzchnię czwartego rzędu:

$$\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2-a^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2-b^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2-c^2}=0,$$

zwaną powierzchnią falową Fresnela.

2) Wykazać, że linia prosta leży na danej powierzchni n-go rzędu, jeżeli ma z nią $(n+1)$ punktów wspólnych.

3) Wykazać, że na każdej powierzchni trzeciego rzędu, która nie jest powierzchnią prostokreślną, znajduje się 27 linij prostych, rzeczywistych lub urojonych.

4) Wyprowadzić równanie powierzchni, której płaszczyzny styczne są nachylone do płaszczyzny XOY pod kątem stałym α, jeżeli ślady tych płaszczyzn na XOY są styczne do ellipsy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

5) Wykazać, że kąt α zawarty między dwiemi krzywemi $u=a$, $v=b$, powierzchni $x=f(u,v)$, $y=\varphi(u,v)$, $z=\psi(u,v)$ wyznacza wzór:

$$\cos\alpha=\frac{F}{\sqrt{EG}}=\frac{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}}.$$

6) Wyprowadzić warunek, pod którym krzywe $u=a$, $v=b$ powierzchni $x=f(u,v)$, $y=\varphi(u,v)$, $z=\psi(u,v)$ przecinają się pod kątem prostym.

7) Wykazać, że pole d^2F elementu powierzchni: $x=f(u,v)$, $y=\varphi(u,v)$, $z=\psi(u,v)$ zawarte między parą krzywych $u=a$, $v=b$ i parą krzywych sąsiednich wyraża się wzorem: $d^2F=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$.

gdzie $$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\&,\quad G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\&,\quad F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\&.$$

8) Wykazać, że krzywizny główne w danym punkcie powierzchni: $x=u\cos\varphi$, $y=u\sin\varphi$, $z=\varphi(u)$ otrzymują wartości:

$$\frac{1}{\rho_1}=\frac{\varphi''(u)}{[1+[\varphi'(u)]^2]^{3/2}},\quad \frac{1}{\rho_2}=u\frac{\varphi'(u)}{[1+[\varphi'(u)]^2]^{1/2}}.$$

9) Wykazać, że dwa główne kierunki w punkcie: $P(x,y,z)$ powierzchni: $F(x,y,z)=0$ są wyznaczone równaniem:

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x}, & d\frac{\partial F}{\partial x}, & dx\\ \frac{\partial F}{\partial y}, & d\frac{\partial F}{\partial y}, & dy\\ \frac{\partial F}{\partial z}, & d\frac{\partial F}{\partial z}, & dz\end{vmatrix}=0$$

10) Wykazać, że równanie różniczkowe linij krzywiznowych na powierzchni $z=f(x,y)$ ma kształt:

$$[pqr-s(1+p^2)]dx^2-[pqt-s(1+q^2)]dy^2+dx\,dy[r(1+q^2)-t(1+p^2)]=0.$$

czyli: $$\begin{vmatrix}1+p^2, & pq, & 1+q^2\\ r, & s & t\\ dy^2, & -dx\,dy, & dx^2\end{vmatrix}=0.$$

11) Wykazać, że równanie różniczkowe linij krzywiznowych na powierzchni: $F(x,y,z)=0$ możemy przedstawić w postaci:

$$F=0,\quad \begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x}, & d\frac{\partial F}{\partial x}, & dx\\ \frac{\partial F}{\partial y}, & d\frac{\partial F}{\partial y}, & dy\\ \frac{\partial F}{\partial z}, & d\frac{\partial F}{\partial z}, & dz\end{vmatrix}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0.$$

12) Wykazać, że linie krzywiznowe powierzchni: $x=f(u,v)$, $y=\varphi(u,v)$, $z=\psi(u,v)$ cechuje równanie różniczkowe, w postaci wyznacznika:

$$\begin{vmatrix}E, & F, & G\\ R, & S, & T\\ du^2, & -du\,dv, & dv^2\end{vmatrix}=0.$$

13) Dowieść, że przekrój kuli z płaszczyzną jest ich linią krzywiznową.

14) Dowieść, że gdy płaszczyzna przecina powierzchnię pod stałym kątem, krzywa przekroju jest linią krzywiznową tej powierzchni.

15) Wykazać, że główne promienie krzywizny w punkcie u, v powierzchni: $x=f(u,v)$; $y=\varphi(u,v)$, $z=\psi(u,v)$, której krzywemi parametrowemi są linie krzywiznowe, określają się wzorami:

$$\frac{1}{\rho_1}=\frac{R}{E},\quad \frac{1}{\rho_2}=\frac{T}{G},$$

16) **Wykazać**, że liniami krzywiznowemi powierzchni obrotowej są równoleżniki południki.

17) **Wyznaczyć** wszystkie powierzchnie, których linie krzywiznowe są kołami.

18) **Dowieść**, że krzywa przekroju dwu powierzchni spółogniskowych rzędu drugiego st linią krzywiznową dla obu powierzchni.

19) **Wykazać**, że równanie różniczkowe linij asymptotycznych na powierzchni $z = f(x, y)$ kształt:

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0.$$

20) **Wykazać**, że równania różniczkowe krzywych asymptotycznych na powierzchni $, y, z) = 0$ przedstawiają się w postaci:

$$F = 0,\quad \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0.\quad d\frac{\partial F}{\partial x}dx + d\frac{\partial F}{\partial y}dy + d\frac{\partial F}{\partial z}dz = 0.$$

21) **Wyprowadzić** równanie różniczkowe krzywych asymptotycznych na powierzchni:

$$x = u\cos v,\quad y = u\sin v,\quad z = \frac{b}{a}\sqrt{u^2 - a^2}.$$

22) **Wykazać**, że kierunki asymptotyczne w punkcie: $P(x, y, z)$ powierzchni: $F(x, y, z) = 0$ wyznaczone równaniem:

$$d\frac{\partial F}{\partial x}dx + d\frac{\partial F}{\partial y}dy + d\frac{\partial F}{\partial z}dz = 0.$$

23) **Wyznaczyć** krzywe przestrzenne, których krzywizna $\frac{1}{\rho}$ jest stale równa zeru.

24) **Wyznaczyć** krzywe przestrzene, których skręcenie jest stale równe zeru.

25) **Wyznaczyć** linie krzywe przestrzenne, w których stosunek krzywizny do skręce- i jest stały.

26) **Znaleźć** obwiednią płaszczyzn ściśle stycznych danej krzywej przestrzennej.

27) **Znaleźć** obwiednią płaszczyzn normalnych danej krzywej przestrzennej.

28) **Znaleźć** obwiednią płaszczyzn rektyfikacyjnych danej krzywej przestrzennej.

29) **Jaką** powierzchnię przedstawiają równania parametrowe:

$$x = \frac{1 - uv}{u - v},\quad y = \frac{i(1 + uv)}{u - v},\quad z = \frac{u + v}{u - v}.$$

30) **Zbadać** przekrój ellipsoidy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ z kulą: } x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

31) **Zbadać** przekrój stożka obrotowego: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ z walcem:

$$\log(x^2 + y^2) = \text{arc tang}\,\frac{y}{x}.$$

32) **Wykazać**, że krzywe parametrowe powierzchni: $x = f(u, v)$, $y = \varphi(u, v)$, $z = \psi(u, v)$ krzywemi asymptotycznemi, skoro $R = T = 0$.

33) **Wykazać**, że punkta paraboliczne powierzchni: $F(x, y, z) = 0$ tworzą krzywą prze- iju powierzchni $F = 0$ z powierzchnią wyznacznikową (powierzchnią Hessego):

$$\begin{vmatrix} F_{11}, & F_{12}, & F_{13}, & F_1 \\ F_{21}, & F_{22}, & F_{23}, & F_2 \\ F_{31}, & F_{32}, & F_{33}, & F_3 \\ F_1, & F_2, & F_3, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

34) **Wykazać**, że równanie różniczkowe linij geodezyjnych na powierzchni: $F(x, y, z) = 0$ ożna przedstawić w postaci:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}, & dx, & d^2x \\ \frac{\partial F}{\partial y}, & dy, & d^2y \\ \frac{\partial F}{\partial z}, & dz, & d^2z \end{vmatrix} = 0.$$

35) Wykazać, że w każdym punkcie P linii geodezyjnej na danej powierzchni płaszczyzna ściśle styczna w punkcie P tejże linii jest płaszczyzną normalną w punkcie P powierzchni.

36) Wykazać, że główna normalna linii geodezyjnej jest normalną do powierzchni.

37) Wykazać, że krzywe parametrowe powierzchni: $x=f(u, v)$, $y=\varphi(u, v)$, $z=\psi(u, v)$ są liniami krzywiznowemi, skoro $F=S=0$.

38) Wyprowadzić równanie różniczkowe linij krzywiznowych na powierzchni walcowej $z=\varphi(x)$.

39) Wyprowadzić równanie różniczkowe linij krzywiznowych na powierzchni stożkowej: $x=u\varphi(v)$, $y=uv$, $z=u$.

40) Wykazać, że równanie rzutu linij krzywiznowych na powierzchni śrubowej: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=a\varphi$, na płaszczyznę XOY można przedstawić w spółrzędnych biegunowych r, φ w postaci: $r=\frac{1}{2}\left(e^{c\pm\varphi}-a^2e^{-c\pm\varphi}\right)$.

41) Wyprowadzić równanie różniczkowe linij asymptotycznych na konoidach: $x=u$, $y=uv$, $z=\varphi(v)$.

42) Wykazać, że równanie różniczkowe linij asymptotycznych na paraboloidzie hyperbolicznej: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ możemy sprowadzić do postaci:

$$\left(\frac{dx}{a}-\frac{dy}{b}\right)\left(\frac{dx}{a}+\frac{dy}{b}\right)=0.$$

43) Wykazać, że linia spadu przechodząca przez punkt (x_1, y_1), na powierzchni drugiego rzędu: $ax^2+by^2+cz^2=d$ występuje jako przekrój tej powierzchni z powierzchnią walcową o równaniu: $\left(\frac{x}{x_1}\right)^b=\left(\frac{y}{y_1}\right)^a$.

44) Wykazać, że powierzchnie posiadające płaszczyzny styczne jednakowo nachylone do danej płaszczyzny są powierzchniami utworzonemi przez styczne do linij śrubowych.

45) Wykazać, że między powierzchniami obrotowemi istnieje tylko jeden rodzaj powierzchni obrotowych minimalnych, a tymi są t. zw. katenoidy obrotowe, t. j. powierzchnie powstałe przez obrót linii łańcuchowej.

46) Wyprowadzić równania krzywej, zwanej krzywą loxodromiczną, która przecina południki kuli pod stałym kątem.

Rozwiązania LVII. 17) Cyklida Dupina (fig. 259). 23) Linie proste. 24) Krzywe płaskie. 25) Linia śrubowa na dowolnym walcu. 26) Powierzchnia rozwijalna utworzona przez styczne do linii krzywej. 27) Powierzchnia rozwijalna utworzona z osi krzywiznowej, czyli t. zw. powierzchnia biegunowa danej krzywej. 28) Powierzchnia rozwijalna rektyfikacyjna. 29) Kula: $x^2+y^2+z^2=1$. 30) Ellipsa sferyczna. 31) Spiralna stożkowa. 38) $dx\,dy=0$. 39) $u^2\varphi''(v)dv\left\{[1+v^2+[\varphi(v)]^2]du+u[v+\varphi(v)\varphi'(v)]dv\right\}=0$. 41) $du[u\varphi''(v)dv-2\varphi'(v)du]=0$.



Fig. 259.

Literatura. Luigi Bianchi: Vorlesungen über Diffentialgeometrie. Autorisirte Übersetzung von Max Lukat. Leipzig 1894. Dr. Georg Scheffers: Einführung in die Theorie der Curven in der Ebene und im Raume. Leipzig 1901. Dr. Georg Scheffers: Einführung in die Theorie der Flächen. Leipzig 1902.

Tematy do rozprawek naukowych:

1. Teorya powierzchni Weingartena.
2. Linie krzywiznowe na powierzchniach drugiego rzędu.
3. Isofoty na powierzchniach rzędu drugiego przy oświetleniu równoległem.

Wykład LVII.

Wstęp do teoryi równań różniczkowych.

1. Określenie i podział równań różniczkowych. Równaniem różniczkowem nazywamy równanie, określające związek między zmienną zależną, jej pochodnemi jakiegokolwiek rzędu i zmiennemi niezależnemi.

Równania różniczkowe dzielimy na:

1. równania różniczkowe zwyczajne;
2. równania różniczkowe cząstkowe.

Równania różniczkowe zwyczajne nazywamy równania, w których jest jedna tylko zmienna niezależna, a do niej są odniesione pochodne zmiennej zależnej. W przypadku kilku zmiennych zależnych należy mieć tyle równań, ile jest zmiennych zależnych, aby można te zmienne zależne określić jako funkcye danej jednej zmiennej niezależnej.

Równania różniczkowe cząstkowe nazywamy równania, w których występuje kilka zmiennych niezależnych, najmniej dwie zmienne niezależne, a do nich odniesione są pochodne cząstkowe zmiennej zależnej. W przypadku kilku zmiennych zależnych należy mieć tyle równań różniczkowych cząstkowych, ile jest zmiennych zależnych, aby można było te zmienne zależne określić jako funkcye danych zmiennych niezależnych.

2. Rząd i stopień równania różniczkowego. Rzędem równania różniczkowego nazywamy najwyższy rząd pochodnej, jaka w tem równaniu się pojawia; stopień równania różniczkowego określa wymiar poszczególnych wyrazów tego równania, o ile jest ono sprowadzone do postaci całkowitej wymiernej, w której wymiar jakiegokolwiek wyrazu stanowi suma wykładników potęgowych odnośnej funkcyi i jej pochodnych występujących jako czynniki tego wyrazu.

W myśl tego określenia jest np. równanie:

$$\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot y-x^2(y^2-1)\frac{d^4y}{dx^4}+5x^3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=0,$$

równaniem różniczkowem zwyczajnem czwartego rzędu, bo 4 jest rzędem najwyższej pochodnej: $\frac{d^4y}{dx^4}$, jaka w tem równaniu występuje; jest ono zarazem równaniem różniczkowem zwyczajnem czwartego rzędu a trzeciego stopnia, gdyż pierwszy wyraz: $\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot y$ jest wymiaru trzeciego, drugi: $x^2(y^2-1)\frac{d^4y}{dx^4}$ także wymiaru trzeciego, a trzeci: $5x^3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$ jest wymiaru drugiego.

Równania różniczkowe pierwszego stopnia, jakiegokolwiek zresztą rzędu, nazywamy zwykle równaniami różniczkowemi liniowemi.

Równanie np.: $$x^2\frac{d^3y}{dx^3}+3x\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y+1=0$$

jest zwyczajnem równaniem różniczkowem liniowem rzędu trzeciego.

3. Całki równania różniczkowego. Całkami równania różniczkowego nazywamy funkcye, które wraz ze swemi pochodnemi czynią zadość danemu równaniu różniczkowemu, sprowadzając je do tożsamości.

Wyszukiwanie takich funkcyj nazywamy całkowaniem danego równania różniczkowego.

4. Tworzenie równań różniczkowych zwyczajnych. Z danego równania pierwotnego o dwu zmiennych, jednej niezależnej x i jednej zależnej y, zawierającego n stałych dowolnych $c_1, c_2, \ldots, c_n$, w postaci:

$$F(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n)=0, \tag{1}$$

otrzymamy, na podstawie różniczkowania n-razy powtarzanego, równania różniczkowe:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'=0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}y'+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial F}{\partial y}y''=0,\ \ldots,$$

$$\ldots\ \frac{\partial^n F}{\partial x^n}+n\frac{\partial^n F}{\partial x^{n-1}\partial y}y'+\ldots+\frac{\partial F}{\partial y}y^{(n)}=0,$$

kolejno 1-go, 2-go, .., n-go rzędu, które w połączeniu z danem równaniem prowadzą po wyrugowaniu n stałych dowolnych $c_1, c_2, \ldots, c_n$ do jednego równania różniczkowego n-go rzędu w postaci:

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0, \tag{2}$$

które nazywamy równaniem różniczkowem danego równania pierwotnego, nazywając naodwrót dane równanie pierwotne o n stałych dowolnych całką ogólną otrzymanego równania różniczkowego zwyczajnego n-go rzędu.

5. Równania różniczkowe linij krzywych. Z równania układu linij krzywych kształtu: $F(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n)$, zawierającego n dowolnych parametrów otrzymujemy na podstawie r-krotnego różniczkowania r równań różniczkowych, z których przy pomocy danego równania możemy wyrugować r stałych (por. T. I. str. 674), tym sposobem otrzymujemy $\binom{n}{r}$ równań różniczkowych r go rzędu, każde o $(n-r)$ stałych dowolnych, a z tych równań jest tylko $(r+1)$ równań od siebie niezależnych Różniczkując dane równanie n razy, otrzymujemy n równań różniczkowych, z których przy pomocy danego równania możemy wyrugować wszystkie n stałe, a otrzymamy jedno równanie n-go rzędu bez stałych dowolnych, zwane równaniem różniczkowem danego układu linij krzywych.

Poszczególne równania różniczkowe, otrzymane z danego równania układu krzywych wypowiadają pewne własności poszczególnych krzywych tego układu, zależne od wartości stałych dowolnych występujących w odnośnych równaniach.

Równanie różniczkowe n-go rzędu bez stałych dowolnych wypowiada wspólną własność wszystkich krzywych danego układu.

Geometryczna interpretacya tych własności zależy od rzędu równania i opiera się na geometrycznem znaczeniu pochodnych pierwszego i wyższych rzędów.

W myśl tego znaczenia równania różniczkowe pierwszego rzędu wypowiadają własności linij krzywych, danem równaniem pierwotnem określonych, dotyczące styczności i elementów związanych z kierunkiem i położeniem prostych stycznych w punktach tychże linij krzywych.

Równania różniczkowe drugiego rzędu wypowiadają własności linij krzywych, danem równaniem pierwotnem określonych, dotyczące krzywizny i elementów od promienia krzywizny zależnych, w punktach tychże linij krzywych.

Równania różniczkowe n-go rzędu wypowiadają własności ścisłej styczności danych krzywych układu z prostszemi liniami krzywemi n-go rzędu, względnie z krzywemi parabolicznemi n-go rzędu.

6. Przykłady równań różniczkowych poszczególnych linij krzywych. α) Równanie linii prostej: $y=mx+b$, zawierające dwie stałe dowolne m i b, daje dwa równania różniczkowe pierwszego rzędu, z których każde zawiera tylko jedną ze stałych m i b, w postaci:

$$\frac{dy}{dx}=m, \quad y-x\frac{dy}{dx}=b, \text{ czyli: } y'=m, \quad y-xy'=b,$$

wypowiadające własności linii prostej zależne od jednego spółczynnika m, względnie b, a prowadzi tylko do jednego równania różniczkowego drugiego rzędu kształtu:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0, \text{ czyli: } y''=0, \qquad (3)$$

które jest równaniem różniczkowem wszystkich linij prostych, cechującem linie proste, jako linie o nieskończenie wielkich promieniach krzywizny, czyli o krzywiźnie równej zeru w każdym z ich punktów.

β) Równanie koła: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ ma trzy stałe dowolne: α, β, r prowadzi zatem do $\binom{3}{1}=3$ równań różniczkowych pierwszego rzędu, z których każde zawiera tylko dwie stałe, wreszcie do $\binom{3}{2}=3$ równań różniczkowych drugiego rzędu, z których każde zawiera tylko jedną z powyższych trzech stałych, a daje tylko jedno równanie różniczkowe trzeciego rzędu bez stałych dowolnych. Równania te wynikają z równań:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2, \quad (x-\alpha)+(y-\beta)\frac{dy}{dx}=0,$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}=0, \quad 3\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+(y-\beta)\frac{d^3y}{dx^3}=0, \qquad (4)$$

dających ostatecznie równanie różniczkowe wszystkich kół w postaci:

$$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{d^3y}{dx^3}-3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=0, \qquad (5)$$

czyli:

$$(1+y'^2)y'''-3y'y''^2=0,$$

wypowiadające wspólną kół jako krzywych o niezmiennej krzywiźnie (t. j. dla których $\frac{d\varrho}{dx}=0$).

γ) Ogólne równanie krzywych drugiego rzędu, kształtu:

$$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+1=0, \tag{6}$$

ma pięć stałych dowolnych, prowadzi zatem do równania różniczkowego piątego rzędu, jako równania różniczkowego wszystkich ∞^5 krzywych stożkowych na płaszczyźnie, które przy pomocy rachunków powyżej wskazanych możemy ostatecznie sprowadzić do postaci:

$$9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\frac{d^5y}{dx^5}-45\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{d^4y}{dx^4}+40\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3=0, \tag{7}$$

czyli:

$$9y''^2y^{(V)}-45y''y'''y^{(IV)}+40y'''^3=0.$$

Uwaga. Dwa równania różniczkowe pochodzą od tej samej funkcyi pierwotnej, skoro po wyrugowaniu swych stałych prowadzą do tego samego równania różniczkowego bez stałych dowolnych.

7. Całka ogólna zwyczajnego równania różniczkowego rzędu pierwszego.

Równanie różniczkowe pierwszego rzędu, kształtu: $\frac{dy}{dx}=f_1(x, y)$, podaje pierwszą pochodną niewiadomej funkcyi y jako wiadomą funkcyą f_1 zmiennej niezależnej x i jej niewiadomej funkcyi y. Na podstawie tego równania możemy przedstawić wszelkie pochodne wyższych rzędów tejże niewiadomej funkcyi y, jako znane funkcye zmiennej niezależnej x i zależnej y. Mianowicie dostajemy najpierw:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y}f_1(x, y),$$

zatem:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f_2(x, y).$$

Podobnie znajdziemy:

$$\frac{d^3y}{dx^3}=f_3(x, y),\quad \frac{d^4y}{dx^4}=f_4(x, y),\ldots,\ \frac{d^ny}{dx^n}=f_n(x, y).$$

Niech będzie tedy $y=\varphi(x)$ szukaną funkcyą, czyniącą zadość danemu równaniu różniczkowemu, tedy na podstawie wzoru Taylora odpowiada jej rozwinięcie w postaci szeregu potęgowego:

$$y=\varphi(x_0)+\varphi'(x_0)\frac{x-x_0}{1!}+\varphi''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!}+\varphi'''(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{3!}+\ldots+\varphi^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}+\ldots$$

Przyjmijmy, że dla $x=x_0$ jest $y=\varphi(x_0)=y_0$ gdzie y_0 jest stałą dowolną, natenczas będzie:

$$\varphi'(x_0)=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}=f_1(x_0, y_0),\quad \varphi''(x_0)=\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x_0}=f_2(x_0, y_0),\ldots,$$

$$\varphi^{(n)}(x_0)=\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_{x=x_0}=f_n(x_0, y_0),\ldots,$$

zatem będzie:

$$y=\varphi(x)=y_0+f_1(x_0, y_0)\frac{x-x_0}{1!}+f_2(x_0, y_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!}+\ldots+f_n(x_0, y_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}+\ldots \tag{8}$$

ogólnem rozwiązaniem czyli ogólną całką danego równania różniczkowego, zawierającą jedną stałą dowolną y_0.

Jeżeli przyjmiemy $x_0=0$ i oznaczymy odpowiednią wartość szukanej funkcyi przez c, wtedy przedstawimy szukaną całkę ogólną w postaci szeregu potęgowego:

$$y=\varphi(x)=c+f_1(0,\ c)x+f_2(0,\ c)\frac{x^2}{2!}+\ldots+f_n(0,\ c)\frac{x^n}{n!}+\ldots, \quad (9)$$

w którym c jest jedną stałą dowolną.

Tym sposobem dochodzimy do następującego twierdzenia:

Każdemu równaniu różniczkowemu pierwszego rzędu odpowiada zawsze pewne rozwiązanie ogólne o jednej stałej dowolnej, czyli pewna całka całka ogólna, którą możemy zawsze przedstawić w postaci szeregów potęgowych.

Nadając stałej dowolnej c pewne wartości szczególne, otrzymamy szczególne rozwiązania, czyli t. zw. całki szczególne danego równania różniczkowego.

8. Geometryczny obraz całek szczególnych i całki ogólnej danego równania różniczkowego pierwszego rzędu. Uważając płaszczyznę jako zbiór ∞^2 punktów (x, y), określamy danem równaniem zwyczajnem kształtu: $F(x, y)=0$ zbiór ∞^1 punktów, tworzących w ogólności pewną formę jednowymiarową czyli pewną linię krzywą na płaszczyźnie. Pierwsza pochodna $\frac{dy}{dx}=y'$ wyznacza kierunek elementu ds w jakimkolwiek punkcie $P(x,\ y)$ tejże linii krzywej. Każdy taki element łączy punkt $P(x,\ y)$ z punktem sąsiednim: $Q(x+dx,\ y+dy)$ tejże linii krzywej i może być nazwany elementem dwupunktowym płaszczyzny, a położenie jego określają trzy wielkości, jako to wielkości x, y, cechujące spółrzędne jego punktu wyjścia i wielkość: $y'=\frac{dy}{dx}$, cechująca jego kierunek. Płaszczyzna posiada ∞^3 takich elementów dwupunktowych, a wszelkie równanie między trzema wielkościami x, y, y' kształtu $f(x,\ y,\ y')=0$ określa zbiór ∞^2 elementów dwupunktowych, wybranych z pośród ∞^3 elementów, mieszczących się na płaszczyźnie w sposób danem równaniem $f(x,\ y,\ y')=0$ określony.

Przyjąwszy dowolnie pewien punkt $P(x,\ y)$ na płaszczyźnie, znajdziemy na podstawie danego równania różniczkowego rzędu i stopnia pierwszego kształtu: $f(x,\ y,\ y')=0$ pewną wartość na y', a zatem pewne położenie elementu dwupunktowego odpowiadającego, na podstawie danego równania różniczkowego, przyjętemu punktowi $P(x,\ y)$ płaszczyzny. Uważając teraz koniec tego elementu dwupunktowego, t. j. punkt $Q(x+dx,\ y+dy)$ jako początek nowego elementu dwupunktowego, znajdziemy znowu na podstawie tego samego równania różniczkowego nową wartość y', cechującą położenie następnego elementu dwupunktowego, odpowiadającego punktowi: $Q(x+dx,\ y+dy)$ i t. d.

Z tego widzimy, że każdemu punktowi $P(x,\ y)$ płaszczyzny odpowiada na podstawie danego równania różniczkowego rzędu i stopnia pierwszego pewien zbiór elementów dwupunktowych, tworzących pewną linię krzywą na płaszczyźnie przez tenże punkt $P(x,\ y)$ przechodzącą, która jest obrazem pewnej całki szczególnej danego równania różniczkowego. Przyjmując kolejno coraz inny punkt wyjścia $P(x,\ y)$ np. na prostej równoległej do osi y-ów, otrzymamy ∞^1 krzywych, których układ jest obrazem całki ogólnej danego równania różniczkowego rzędu i stopnia pierwszego.

Danemu równaniu różniczkowemu rzędu i stopnia pierwszego odpowiada zatem układ ∞^1 krzywych płaskich, a przez każdy z punktów płaszczyzny przechodzi jedna z tych krzywych.

Jeżeli dane równanie różniczkowe rzędu pierwszego jest równocześnie równaniem stopnia n-go, natenczas odpowiada każdemu punktowi $P(x, y)$ płaszczyzny na podstawie danego równania różniczkowego n wartości na y', a więc n elementów dwupunktowych; z pośród ∞^1 krzywych układu, będących obrazem całki ogólnej takiego równania różniczkowego, przechodzi tedy przez każdy punkt płaszczyzny n krzywych tego układu.

9. Normalna postać równania różniczkowego pierwszego rzędu i pierwszego stopnia. Równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu i pierwszego stopnia, kształtu: $f(x, y, y')=0$, możemy przedstawić w postaci:

$$\varphi(x, y)+\psi(x, y)\frac{dy}{dx}=0, \text{ czyli: } \varphi(x, y)\,dx+\psi(x, y)\,dy=0$$

Kładąc $\varphi(x, y)=M$, $\psi(x, y)=N$, otrzymujemy równanie:

$$Mdx+Ndy=0 \tag{10}$$

które nazywamy normalną postacią równań różniczkowych rzędu i stopnia pierwszego.

W szczególnych przypadkach możemy równanie tego rodzaju bezpośrednio zcałkować.

Należą tu przedewszystkiem:

a) równania różniczkowe zwyczajne, w których zmienne są oddzielone, t. j. równania kształtu:

$$X\,dx+Y\,dy=0, \tag{11}$$

gdzie X jest wyłącznie funkcyą zmiennej x, Y zaś wyłącznie funkcyą zmiennej y, jako też równania różniczkowe, w których zmienne za pomocą stosownych działań, mianowicie obustronnego podzielenia równania przez jedną i tę samą funkcyę, dadzą się oddzielić, t. j. równania kształtu:

$$X_1 Y_1 dx+X_2 Y_2 dy=0, \tag{12}$$

gdzie X_1 i X_2 są wyłącznie funkcyami zmiennej x, Y_1 i Y_2 wyłącznie funkcyami zmiennej y, podzieliwszy bowiem takie równanie przez iloczyn Y_1X_2, otrzymamy równanie różniczkowe w normalnej postaci:

$$\frac{X_1}{X_2}dx+\frac{Y_2}{Y_1}dy=0,$$

czyli:

$$X\,dx+Y\,dy=0,$$

w którem zmienne są już oddzielone.

b) równania różniczkowe zupełne, czyli równania kształtu:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0, \text{ czyli: } dF(x, y)=0, \tag{13}$$

t. j. równania, które powstają wprost z różniczkowania danej funkcyi dwu zmiennych kształtu: $F(x, y)=C$ (Por. art. 16. str. 293).

W pierwszym przypadku otrzymujemy wprost rozwiązanie w postaci:

$$\int X\,dx+\int Y\,dy=C. \tag{14}$$

Zagadnienie sprowadza się tym sposobem do zagadnień zwykłego rachunku całkowego i uważa się za rozwiązane.

Np. 1) równanie różniczkowe: $x\,dx + y\,dy = 0$ prowadzi wprost do całki ogólnej kształtu:

$$\int x\,dx + \int y\,dy = C, \text{ czyli: } x^2 + y^2 = C,$$

gdzie c jest stałą dowolną.

2) Równanie różniczkowe: $\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}$ prowadzi do całki ogólnej:

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dy}{y} = C, \text{ czyli: } \log x + \log y = C.$$

W drugim przypadku, którego szczegółowy rozbiór będzie przedmiotem następnego wykładu, z równania różniczkowego zupełnego, kształtu:

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0, \tag{15}$$

sprowadzonego do postaci: $dF(x, y) = 0$ otrzymujemy wprost:

$$F(x, y) = C, \tag{16}$$

jako całkę ogólną danego równania różniczkowego, w której C jest stałą dowolną.

Tak np. otrzymamy z równania różniczkowego kształtu:

$$y\,dx + x\,dy = 0, \text{ równanie: } d(x\,y) = 0,$$

zatem: $xy = C$, jako jego całkę ogólną.

10. Rozmaite postacie całki ogólnej danego równania różniczkowego rzędu i stopnia pierwszego. Stosując do danego równania różniczkowego: $f(x\ y, y') = 0$ dwie różne metody całkowania, możemy otrzymać dwie różne postacie całki ogólnej, jedną kształtu: $F_1(x, y) = C_1$, drugą kształtu: $F_2(x, y) = C_2$. Oba te rozwiązania muszą być zgodne, gdyż muszą prowadzić do tego samego równania różniczkowego.

Pierwsze z nich daje równanie różniczkowe kształtu:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} dx + \frac{\partial F_1}{\partial y} dy = 0,$$

drugie daje równanie różniczkowe kształtu:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} dx + \frac{\partial F_2}{\partial y} dy = 0,$$

wartości na $\frac{dy}{dx}$ z tych równań otrzymane muszą być jednakowe, a to wymaga, aby było:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0, \text{ czyli: } \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}, & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}, & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix} = 0, \tag{17}$$

t. z. aby Jakobian funkcyj $F_1(x, y)$ i $F_2(x, y)$ był równym zeru (Por. str. 410).

A zatem: *Dwie różne postacie całki ogólnej $F_1(x, y) = C_1$ i $F_2(x, y) = C_2$ należą do tego samego równania różniczkowego, skoro Jakobian tych dwu funkcyj: $F_1(x, y)$ i $F_2(x, y)$ jest równy zeru.*

Takie dwie funkcye jak $F_1(x, y) = C_1$ i $F_2(x, y) = C_2$, prowadzące do tego samego równania różniczkowego są od siebie zależne, rugując z obu równań $F_1(x, y) = C_1$, $F_2(x, y) = C_2$ jedną ze zmiennych x lub y, wyrugujemy tem samem także drugą zmienną, otrzymując ostatecznie związek między temi równaniami w postaci:

$$F(C_1, C_2) = 0, \text{ czyli: } C_2 = f(C_1).$$

11. Przykłady. 1) Równanie różniczkowe: $\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=0$, któremu odpowiada całka ogólna kształtu:

$$\log x+\log y=C,$$

możemy przedstawić w postaci:

$$y\,dx+x\,dy=0,$$

a więc w postaci zupełnego równania różniczkowego, kształtu: $d(xy)=0$, któremu odpowiada całka ogólna kształtu:

$$xy=C',$$

Oba rozwiązania są ze sobą zgodne, mianowicie jest: $C=\log C'$. Dane równanie różniczkowe doprowadziłoby więc, gdybyśmy logarytmów nie znali, do głównej własności logarytmów: $\log x+\log y=\log(xy)$, z których wszystkie inne dadzą się wyprowadzić.

2) Równaniu różniczkowemu: $\frac{dx}{1+x^2}+\frac{dy}{1+y^2}=0$ odpowiada wprost całka ogólna w postaci:

$$\int\frac{dx}{1+x^2}+\int\frac{dy}{1+y^2}=C,\text{ czyli: }\operatorname{arc\,tang} x+\operatorname{arc\,tang} y=C.$$

Biorąc tangens obu stron równania i kładąc: $\operatorname{tang} C=C'$, otrzymujemy równanie: $\frac{x+y}{1-xy}=C'$, które jest także rozwiązaniem danego równania różniczkowego.

Moglibyśmy więc stosownem przekształceniem danego równania różniczkowego otrzymać wprost równanie różniczkowe zupełne kształtu: $d\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)=0$, a tem samem otrzymać wprost drugie rozwiązanie w postaci: $\frac{x+y}{1-xy}=C'$, a tem samem wyprowadzić równość:

$$\operatorname{arc\,tang} x+\operatorname{arc\,tang} y=\operatorname{arc\,tang}\frac{x+y}{1-xy},$$

z której, kładąc: $x=\operatorname{tang} u$, $y=\operatorname{tang} v$, otrzymujemy wzór: $\operatorname{tang}(u+v)=\frac{\operatorname{tg} u+\operatorname{tg} v}{1-\operatorname{tg} u\operatorname{tg} v}$.

3) Równanie różniczkowe: $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0$ prowadzi wprost do całki ogólnej:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=C,\text{ czyli: }\arcsin x+\arcsin y=C.$$

Biorąc sinus obu stron równania i kładąc $\sin C=C'$ otrzymujemy równanie:

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=C',$$

które jest także rozwiązaniem danego równania różniczkowego.

Można je również otrzymać wprost z danego równania różniczkowego przez przekształcenie tegoż na równanie różniczkowe zupełne kształtu:

$$d[x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}]=0,$$

czem dowiedzioną zostaje własność funkcyi sinus w formie:

$$\sin(u+v)=\sin u\sqrt{1-\sin^2 v}+\sin v\sqrt{1-\sin^2 u}.$$

12. Powyższe przykłady wykazują, że dane równanie różniczkowe, w którem zmienne są oddzielone, a którego rozwiązanie prowadzi do sumy dwu funkcyj, wychodzących po za zakres funkcyj nam znanych, przekształcone na równanie różniczkowe zupełne, daje t. zw teorem dodawania tych funkcyj nieznanych.

Tak np. równanie różniczkowe kształtu:

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}+\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}=0,$$

prowadzi do równania pierwotnego:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}+\int\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}=C, \tag{a}$$

które wymaga znajomości t. zw. całek elliptycznych.

Powyższe równanie różniczkowe możemy stosownem przekształceniem sprowadzić do równania różniczkowego zupełnego w postaci:

$$d\left[\frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}+y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}\right]=0,$$

a tem samem przedstawić całkę ogólną danego równania różniczkowego w postaci algebraicznej:

$$\frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}+y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}=C', \tag{b}$$

Kładąc:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=u, \quad x=\operatorname{sn} u,$$

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}=v, \quad y=\operatorname{sn} v, \quad C=u+v, \quad C'=\operatorname{sn}(u+v)$$

i używając skróceń: $\sqrt{1-\operatorname{sn}^2 u}=cnu$, $\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2 u}=dnu$,

otrzymujemy z porównania równań (*a*) i (*b*) tak zwany teorem dodawania elementarnych funkcyj elliptycznych w postaci:

$$\operatorname{sn}(u+v)=\frac{snu\ cnv\ dnv+snv\ cnu\ dnu}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2 v}. \tag{18}$$

13. Ogólne uwagi o rodzajach całek elliptycznych. Całkami elliptycznemi nazywamy w ogólności całki, w których pod znakiem całkowania występuje pierwiastek kwadratowy z funkcyi całkowitej trzeciego lub czwartego stopnia, czyli całki typu:

$$\int R(x,\ X)dx,$$

gdzie: $X=\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}$, a $R(x,\ X)$ jest funkcyą wymierną zmiennej x i funkcyi niewymiernej X.

Przypuśćmy, że funkcya: $\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4$ nie ma czynników wielokrotnych i rozłóżmy ją na dwa czynniki drugiego stopnia tak, że:

$$X=\sqrt{\varepsilon(f-2gx+x^2)(f'-2g'x+x^2)}.$$

Połóżmy: $x=\frac{p+qt}{1+t}$, $dx=\frac{(1-p)dt}{(1+t)^2}$, gdzie p i q są stałe dowolne, t zaś nową zmienną, wtedy otrzymamy:

$$f-2gx+x^2=\frac{F-2Gt+Ht^2}{(1+t)^2}, \quad f'-2g'x+x^2=\frac{F'-2G't+H't^2}{(1+t)^2},$$

przeto:

$$X=\frac{\sqrt{\varepsilon(F-2Gt+Ht^2)(F'-2G't+H't^2)}}{(1+t)^2}.$$

Mając do rozporządzenia dwie stałe p i q, możemy je tak obrać, aby było: $G=0$ i $G'=0$. Otrzymamy wtedy:

$$X=\frac{\sqrt{\varepsilon(F+Ht^2)(F'+H't^2)}}{(1+t)^2}, \text{ czyli: } X=\frac{\sqrt{\varepsilon HH'}}{(1+t)^2}\sqrt{\pm(t^2-\lambda)(t^2-\mu)}=\frac{\sqrt{\varepsilon HH'}}{(1+t)^2}T,$$

a przeto:

$$\int R(x,X)dx=\int \bar{R}(t,\ T)dt, \tag{19}$$

gdzie: $T=\sqrt{\pm(t^2-\lambda)(t^2-\mu)}$.

Gdyby ε było równe 0, a więc wielomian pod pierwiastkiem był stopnia trzeciego, wtedy: $X=\sqrt{-\delta(a-x)(f-2gx+x^2)}$, a wskutek podstawień: $x=\frac{p+qt}{1+t}$ sprowadziwszy oba czynniki do wspólnego mianownika, otrzymamy: $X=\frac{\sqrt{-\delta(F-2Gt+Ht^2)(F'-2G't+H't^2)}}{(1+t)^2}$, czyli, obierając p i q tak, aby było: $G=0$ i $G'=0$, dostaniemy również:

$$X=\frac{\sqrt{-\delta HH'}}{(1+t)^2}\sqrt{\pm(t^2-\lambda)(t^2-\mu)}=\frac{\sqrt{-\delta HH'}}{(1+t)^2}T, \quad \text{przeto: } \int R(x,\ X)dx=\int\bar{R}(t,\ T)dt.$$

Funkcya wymierna $\bar{R}(t,\ T)$ wzoru (19) może być zawsze sprowadzoną do postaci:

$$\bar{R}(t,\ T)=\frac{M+Nt}{M'+N't},$$

gdzie M, N, M', N' są funkcyami całkowitemi z t^2 i T.

Pomnożywszy licznik i mianownik przez $M'-N't$, otrzymamy ostatecznie:

$$\overline{R}(t,\ T)=P+Qt,$$

gdzie P i Q będą wymiernemi funkcyami z t^2 i T, przeto będzie:

$$\int R(x,\ X)\,dx=\int\overline{R}(t,\ T)\,dt=\int P\,dt+\int Q\,t\,dt, \tag{20}$$

Druga całka, t. j. $\int Qt\,dt$ za pomocą podstawienia $t^2=u$, sprowadza się do postaci: $\int f(u,\ \sqrt{a+bu+cu^2})\,du$, wyraża się więc za pomocą funkcyj algebraicznych, logarytmicznych i cyklometrycznych (Por. str. 55. art. 9 i następne).

Pierwsza całka ma kształt:

$$\int P\,dt=\int\frac{M_1+N_1T}{M_2+N_2T}\,dt=\int\frac{N_1+\frac{M_1}{T}}{N_2+\frac{M_2}{T}}\,dt,$$

gdzie M_1, M_2, N_1, N_2 są całkowitemi funkcyami samego t^2; pomnożywszy licznik i mianownik ostatniego ułamka przez: $N_2-\frac{M_2}{T}$, otrzymamy:

$$\int P\,dt=\int R(t^2)\,dt+\int\overline{R}(t^2)\frac{dt}{T}, \tag{21}$$

Całkę kształtu: $\int R(t^2)\,dt$ można wyrazić przez funkcye algebraiczne, logarytmiczne i cyklometryczne, bo $R(t^2)$ jest funkcyą wymierną, pozostaje jeszcze zbadać całkę kształtu: $\int\overline{R}(t^2)\frac{dt}{T}$, gdzie $\overline{R}(t^2)$ przedstawia funkcyę wymierną zmiennej t^2, zaś $T=\sqrt{\pm(t^2-\lambda)(t^2-\mu)}$.

Jakiekolwiek byłyby wartości rzeczywiste λ i μ, możemy zawsze całkę: $\int\overline{R}(t^2)\frac{dt}{T}$ sprowadzić do postaci:

$$\int\frac{\overline{R}(t^2)\,dt}{T}=\int\frac{R(x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \tag{22}$$

gdzie $R(x^2)$ przedstawia funkcyę wymierną, zaś k^2 ilość dodatnią mniejszą od jednostki. Rozłożywszy następnie $R(x^2)$ na ułamki częściowe, otrzymamy wyrażenia kształtu:

$$Ax^{2\mu},\quad \frac{B}{(1+nx^2)^\nu},$$

gdzie A, B, n są stałe, μ jest liczbą całkowitą dodatnią, odjemną lub zerem, ν zaś liczbą całkowitą dodatnią.

Całka: $\int\frac{R(x^2)\,dx}{H}$, gdzie: $H=\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$,

rozpadnie się więc na całki kształtu:

$$Y_\mu=\int\frac{x^{2\mu}dx}{H},\quad Z_\nu=\int\frac{dx}{(1+nx^2)^\nu H}.$$

Weźmy naprzód całkę: Y_μ. Różniczkując iloczyn $x^{2\mu-3}H$, otrzymamy:

$$d(x^{2\mu-3}H)=(2\mu-3)x^{2\mu-4}H\,dx+x^{2\mu-3}dH=\frac{(2\mu-3)x^{2\mu-4}H^2}{H}dx-\frac{x^{2\mu-3}(1+k^2)x\,dx}{H}+\frac{2k^2x^{2\mu}}{H}dx$$

czyli: $$d(x^{2\mu-3}H)=\frac{(2\mu-3)x^{2\mu-4}dx}{H}-\frac{(2\mu-2)(1+k^2)x^{2\mu-2}}{H}dx+\frac{(2\mu-1)k^2x^{2\mu}dx}{H},$$

zatem: $$x^{2\mu-3}H=(2\mu-3)Y_{\mu-2}-(2\mu-2)(1+k^2)Y_{\mu-1}+(2\mu-1)k^2Y_\mu.$$

Wszelką całkę Y_μ można na mocy tego wzoru wyrazić przez funkcye algebraiczne i dwie całki:

$$Y_0=\int\frac{dx}{H}\ \text{ i }\ Y_1=\int\frac{x^2dx}{H}. \tag{23}$$

Weźmy teraz pod uwagę całkę:

$$Z_\nu=\int\frac{dx}{(1+nx^2)^\nu H}.$$

Różniczkując funkcyę $\frac{xH}{(1+nx^2)^{\nu-1}}$, otrzymamy po wykonaniu działań:

$$d\left(\frac{xH}{(1+nx^2)^{\nu-1}}\right)=A\,dZ_\nu-B\,dZ_{\nu-1}+C\,dZ_{\nu-2}-D\,dZ_{\nu-3},$$

gdzie A, B, C, D przedstawiają stałe współczynniki. Całkując to równanie, dostaniemy:

$$AZ_\nu - BZ_{\nu-1} + CZ_{\nu-2} - DZ_{\nu-3} = \frac{xH}{(1+nx^2)^{\nu-1}}.$$

Wszelkie funkcye Z_ν dadzą się wedle tego wzoru wyrazić przez funkcye algebraiczne i trzy po sobie następujące funkcye Z_r, ponieważ atoli, jak łatwo zauważać:

$$Z_0 = Y_0, \quad Z_{-1} = Y_0 + nY_1,$$

więc wyznaczenie całek Z_ν prowadzi tylko do jednej nowej całki:

$$Z_1 = \int \frac{dx}{(1+nx^2)H}. \tag{24}$$

A zatem: *Całki funkcyj wymiernych, zawierających oprócz całkowitych potęg zmiennych x także kwadratowe pierwiastki z funkcyi trzeciego lub czwartego stopnia, można wyrazić za pomocą funkcyj znanych, algebraicznych, logarytmicznych lub cyklometrycznych i za pomocą całek należących do jednego z trzech rodzajów:*

$$Y_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = u, \quad Y_1 = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = v,$$
$$Z_1 = \int \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = w, \tag{25}$$

Te trzy całki nie dadzą się w ogólności wyrazić przez funkcye znane i tworzą nową klasę funkcyj, zwanych całkami eliptycznemi 1-go, 2-go, 3-go rodzaju, stanowiące dziś jedną z głównych części analizy nowszej.

14. Całki eliptyczne 1-go i 2-go rodzaju zawierają stałą k mniejszą od 1, zwaną ich modułem; całka eliptyczna 3-go rodzaju Z_1 zawiera oprócz modułu k jeszcze stałą n, zwaną jej parametrem.

Podstawiając $x = \sin\varphi$, $\sqrt{1-x^2} = \cos\varphi$ i kładąc: $\Delta\varphi = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$, otrzymamy te trzy całki eliptyczne w prostszej postaci:

$$u = \int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad v = \int \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad w = \int \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\Delta\varphi},$$

kąt φ nazywa się amplitudą funkcyi u i oznacza $\varphi = am u$, a na tej podstawie pisze się:

$$x = \sin am u, \quad \sqrt{1-x^2} = \cos am u, \quad \sqrt{1-k^2x^2} = \Delta am u,$$

albo:

$$x = sn\, u, \quad \sqrt{1-x^2} = cn\, u, \quad \sqrt{1-k^2x^2} = dn\, u.$$

Te trzy osobliwe funkcye zmiennej niezależnej u zowią się funkcyami eliptycznemi Jacobie'go (Por. Wykład XXXI str. 513 i nast.); są one względem całki u tem, czem funkcye goniometryczne względem funkcyj cyklometrycznych.

15. Jeżeli moduł k osięga swoje graniczne wartości 0 i 1, całki eliptyczne sprowadzają się do funkcyj cyklometrycznych lub logarytmicznych.

W szczególności będzie dla $k = 0$:

$$Y_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x, \quad Y_1 = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x,$$

$$Z_0 = \int \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+n}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{1+n}}{\sqrt{1-x^2}},$$

zaś dla $k = 1$:

$$Y_0 = \int \frac{dx}{1-x^2} = \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad Y_1 = \int \frac{x^2\,dx}{1-x^2} = \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - x,$$

$$Z_1 = \int \frac{dx}{(1+nx^2)(1-x^2)} = \frac{\sqrt{n}}{1+n} \operatorname{arc\,tg} x\sqrt{n} + \frac{1}{1+n}\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Uwaga. Jeżeli stopień funkcyi stojącej pod pierwiastkiem w całce:

$$\int f(x, X)\,dx,$$

przewyższa czwarty stopień, wchodzi się w obszerne pole teoryi całek hipereliptycznych i funkcyj hiperelliptycznych.

16. Zastosowania geometryczne równań różniczkowych pierwszego rzędu. Równanie różniczkowe pierwszego rzędu wypowiada pewną własność prostych stycznych do szukanej linii krzywej. Wyznaczyć całkę danego równania różniczkowego rzędu pierwszego, znaczy zatem wynaleźć linie krzywe, któreby posiadały własność danem równaniem różniczkowem określoną. W zagadnieniach wyrażających daną własność prostych stycznych do szukanych linij krzywych w postaci równań różniczkowych rzędu pierwszego korzystamy z wzorów podających wielkości od położenia stycznej zależne, jakiemi dla krzywej: $y=f(x)$ i pochodnej: $y'=\frac{dy}{dx}=\operatorname{tang} \alpha$, są między innemi długość stycznej $T=y\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y'}$, długość podstycznej $T'=\frac{x}{y'}$, długość normalnej $N=y\sqrt{1+y'^2}$, długość podnormalnej $N'=yy'$, odcinek stycznej na osi x-ów $a=x-\frac{y}{y'}$, odcinek stycznej na osi y-ów $b=y-xy'$ i t. p.

17. Przykłady. 1) Znaleźć krzywe, które mają w każdym punkcie stałą długość stycznej $T=a$.

Równanie różniczkowe szukanych krzywych przedstawia się w postaci:

$$\frac{y\sqrt{1+y'^2}}{y'}=a, \text{ czyli: } y^2(1+y'^2)=a^2y'^2,$$

skąd otrzymujemy:

$$y'^2(a^2-y^2)=y^2, \text{ zatem: } y'=\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}},$$

a więc równanie różniczkowe pierwszego rzędu w postaci normalnej:

$$dx-\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}dy=0,$$

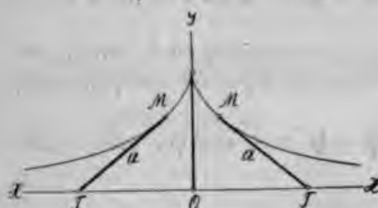


Fig. 260.

w której zmienne są oddzielone.

Scałkowawszy to równanie, otrzymujemy równanie:

$$x+\sqrt{a^2-y^2}-a\log\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}=C,$$

przedstawiające układ linij krzywych, zwanych traktrysami (fig. 260).

2) Znaleźć linie krzywe o stałej podstycznej $T'=a$. Szukane krzywe są określone równaniem różniczkowem rzędu pierwszego, kształtu:

$$\frac{y}{y'}=a, \text{ czyli: } y=a\,.\,\frac{dy}{dx},$$

które, sprowadzone do postaci normalnej, otrzymuje po oddzieleniu zmiennych kształt:

$$\frac{dx}{a}-\frac{dy}{y}=0.$$

Całka ogólna tego równania przedstawia się więc w postaci:

$$\frac{x}{a}-\log y=c,$$

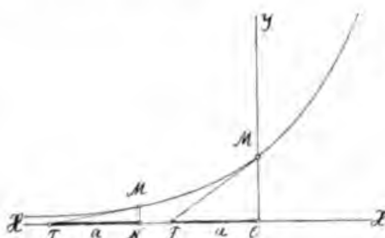


Fig. 261.

skąd otrzymujemy:

$$y=e^{\frac{x}{a}-c},$$

czyli kładąc: $e^{-c}=C$, równanie:

$$y=C\,.\,e^{\frac{x}{a}},$$

jako równanie zwyczajne krzywych o stałej podstycznej. Krzywe te tworzą układ logarytmik (fig. 261).

18. Trajektorye układu krzywych. W związku z teoryą równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego pozostaje zagadnienie o trajektoryach danego układu linij krzywych. Odnośne zagadnienie opiewa jak następuje: Dany jest układ krzywych określony równaniem, zawierającem jeden parametr zmienny, wyznaczyć linie krzywe, które przecinają wszystkie krzywe danego układu pod pewnym kątem stałym. Szukane krzywe nazywamy trajektoryami danego układu, w szczególności trajektoryami prostokątnemi, skoro przepisany kąt jest kątem prostym.

Niech będzie $F(x, y, c)=0$ równaniem danego układu krzywych, gdzie c jest zmiennym parametrem. Przyjmijmy na dowolnej krzywej pewien punkt $P(x, y)$, tedy otrzymamy na wyznaczenie kierunku stycznej w tym punkcie po wyrugowaniu zmiennego parametru c, równanie różniczkowe rzędu pierwszego kształtu:

$$M\,dx+N\,dy=0,$$

z którego otrzymujemy: $\frac{dy}{dx}=-\frac{M}{N}=\operatorname{tang}\alpha=m$, a że trajektorya prostokątna przecina tę styczną pod kątem prostym, przeto styczna w tym punkcie trajektoryi określona będzie wzorem: $\operatorname{tang}\alpha'=m'=-\frac{1}{\operatorname{tang}\alpha}=-\frac{1}{m}=\frac{N}{M}$, czyli: $\frac{dy}{dx}=\frac{N}{M}$, któremu odpowiada równanie różniczkowe rzędu pierwszego w postaci:

$$N\,dx-M\,dy=0, \tag{26}$$

jako równanie różniczkowe układu trajektoryi. Całka ogólna tego równania różniczkowego w postaci: $\varphi(x, y, C)=0$, będzie tedy równaniem szukanego układu trajektoryi prostokątnych.

Jeżeli szukane trajektorye danego układu krzywych mają być ukośnokątnemi, a θ jest kątem, pod którym szukane trajektorye każdą krzywę danego układu krzywych, określonego równaniem: $F(x, y, C)$ przecinają, tedy oznaczywszy przez m i m' spółczynniki kierunkowe obu stycznych w punkcie przecięcia się $P(x, y)$, czyli kładąc: $\operatorname{tang}\alpha=m$, $\operatorname{tang}\alpha'=m'$, otrzymamy:

$$\operatorname{tang}\theta=\frac{m'-m}{1+mm'}, \tag{27}$$

a że dla układu danych krzywych $F(x, y, c)=0$, któremu odpowiada równanie różniczkowe:

$$M\,dx+N\,dy=0,$$

otrzymujemy kierunek stycznej w punkcie $P(x, y)$ określony wzorem: $m=-\frac{M}{N}$ zaś dla trajektoryi ukośnokątnej przez tenże punkt przechodzącej kierunek stycznej ma być wyznaczony na podstawie podstawienia: $m'=\frac{dy}{dx}$, przeto otrzymujemy z wzoru (27) równanie:

$$\operatorname{tang}\theta=\frac{\frac{dy}{dx}+\frac{M}{N}}{1-\frac{M}{N}\cdot\frac{dy}{dx}}, \text{ czyli: } \left(1-\frac{M}{N}\frac{dy}{dx}\right)\operatorname{tang}\theta=\frac{dy}{dx}+\frac{M}{N},$$

a więc równanie różniczkowe kształtu:

$$\left(1-\frac{M}{N}\frac{dy}{dx}\right)\operatorname{tang}\theta=\frac{dy}{dx}+\frac{M}{N},$$

czyli:
$$\left(1+\frac{M}{N}\operatorname{tang}\Theta\right)\frac{dy}{dx}=\operatorname{tang}\Theta-\frac{M}{N},$$
a więc w postaci normalnej:
$$(M-N\operatorname{tang}\Theta)\,dx+(N+M\operatorname{tang}\Theta)\,dy=0 \qquad (28)$$
jako równanie różniczkowe szukanego układu trajektoryi ukośnokątnych.

19. Przykłady. α) Znaleźć trajektorye prostokątne układu prostych o równaniu $y=ax$. Rozwiązanie: Mamy tu: $y'=c$, zatem równanie różniczkowe danego układu w postaci:
$$y=y'x, \text{ stąd: } y'=\frac{y}{x}.$$
Na tej podstawie otrzymujemy dla szukanych trajektoryj:
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y},$$
a więc ich równanie różniczkowe w postaci normalnej:
$$x\,dx+y\,dy=0,$$
stąd wypływa równanie pierwotne: $x^2+y^2=C$, przedstawiające koła współśrodkowe fig. 262 jako szukane trajektorye.

β) Znaleźć trajektorye układu krzywych o równaniu: $y=cx^n$. Mamy tu: $y'=ncx^{n-1}$, a więc równanie różniczkowe: $\frac{y'}{y}=\frac{n}{x}$, czyli: $y'=\frac{ny}{x}$, skąd otrzymujemy dla traktoryi: $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{ny}$, a więc równanie różniczkowe:
$$x\,dy+ny\,dy=0,$$
którego całka ogólna otrzymuje kształt: $x^2+ny^2=C$, przedstawiający dla $n>0$ układ ellips, a dla $n<0$ układ hiperbol jako układ szukanych trajektoryi. W szczególności dla układu


Fig 262.

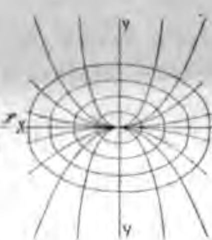
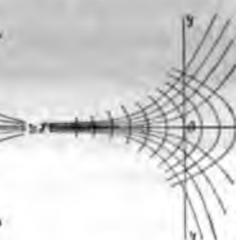

Fig. 263.


Fig. 264.


Fig. 265.

parabol: $y=cx^2$, otrzymujemy jako trajektorye układ ellips współśrodkowych o równaniu: $x^2+2y^2=C$ (fig. 263), a dla układu hiperbol równobocznych: $y=\frac{c}{x}$, otrzymujemy jako układ trajektoryj nowy układ hiperbol równobocznych o równaniu: $x^2-2y^2=C$ (fig. 264).

γ) Znaleźć trajektorye układu logarytmik o równaniu: $y=ce^x$.

Mamy tu: $y'=ce^x$, zatem równanie różniczkowe: $y'=y$, stąd wypływa dla trajektoryj: $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{y}$, czyli równanie różniczkowe w postaci normalnej: $dx+y\,dy=0$, którego całka ogólna:
$$x+\frac{1}{2}y^2=C, \text{ czyli: } y^2=-2(x-C),$$
przedstawia układ przystających parabol, mających wierzchołki na osi x-ów (fig. 265) jako układ szukanych trajektoryi.

20. Całka ogólna równania zwyczajnego różniczkowego n-go rzędu. Równanie różniczkowe n-go rzędu, przedstawiające się w postaci:
$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0,$$

czyli:
$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0,$$
podaje n-tą pochodną $\frac{d^ny}{dx^n}$ niewiadomej funkcyi y zmiennej niezależnej x, jako pewną wiadomą funkcyę zmiennej niezależnej x, jej funkcyi niewiadomej y i wszystkich jej pochodnych aż do $(n-1)$-go rzędu włącznie.

Przyjmijmy, że na podstawie powyższego równania różniczkowego wynika:
$$\frac{d^ny}{dx^n}=f_0\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right), \tag{29}$$
Różniczkując to równanie podług x i przedstawiając w tak otrzymanem nowem równaniu za $\frac{d^ny}{dx^n}$ wartość równaniem (29) określoną, otrzymamy następną pochodną: $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$ znowu jako pewną funkcyą zmiennej niezależnej x, jej niewiadomej funkcyi y i wszystkich jej pochodnych aż do $(n-1)$-go rzędu włącznie, w postaci:
$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}=f_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$
Postępując tak dalej, otrzymamy:
$$\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}=f_2\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right),$$
$$\frac{d^{n+r}y}{dx^{n+r}}=f_r\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$
Przedstawiwszy sobie szukaną funkcyę y rozwiniętą w szereg uporządkowany podług potęg $x-x_0$, gdzie x_0 jest przyjętą wartością zmiennej niezależnej x, zauważymy, że wszystkie spółczynniki rozwinięcia począwszy od potęgi $(x-x_0)^n$ będą wyrażone za pomocą spółczynników przy niższych potęgach. Nadając zatem n pierwszym spółczynnikom pewne wartości zupełnie zresztą dowolne: y_0, y'_0, y_0'', ..., $y_0^{(n-1)}$, wyznaczymy już tym sposobem wartości następnych spółczynników: f_0, f_1, f_2, ..., f_{n+r} ... i otrzymamy odnośny szereg w postaci:
$$y=y_0+\frac{y'_0}{1!}(x-x_0)+\frac{y_0''}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+$$
$$+\frac{f_0}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f_1}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}+\dots+\frac{f_r}{(n+r)!}(x-x_0)^{n+r}+\dots$$
Otrzymany szereg potęgowy, zawierający n stałych dowolnych: y_0, y'_0, y_0'', ..., $y_0^{(n-1)}$, określa zatem w najogólniejszej postaci szukaną funkcyę, czyniącą zadość danemu równaniu różniczkowemu, czyli **całkę ogólną** danego równania różniczkowego rzędu n-go.

21. Mając np. dane równanie różniczkowe drugiego rzędu w postaci:
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx}+y^2,$$
przyjmijmy, że dla $x=0$ jest: $y=c$, $\frac{dy}{dx}=c'$, a otrzymamy już: $\frac{d^2y}{dx^2}=c'+c^2$, następnie:
$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d^2y}{dx^2}+2y\frac{dy}{dx}=y^2+(1+2y)\frac{dy}{dx}=c^2+(1+2c)c',$$
$$\frac{d^4y}{dx^4}=2y\frac{dy}{dx}+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(1+2y)\frac{d^2y}{dx^2}=y^2+2y^3+(1+4y)\frac{dy}{dx}+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=c^2+2c^3+(1+4c)c'+2c'^2 \text{ i t. d.}$$

Wobec tego otrzymujemy szukaną całkę ogólną danego równania różniczkowego rzędu drugiego w postaci szeregu potęgowego:

$$y = c+c'x+\frac{c^2+c'}{2!}x^2+\frac{c^2+(1+2c)c'}{3!}x^3+\frac{c^2+2c^3+(1+4c)c'+2c'^2}{4!}x^4+\dots$$

22. Geometryczny obraz całek danego równania różniczkowego n-go rzędu. Łącząc z wartościami spółrzędnych zmiennych x, y punktu na płaszczyźnie wartości pochodnych $y', y'', \dots, y^{(n)}$ w tem miejscu, dochodzimy do pojęcia elementów krzywolinijnych t. z. $(n+1)$-punktowych,

Jako najprostsze elementa tego rodzaju występują elementa dwupunktowe, określone wartościami x, y, y', przedstawiające się jako odcinki prostolinijne, elementa trzypunktowe, określone wartościami x, y, y', y'', a przedstawiające się jako elementa kołowe.

Elementem $(n+1)$-punktowym jest element liniowy w ogólności krzywolinijny, łączący dany punkt x, y z n punktami nieskończenie blisko niego położonemi, następującemi po sobie w pewien sposób, określony wartościami $y', y'', \dots, y^{(n)}$. Przez każdy punkt płaszczyzny przechodzi ∞^n elementów $(n+1)$-punktowych.

Płaszczyzna zawierając ∞^2 punktów (x, y) zawiera zarazem ∞^3 elementów dwupunktowych (x, y, y'), ∞^4 elementów trzypunktowych (x, y, y', y''), ogólnie ∞^{n+1} elementów krzywolinijnych n-punktowych, z których ∞^{n-1} elemetów n-punktowych przechodzi przez dany punkt płaszczyzny.

Wszelkie równanie różniczkowe n-go rzędu:

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})=0,$$

określa wtedy zbiór ∞^n elementów n-punktowych z pośród ∞^{n+1} takich elementów mieszczących się na płaszczyźnie, wybranych w sposób danem równaniem: $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})=0$ określony.

Przyjąwszy dowolnie spółrzędne x, y pewnego punktu P na płaszczyźnie, a zarazem wielkości: $y', y'', \dots, y^{(n-1)}$, przedstawiające wartości pierwszej, drugiej, ..., aż do $(n-1)$-szej pochodnej w tem miejscu, odpowiadające niewiadomej funkcyi danem równaniem różniczkowem określonej, obierzemy tym sposobem na płaszczyźnie XOY pewien element n-punktowy; na podstawie danego równania różniczkowego znajdziemy już $y^{(n)}$, to jej wielkość określającą $(n+1)$-szy punkt tego elementu, a zatem pewne położenie elementu $(n+1)$-punktowego, odpowiadającego na podstawie danego równania różniczkowego przyjętemu elementowi n-punktowemu płaszczyzny.

Uważając koniec tak wyznaczonego elementu $(n+1)$-punktowego, jako początek nowego elementu $(n+1)$-punktowego, możemy znowu przyjąć dla tego punktu dowolne wartości pochodnych: $y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ i wyznaczyć na tej podstawie za pomocą danego równania różniczkowego $y^{(n)}$, a zatem wyznaczyć nowy element $(n+1)$-punktowy, czyniący zadość danemu równaniu różniczkowemu. Tym sposobem otrzymamy pewien zbiór elementów $(n+1)$-punktowych, tworzących pewną linię krzywą na płaszczyźnie, która jest obrazem pewnej całki szczególnej danego równania różniczkowego n-go rzędu.

Przyjmując kolejno coraz inny element n-punktowy jako element wyjścia otrzymamy ∞^n krzywych, których układ jest obrazem całki ogólnej danego równania różniczkowego n-go rzędu.

Danemu równaniu różniczkowemu n-go rzędu i pierwszego stopnia ze względu na $y^{(n)}$, odpowiada zatem układ ∞^n krzywych na płaszczyźnie,

a przez każdy z punktów tej płaszczyzny przechodzi ∞^{n-1} krzywych tego układu.

Jeżeli dane równanie różniczkowe n-go rzędu jest zarazem równaniem r-go stopnia ze względu na $y^{(n)}$, natenczas odpowiada mu układ $r \cdot \infty^n$ krzywych na płaszczyźnie, a przez każdy punkt przechodzi $r \cdot \infty^{n-1}$ krzywych tego układu.

Ze stanowiska geometrycznego odpowiada więc całkowaniu danego równania różniczkowego rzędu n-go, postępowanie, na mocy którego z pośród ∞^{n+1} elementów n-punktowych płaszczyzny wybieramy elementa n-punktowe tak, aby utworzyły linię krzywą, jako obraz całki szczególnej tegoż równania, a krzywe takie tworzą układ ∞^n krzywych na płaszczyźnie, a więc układ, którego równanie między spółrzędnemi x, y ich punktów zawiera n stałych dowolnych.

Drogą geometryczną wynika więc z tego twierdzenie, że równaniu różniczkowemu pierwszego rzędu odpowiada układ ∞^1 krzywych na płaszczyźnie czyli równanie pierwotne o jednej stałej dowolnej, równaniu różniczkowem drugiego rzędu odpowiada układ ∞^2 krzywych czyli równanie pierwotne o dwu stałych dowolnych, ogólnie równaniu różniczkowemu n-go rzędu odpowiada układ ∞^n krzywych czyli równanie pierwotne o n stałych dowolnych.

23. Równanie różniczkowe zwyczajne ilukolwiek zmiennych. Mając dane równanie pierwotne złożone z $(n-1)$ zmiennych niezależnych $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ i jednej zmiennej zależnej z, jako ich funkcyi kształtu: $F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, z)=0$ i różniczkując je ze względu na wszystkie zmienne, otrzymamy równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu kształtu:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} dx_{n-1} + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0, \tag{30}$$

zwane zupełnem równaniem różniczkowem zwyczajnem pierwszego rzędu, odpowiadającem danemu równaniu pierwotnemu.

Dalszem różniczkowaniem tego równania ze względu na wszystkie zmienne otrzymujemy równania różniczkowe zwyczajne wyższych rzędów, odpowiadające danemu równaniu pierwotnemu.

24. Równania różniczkowe linij krzywych na powierzchni. Z równania pierwotnego $F(x, y, z)=0$ przedstawiającego pewną powierzchnię w przestrzeni otrzymamy równanie różniczkowe zupełne:

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0, \text{ czyli: } P dx + Q dy + R dz = 0,$$

gdzie:
$$P = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial F}{\partial z},$$

które w połączeniu z równaniem pierwotnem wypowiada pewną własność dotyczącą prostych stycznych w dowolnym punkcie $P(x, y, z)$ powierzchni.

Nazywamy je też równaniem różniczkowem pierwszego rzędu dotyczącem linij na danej powierzchni.

Przy pomocy następnych różniczkowań otrzymujemy równania różniczkowe zwyczajne wyższych rzędów dotyczące krzywizny i ścisłej styczności linij krzywych na danej powierzchni.

25. Tworzenie równań różniczkowych cząstkowych. Z danego równania pierwotnego, określającego związek między zmiennemi niezależnemi $x_1, x_2, \ldots, x_p$ i zmienną zależną z, jako ich funkcyą, a zawierającego przytem n stałych dowolnych $c_1, c_2, \ldots, c_n$ w postaci:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_p, z, c_1, c_2, \ldots, c_n)=0, \tag{31}$$

otrzymamy na podstawie różniczkowania cząstkowego podług każdej z p zmiennych niezależnych $x_1, x_2, \ldots, x_p$ najpierw p równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu, kształtu:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}=0, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_p}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_p}=0; \tag{32}$$

różniczkując otrzymane równania różniczkowe cząstkowe znowu cząstkowo podług każdej z p zmiennych niezależnych z osobna, otrzymamy: $\frac{p(p+1)}{1.2}=\binom{p+1}{2}$ równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu, a stosując w dalszym ciągu to postępowanie do otrzymanych równań różniczkowych, aż do n-go rzędu włącznie, dojdziemy w końcu do:

$$\frac{p(p+1)(p+2)\ldots(p+n-1)}{1.2\ldots n}=\binom{p+n-1}{n},$$

równań różniczkowych cząstkowych n go rzędu.

W ten sposób otrzymamy z danego równania pierwotnego, licząc aż do równań różniczkowych n-go rzędu włącznie, wraz z niem wogóle:

$$1+p+\binom{p+1}{2}+\binom{p+2}{3}+\ldots+\binom{p+n-1}{n}=k$$

równań różniczkowych cząstkowych. Z tych k równań różniczkowych możemy wyrugować n stałych dowolnych $c_1, c_2, \ldots, c_n$, występujących w danem równaniu pierwotnem, a otrzymamy $k-n$ równań różniczkowych cząstkowych, zwanych *układem równań różniczkowych cząstkowych n-go rzędu*, odpowiadających danemu równaniu pierwotnemu n-go rzędu.

Każdemu z $k-n$ równań tego układu uczyni zadość zmienna zależna z, jako funkcya p zmiennych niezależnych, określona pierwotnem równaniem o n stałych dowolnych $c_1, c_2, \ldots, c_n$, jakiekolwiekby były wartości tych stałych. Dane równanie pierwotne nazywamy przeto *całką zupełną* otrzymanego *układu* $(k-n)$ *równań* różniczkowych cząstkowych n go rzędu.

26. Przyjmijmy, że w równaniu pierwotnem, zawierającem związek między p zmiennemi niezależnemi: $x_1, x_2, \ldots, x_p$, a zmienną zależną z, jako ich funkcyą, występują w miejscu n stałych dowolnych $c_1, c_2, \ldots, c_n$, wogóle funkcye dowolne $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ znanych $p-1$ funkcyj $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}$ zmiennych niezależnych, jako to:

$$\varphi_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}), \quad \varphi_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}), \ldots, \varphi_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}),$$

że więc związek między p zmiennemi niezależnemi a zmienną zależną z, jako ich funkcyą, określony jest równaniem pierwotnem kształtu:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_p, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)=0, \tag{33}$$

natenczas, tworząc z tego równania pierwotnego kolejno równania różniczkowe cząstkowe aż do m-go rzędu włącznie, otrzymamy wraz z danem równaniem w ogóle:

$$1+\binom{p}{1}+\binom{p+1}{2}+\binom{p+2}{3}+\ldots+\binom{p+m-1}{m}=k$$

równań, w których występuje: α) p zmiennych niezależnych: $x_1, x_2, \ldots, x_p$, zmienna zależna z jako ich funkcya wraz ze swemi pochodnemi cząstkowemi aż do m-go rzędu włącznie, a nadto: β) n funkcyj dowolnych:

$$\varphi_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}), \quad \varphi_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}), \quad \ldots, \quad \varphi_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}),$$

wraz ze swemi pochodnemi cząstkowemi ze względu na znane funkcye: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}$, aż do rzędu m-go włącznie; ilość tych funkcyj i ich pochodnych będzie określona wzorem:

$$l=n\left[1+\binom{p-1}{2}+\binom{p}{2}+\binom{p+1}{3}+\ldots+\binom{p+m-2}{m}\right]. \tag{34}$$

Nadając liczbie m kolejno wartości 1, 2, 3, ..., musimy przy danej ilości n funkcyj dowolnych: $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, dojść w końcu do przypadku, w którym będzie $k>l$; wówczas możemy z otrzymanych k równań różniczkowych wyrugować wszystkie dowolne funkcye: $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ w ilości n i ich pochodne cząstkowe ze względu na $p-1$ znanych funkcyj: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}$ danych p zmiennych niezależnych, w ogólnej ilości l dowolnych funkcyj, a otrzymamy $k-l$ równań różniczkowych cząstkowych m-go rzędu, zawierających tylko zmienne niezależne $x_1, x_2, \ldots, x_p$, zmienną zależną z jako ich funkcyą i jej pochodne cząstkowe aż do m-go rzędu włącznie.

Taki układ $k-l$ równań różniczkowych cząstkowych m-go rzędu nazywamy układem równań różniczkowych cząstkowych danego równania pierwotnego. Układowi temu czyni zadość funkcya z, określona równaniem pierwotnem, jakiekolwiek byłyby funkcye dowolne $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, z tego powodu nazywamy równanie pierwotne całką ogólną otrzymanego układu $k-l$ równań różniczkowych m-go rzędu.

27. Równania różniczkowe cząstkowe o dwu zmiennych niezależnych. Mając dane równanie pierwotne między trzema zmiennemi x, y, z, a to dwiema zmiennemi niezależnemi x, y, ich funkcyą z, zawierające n stałych dowolnych, w postaci:

$$F(x, y, z, c_1, c_2, \ldots, c_n)=0, \tag{35}$$

to różniczkując je osobno ze względu na każdą z dwu zmiennych niezależnych x i y, otrzymujemy zawsze dwa równania różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu, kształtu:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0, \tag{36}$$

następnie trzy $\binom{3}{2}$ równania różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu, kształtu:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,\\
\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,\\
\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial y}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \text{ i t. d.}
\end{gathered} \tag{37}$$

ogólnie $\binom{n+1}{n}$ równań n-go rzędu. W ten sposób otrzymamy aż do r-go rzędu włącznie ogółem:

$$1+\binom{2}{1}+\binom{3}{2}+\binom{4}{3}+\ldots+\binom{r+1}{r},$$

czyli: $$1+2+3+4+\ldots+(r+1)=\frac{(r+1)(r+2)}{2}=\binom{r+2}{2}=k$$

równań, z których możemy n stałych wyrugować, a otrzymamy:

$$k-n=\frac{(r+1)(r+2)}{2}-n,$$

równań różniczkowych cząstkowych r-go rzędu bez stałych dowolnych.

Funkcyą pierwotną nazywamy tedy całkę zupełną układu $\binom{r+2}{2}-n$ równań różniczkowych r-go rzędu. Dla $r=1$, $n=2$, otrzymujemy:

$$k=\binom{r+2}{2}=3, \quad \binom{r+2}{2}-n=1,$$

Danemu równaniu pierwotnemu kształtu $F(x, y, z, a, b)=0$ odpowiada tedy jedno równanie różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu bez stałych dowolnych, równanie pierwotne o dwu stałych dowolnych jest więc całką zupełną otrzymanego równania różniczkowego cząstkowego pierwszego rzędu.

28. Przyjmijmy teraz, że funkcya z jest określona równaniem:

$$F[x, y, z, \varphi_1(\alpha), \ldots, \varphi_n(\alpha)]=0,$$

gdzie α jest znaną funkcyą zmiennych x, y, z, zaś $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ dowolnemi n funkcyami.

Potwórzmy pochodne cząstkowe tego równania aż do r-go rzędu włącznie, tedy otrzymamy: $\frac{(r+1)(r+2)}{2}=k$ równań, w których występują: α) zmienne niezależne x, y i ich funkcya z wraz z pochodnemi cząstkowemi aż do rzędu r-go, β) funkcye $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ wraz z pochodnemi tych funkcyj ze względu na daną funkcyę α aż do r-go rzędu, których ilość określa liczba:

$$l=n\left[1+\binom{1}{1}+\binom{2}{2}+\ldots+\binom{r}{r}\right]=n(r+1).$$

Z $k=\binom{r+2}{2}$ równań możemy wyrugować funkcye dowolne $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ i ich pochodne, ogółem $l=n(r+1)$ funkcyj, a otrzymamy:

$$k-l=\frac{(r+1)(r+2)}{2}-n(r+1)=(r+1)\left(\frac{r+2}{2}-n\right)=\frac{(r+1)(r+2-2n)}{2},$$

równań między zmiennemi niezależnemi x, y, ich funkcyą z i ich pochodnemi cząstkowemi aż do r-go rzędu włącznie. Temu układowi równań różniczkowych cząstkowych uczyni zadość funkcya z, określona równaniem:

$$F[x, y, z, \varphi_1(\alpha), \ldots, \varphi_n(\alpha)]=0$$

jakiekolwiek byłyby funkcye $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

Nazywamy to równanie **całką ogólną** otrzymanego **układu równań różniczkowych cząstkowych** r-go rzędu. Dla $r=1$, $n=1$, otrzymuje $k=3$, $l=2$, zatem $k-l=1$.

A zatem: Danemu równaniu pierwotnemu kształtu: $F(x, y, z, \varphi(\alpha)]=0$, gdzie α jest znaną funkcyą zmiennych x, y, z, a φ jest funkcyą dowolną od-

powiada **jedno** równanie różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu bez funkcyi dowolnej.

Otrzymane równanie nazywamy też równaniem różniczkowem cząstkowem danego równania pierwotnego z jedną funkcyą dowolną, a to równanie pierwotne nazywamy **całką ogólną** otrzymanego **równania różniczkowego cząstkowego pierwszego rzędu.**

29. Równania różniczkowe powierzchni. Z równania układu powierzchni kształtu: $F(x, y, z, c_1, c_2, \ldots, c_n)=0$, zawierającego n dowolnych parametrów otrzymujemy na podstawie r-krotnego różniczkowania cząstkowego, licząc zarazem równanie pierwotne, ogółem $\binom{r+2}{2}$ równań, z których, po wyrugowaniu n stałych w przypadku, gdy $k>n$, otrzymujemy układ $(k-n)$ równań różniczkowych cząstkowych r-go rzędu, stanowiący równania różniczkowe danego układu powierzchni.

Poszczególne równania różniczkowe cząstkowe, otrzymane z danego równania pierwotnego wypowiadają pewne własności poszczególnych powierzchni tego układu, zależne od wartości stałych dowolnych, występujących w odnośnych równaniach. Układ równań różniczkowych cząstkowych bez stałych dowolnych wypowiada wspólne własności wszystkich powierzchni danego układu.

Geometryczna interpretacya tych własności zależy od rzędu odnośnego równania różniczkowego cząstkowego i opiera się na znaczeniu geometrycznem pochodnych cząstkowych pierwszego i wyższych rzędów, odpowiadającem geometrycznemu znaczeniu równania pierwotnego jako równania powierzchni.

W myśl tego znaczenia równania różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu wypowiadają własności powierzchni, danem równaniem pierwotnem określonych, dotyczące styczności i elementów związanych z płaszczyznami styczności w punktach tychże powierzchni.

Równania różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu wypowiadają własności powierzchni, danem równaniem pierwotnem określonych, dotyczące krzywizny i elementów od głównych promieni krzywizny zależnych, w punktach tychże powierzchni.

Równania różniczkowe cząstkowe wyższych rzędów wypowiadają własności ściślej styczności danych powierzchni układu z prostszemi powierzchniami wyższych rzędów, względnie zmian głównych promieni krzywizny w poszczególnych punktach promieni.

Przykłady równań różniczkowych cząstkowych poszczególnych rodzajów powierzchni poznaliśmy przy sposobności badania krzywizny, tudzież w teoryi tworzenia powierzchni.

Ćwiczenia LVII.

1) Wykazać, że równanie pierwotne $F(x, y, C)=0$ o stałej dowolnej C prowadzi do zwyczajnego równania różniczkowego pierwszego rzędu kształtu: $f(x, y, y')=0$.

Wyprowadzić równania różniczkowe następujących równań pierwotnych:

2) $(y-c)^2-2x=0$. 3) $x^2+2Cy-C^2-a^2=0$. 4) $(x-2C)^2+Cy^2=C^2$ 5) $2x-3cy+c^3=0$.

6) $\log(\sqrt{x^2-xy}-y+2x)-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2\sqrt{1-\frac{y}{x}}+1\right)=C.$ 7) $y=cx+\sqrt{1+c^2}.$

8) $y=(x+c)e^x.$ 9) $y^2-2cx-c^2=0.$ 10) $y=c_1\cos x+c_2\sin x.$ 11) $y=x\log\frac{c_1+c_2x}{x}.$

12) $y=2c_1x+c_2x^2.$ 13) $y^2=c_1-c_2x^2.$ 14) $c_1x+c_2y=xy.$ 15) $y=e^x(c_1+c_2x+c_3x^2).$

16) $(1-x)y=c_1x^2+c_2x+c_3,$ 17) $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\sin(x+c_4)$

Wyznaczyć w postaci szeregów całki ogólne następujących równań różniczkowych:

18) $\frac{dy}{dx}-y=x^2.$ 19) $\frac{d^2y}{dx^2}=xy.$ 20) $x\frac{d^2y}{dx^2}-y=0.$ 21) $x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2-2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}+x=0.$

22) Wykazać, że każde równanie różniczkowe zwyczajne rzędu pierwszego posiada całkę ogólną, zawierającą jedną stałą dowolną.

23) Dwa równania pierwotne: $f(x, y)=c$, $F(x, y)=C$, każde o jednej stałej dowolnej prowadzą do tego samego równania różniczkowego pierwszego rzędu; dowieść, że w takim razie Jakobian funkcyj F i f jest zerem.

Wyznaczyć całki ogólne następujących równań różniczkowych rzędu pierwszego:

24) $(2y-1)dx+x\,dy=0;$ 25) $y(1+y^2)dx-x(1-y^2)dy=0;$ 26) $\sqrt{1-y^2}dy-y\,dx=0:$

27) $dy-2\sin\frac{y}{2}dx=0;$ 28) $\sqrt{1+y^2}dx-x\,dy=0;$ 29) $(a^2-b^2y^2)dx-dy=0:$

30) $xy\,dy+(1-y)^2dx=0.$ 31) $\sec^2x\operatorname{tang}y\,dx+\sec^2y\operatorname{tang}x\,dy=0.$

32) $(1+y^2)dx-(y+\sqrt{1+y^2})(1+x^2)^{3/2}dy=0.$ 33) $\sin x\cos y\,dx-\cos x\sin y\,dy=0.$

Znaleźć linie krzywych, dla których:

34) $T=a,$ 35) $N=a,$ 36) $T'=a,$ 37) $N'=a,$ 38) $T'=x,$ 39) $N'=x.$

Znaleźć trajektorye prostokątne układu krzywych:

40) $y=cx^n,$ 41) $y=c\,.\log x,$ 42) $y=c\,.\sin x,$ 43) $y=c\,.\operatorname{tang}x,$ 44) $y=c\,.\operatorname{arc\,sin}x.$

45) Wykazać, że całka ogólna równania różniczkowego: $\frac{dy}{dx}=ax+y^2$, przedstawia się w otoczeniu miejsca $x=0$ w postaci: $y=c+c^2x+\frac{1}{2}(a+2c^3)x^2+\frac{1}{3}c(a+3c^3)x^3+\ldots$

Utworzyć równania różniczkowe cząstkowe odpowiadające następującym równaniom pierwotnym o dowolnej funkcyi φ:

46) $z^2-xy-\varphi\left(\frac{y}{x}\right)=0.$ 47) $\sin x=\sin z\,.\varphi\left(\frac{\sin y}{\sin z}\right).$ 48) $\frac{x^2+y^2+z^2}{y}=\varphi\left(\frac{z}{y}\right).$

Rozwiązania LVII. 2) $2y'\sqrt{x}-1=0.$ 3) $(x^2-a^2)y'^2-2xyy'-a^2=0.$

4) $y'^3-\frac{y}{x}y'^2-\frac{y}{x}y'+\frac{2y^2-x}{xy^2}.$ 5) $xy'^3-y'^2+\frac{27}{4}=0.$ 6) $y'=2+\sqrt{1-\frac{y}{x}}.$ 7) $y=y'x+\sqrt{1+y'^2}.$

8) $y'-y=e^x.$ 9) $yy'^2+2xy'=y.$ 10) $y''+y=0.$ 11) $x^2y''+(y-xy')^2=0.$ 24) $x\sqrt{2y-1}=C$

25) $(1+y^2)x=Cy.$ 26) $x+\sqrt{1-y^2}-\log\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}=C.$ 27) $x-\log\operatorname{tang}\frac{y}{4}=C.$

28) $x=C(y+\sqrt{1+y^2}).$ 29) $a+by=C(a-by)e^{2abx}.$ 30) $\frac{1}{1-y}+\log x(1-y)=C.$

31) $\operatorname{tang}x\,.\operatorname{tang}y=C.$ 32) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{2}\log(1+y^2)-\log(y+\sqrt{1+y^2})=C.$ 33) $\cos y=C\sin x.$

34—39) Partrz art. 16 str. 918. 46) $xz\frac{\partial z}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{\partial y}=xy.$ 47) $\operatorname{tang}x\frac{\partial z}{\partial x}+\operatorname{tang}y\frac{\partial z}{\partial y}=\operatorname{tang}z.$

48) $(y^2+z^2-x^2)\frac{\partial z}{\partial x}=2xy\frac{\partial z}{\partial y}+2xz.$

Literatura. A. R. Forsyth: A treatise on Differential equations. London 1888. I. Hoüel: Cours de calcul infinitésimal. Paris 1880. C. Jordan: Cours d'analyse Paris T. I. 1893 II. 1894. III. 1896. W. Zajączkowski: Wykład nauki o równaniach różniczkowych.

Tematy do rozprawek naukowych.

1. Tworzenie równań różniczkowych zwyczajnych.
2. Tworzenie równań różniczkowych cząstkowych.
3. Całkowanie geometryczne równań różniczkowych.

Wykład LVIII.

Szczególne metody całkowania równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego.

1. Metoda oddzielania zmiennych. Najprostsze typy równań różniczkowych zwyczajnych rzędu i stopnia pierwszego, przedstawiających się w postaci normalnej:

$$M\,dx + N\,dy = 0, \tag{1}$$

tworzą równania różniczkowe, w których zmienne są oddzielone lub za pomocą zwykłych działań rachunkowych dadzą się oddzielić.

Należą tu równania kształtu:

$$\alpha)\quad \frac{dy}{dx} = f(x), \text{ czyli: } dy = f(x)\,dx,$$

$$\beta)\quad \frac{dy}{dx} = \varphi(y), \text{ czyli: } dx = \frac{dy}{\varphi(y)},$$

$$\gamma)\quad \varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy = 0,$$

ogólnie równania typu:

$$\varphi_1(x)\psi_1(y)\,dx + \varphi_2(x)\psi_2(y)\,dy = 0, \tag{2}$$

które sprowadzają się do postaci:

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\,dx + \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}\,dy = 0$$

i mają całkę ogólną, kształtu:

$$\int \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\,dx + \int \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}\,dy = C. \tag{2'}$$

2. Metoda zamiany zmiennych. W szczególnych przypadkach możemy w danem równaniu różniczkowem oddzielić zmienne, wprowadzając w miejsce zmiennych występujących w równaniu nowe zmienne za pomocą stosownych podstawień.

Ogólny kształt takich podstawień przedstawiają równania:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \tag{3}$$

skąd otrzymujemy:

$$dx = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\,du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\,dv, \quad dy = \frac{\partial \psi}{\partial u}\,du + \frac{\partial \psi}{\partial v}\,dv, \tag{4}$$

Dobierając odpowiednie funkcye φ i ψ możemy niekiedy przekształcić dane równanie różniczkowe na prostsze, zwłaszcza na takie, w których nowe zmienne u i v można oddzielić.

Podstawienia, wprowadzające nowe zmienne u i v w miejsce zmiennych x i y, mogą być zastąpione także takiem podstawieniem, które wprowadza tylko jedną nową zmienną. Podstawiając mianowicie $y=\varphi(x, u)$, a więc: $dy=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial u}du$, zamieniamy równanie różniczkowe $Mdx+Ndy=0$ o zmiennych x i y na równanie kształtu $Pdx+Qdu=0$ o zmiennych x i u.

Rodzaje podstawień trudno ująć w ogólne prawidła, dla tego wyjaśnimy tylko sposób postępowania na przykładach.

1) Mając np. wyznaczyć całkę równania:

$$(x-y^2)dx+2xy\,dy=0,$$

w którem zmiennych za pomocą dzielenia nie można oddzielić, połóżmy: $y^2=xz$, a więc: $2y\,dy=x\,dz+z\,dx$, a przekształcimy dane równanie różniczkowe w następujące:

$$(x-xz)dx+x^2dz+xz\,dx=0, \text{ czyli: } dx+x\,dz=0,$$

w którem zmienne możemy już oddzielić: $\frac{dx}{x}+dz=0$, a otrzymamy całką ogólną: $\log x+z=C$.

Tym sposobem otrzymujemy całkę ogólną danego równania różniczkowego w postaci:

$$\log x+\frac{y^2}{x}=C, \text{ czyli: } xe^{\frac{y^2}{x}}=C'.$$

2) Mając znowu wyznaczyć całkę równania różniczkowego:

$$(x+y)^2dy-a^2dx=0.$$

w którem niepodobna oddzielić zmiennych x i y za pomocą dzielenia, połóżmy:

$$x+y=u, \text{ a więc: } dx=du-dy,$$

a otrzymamy równanie:

$$u^2dy-a^2du+a^2dy=0, \text{ czyli: } (u^2+a^2)dy-a^2du=0,$$

które, po oddzieleniu nowych zmiennych y i u, sprowadza się do postaci:

$dy-\frac{a^2du}{u^2+a^2}=0$ i daje całkę ogólną: $y-a\operatorname{arc\,tang}\frac{u}{a}=C.$

Wracając do pierwotnych zmiennych x i y, otrzymujemy stąd:

$y-a\operatorname{arc\,tang}\frac{x+y}{a}=C$, a więc: $\frac{y-C}{a}=\operatorname{arc\,tang}\frac{x+y}{a}$, czyli równanie: $x+y=a\operatorname{tang}\frac{y-C}{a}$,

jako całkę ogólną danego równania różniczkowego.

3. Zastosowania geometryczne. a) **Trajektorye ukośnokątne układu prostych** $y=cx$. Równanie różniczkowe trajektoryj ukośnokątnych względem układu prostych $y=cx$, któremu odpowiada równanie różniczkowe:

$y'=\frac{y}{x}$, czyli: $y\,dx-x\,dy=0$ przedstawia się na mocy art. 18 str. 919 w postaci:

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=\operatorname{tang}\Theta\left(1+\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}\right),$$

czyli: $x\,dx+y\,dy=\frac{1}{\operatorname{tang}\Theta}(x\,dy-y\,dx).$

Kładąc: $x=r.\cos\varphi$, $y=r.\sin\varphi$, a więc: $dx=\cos\varphi\,dr-r\sin\varphi\,d\varphi$, $dy=\sin\varphi\,dr+r\cos\varphi\,d\varphi$, otrzymamy:

$$x\,dx+y\,dy=r\,dr, \quad x\,dy-y\,dx=r^2d\varphi,$$

zatem równanie różniczkowe między zmiennemi r i φ w postaci:

$$r\,dr=\frac{1}{\operatorname{tang}\Theta}r^2d\varphi, \text{ czyli: } \frac{dr}{r}=\frac{1}{\operatorname{tang}\Theta}.d\varphi,$$

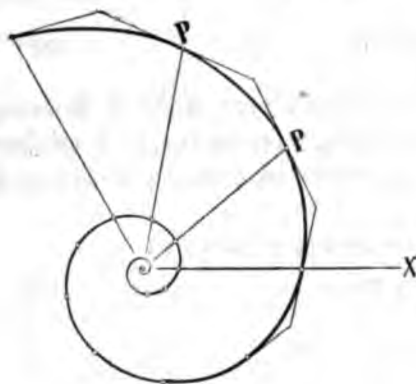


Fig 266.

a stąd całkę ogólną kształtu: $r = Ce^{\frac{\varphi}{\operatorname{tang}\theta}}$, przedstawiający spiralne logarytmiczne jako szukane trajektorye. Jeżeli $\theta = \frac{\pi}{4}$, tedy równanie odnośne otrzymuje kształt: $r = Ce^{\varphi}$ (fig. 266).

β) **Przykład trajektoryj ortogonalnych.** Znaleźć ortogonalne trajektorye krzywych o własności: $r_1 r_2 = a^2$, gdzie r_1 i r_2 są odległościami ich punktów od dwu stałych punktów.

Oznaczywszy odległość stałych punktów przez $2c$ i przyjąwszy prostą łączącą te punkta za oś x-ów, a jej środek za punkt początkowy, otrzymamy równanie różniczkowe trajektoryi:

$$\left(x^2+y^2\right)\left(x\frac{dy}{dx}-y\right) = c^2\left(x\frac{dy}{dx}+y\right),$$

a stąd po scałkowaniu równanie trajektoryi:

$$x^2-y^2+cxy = c^2.$$

Ortogonalnymi trajektoryami układu spółogniskowych krzywych Cassiniego (Patrz str. 672 art. 15 i nast.) są zatem spółośrodkowe hiperbole równoboczne.

4. Równania różniczkowe jednorodne. Szczególny przypadek równań różniczkowych rzędu i stopnia pierwszego, w których zmienne za pomocą wprowadzenia nowych zmiennych zawsze oddzielić można, stanowią r ó w n a n i a r ó ż n i c z k o w e j e d n o r o d n e. Są to równania kształtu:

$$M\,dx + N\,dy = 0,$$

w których spółczynniki M i N są jednorodnemi funkcyami zmiennych x i y tego samego, np. n-go stopnia, zatem dadzą się przedstawić w formie:

$$M = x^n\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right),\quad N = x^n\,\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Ogólny kształt równania różniczkowego jednorodnego będzie zatem:

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx + \psi\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0, \tag{5}$$

Kładąc: $y = ux$, a więc $dy = u\,dx + x\,du$ sprowadzimy powyższe równanie jednorodne do postaci:

$$\varphi(u)dx + \psi(u)\,(u\,dx + x\,du) = 0,\ \text{czyli:}\ \frac{du}{x} + \frac{\psi(u)\,du}{\varphi(u)+u\psi(u)} = 0,$$

w której są zmienne oddzielone, skąd otrzymujemy całkę ogólną w postaci funkcyi między zmiennemi x i u kształtu:

$$\log x + \int\frac{\psi(u)\,du}{\varphi(u)+u\psi(u)} = C,$$

Po wykonaniu wskazanego całkowania, należy zastąpić zmienną u przez stosunek: $\frac{y}{x}$, a otrzymamy szukaną całkę ogólną.

Przykłady. α) Znaleźć całkę ogólną równania różniczkowego jednorodnego:

$$(y-x)dy + y\,dx = 0.$$

Rozwiązanie: Kładąc: $y = ux$, zatem: $dy = u\,dx + x\,du$ sprowadzimy to równanie do postaci:

$$x(u-1)(u\,dx + x\,du) + ux\,dx = 0,\ \text{czyli:}\ x(u-1)du + u^2dx = 0,$$

stąd otrzymujemy:

$$\frac{dx}{x} + \frac{u-1}{u^2}\,du = 0,$$

zatem całkę w postaci ogólnej:

$$\log x + \log u + \frac{1}{u} = C,\ \text{czyli:}\ \log(ux) = C - \frac{1}{u},$$

a więc: $ux = Ce^{-\frac{1}{u}}$, czyli: $y = C.e^{-\frac{x}{y}}$,
jako całkę ogólną danego równania różniczkowego.

β) Znaleźć całkę równania różniczkowego jednorodnego kształtu:

$$(8y+10x)dx+(5y+7x)dy=0.$$

Rozwiązanie: Kładąc: $y=ux$, otrzymujemy:

$$x(8u+10)dx+x(5u+7)(u\,dx+x\,du)=0,$$

stąd:

$$x(5u+7)du+(5u^2+15u+10)dx=0,$$

czyli:

$$\frac{dx}{x}+\frac{1}{5}\frac{(5u+7)du}{u^2+3u+2}=0,$$

zatem rozwiązanie ogólne w postaci:

$$\log x+\frac{1}{5}\int\frac{5u+7}{u^2+3u+2}du=C.$$

Ze względu na to, że:

$$\frac{5u+7}{u^2+3u+2}=\frac{5u+7}{(u+1)(u+2)}=\frac{2}{u+1}+\frac{3}{u+2},$$

a więc:

$$\int\frac{5u+7}{u^2+3u+2}du=\log[(u+1)^2.(u+2)^3],$$

otrzymujemy powyższe równanie w postaci:

$$\log x+\frac{1}{5}\log[(u+1)^2(u+2)^3]=C,$$

skąd wypada równanie: $(x+y)^2(y+2x)^3=C$,
jako całka ogólna danego równania różniczkowego.

5. Równania różniczkowe niejednorodne możemy w niektórych przypadkach za pomocą szczególnych podstawień przekształcić na równania jednorodne. Do tych należą równania różniczkowe kształtu:

$$(ax+by+c)dx+(a'x+b'y+c')dy=0$$

które zamieniają się na jednorodne:

albo: 1) skoro podstawimy: $x=x'-\alpha$, $y=y'-\beta$ i obierzemy α i β tak, żeby spełniły się warunki: $a\alpha+b\beta=c$, $a'\alpha+b'\beta=c'$;

albo: 2) skoro podstawimy: $ax+by+c=\xi'$, $a'x+b'y+c'=\eta'$.

Mając np. dane równanie różniczkowe niejednorodne:

$$(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0,$$

to α) podstawiając: $x=x'-\frac{1}{3}$, $y=y'+\frac{1}{3}$, otrzymamy równanie różniczkowe jednorodne:

$$(2x'-y')dx'+(2y'-x')dy'=0;$$

β) podstawiając zaś: $2x-y+1=\xi$, $2y-x-1=\eta$, a więc: $2dx-dy=d\xi$, $2dy-dx=d\eta$,

czyli:

$$dx=\frac{1}{3}(2d\xi+d\eta),\quad dy=\frac{1}{3}(d\xi+2d\eta),$$

otrzymamy równanie jednorodne:

$$(2\xi+\eta)d\xi+(\xi+2\eta)d\eta=0.$$

Pierwsze prowadzi na mocy podstawienia: $y'=ux$, do równania różniczkowego: $\frac{dx'}{x'}+\frac{(2u-1)du}{2(u^2-u+1)}=0$, skąd otrzymujemy jego całkę ogólną w postaci: $x'^2+y'^2-x'y'=C$, drugie prowadzi na mocy podstawienia: $y=v\xi$ do równania różniczkowego:

$$\frac{d\xi}{\xi}+\frac{1}{2}\frac{(1+2v)dv}{v^2+v+1}=0,$$

skąd otrzymujemy znowu jego całkę ogólną w postaci: $\xi^2+\eta^2+\xi\eta=C$.

Oba rozwiązania prowadzą ostatecznie do całki ogólnej danego równania różniczkowego niejednorodnego w postaci: $x^2+y^2-xy+x-y=C$.

6. Równania liniowe pierwszego rzędu. Równaniami różniczkowemi liniowemi nazywamy równania kształtu:

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q, \qquad (6)$$

gdzie P i Q są wyłącznie funkcyami zmiennej x.

1. Jeżeli $Q=0$, tedy mamy:

$$\frac{dy}{dx}+Py=0, \quad \frac{dy}{y}=-Pdx,$$

zatem rozwiązanie ogólne:

$$y=Ce^{-\int Pdx},$$

gdzie C jest dowolną stałą.

2. Jeżeli Q jest różne od 0, przyjmijmy jako rozwiązanie danego równania, równanie kształtu: $y=Ce^{-\int Pdx}$, uważając C jako niewiadomą funkcyę zmiennej x, którą mamy wyznaczyć tak, aby danemu równaniu różniczkowemu stało się zadość. Wstawiając:

$$y=Ce^{-\int Pdx}, \text{ a więc: } \frac{dy}{dx}=\frac{dC}{dx}.e^{-\int Pdx}-CPe^{-\int Pdx}$$

w dane równanie różniczkowe, otrzymamy warunek:

$$\frac{dC}{dx}.e^{-\int Pdx}=Q, \text{ czyli: } \frac{dC}{dx}=Q.e^{\int Pdx}, \text{ zatem } C=\int Qe^{\int Pdx}dx+c,$$

jako szukaną funkcyę, która wstawiona za C daje rozwiązanie szukane równania liniowego pierwszego rzędu w postaci:

$$y=[\int e^{\int Pdx}Q\,dx+c]e^{-\int Pdx}.$$

czyli:

$$y=c\,e^{-\int Pdx}+e^{-\int Pdx}\int Q\,e^{\int Pdx}dx. \qquad (7)$$

Powyższą metodę całkowania równań różniczkowych liniowych rzędu pierwszego nazywamy **metodą zmienności stałych**.

Przykład. Rozwiązać równanie różniczkowe liniowe:

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^3.$$

Rozwiązując najpierw równanie prostsze kształtu:

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x+1}y=0,$$

otrzymujemy w tym celu po oddzieleniu zmiennych równanie różniczkowe:

$$\frac{dy}{y}-\frac{2dx}{x+1}=0,$$

które scałkowane daje równanie pierwotne:

$$\log y-2\log(x+1)=C,$$

skąd dostajemy:

$$y=C(x+1)^2,$$

jako całkę ogólną równania różniczkowego uproszczonego kształtu:

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x+1}y=0.$$

Przyjmując ten sam kształt całki ogólnej dla danego równania różniczkowego: $\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^3$ z warunkiem, że C jest niewiadomą funkcyą zmiennej niezależnej, otrzymujemy z postaci: $y=C(x+1)^2$ pierwszą pochodną:

$$\frac{dy}{dx}=2C(x+1)+(x+1)^2\frac{dC}{dx},$$

zatem na wyznaczenie C warunek:

$$2C(x+1)+(x+1)^2\frac{dC}{dx}-\frac{2}{x+1}C(x+1)^2=(x+1)^3,$$

z którego dostajemy:

$$\frac{dC}{dx}=x+1, \text{ zatem: } C=\frac{(x+1)^2}{2}+c.$$

Wobec tego otrzymujemy całkę ogólną danego równania różniczkowego liniowego w postaci:

$$y=\left(\frac{(x+1)^2}{2}+c\right)\left(x+1\right)^2.$$

7. Metoda całkowania równania różniczkowego liniowego rzędu pierwszego za pomocą funkcyi dowolnej. Wprowadzając w równaniu różniczkowem liniowem: $\frac{dy}{dx}+Py=Q$ dwie nowe zmienne u i v za pomocą podstawienia:

$$y=uv,$$

dostajemy:

$$\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx},$$

zatem dane równanie w postaci:

$$u\left(\frac{dv}{dx}+Pv\right)+v\frac{du}{dx}-Q=0, \tag{8}$$

w której jedna ze zmiennych u i v może być dowolnie obraną.

Przyjmijmy funkcyę v tak, aby było:

$$\frac{dv}{dx}+Pv=0, \text{ czyli: } \frac{dv}{v}=-Pdx,$$

$$\log v=C-\int Pdx, \text{ czyli zatem: } v=ce^{-\int Pdx} \tag{9}$$

wówczas równanie (8) sprowadza się do postaci:

$$v\frac{du}{dx}-Q=0,$$

skąd wypada:

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{v}Q=\frac{1}{c}Q.e^{\int Pdx},$$

zatem:

$$u=\frac{1}{c}\int Qe^{\int Pdx}dx+c_1. \tag{10}$$

Całka ogólna danego równania różniczkowego liniowego otrzymuje przeto kształt:

$$y=uv=\left[\frac{1}{c}\int Qe^{\int Pdx}dx+c_1\right]ce^{-\int Pdx},$$

czyli:

$$y=cc_1e^{-\int Pdx}+e^{-\int Pdx}\int Qe^{\int Pdx}dx,$$

a więc:

$$y=Ce^{-\int Pdx}+e^{-\int Pdx}\int Qe^{\int Pdx}dx, \tag{11}$$

gdzie $C=cc_1$ jest stałą dowolną.

8. Stosując tę metodę do równania liniowego:

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^3,$$

a więc, kładąc: $y=uv$, $\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$, otrzymujemy równanie:

$$u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}-\frac{2uv}{x+1}=(x+1)^3,$$

czyli:
$$u\left\{\frac{dv}{dx}-\frac{2v}{x+1}\right\}+v\frac{du}{dx}-(x+1)^3=0,$$

któremu stanie się zadość, skoro się spełnią równania różniczkowe:

$$\frac{dv}{dx}-\frac{2v}{x+1}=0, \qquad v\frac{du}{dx}-(x+1)^3=0,$$

z których możemy wyznaczyć funkcye u i v.

Z pierwszego dostajemy:

$\frac{dv}{v}=\frac{2dx}{x+1}$, zatem: $\log v=2\log(x+1)+\log c$, a więc: $v=c(x+1)^2$.

Wobec tego drugie równanie różniczkowe sprowadza się do postaci:

$$c(x+1)^2\frac{du}{dx}-(x+1)^3=0,$$

skąd otrzymujemy:

$du=\frac{x+1}{c}dx$, zatem: $u=\frac{1}{c}\int(x+1)dx+c_1$, czyli: $u=\frac{1}{c}\frac{(x+1)^2}{2}+c_1$.

Całka ogólna danego równania różniczkowego otrzymuje więc kształt:

$$y=uv=\left(\frac{1}{c}\frac{(x+1)^2}{2}+c_1\right)c(x+1)^2,$$

czyli:
$$y=\left\{\frac{(x+1)^2}{2}+C\right\}\left(x+1\right)^2, \text{ jak wyżej.}$$

9. Równania Bernouilli'ego. Równania różniczkowe kształtu:

$$\frac{dy}{dx}+Py=Qy^n, \tag{12}$$

gdzie P i Q są wyłącznie funkcyami zmiennej niezależnej x, zwane równaniami Bernouilli'ego, dadzą się sprowadzić do formy liniowej. Kładąc mianowicie $y^{1-n}=z$, otrzymamy równanie liniowe:

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)P.z=(1-n)Q. \tag{13}$$

Mając np. dane równanie różniczkowe Bernouilli'ego kształtu:

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x+1}=\frac{(x+1)^3}{2}y^3,$$

podstawimy: $y^{-2}=z$, a więc: $y=z^{-1/2}$,

a otrzymamy:
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}z^{-3/2}\frac{dz}{dx},$$

wobec czego przekształci się dane równanie w następujące:

$$-\frac{1}{2}z^{-3/2}\frac{dz}{dx}+\frac{z^{-1/2}}{x+1}=-\frac{(x+1)^3}{2}z^{-3/2},$$

skąd otrzymujemy równanie różniczkowe liniowe między zmiennemi x i z w postaci:

$$\frac{dz}{dx}-\frac{2z}{x+1}=(x+1)^3,$$

którego całka ogólna w myśl art. 6 otrzymuje kształt:

$$z=\left\{\frac{(x+1)^2}{2}+c\right\}\left(x+1\right)^2.$$

Całka ogólna danego równania Bernouill'ego przedstawia się więc w postaci:

$$y = \left\{\frac{(x+1)^2}{2} + C\right\}^{-1/2} (x+1)^{-1},$$

czyli:

$$(x+1)^2 \left\{\frac{(x+1)^2}{2} + C\right\} y^2 = 1.$$

10. Równanie Riccati'ego. Tak nazywamy równanie różniczkowe kształtu:

$$\frac{dy}{dx} + Py^2 + Qy + R = 0, \tag{14}$$

w którem spółczynniki P, Q, R są wyłącznie funkcyami zmiennej x. Równanie to nie da się w ogólności scałkować w formie zamkniętej. Możemy jednak wyznaczyć jego całkę ogólną, gdyby znaną była jakakolwiek całka szczególna tego równania.

Niech będzie: $y = f_1(x)$ pewną funkcyą, czyniącą zadość temu równaniu, czyli pewną znaną całką szczególną tego równania, połóżmy:

$$y = y_1 + z, \text{ a więc: } \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{dz}{dx},$$

a otrzymamy z danego równania:

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{dz}{dx} + P(y_1+z)^2 + Q(y_1+z) + R = 0,$$

czyli:

$$\left(\frac{dy_1}{dx} + Py_1^2 + Qy_1 + R\right) + \frac{dz}{dx} + (2Py_1 + Q)z + Pz^2 = 0,$$

a że według założenia:

$$\frac{dy_1}{dx} + Py_1^2 + Qy_1 + R = 0,$$

przeto sprowadza się ostatnie równanie do równania Bernouille'go, kształtu:

$$\frac{dz}{dx} + (2Py_1 + Q)z + Pz^2 = 0.$$

Równanie to na mocy podstawienia $z = u^{-1}$, przekształca się na równanie liniowe:

$$\frac{du}{dz} - (2Py_1 + Q)u - P = 0,$$

któremu na podstawie art. 5 odpowiada całka ogólna w postaci:

$$u = \varphi(x) + C\psi(x).$$

Wobec tego całka ogólna danego równania Riccatiego otrzymuje kształt:

$$y = y_1 + z = y_1 + \frac{1}{u} = y_1 + \frac{1}{\varphi(x) + C\psi(x)},$$

czyli:

$$y = \frac{[y_1\varphi(x) + 1] + Cy_1\psi(x)}{\varphi(x) + C\psi(x)}.$$

Przyjmijmy dowolnie cztery całki szczególne, odpowiadające czterem wartościom: C_1, C_2, C_3, C_4 stałej dowolnej C, w postaci:

$$y_i = \frac{\varphi_1(x) + C_i\psi_1(x)}{\varphi(x) + C_i\psi(x)} \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

natenczas otrzymamy:

$$\frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} : \frac{y_4 - y_1}{y_4 - y_2} = \frac{C_3 - C_1}{C_3 - C_2} : \frac{C_4 - C_1}{C_4 - C_2}.$$

To znaczy: *Stosunek anharmoniczny czterech całek szczególnych równania Riccatiego jest ilością stałą.*

11. Zupełne równania różniczkowe rzędu pierwszego. Zupełnem nazywamy równanie różniczkowe $M\,dx + N\,dy = 0$, które powstało przez bezpośrednie różniczkowanie pewnego równania pierwotnego kształtu: $f(x, y) = c$; pierwsza strona danego równania różniczkowego jest tedy zupełną różniczką jakiejś funkcyi: $f(x, y)$.

Koniecznym i wystarczającym warunkiem, aby pierwsza strona równania $M\,dx+N\,dy=0$ była zupełną różniczką, jest:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x},\ \text{gdyż skoro:}\ M=\frac{\partial f}{\partial x},\ N=\frac{\partial f}{\partial y},$$

wtedy: $$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y},\ \text{jakoteż:}\ \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y},\ \text{przeto:}\ \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x},\qquad(15)$$

Skoro ten warunek się spełnia, tedy możemy położyć $du=M\,dx+N\,dy$. Całkując ze względu na x, otrzymamy: $u=\int M\,dx+C$, gdzie C jest wielkością od x nie zależną, ale może się zmieniać wraz ze zmienną y, jest zatem pewną funkcyą zmiennej y, możemy zatem napisać:

$$u=\int M\,dx+\varphi(y),\qquad(16)$$

a że ma być: $\frac{du}{dx}=N$, przeto otrzymujemy na wyznaczenie $\varphi(y)$ warunek:

$$\frac{d\int M\,dx}{dy}+\frac{d\,\varphi(y)}{dy}=N,\ \text{stąd:}\ \frac{d\,\varphi(y)}{dy}=N-\frac{d\int M\,dx}{dy},$$

$$\varphi(y)=\int\left(N-\frac{d\int M\,dx}{dy}\right)dy+C,\ \text{zatem będzie:}\ \int M\,dx+\int\left(N-\frac{d\int M\,dx}{dy}\right)dy=C$$

rozwiązaniem danego równania.

Uwaga. Wyrażenie: $N-\frac{d\int M\,dx}{dy}$ musi być wyłącznie funkcyą z y, czyli nie może x zawierać, co nastąpi, skoro:

$$\frac{d}{dx}\left(N-\frac{d\int M\,dx}{dy}\right)=0,\ \text{czyli:}\ \frac{dN}{dx}-\frac{d}{dx}\frac{d\int M\,dx}{dy}=0,$$

zatem: $$\frac{dN}{dx}=\frac{d}{dy}\cdot\frac{d\int M\,dx}{dx},\ \text{czyli:}\ \frac{dN}{dx}=\frac{dM}{dy},$$

warunek: $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ jest zatem wystarczający.

Aby więc rozwiązać równanie: $M\,dx+N\,dy=0$, którego lewa strona jest zupełną różniczką, całkujemy $M\,dx$ ze względu na x, uważając y jako stałą i dodajemy w miejscu stałej dowolnej dowolną funkcyę y. Otrzymana suma różniczkowana podług y musi być równą N; stąd znajdziemy żądaną funkcyę zmiennej y. Tak powstała suma zrównana ze stałą dowolną, będzie szukanem rozwiązaniem.

Przykład. $(x^2-4xy-2y^2)dx+(y^2-4xy-2x^2)dy=0$. Mamy tu: $\frac{dM}{dy}=\frac{dN}{dx}=-4y-4x$.

Rozwiązanie: $$\int M\,dx=\int(x^2-4xy-2y^2)\,dx=\frac{x^3}{3}-2x^2y-2y^2x+\varphi(y).$$

$$N=y^2-4xy-2x^2=\frac{d}{dy}\left[\frac{x^3}{3}-2x^2y-2y^2x+\varphi(y)\right]=-2x^2-4xy+\varphi'(y),$$

stąd: $$\varphi'(y)=y^2,\ \text{przeto:}\ \varphi(y)=\frac{y^3}{3}.$$

Szukanem rozwiązaniem danego równania różniczkowego jest zatem:

$$\frac{x^3}{3}-2x^2y-2y^2x+\frac{y^3}{3}=C.$$

12. Teorya czynników całkujących. Jeżeli lewa strona równania różniczkowego: $M\,dx+N\,dy=0$ nie jest zupełną różniczką, można ją taką zrobić, mnożąc równanie przez pewną funkcyą: $\mu=f(x, y)$, którą nazywamy czynnikiem całkującym.

Czynnik całkujący istnieje zawsze, istnieje bowiem zawsze równanie: $\varphi(x, y)=c$, dogadzające danemu równaniu różniczkowemu: $M\,dx+N\,dy=0$.

Różniczkując równanie $\varphi(x, y)=C$, otrzymamy równanie różniczkowe:

$$\frac{\partial\,\varphi(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial\,\varphi(x,y)}{\partial y}dy=0.$$

Porównując je z danem równaniem, otrzymamy warunki:

$$\frac{\frac{\partial\,\varphi(x,y)}{\partial x}}{M}=\frac{\frac{\partial\,\varphi(x,y)}{\partial y}}{N}=\mu,\ \text{zatem:}\ \frac{\partial\,\varphi(x,y)}{\partial x}=\mu M,\quad \frac{\partial\,\varphi(x,y)}{\partial y}=\mu N,$$

więc μM i μN są pochodnymi cząstkowymi tej samej funkcyi $\varphi(x, y)$; wyrażenie: $\mu M\,dx+\mu N\,dy$ będzie zatem zupełną różniczką, czyli: $M\,dx+N\,dy$ może zawsze stać się zupełną różniczką, gdy je przez czynnik μ pomnożymy.

Do każdego równania różniczkowego należy nieskończona ilość czynników całkujących. Niech będzie bowiem: $\mu=F(x, y)$ funkcyą, której zupełna różniczka jest: $du=\mu M\,dx+\mu N\,dy$, zaś $\psi(u)$ dowolną funkcyą u, której pochodną jest: $f(u)$, tedy będzie:

$$d\,\psi(u)=f(u)\,du=\mu f(u)\,M\,dx+\mu\,f(u)\,N\,dy,$$

zatem będzie także: $\mu\,f(u)\,M\,dx+\mu f(u)\,N\,dy$ zupełną różniczką pewnej funkcyi z x i y. Skoro zatem μ jest czynnikiem całkującym równania różniczkowego, tedy jest nim także $\mu f(u)$, gdzie u jest funkcyą x i y, której zupełną różniczką jest wyrażenie: $\mu M\,dx+\mu N\,dy$, a że $f(u)$ jest dowolną funkcyą u, zatem liczba czynników całkujących jest nieskończenie wielka.

Formę równania pierwotnego $\varphi(x, y)=c$ możemy zmienić bez zmiany związku między zmienną zależną i niezależną. Zmiany w formie równania pierwotnego wywołują odpowiednie zmiany w formie czynnika całkującego.

Np. równaniu: $x^2(1+y^2)=c$ możemy bez zmiany związku nadać np. formy:

$$\log x^2+\log(1+y^2)=C,\quad \sin[x^2(1+y^2)]=C,$$

a otrzymamy trzy formy równania różniczkowego.

$$1.\ 2x(1+y^2)dx+2x^2y\,dy=0.\qquad 2\ \ 2\frac{dx}{x}+\frac{2y\,dy}{1+y^2}=0.$$

$$3.\ \cos[x^2(1+y^2)]\,.\,[2x(1+y^2)dx+2x^2y\,dy]=0.$$

Znając dwa czynniki całkujące danego równania różniczkowego możemy je rozwiązać bez całkowania. Skoro bowiem μ i μ' są dwoma czynnikami całkującymi, tedy musi być $\mu'=\mu f(u)$, zatem: $\frac{\mu'}{\mu}=f(u)$ będzie więc: $\frac{\mu'}{\mu}=C$ rozwiązaniem danego równania.

13. Ogólne wyznaczanie czynników całkujących równania: $M\,dx+N\,dy=0$. Jeżeli μ jest czynnikiem całkującym równania: $M\,dx+N\,dy=0$, tedy jest: $\mu M\,dx+\mu N\,dy$ zupełną różniczką funkcyi dwóch zmiennych x i y, będzie zatem:

$$\frac{\partial\,(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial\,(\mu N)}{\partial x},\tag{17}$$

skąd otrzymujemy równanie:

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right), \tag{18}$$

które zawiera dwie zmienne niezależne, jest zatem cząstkowem równaniem różniczkowem. Całkowanie tego równania cząstkowego jest w ogólności trudniejszem od całkowania danego równania zwyczajnego. Można jednak pod pewnemi założeniami podać żądane rozwiązanie, które wskaże zarazem, czy przyjęte założenie jest uprawnione.

α) Założenie $\mu=\varphi(x)$. Będzie tedy: $\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$, $\frac{\partial\mu}{\partial x}=\varphi'(x)$, równanie cząstkowe otrzymuje kształt: $N\varphi'(x)=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\varphi(x)$, skąd wynika:

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N},\quad \log\varphi(x)=\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx,\quad \text{zatem: } \mu=\varphi(x)=e^{\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx},$$

Taki kształt czynnika całkującego jest widocznie tylko wówczas możebny, skoro iloraz: $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ jest wyłącznie funkcyą x.

Pod założeniem: $\mu=\varphi(y)$ znajdziemy: $\mu=e^{\int\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}dy}$, czynnik całkujący możliwy, skoro iloraz: $\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ jest wyłącznie funkcyą y.

Np. Równanie liniowe: $\frac{dy}{dx}+Py=Q$ możemy sprowadzić do postaci:

$(Py-Q)dx+dy=0$, mamy tedy: $M=Py-Q$, $N=1$, $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=P$,

zatem czynnik całkujący $\mu=e^{\int Pdx}$.

Pomnożywszy przez ten czynnik dane równanie, otrzymamy równanie:

$$e^{\int Pdx}(Py-Q)dx+e^{\int Pdx}dy=0,$$

które scałkowane daje równanie: $e^{\int Pdx}y-\int e^{\int Pdx}Q\,dx=C$, skąd otrzymujemy:

$$y=e^{-\int Pdx}(C+\int e^{\int Pdx}Q\,dx).$$

β) Założenie $\mu=\varphi(xy)$. Kładąc $xy=v$, zatem: $\frac{\partial v}{\partial x}=y$, $\frac{\partial v}{\partial y}=x$ otrzymamy:

$$\mu=\varphi(v),\quad \frac{\partial\mu}{\partial x}=\varphi'(v)\,y,\quad \frac{\partial\mu}{\partial y}=\varphi'(v)\,x;$$

równanie cząstkowe otrzymuje wtedy kształt równania zwyczajnego:

$$N\varphi'(v)\,y-M\varphi'(v)x=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\varphi(v),\ \text{skąd znajdujemy: } \frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{Ny-Mx}.$$

Skoro powyższy iloraz będzie funkcyą v, tedy będzie czynnik całkujący kształtu: $\mu=e^{\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{Ny-Mx}dv}$.

γ) Założenie: $\mu=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Kładąc: $\frac{y}{x}=v$, $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}$, $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{x}$, otrzymamy równanie zwyczajne kształtu: $-N\varphi'(v)\frac{y}{x^2}-M\varphi'(v)\frac{1}{x}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\varphi(v)$,

skąd: $\frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)}=-\frac{x^2\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)}{Mx+Ny}$, zatem: $\mu=e^{\int\frac{x^2\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)}{Mx+Ny}dv}$.

Równanie: $M\,dx+N\,dy$ ma więc czynnik całkujący kształtu: $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, skoro iloraz: $\frac{x^2\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)}{Mx+Ny}$ jest funkcyą ilorazu: $\frac{y}{x}$.

δ) Założenie: $\mu=x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Kładąc: $\frac{y}{x}=v$, otrzymamy równanie różniczkowe kształtu: $N[nx^{n-1}\varphi(v)-x^{n-2}y\varphi'(v)]-Mx^{n-1}\varphi'(v)=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)x^n\varphi(v)$,

stąd:
$$\frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)}=\frac{x^2\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)+nNx}{Mx+Ny}=f\left(\frac{y}{x}\right)=f(v).$$
$$\mu=x^n\varphi(v)=x^n e^{\int f(v)\,dv}.$$

Równanie: $M\,dx+N\,dy=0$ ma czynnik całkujący w postaci funkcyi jednorodnej n-go rzędu, ze względu na x i y, skoro iloraz: $\frac{x^2\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)}{Mx+Ny}$ jest funkcyą ilorazu: $\frac{y}{x}$. Warunek ten spełnia się, skoro spółczynniki M i N są funkcyami jednorodnemi m-go rzędu; skoro bowiem: $M=x^m\varphi(v)$, $N=x^m\psi(v)$, $v=\frac{y}{x}$,

tedy będzie: $\frac{\partial N}{\partial x}=mx^{m-1}\psi(v)-x^{m-2}y\psi'(v)$, $\frac{\partial M}{\partial y}=x^{m-1}\varphi'(v)$,

przeto:
$$f(v)=\frac{(m+n)\psi(v)-v\psi'(v)-\varphi'(v)}{\varphi(v)+v\psi(v)},$$

Stopień n czynnika całkującego nie jest niczem ograniczony, możemy przyjąć $n=-(m+1)$, tedy otrzymamy:
$$f(v)=-\frac{\psi(v)+v\psi'(v)+\varphi'(v)}{\varphi(v)+v\psi(v)},\quad \int f(v)\,dv=-\log\{\varphi(v)+v\psi(v)\},$$

stąd:
$$\mu=x^n e^{\int f(v)\,dv}=\frac{1}{x^{m+1}[\varphi(v)+v\psi(v)]}=\frac{1}{Mx+Ny}.$$

Równanie różniczkowe o spółczynnikach jednorodnych staje się zatem zupełnem przy pomocy czynnika: $\frac{1}{Mx+Ny}$.

ε) $\mu=\varphi(v)$, gdzie v jest daną funkcyą x i y. Równanie cząstkowe:
$$N\frac{\partial u}{\partial x}-M\frac{\partial u}{\partial y}=\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]u,$$
otrzymuje tu kształt równania zwyczajnego:
$$N\varphi'(v)\frac{\partial v}{\partial x}-M\varphi'(v)\frac{\partial v}{\partial y}=\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]\varphi(v),$$

skąd: $\frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial v}{\partial x}-M\frac{\partial v}{\partial y}}$. Warunek: $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial v}{\partial x}-M\frac{\partial v}{\partial y}}$ ma być funkcyą v, zatem połóżmy ją równą $f(v)$, tedy będzie: $\mu=e^{\int f(v)dv}$.

14. Przykłady. α) Mając dane równanie różniczkowe kształtu: $(x^2+y^2+2x)dx+2y\,dy=0$, dostajemy:

$$M=x^2+y^2+2x,\quad N=2y,\quad \frac{\partial M}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=2y,\quad \frac{1}{N}\left\{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right\}=1,$$

zatem czynnik całkujący, któryby był wyłącznie funkcyą zmiennej x w postaci: $\mu=e^x$, dałby więc równanie różniczkowe zupełne:

$$e^x(x^2+y^2+2x)dx+2y\,e^x\,dy=0,$$

któremu odpowiada całka ogólna, kształtu: $e^x(x^2+y^2)=C$.

β) W równaniu różniczkowem: $2xy\,dx+(y^2-3x^2)\,dy=0$, mamy: $M=2xy$, $N=y^2-3x^2$, $\frac{\partial M}{\partial y}=2x$, $\frac{\partial N}{\partial x}=6x$, $\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=-8x$, $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)=-\frac{4}{y}$, zatem czynnik całkujący w postaci funkcyi samej zmiennej y, kształtu: $\mu=\frac{1}{y^4}$, na podstawie którego otrzymujemy z danego równania niezupełnego równanie różniczkowe zupełne:

$$\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0,$$

któremu odpowiada całka ogólna: $x^2-y^2=Cy^3$.

15. Równania różniczkowe pierwszego rzędu a wyższych stopni. Ogólny kształt równania różniczkowego pierwszego rzędu a n-go stopnia jest:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n+P_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1}+P_2\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2}+\ldots+P_{n-1}\frac{dy}{dx}+P_n=0, \tag{19}$$

gdzie: $P_1, P_2, \ldots, P_n$ są funkcyami z x i y. Rozłożywszy to równanie na czynniki pierwiastkowe ze względu na pochodną: $\frac{dy}{dx}$, otrzymamy, skoro: $p_1, p_2 \ldots p_n$ są pierwiastkami tego równania, iloczyn:

$$\left(\frac{dy}{dx}-p_1\right)\left(\frac{dy}{dx}-p_2\right)\cdots\left(\frac{dy}{dx}-p_n\right)=0, \tag{20}$$

gdzie $p_1, p_2, \ldots, p_n$ będą znanymi funkcyami zmiennych x i y.

Rozwiązując oddzielnie równania różniczkowe:

$$\frac{dy}{dx}-p_1=0,\quad \frac{dy}{dx}-p_2=0,\ldots,\frac{dy}{dx}-p_n=0,$$

otrzymamy n rozwiązań kształtu:

$$f_1(x,\,y,\,C_1)=0,\quad f_2(x,\,y,\,C_2)=0,\ldots,f_n(x,\,y,\,C_n)=0.$$

Każde z nich będzie całką danego równania.

Całką ogólną danego równania różniczkowego będzie widocznie iloczyn:

$$f_1(x,\,y,\,C)\,.\,f_2(x,\,y,\,C)\,..\,f_n(x,\,y,\,C)=0 \tag{21}$$

o jednej stałej dowolnej C, obejmujący wszystkie całki szczególne.

Geometrycznie przedstawia to rozwiązanie ogólne układ krzywych, przyczem każda krzywa układu składa się z n gałęzi, odpowiadających n całkom pojedyńczym dla tejże samej wartości stałej dowolnej.

Przykład. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{a}{x} = 0$. Otrzymujemy tu dwa równania różniczkowe pierwszego stopnia, kształtu:

$$\frac{dy}{dx} - \left(\frac{a}{x}\right)^{1/2} = 0, \quad \frac{dy}{dx} + \left(\frac{a}{x}\right)^{1/2} = 0,$$

których całki mają kształt:

$$y - 2\sqrt{ax} - c_1 = 0, \quad y + 2\sqrt{ax} - c_2 = 0.$$

Zastępując obie stałe przez c i mnożąc te równania otrzymamy:

$$(y - 2\sqrt{ax} - c)(y + 2\sqrt{ax} - c) = 0, \text{ czyli równanie: } (y-c)^2 - 4ax = 0,$$

jako ogólne rozwiązanie danego równania różniczkowego drugiego stopnia.

16. Szczególne przypadki równań różniczkowych rzędu pierwszego a wyższych stopni. W niektórych przypadkach można rozwiązać równania różniczkowe pierwszego rzędu a wyższych stopni bez rozkładania równania na czynniki.

Do najprostszych przypadków tego rodzaju należą te, w których dane równanie różniczkowe zawiera obok $\frac{dy}{dx}$ tylko zmienną x lub tylko zmienną y.

Kształty: α) $F\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0$, albo β) $F\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$.

α) Kładąc: $\frac{dy}{dx} = p$, otrzymamy:

$$F(x, p) = 0, \text{ stąd: } x = f(p), \text{ przeto: } dx = f'(p)\,dp,$$

więc:

$$dy = p\,dx = pf'(p)\,dp, \text{ zatem: } y = \int pf'(p)\,dp + C.$$

Równania: $x = f(p)$ i $y = \int pf'(p)\,dp + C$ dają po wyrugowaniu p szukany związek pierwotny między x i y.

Przykłady. 1) $x = 1 + p^3$. Mamy tu: $dx = 3p^2 dp$, $dy = 3p^3 dp$, więc: $y = \frac{3p^4}{4} + C$, zatem będzie: $y = \frac{3}{4}(x-1)^{4/3} + C$ rozwiązaniem ogólnem.

2) $x = 1 + p + p^3$. Mamy tu:

$$dx = (1 + 3p^2)\,dp, \quad dy = p\,dp + 3p^3 dp, \quad \text{zatem: } y = \frac{p^2}{2} + \frac{3p^4}{4} + C,$$

co w połączeniu z równaniem: $x = 1 + p + p^3$ podaje szukany związek między x i y.

β) Z równania: $F\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$, czyli: $F(y, p) = 0$, otrzymujemy natomiast:

$$y = f(p), \quad dy = f'(p)\,dp, \text{ zatem: } p\,dx = f'(p)\,dp,$$

stąd:

$$dx = \frac{f'(p)}{p}\,dp, \text{ a więc: } x = \int \frac{f'(p)}{p}\,dp + C.$$

Wyrugowawszy p z równań: $y = f(p)$, $x = \int \frac{f'(p)}{p}\,dp$ otrzymamy szukany związek między x i y.

Przykład. $y = p^2 + 2p^3$. Mamy tu: $dx = \frac{1}{p}\,dy = 2dp + 6p\,dp$, zatem: $x = 2p + 3p^2 + C$.

Ogólny związek między x i y przedstawia się zatem dwoma równaniami:

$$x = 2p + 3p^2 + C, \quad y = p^2 + 2p^3,$$

z których możemy p wyrugować.

Metodę tu stosowaną nazywamy *metodą całkowania równań różniczkowych przez różniczkowanie.*

Do równań różniczkowych, w których korzystamy z tej metody należą także t. zw. równania Clairaut'a i Lagrange'a, któremi zajmiemy się w następnych artykułach.

17. Równanie Clairaut'a. Nazywamy tak równanie kształtu:

$$y=x\frac{dy}{dx}+f\left(\frac{dy}{dx}\right). \tag{22}$$

Połóżmy: $\frac{dy}{dx}=p$, to otrzymamy równanie:

$$y=xp+f(p).$$

Różniczkując je, dostaniemy:

$$p=p+x\frac{dp}{dx}+f'(p)\frac{dp}{dx}, \text{ stąd: } [x+f'(p)]\frac{dp}{dx}=0. \tag{23}$$

Otrzymane równanie rozkłada się na dwa równania: $x+f'(p)=0$, $\frac{dp}{dx}=0$. Drugie równanie scałkowane daje $p=C$, podstawiwszy tę wartość w dane równanie otrzymamy: $y=Cx+f(C)$ jako szukane rozwiązanie ogólne, czyli całkę ogólną danego równania różniczkowego z jedną stałą dowolną C.

Pierwsze równanie: $x+f'(p)=0$, połączone z danem równaniem: $y=px+f(p)$ daje po wyrugowaniu p nowy związek między x i y, który nie da się wyprowadzić z całki zupełnej przez nadanie stałej dowolnej pewnej wartości szczególnej. Taki nowy związek między x i y nazywamy r o z w i ą z a n i e m o s o b l i w e m, albo c a ł k ą o s o b l i w ą r ó w n a n i a r ó ż n i c z k o w e g o.

Przykład. $y=xp+\frac{m}{p}$. Różniczkując, otrzymamy: $0=\left(x-\frac{m}{p^2}\right)\frac{dp}{dx}$. Z równania: $\frac{dp}{dx}=0$ wypływa $p=c$, a stąd: $y=cx+\frac{m}{c}$ rozwiązanie ogólne.

Z równania: $x-\frac{m}{p^2}=0$ wypływa: $p=\sqrt{\frac{m}{x}}$, a stąd: $y=\sqrt{mx}+\sqrt{mx}$, czyli: $y^2=4mx$ rozwiązanie osobliwe.

18. Równanie Lagrange'a. Równaniem ogólniejszem od równania Clairaut'a jest t. zw. równanie Lagrange'a, kształtu:

$$y=x.f\left(\frac{dy}{dx}\right)+\varphi\left(\frac{dy}{dx}\right), \tag{24}$$

czyli: $y=xf(p)+\varphi(p)$, gdzie: $p=\frac{dy}{dx}$. Różniczkując je otrzymamy:

$$p=f(p)+\{xf'(p)+\varphi'(p)\}\frac{dp}{dx}, \text{ stąd: } \{p-f(p)\}\frac{dx}{dp}-f'(p)x=\varphi'(p),$$

czyli:

$$\frac{dx}{dp}-\frac{f'(p)}{p-f(p)}.x=\frac{\varphi'(p)}{p-f(p)}, \tag{25}$$

równanie liniowe 1-go rzędu, skąd możemy oznaczyć x jako funkcyę parametru p; np. $x=\psi(p, c)$.

Wyrugowawszy p z tak otrzymanego równania i z danego, otrzymamy ogólną całkę danego równania różniczkowego.

Przykład. $x+yp=ap^2$. Różniczkując otrzymamy: $1+p^2+y\frac{dp}{dx}=2ap\frac{dp}{dx}$, czyli po wyrugowaniu zmiennej y, równanie: $1+p^2+\frac{ap^2-x}{p}\frac{dp}{dx}=2ap\frac{dp}{dx}$, a więc równanie liniowe: $\frac{dx}{dp}-\frac{1}{p(1+p^2)}x=\frac{ap}{1+p^2}$, którego całka przedstawi się w formie:

$$x=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}[C+a\,.\log(p+\sqrt{1+p^2})].$$

Otrzymane równanie w połączeniu z danem daje po wyrugowaniu p, szukany związek pierwotny między x i y.

21. Równania różniczkowe ewolwent danej linii krzywej. Ewolwenta czyli rozwijająca danej krzywej C jest trajektoryą prostokątną układu stycznych do krzywej C, zwanej ewolutą.

Równaniem stycznej w punkcie $P(x, y)$ danej krzywej $y=f(x)$ jest:

$$Y-y=y'(X-x).$$

Kładąc $y'=p=f'(x)$ i uważając p za stałą dowolną, otrzymamy stąd: $x=\varphi(p)$, a więc na podstawie danego równania krzywej: $y=\psi(p)$, zatem spółrzędne punktu styczności określone jako funkcye parametru p. Wobec tego przedstawi się układ stycznych do krzywej $y=f(x)$ równaniem o parametrze p w postaci:

$$Y=pX+F(p). \qquad (26)$$

Jeżeli przez x, y oznaczymy spółrzędne punktu na trajektoryi, tedy będzie: $p=-\frac{1}{y'}$, otrzymujemy zatem z (26) równanie różniczkowe ewolwent krzywej $y=f(x)$ w postaci:

$$y=-\frac{x}{y'}+F\left(-\frac{1}{y'}\right), \qquad (27)$$

które jest równaniem różniczkowem Lagrange'a.

Przykład. Niech będzie daną krzywą parabola Neila o równaniu: $y=x^{3/2}$, natenczas otrzymujemy: $y'=p=\frac{3}{2}x^{1/2}$, zatem: $x=\frac{4}{9}p^2$, $y=\frac{8}{27}p^3$.

Równanie stycznej w punkcie $P(x, y)$ paraboli Neila $y=x^{3/2}$ ma kształt:

$$Y-y=y'(X-x),$$

skąd otrzymujemy:

$$Y=pX-\frac{4}{27}p^3,$$

jako równanie układu stycznych do paraboli Neila: $y=x^{3/2}$.

Trajektorye tego układu otrzymują na podstawie wzoru (27) równanie różniczkowe kształtu:

$$y=-\frac{x}{y'}+\frac{4}{27}\frac{1}{y'^3}.$$

Kładąc $y'=p$, otrzymujemy stąd $y=-xp^{-1}+\frac{4}{27}p^{-3}$, a po zróżniczkowaniu:

$$p=-p^{-1}+xp^{-2}\frac{dp}{dx}-\frac{4}{9}p^{-4}\frac{dp}{dx}, \quad (p+p^{-1})\frac{dx}{dp}=xp^{-2}-\frac{4}{9}p^{-4},$$

zatem równanie liniowe między x i p w postaci:

$$\frac{dx}{dp}-x\,.\frac{1}{p(p^2+1)}=-\frac{4}{9}\,.\frac{1}{p^3(p^2+1)},$$

którego równanie pierwotne otrzymuje postać: $x=C\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}$, gdzie C jest funkcyą zmiennej x w postaci: $C=\frac{4}{27}\frac{\sqrt{(p^2+1)^3}}{p^3}-\frac{4}{9}\frac{\sqrt{p^2+1}}{p}+c$,

zatem:

$$x=\frac{Cp}{\sqrt{p^2+1}}-\frac{8}{27}+\frac{4}{27p^2}, \quad \text{zatem: } y=-\frac{C}{\sqrt{p^2+1}}+\frac{8}{27p}.$$

Kładąc $C=0$, otrzymamy krzywą: $x=-\frac{8}{27}+\frac{4}{27p^2}$, $y=\frac{8}{27p}$, która będzie parabolą drugiego rzędu o równaniu: $x=-\frac{8}{27}+\frac{27y^2}{16}$.

22. Równania różniczkowe rulet. Ruletą nazywamy linię krzywą R, opisaną przez punkt stale połączony z pewną linią krzywą C, toczącą się bez ślizgania po stałej krzywej K, zwanej krzywą podstawową. Do rulet należą, jako szczególne przypadki wszelkie cykloidy, epi- i hipocykloidy (Patrz str. 685—689).

Niech będzie $y=f(x)$ (fig. 267) równaniem krzywej podstawowej K, z którą styka się w punkcie A krzywa tocząca się C, obie krzywe mają w punkcie $A(x, y)$ wspólną styczną, której kąt nachylenia α względem osi x-ów określony jest wzorem: $\frac{dy}{dx}=y'=f'(x)$.

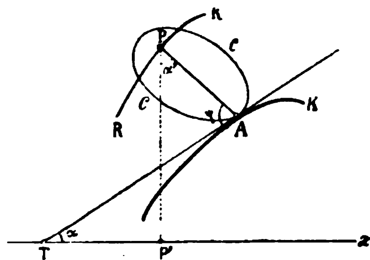


Fig. 267.

Niech będzie dany punkt P o spółrzędnych X, Y, połączony stale z krzywą C, mający od punktu A krzywej C odległość:

$$PA=r=\sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2},$$

która tworzy ze styczną w punkcie A do krzywej C, kąt $PAT=\psi$.

Gdy krzywa C toczy się po krzywej K, natenczas punkt P opisze krzywą $Y=F(X)$ (obwiednią kół zakreślonych z punktów krzywej K promieniami r), której styczna będzie prostopadłą do promienia PA, łączącego punkt P z punktem styczności krzywych C i K. Oznaczając przez α kąt, jaki styczna w punkcie $P(X, Y)$ krzywej K, tworzy z osią x-ów, otrzymamy:

$$\psi=\frac{\pi}{2}-\alpha'+\alpha=\frac{\pi}{2}-(\alpha'-\alpha),$$

zatem: $$\operatorname{tang}\psi=\operatorname{cotang}(\alpha'-\alpha)=\frac{1}{\operatorname{tang}(\alpha'-\alpha)}=\frac{1+\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\alpha'}{\operatorname{tang}\alpha'-\operatorname{tang}\alpha},$$

a że: $$\operatorname{tang}\alpha=\frac{dy}{dx}=f'(x)=y', \quad \operatorname{tang}\alpha'=\frac{dY}{dX}=F'(X)=Y',$$

przeto będzie: $$\operatorname{tang}\psi=\frac{1+y'Y'}{Y'-y'}.$$

Kąt ψ, jaki styczna w punkcie A krzywej C tworzy z promieniem PA zależy od każdorazowego punktu styczności krzywej C. Przyjmując punkt P za biegun, a prostą PA za oś biegunową, otrzymamy równanie biegunowe krzywej C, odniesione do tego układu w postaci $\varphi=\varphi(r)$, będzie tedy (na mocy art. 14 str. 691):

$$\operatorname{tang}\psi=r\frac{d\varphi}{dr}=r\varphi'(r), \tag{28}$$

otrzymujemy zatem równanie:

$$r\varphi'(r)=\frac{1+y'Y'}{Y'-y'}, \tag{29}$$

które w połączeniu z równaniami: $X-x=-r\sin\alpha'$, $Y-y=r\cos\alpha'$,

czyli: $$X-x=-\frac{rY'}{\sqrt{1+Y'^2}}, \quad Y-y=\frac{r}{\sqrt{1+Y'^2}}, \tag{30}$$

prowadzi po wyrugowaniu zmiennych x i r do równania między X i Y', przedstawiającego równanie różniczkowe rulety.

Równania powyższe prowadzą zarazem do rozwiązania dwu innych zagadnień.

Uważając w powyższych trzech równaniach funkcye $y=f(x)$ i $Y=F(X)$, jako wiadome, otrzymamy z nich po wyrugowaniu zmiennych x i X równanie między r i $\varphi'(r)$, jako równanie różniczkowe krzywej C.

Jeżeli zaś uważać będziemy funkcye $\varphi(r)$ i $F(X)$ za wiadome, to wyrugowawszy z powyższych trzech równań zmienne r i φ, otrzymamy równanie między x, y i y', jako równanie różniczkowe krzywej toczącej się C.

Jeżeli krzywa K, po której toczy się krzywa C jest linią prostą, wtedy równania (29) i (30) sprowadzają się do postaci:

$$r\varphi'(r)=\frac{1}{Y'}, \quad y=\frac{r}{\sqrt{1+Y'^2}}. \tag{31}$$

23. Równania jednorodne ze względu na x i y. Metodę całkowania przez różniczkowanie możemy także zastosować do równań różniczkowych jednorodnych ze względu na zmienne x i y kształtu:

$$x^n . \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{dy}{dx}\right)=0. \tag{32}$$

Kładąc: $\frac{y}{x}=v$, $\frac{dy}{dx}=p$, otrzymamy: $\varphi(v, p)=0$, stąd: $p=f(v)$, a że $y=vx$, przeto będzie także: $p=x\frac{dv}{dx}+v$, zatem: $x\frac{dv}{dx}+v=f(v)$, czyli: $\frac{dv}{v-f(v)}+\frac{dx}{x}=0$ W otrzymanem równaniu różniczkowem są zmienne x i v oddzielone. Całka jego przedstawia po zastąpieniu v przez $\frac{y}{x}$ szukany związek pierwotny między x i y.

Przykład. $y\frac{dy}{dx}+nx=\sqrt{y^2+nx^2}.\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$. Kładąc: $y=vx$, $\frac{dy}{dx}=p$, otrzymamy: $vp+n=\sqrt{v^2+n}\sqrt{1+p^2}$, stąd: $p=v\pm\sqrt{\frac{n-1}{n}}.\sqrt{v^2+n}$, a że: $p=x\frac{dv}{dx}+v$, przeto będzie $x\frac{dv}{dx}+v=v\pm\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sqrt{v^2+n}$, czyli: $\frac{dv}{\sqrt{v^2+n}}=\pm\sqrt{\frac{n-1}{n}}.\frac{dx}{x}$. Całkując równanie, otrzymamy: $\log(v+\sqrt{v^2+n})=\pm\sqrt{\frac{n-1}{n}}\log x+C$, stąd: $v+\sqrt{v^2+n}=cx^{\pm\sqrt{\frac{n-1}{n}}}$, czyli, zastępując v przez $\frac{y}{x}$, ostatecznie: $y+\sqrt{y^2+nx^2}=cx^{\pm\sqrt{\frac{n-1}{n}}}$, jako szukaną całkę ogólną.

24. Całki osobliwe równań różniczkowych pierwszego rzędu. Osobliwe rozwiązanie $\varphi(x, y)=0$ jest związkiem między x i y, który czyni zadość danemu równaniu różniczkowemu, ale nie da się wyprowadzić z całki ogólnej $f(x, y, c)=0$ przez nadanie stałej c pewnej szczególnej wartości. Można jednakże przekształcić całkę ogólną na całkę osobliwą, zastępując ilość c stosowną funkcyą, dość bowiem położyć $f(x, y, c)=\varphi(x, y)$, skąd wypada wartość c jako funkcya zmiennych x i y. Przypuśćmy, żeśmy wartość taką oznaczyli, tedy otrzymamy z całki zupełnej:

$$f(x, y, c)=0 \tag{33}$$

różniczkując ją podług x równanie: $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial c}\frac{dc}{dx}=0$,

skąd wypada:
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}-\frac{\frac{\partial f}{\partial c}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.\frac{dc}{dx}. \tag{34}$$

Wyrugowawszy z tego równania i z rozwiązania ogólnego $f(x, y, c)=0$ wielkość c, powinniśmy otrzymać dane równanie różniczkowe, czyli:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

gdzie c jest zastąpione wartością obliczoną z równania $f(x, y, c)=0$, wobec czego musi się spełnić warunek:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial c}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \cdot \frac{dc}{dx} = 0. \tag{35}$$

Przypuszczając $\frac{dc}{dx}=0$, otrzymalibyśmy c równe ilości stałej, a więc całkę ogólną. Pozostaje tedy warunek:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial c}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = 0, \quad f(x, y, c)=0.$$

który rozpada się na dwa następujące:

$$\left.\begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial c}=0, \\ f(x, y, c)=0 \end{matrix}\right\} \text{I}, \quad \left.\begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial y}=\infty \\ f(x, y, c)=0 \end{matrix}\right\} \text{II}. \tag{36}$$

Wyrugowawszy c z dwu równań każdego z tych dwóch układów, otrzymamy rozwiązania osobliwe danego równania.

Całki osobliwe danego równania różniczkowego pierwszego rzędu, otrzymują się zatem, rugując c z całki ogólnej i jej pochodnej podług c zrównanej do zera, albo z całki ogólnej i jej pochodnej podług y, zrównanej do nieskończoności.

Przykład. Równanie: $x\,dx+y\,dy=dy\sqrt{x^2+y^2-a^2}$ ma całkę ogólną kształtu:

$$y+c=\sqrt{x^2+y^2-a^2}, \text{ czyli: } 2cy+c^2+a^2-x^2=0.$$

Warunek dla całki osobliwej będzie zatem: $\frac{\partial f}{\partial c}=2y+2c=0$, albo: $\frac{\partial f}{\partial y}=2c=\infty$. Drugi warunek prowadzi do rozwiązania osobliwego $y=\infty$, które wykluczamy; pierwszy daje $c=-y$, zatem będzie równanie: $x^2+y^2-a^2=0$ szukanem rozwiązaniem osobliwem.

25. Uwaga. Warunek dla całki osobliwej przedstawiony w formie: $\frac{\frac{\partial f}{\partial c}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=0$, zastępuje się także wprost warunkiem: $\frac{dy}{dc}=0$, z równania: $f(x, y, c)=0$, otrzymamy bowiem:

$$\frac{\partial f}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dc}=0, \text{ przeto: } -\frac{\frac{\partial f}{\partial c}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{dy}{dc}.$$

Do warunku: $\frac{dy}{dc}=0$ dojdziemy wprost z rozwiązania zupełnego $y=f(x, c)$, skoro przypuścimy, że ilość c jest zmienną, a pomimo to dogadza danemu równaniu różniczkowemu: $\frac{dy}{dx}=\frac{df(x, c)}{dx}$, co się tylko wtedy stać może, skoro w równaniu:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f(x,c)}{\partial x}+\frac{\partial f(x,c)}{\partial c}\frac{dc}{dx},\ \text{będzie: } \frac{\partial f(x,c)}{\partial c}\cdot\frac{dc}{dx}=0,$$

czyli, pominąwszy $\frac{dc}{dx}=0$, skoro będzie: $\frac{\partial f(x,c)}{\partial c}=0$, czyli: $\frac{dy}{dc}=0$.

Przykład. Równanie: $y^2-2xy\frac{dy}{dx}+(1+x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1$ ma całkę ogólną: $y=cx+\sqrt{1-c^2}$

Na oznaczenie całki osobliwej otrzymamy tu: $\frac{dy}{dc}=x-\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}=0$, stąd: $c=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, podstawiwszy tę wartość w całkę ogólną, otrzymamy: $y=\sqrt{x^2+1}$, jako całkę osobliwą.

26. Geometryczne objaśnienie całki ogólnej i osobliwej. Całka ogólna $y=f(x, c)$ przedstawia familię krzywych (fig. 268), których szczególne kształty będą określone szczególnemi wartościami stałej c. Dwie po sobie następujące krzywe wywołane będą dwiema po sobie następującymi wartościami c jako to c i $c+dc$, ich punkt przecięcia się będzie określony równaniem $y=f(x, c)$ i $y=f(x, c+dc)$, zatem równaniami: $y=f(x, c)$ i $\frac{dy}{dc}=0$.

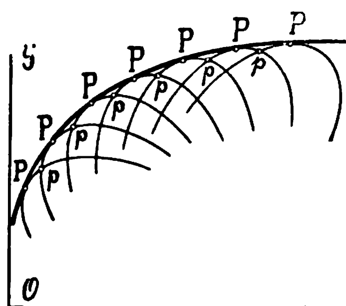


Fig. 268.

Całka osobliwa przedstawia zatem miejsce punktów, w których przecinają się po sobie następujące krzywe określone całką ogólną, innymi słowy, — całka osobliwa przedstawia obwijającą krzywych, określonych całką zupełną.

27. Wyprowadzenie całki osobliwej z równania różniczkowego. Jeżeli dane jest równanie pierwotne: $y=f(x, c)$, to różniczkując je podług x, otrzymamy równanie pochodne: $p=\frac{df(x,c)}{dx}$, które zamieni się na równanie różniczkowe: $p=\varphi(x, y)$, skoro za c podstawimy funkcyę z x i y, z równania pierwotnego wypadającą. Całka osobliwa równania różniczkowego wypada z całki ogólnej, skoro za c podstawimy funkcyę równaniem: $\frac{dy}{dc}=0$ określoną. Dla takiego c będzie ze względu na to, że

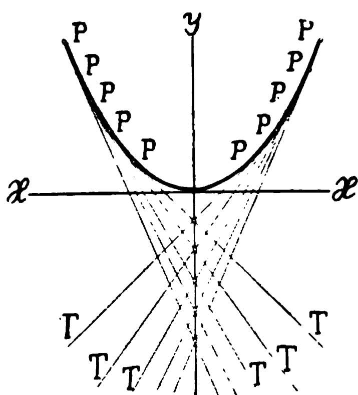


Fig. 269.

$\frac{dp}{dy}=\frac{dp}{dc}\cdot\frac{dc}{dy}=\frac{dp}{dc}:\frac{dy}{dc}$, widocznie $\frac{dp}{dy}=\infty$. Całki osobliwe równania różniczkowego: $p=\varphi(x, y)$ muszą zatem uczynić zadość równaniu: $\frac{dp}{dy}=\infty$. Tym sposobem możemy wynaleźć całki osobliwe bez znajomości całki zupełnej, należy jednakże w każdym razie zbadać, czy funkcye wyprowadzone z warunku: $\frac{dp}{dy}=\infty$ są w ogóle rozwiązaniami danego równania różniczkowego.

Przykład. Równanie różniczkowe: $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2x\frac{dy}{dx}+y=0$. Kładąc: $\frac{dy}{dx}=p$, otrzymamy stąd: $p^2-2px+2y=0$, czyli: $p=x\pm\sqrt{x^2-2y}$, stąd: $\frac{dp}{dy}=\pm\frac{1}{(x^2-2y)^{1/2}}$. Warunek: $\frac{dp}{dy}=\infty$ spełn.

się, skoro będzie: $x^2-2y=0$, czyli: $y=\frac{x^2}{2}$. Ta funkcya czyni zadość danemu równaniu różniczkowemu, jest więc jego rozwiązaniem osobliwem (fig. 269).

Do tego samego rozwiązania osobliwego dojdziemy z całki zupełnej danego równania, którą będzie: $y=cx-\frac{c^2}{2}$ jeżeli za c podstawimy wartość z równania: $\frac{dy}{dc}=x-c=0$ wypadającą, zatem: $c=x$ będzie bowiem tedy: $y=\frac{x^2}{2}$ całką osobliwą.

Ćwiczenia LVIII.

Wyznaczyć całki ogólne następujących równań różniczkowych:

1) $\frac{dy}{dx}+\frac{a(y+b)}{x^2}=0.$ 2) $xy\,dx+y\sqrt{ax}\,dx+x^2\sqrt{\frac{y}{b}}\,dy=0.$ 3) $(x+2y)dx-x\,dy=0.$

4) $(y-x)dy+y\,dx=0.$ 5) $(2\sqrt{xy}-x)dy+y\,dx=0.$ 6) $x\,dy-y\,dx-\sqrt{x^2+y^2}\,dx=0.$

7) $(x^2-4xy-2y^2)dx+(y^2-4xy-2x^2)dy=0.$ 8) $(x^3+3xy^2)dx+(y^3+3x^2y)dy=0.$

9) $(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0.$ 10) $(8y+10x)dx+(5y+7x)dy=0.$ 11) $\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)dx-\frac{2y}{x}dy=0.$

12) $\frac{2x\,dx}{y^3}+\left(\frac{1}{y^2}-\frac{3x^2}{y^4}\right)dy=0.$ 13) $\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0.$ 14) $(x^2y+y^3)dx-3xy^2dy=0.$

15) $y^2dx+(xy+x^2)dy=0.$ 16) $y^3dy+3y^2x\,dx+2x^3dx=0.$ 17) $(1+x^2)\frac{dy}{dx}-xy=a.$

18) $\frac{dy}{dx}+y=x^3.$ 19) $\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^3.$ 20) $\frac{dy}{dx}-\frac{n}{x+1}y=e^x(x+1)^n.$

21) $\frac{dy}{dx}-\frac{a}{x}y=\frac{x+1}{x}.$ 22) $x(1-x^2)\frac{dy}{dx}+2(x^2-1)y=ax^3.$ 23) $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}y=\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^2}.$

24) $\frac{dy}{dx}+y\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$ 25) $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x+1}=-\frac{(x+1)^3}{2}\cdot y^3.$ 26) $(1-x^2)\frac{dy}{dx}-xy=axy^2.$

27) $3y^2-\frac{dy}{dx}-ay^3=x+1.$ 28) $\left[\frac{1}{x}-\frac{y^2}{(x-y)^2}\right]dx+\left[\frac{x^2}{(1+y)^2}-\frac{1}{y}\right]dy=0.$

29) $\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}+\left[\frac{1}{y}-\frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}\right]dy=0.$ 30) $\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}+\left\{1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right\}\frac{dy}{y}=0.$

31) $e^x(x^2+y^2+2x)dx+2ye^x\,.\,dy=0.$ 32) $(\sin y+y\cos x)dx+(\sin x+x\cos y)dy=0.$

33) $(a^2y+x^3)dx+(b^3+a^2x)dy=0.$ 34) $x\,dy-y\,dx=\sqrt{x^2+y^2}\,dx.$ 35) $dy-(a+bx+cy)dx=0.$

36) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-a^2=0.$ 37) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-ax=0.$ 38) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-4a^2x^2y^2=0.$ 39) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-(a+x)\frac{dy}{dx}+ax=0.$

40) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-\left(x+y+xy\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+xy(1+x+y)\frac{dy}{dx}-x^2y^2=0.$ 41) $\frac{dy}{dx}+\frac{a}{x}y=bx^n.$

42) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-\left(x^2+xy+y^2\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(x^3y+x^2y^2+xy^3\right)\frac{dy}{dx}-x^3y^3=0.$ 43) $x\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}=1.$

44) $x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2xy\frac{dy}{dx}+y^2-x^2y^2+x^4=0.$ 45) $xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(x^2-y^2-a^2\right)\frac{dy}{dx}-xy=0.$

46) $x+y\frac{dy}{dx}=2y.$ 47) $Axy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(x^2-Ay^2-B\right)\frac{dy}{dx}-xy=0.$ 48) $y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-4a^2=0.$

49) $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2x\frac{dy}{dx}=y.$ 50) $x+y\frac{dy}{dx}=a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$

Znaleźć najprostsze czynniki całkujące, tudzież całki ogólne następujących równań różniczkowych niezupełnych:

51) $(1+xy)y\,dx+(1-xy)x\,dy=0.$ 52) $\left(nx\sin\frac{y}{x}+y\cos\frac{y}{x}\right)dx-x\cos\frac{y}{x}dy=0.$

53) $(x^m+y)dx-x\,dy=0.$ 54) $(xy+y^2)dx+(xy-1)dy=0.$ 55) $(5x^2+4xy^2+3y)dx+(2x^3y+x)dy=0.$

56) Znaleźć linie krzywe, których styczne wyznaczają na osi x-ów odcinki równe $\varphi(x)$.

57) Znaleźć linie krzywe, których styczne wyznaczają na osi y-ów odcinki równe $\psi(x)$.

Znaleźć linię krzywą, dla której:

58) Podstyczna $T'=\frac{x+y}{2}$. 59) Podnormalna: $N'=\frac{x+y}{2}$.

60) Znaleźć linię krzywą, dla której odcinek stycznej w każdym punkcie zawartą między osiami układu miałby stałą długość równą a.

Wyznaczyć całki ogólne i całki osobliwe następujących równań różniczkowych:

61) $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2y\frac{dy}{dx} + 4x = 0.$ 62) $\left(x^2-a^2\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\frac{dy}{dx} - x^2 = 0.$

63) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 - 4y\left(x\frac{dy}{dx} - 2y\right)^2 = 0.$ 64) $y = x\frac{dy}{dx} + a\sqrt{1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$ 65) $y = x\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$

66) $y = x\frac{dy}{dx} + a\sqrt[3]{1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}.$ 67) $y = x\frac{dy}{dx} + a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$ 68) $y = x\frac{dy}{dx} + \sqrt{\alpha+\left(\alpha+b^2\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$

69) $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2y\frac{dy}{dx} + ax = 0.$ 70) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0.$ 71) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4xy\frac{dy}{dx} + 8y^2 = 0.$

72) $8\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 27y.$ 73) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{y}{x}\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{a^2}{y^3} = 0.$ 74) $\left(x^2-2y^2\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4xy\frac{dy}{dx} - x^2 = 0.$

75) $y - x\frac{dy}{dx} - a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 0.$ 76) $y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 - a^2 = 0.$

77) Znaleźć obwiednią ellips, w których suma półosi jest stałą równą α.

78) Jaką krzywą obwija linia prosta AB, poruszająca się swemi końcami po osiach układu tak, że: $OA+OB=\alpha$.

79) Jaką krzywą obwija linia prosta, która jest prostopadła do prostej przechodzącej przez stały punkt A na osi y-ów, przyczem $OA=a$ i przez punkt przecięcia się prostej ruchomej z osią x-ów.

Znaleźć trajektorye prostokątne układu krzywych określonych następującemi równaniami o stałej dowolnej C:

80) $x^2+y^2=Cx.$ 81) $x^2+y^2+C^2=1+2Cxy.$

82) Znaleźć równania biegunowe krzywych rzutów poziomych na XOY loxodromijnych na kuli o promieniu 1.

83) Znaleźć krzywą, w której długość normalnej N pozostawałaby w stałym stosunku λ do jej odcinka na osi x-ów.

84) Znaleźć krzywą, której powierzchnia byłaby równą sześcianowi rzędnej y punktu końcowego, podzielonemu przez odciętą x tego punktu.

85) Znaleźć linie krzywe, które przecinają układ prostych $y=cx$ pod kątem stałym.

86) Znaleźć krzywą, której powierzchnia: $\int_a^x y\,dx = \frac{1}{4}(x^2+y^2).$

87) Znaleźć krzywą, dla której powierzchnia: $\int_a^x y\,dx = \frac{1}{2}(x^2+y^2).$

88) Znaleźć linię krzywą, w której stosunek między rzędną y a podstyczną T' byłby równy stosunkowi między pewną stałą długością a a różnicą spółrzędnych: $y-x$ (Zagadnienie Beaune'a).

89) Znaleźć trajektorye prostokątne ellips, określonych równaniem: $y=\frac{C}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, gdzie C jest dowolnym parametrem.

Dla jakiej krzywej będzie powierzchnia:

90) $\int_0^x y\,dx = \frac{xy}{n}$ 91) $\int_0^x y\,dx = \frac{1}{3}x(y+a).$ 92) $\int_0^x y\,dx = x\sqrt{ay}.$ 93) $\int_0^x y\,dx = x\varphi(y).$

94) $A_{0\ldots\varphi} = \frac{1}{2}\int_0^\varphi r^2\,d\varphi = \frac{1}{2}ar\varphi.$ 95) $A_{0\ldots\varphi} = \frac{1}{2}\int_0^x r^2\,d\varphi = \frac{a^2\varphi}{2} - ar.$

96) $A_{0\ldots\varphi} = \frac{1}{2}\int_0^\varphi r^2\,d\varphi = \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}a^2\varphi.$

Dla jakiej krzywej będzie długość łuku:

97) $S_{0\ldots x} = \int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\sqrt{ax}+y.$ 98) $S_{0\ldots x} = \int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,dx = \sqrt{y^2-a^2}-x.$

99) $S_{0\ldots\varphi} = \int_0^\varphi \sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi = a\varphi - r.$

100) Znaleźć krzywą, której podstyczna N' jest równa n-krotnej odciętej x.

101) Znaleźć krzywą, w której długość stycznej T jest średnią geometryczną proporcyonalną między rzędną y a daną długością a.

102) Znaleźć linię krzywą, która miałaby tę własność, że jej łuk mierzony od pewnego jej punktu (x, y) byłby równy $\sqrt{2xy}$.

103) Znaleźć linię krzywą taką, aby powierzchnia zawarta między krzywą, osią x-ów i rzędną y punktu końcowego pozostawała do powierzchni prostokąta zawartego między spółrzędnemi (x, y) tego punktu końcowego w stosunku, jak $m:n$.

104) Znaleźć linię krzywą, w której prosta wyprowadzona z początku układu prostopadle do stycznej w punkcie $P(x, y)$ tejże krzywej miała długość równą odcinkowi x punktu styczności.

105) Znaleźć krzywą, w której odległość punktu od początku układu byłaby równa odcinkowi stycznej zawartemu między punktem styczności a prostopadłą wykreśloną z początku układu.

106) Wykazać, że trajektoryami ortogonalnemi lemniskat o równaniu: $(x^2+y^2)^2=axy$ są lemniskaty podobne o równaniu: $(x^2+y^2)^2=Cxy$.

107) Wykazać, że traktrysa jest ewolwentą linii łańcuszkowej.

108) Znaleźć linię krzywą, któraby miała tę własność, że kąt α, zawartą między styczną w pewnym punkcie krzywej a osią x-ów jest równy podwójnemu kątowi, zawartemu między promieniem wiodącym tego punktu a osią x-ów.

Znaleźć linie krzywe, któreby miały tę własność, że prostopadłe p_1 i p_2 wykreślone z dwu stałych punktów F_1, F_2 na ich styczne miałyby:

109) stałą sumą $p_1+p_2=2a$; 110) stałą różnicę $p_1-p_2=2d$; 111) stały iloczyn $p_1p_2=p$; 112) stały iloraz $p_1:p_2=q$.

113) Wykazać, że równanie różniczkowe ewolwenty danej krzywej $y=f(x)$, możemy przedstawić w postaci:

$$y=-\frac{x}{y'}+f\left(-\frac{1}{y'}\right).$$

Znaleźć ewolwentę:

114) koła: $x^2+y^2=a^2$; 115) ellipsy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; 116) hiperboli: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; 117) paraboli: $y^2=2ax$; 118) paraboli Neila: $y=ax^{3/2}$.

119) Wykazać, że równanie różniczkowe rzutu poziomego linij przecinających południki powierzchni obrotowej: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=f(r)$ pod stałym kątem α, sprowadza się w spółrzędnych biegunowych r, φ do postaci: $\sqrt{1+[f'(r)]^2}\,dr \quad r\operatorname{cotg}\alpha\,.\,d\varphi=0$.

Rozwiązania LVIII. 1) $y+b=Ce^{\frac{a}{x}}$. 2) $\frac{y}{b}=\left[C+\sqrt{\frac{a}{x}}-\frac{1}{2}\log x\right]^2$. 3) $x^2=C(x+y)$.
4) $y=Ce^{-\frac{x}{y}}$. 5) $ye^{\sqrt{\frac{x}{y}}}=C$. 6) $x^2=2Cy+C^2$. 7) $\frac{x^3}{3}-2x^2y-2y^2x+\frac{y^3}{3}=C$.
8) $x^4+6x^2y^2+y^4=C$. 9) $x^2+y^2-xy+x-y=C$. 10) $(x+y)^2(y+2x)^3=C$. 11) $x^2-y^2=Cx$.
12) $x^2-y^2=Cy^3$. 13) $x+ye^{\frac{x}{y}}=C$. 14) $(x^2-2y^2)^3=Cx^2$. 15) $y=C\sqrt{\frac{2y+x}{x}}$.
16) $y^2+2x^2=C\sqrt{x^2+y^2}$. 17) $y=ax+C\sqrt{1+x^2}$. 18) $y=x^3-3x^2+6x-6+C\,.\,e^{-x}$.
19) $y=(x+1)^2\left\{\frac{(x+1)^2}{2}+C\right\}$. 20) $y=(x+1)^n[e^x+C]$. 21) $y=Cx^a+\frac{x}{1-a}-\frac{1}{a}$.
22) $y=ax+Cx\sqrt{1-x^2}$ 23) $y=Ce^{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. 24) $y=\sin x-1+Ce^{-\sin x}$.
25) $y=\left\{\frac{(x+1)^4}{2}+C(x+1)^2\right\}^{-1/2}$. 26) $y=[C\sqrt{1-x^2}-a]^{-1}$. 27) $y^3=Ce^{ax}-\frac{x+1}{a}-\frac{1}{a^2}$.
28) $\frac{xy}{x-y}+\log\frac{x}{y}=C$. 29) $y^2=C^2-2Cx$. 30) $y^2-2Cx=C^2$. 31) $e^x(x^2+y^2)=C$.
32) $x\sin y+y\cos x=C$. 33) $\frac{x^4}{4}+a^2xy+b^3y=C$. 34) $x^2=2Cy+C^2$. 35) $c(a+bx+cy)+b=Ce^{cx}$
36) $(y-C)^2-a^2x^2=0$. 37) $(y-C)^2-\frac{4}{9}ax^3=0$. 38) $(\log y+C)^2-a^2x^4=0$. 39) $(y-C)^2-$
$-\left(y+C\right)\left(ax+\frac{x^2}{2}\right)+\frac{a}{2}x^3=0$. 40) $\left(y-\frac{x^2}{2}+C\right)\left(y+Ce^x\right)\left(y+Ce^{\frac{x^2}{2}}\right)=0$. 41) $y=\frac{bx^{n+1}}{a+n+1}+\frac{C}{x^a}$.

42) $\left(y+C-\frac{x^4}{3}\right)\left(y+\frac{1}{x+C}\right)\left(y+Ce^{\frac{x^2}{2}}\right)=0.$ 43) $y=\sqrt{x(1-x)}-\text{arc tang}\sqrt{\frac{1-x}{x}}+C.$

44) $[y-x\sin\text{hip}(C+x)]\cdot[y-x\sin\text{hip}(C-x)]=0.$ 45) $y^2-C^2x^2+\frac{Ca^2}{C^2+1}=0.$ 46) $(x-y)e^{\frac{x}{x-y}}=0.$

47) $y^2=Cx^2-\frac{BC}{1+AC}.$ 48) $(y^2-C)^2-16a^2x^2=0.$ 49) $y^2=2Cx+C^2.$ 50) $x+yp=ap^2,$
$\frac{x\sqrt{1+p^2}}{p}=C+a\log[p+\sqrt{1+p^2}].$ 51) $\frac{1}{x^2y^2},$ $\log\frac{x}{y}-\frac{1}{xy}=C.$ 52) $\frac{1}{x^2\sin\frac{y}{x}},$ $x^4=C\sin\frac{y}{x}.$

53) $\frac{1}{x^2},$ $\frac{x^{m-1}}{m-1}-\frac{y}{x}=C.$ 54) $\frac{1}{y},$ $x^2+2xy-2\log y=C.$ 55) $\frac{1}{x^2},$ $x^5+x^4y^2+x^3y=C.$

56) $\log y=\int\frac{dx}{x-\varphi(x)}+C.$ 57) $y=x\left\{C-\int\frac{\psi(x)}{x^2}dx\right\}.$ 58) $(x-y)^2=2Cy.$

59) $(x-y)^7(x+2y)=C,$ Astroida. 61) $x^2=C(y-C),$ $y^2=4x^2.$ 62) $C^2+2Cy+a^2-x^2=0,$
$x^2+y^2=a^2.$ 63) $y^2=C^2(x-C)^2,$ $x^4=16y.$ 64) $y=Cx+a\sqrt{1+C^2},$ $x^2+y^2=a^2.$

65) $y=C(x+1-C),$ $4y=(1+x)^2.$ 66) $y=Cx+a\sqrt[3]{1-C^3},$ $y^{3/2}-x^{3/2}=a^{3/2}.$ 67) $y=Cx+a\sqrt{1+C^2}$
$x^2+y^2=a^2.$ 68) $y=Cx+\sqrt{\alpha+(\alpha+b^2)C^2},$ $\frac{x^2}{\alpha+b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$ 69) $C^2x^2=2Cy+a,$ $y^2=ax^2.$

70) $(3xy+2x^3+C)^2-4(y+x^2)^3=0,$ $y=-x^2.$ 71) $y=C(x-C)^2,$ $y\left(y-\frac{4x^3}{7}\right)=0$

72) $y^2=(x+C)^3,$ $y=0.$ 73) $y^4=4a^2x^2.$ 74) $x^2+2y^2=0,$ 75) $x^2+y^2=a^2.$ 76) $y=\pm a.$

77) $x^{2/3}+y^{2/3}=\alpha^{2/3}.$ 78) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{\alpha}.$ 79) $y=\frac{x^2}{4a}.$ 80) $x^2+y^2=Cy.$ 81) $x\sqrt{1-x^2}-$
$-y\sqrt{1-y^2}+\text{arc sin}[x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}]=C.$ 82) $\text{tang}\frac{\psi}{2}=Ce^{\varphi\,\text{cotg}\,\alpha},$ gdzie $\sin\psi=r.$

83) $(x^2-1)(x^2+y^2)=C^2+2Cx.$ 84) $x^2-2y^2=Cx^{2/3}.$ 85) $\text{arc tang}\frac{y}{x}=k\log\sqrt{x^2+y^2}+C.$

Spiralna logarytmiczna. 86) $y-x=Ce^{\frac{x}{y-x}}.$ 87) $\log\sqrt{x^2-xy+y^2}+\frac{1}{3}\text{arc tang}\frac{2y-x}{x\sqrt{3}}=C.$

88) $x=y-a+e^{-\frac{y}{a}}+C.$ 89) $y^2=C^2-x^2+2a^2\log x.$ 90) $y=Cx^{n-1}.$ 91) $y=Cx^2+\frac{a}{2}.$

92) $y=\frac{aC^2}{(C-x)^2}.$ 93) $\log x=\int\frac{\varphi'(y)dy}{y-\varphi(y)}+C.$ 94) $r=\frac{Ca}{C-\varphi}.$ 95) $r=a\frac{e\varphi-1}{e\varphi+1}.$

96) $r^2=a^2(e\varphi-1).$ 97) $y=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{x^3}{a}}-\sqrt{ax}.$ 98) $y=a\sec\frac{2x}{a}.$ 99) $r=a\frac{e\varphi-1}{e\varphi+1}.$

100) $y_n=Cx.$ 101) $x+C=\sqrt{ay-y^2}+a\,\text{arc sin}\sqrt{\frac{y}{a}}$ 102) $\frac{x-y}{C}=\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}.$

103) $x^{n-m}=Cy^m.$ 104) $x^2+y^2=Cx.$ 105) $\log\frac{x^2+y^2}{C}=\text{arc tg}\frac{y}{x}.$ 108) $x^2+y^2-Cy=0.$

109) Koło. 110) Układ dwu prostych. 111) Elipsy lub hiperbole. 112) Pęk prostych

Literatura. G. B o o l e: A treatise on differential equations. London 1872. Dr. S t a n i s ł a w K ę p i ń s k i: Podręcznik równań różniczkowych ze szczególnem uwzględnieniem potrzeb techników i fizyków. Część I. Równania różniczkowe zwyczajne. We Lwowie. Nakładem komisyi wydawniczej biblioteki politechnicznej 1907. Dr. O s k a r S c h l ö m i l c h: Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis. Zweiter Teil. Leipzig 1900.

Tematy do rozprawek naukowych.

1. Teorya czynników całkujących w równaniach różniczkowych rzędu pierwszego.
2. Teorya i zastosowania równań różniczkowych Riccati'ego.
3. Ewoluty i ewolwenty krzywych płaskich i teorya rulet.

Wykład LIX.

Równania różniczkowe zwyczajne drugiego i wyższych rzędów.

1. Równania różniczkowe liniowe *n*-go rzędu. Równaniami różniczkowemi liniowemi rzędu *n*-go nazywamy równania różniczkowe kształtu:

$$\frac{d^n y}{dx^n}+X_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+X_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+X_n y=X, \qquad (1)$$

gdzie X_1, X_2, ..., X_n, X są funkcyami wyłącznie zmiennej niezależnej x, albo liczbami stałemi.

Jeżeli druga strona równania (1) jest zerem, tedy otrzymujemy równanie różniczkowe liniowe *n*-go rzędu sprowadzone do zera.

Twierdzenie: Jeżeli y_1, y_2, ..., y_n przedstawiają n oddzielnych funkcyj, które czynią zadość równaniu liniowemu:

$$\frac{d^n y}{dx^n}+X_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+X_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+X_n y=0, \qquad (2)$$

zwanych całkami szczególnemi równania różniczkowego, tedy funkcya:

$$y=c_1y_1+c_2y_2+\ldots+c_ny_n, \qquad (3)$$

gdzie: c_1, c_2, c_3, ..., c_n są stałe dowolne, będzie zupełną całką danego równania różniczkowego.

Podstawiwszy bowiem przyjętą wartość ogólną na y i jej pochodne w dane równanie różniczkowe (2), otrzymamy:

$$c_1\left(\frac{d^n y_1}{dx^n}+X_1\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}+X_2\frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}}+\ldots+X_n y_1\right)+$$
$$+c_2\left(\frac{d^n y_2}{dx^n}+X_1\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}+X_2\frac{d^{n-2}y_2}{dx^{n-2}}+\ldots+X_n y_2\right)+$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$+c_n\left(\frac{d^n y_n}{dx^n}+X_1\frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}+X_2\frac{d^{n-2}y_n}{dx^{n-2}}+\ldots+X_n y_n\right)=0.$$

Skoro zaś wedle założenia y_1, y_2, ..., y_n, są całkami szczególnemi, sprawdzającemi dane równanie różniczkowe, to ostatnie równanie jest tożsamością, zatem jest: $y=c_1y_1+c_2y_2+..+c_ny_n$ także całką danego równania różniczkowego, a z powodu n stałych dowolnych, zarazem całką zupełną.

Rozwiązanie zupełne równania liniowego *n*-go rzędu, w którym wyraz wolny jest zerem, sprowadza się zatem do wyszukania n oddzielnych rozwiązań, czyli n całek szczególnych.

2. Równania różniczkowe liniowe n-go rzędu o stałych spółczynnikach. Niech będzie:

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+a_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+a_n y=0, \tag{4}$$

równaniem różniczkowem liniowem n-go rzędu o stałych spółczynnikach: $a_1, a_2, \ldots, a_n$, sprowadzonem do zera.

Przyjmując całkę szczególną w postaci: $y=e^{\lambda x}$, otrzymamy:

$$\frac{dy}{dx}=\lambda e^{\lambda x}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}=\lambda^n e^{\lambda x},$$

podstawiwszy te wartości w dane równanie różniczkowe, otrzymamy, po odrzuceniu czynnika $e^{\lambda x}$, na wyznaczenie λ równanie n-go stopnia:

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\ldots+a_n=0, \tag{5}$$

które nazywamy równaniem charakterystycznem danego równania różniczkowego.

3. Jeżeli równanie charakterystyczne ma n pierwiastków rzeczywistych i różnych: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n$, tedy otrzymujemy układ n całek szczególnych, zwany układem zasadniczym:

$$y_1=e^{\lambda_1 x},\ y_2=e^{\lambda_2 x},\ y_3=e^{\lambda_3 x}, \ldots, y_n=e^{\lambda_n x},$$

za pomocą którego znajdujemy całkę ogólną w formie:

$$y=c_1 e^{\lambda_1 x}+c_2 e^{\lambda_2 x}+\ldots+c_n e^{\lambda_n x}. \tag{6}$$

Przykład. Dane równanie różniczkowe liniowe rzędu drugiego o stałych spółczynnikach w postaci:

$$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=0.$$

Kładąc: $y=e^{\lambda x}$, otrzymamy równanie pomocnicze: $\lambda^2-3\lambda+2=0$, stąd: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$ zatem układ zasadniczy całek: $y_1=e^x$, $y_2=e^{2x}$, a stąd całkę ogólną danego równania różniczkowego w postaci: $y=c_1e^x+c_2e^{2x}$.

4. Jeżeli między n pierwiastkami nierównymi pojawia się para pierwiastków sprzężonych w formie $a\pm bi$, tedy otrzymamy w całce ogólnej odpowiednią parę wyrazów w postaci:

$$c_1e^{(a+bi)x}+c_2e^{(a-bi)x}=c_1e^{ax+bix}+c_2e^{ax-bix},$$

czyli:

$$c_1e^{ax}.e^{bxi}+c_2e^{ax}.e^{-bxi}=c_1e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)+c_2e^{ax}(\cos bx-i\sin bx)=$$
$$=(c_1+c_2)e^{ax}\cos bx+(c_1-c_2)i\,e^{ax}\sin bx.$$

Kładąc: $c_1+c_2=A$, $(c_1-c_2)i=B$ i uważając A i B jako nowe stałe dowolne, otrzymamy: $Ae^{ax}\cos bx+Be^{ax}\sin bx$, jako parę całek szczególnych, odpowiadającą parze pierwiastków sprzężonych: $\lambda_1=a+bi$, $\lambda_2=a-bi$.

Przykład. $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+13y=0$. Kładąc: $y=e^{\lambda x}$, otrzymamy równanie pomocnicze: $\lambda^2-4\lambda+13=0$, stąd: $\lambda=2\pm3i$, zatem zupełną całkę ogólną danego równania różniczkowego w formie: $y=Ae^{2x}\cos 3x+Be^{2x}\sin 3x$.

5. Jeżeli pomocnicze równanie charakterystyczne ma pierwiastki równe, np. $\lambda_1=\lambda_2$, tedy sprowadzają się w całce ogólnej odpowiednie wyrazy: $c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$ do jednego, $(c_1+c_2)e^{\lambda_1 x}$; liczba stałych stałaby się tym spobem o jedną zmniejszona, całka uważana za ogólną przestałaby być ogólną. Ażeby w tym razie wyprowadzić zupełną całkę ogólną, przyjmijmy na razie pierwiastki λ_1 i λ_2 jako różne i połóżmy $\lambda_2=\lambda_1+h$, tedy będzie:

$$c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{(\lambda_1+h)x}=e^{\lambda_1 x}(c_1+c_2e^{hx})=e^{\lambda_1 x}\left(c_1+c_2+c_2hx+\frac{c_2h^2x^2}{2!}+\ldots\right).$$

Kładąc: $c_1+c_2=A$, $c_2h=B$, jako nowe stałe, otrzymujemy:

$$c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{(\lambda_1+h)x}=e^{\lambda_1 x}\left(A+Bx+Bh\frac{x^2}{2!}+\dots\right),$$

stąd wypada dla $h=0$ forma: $e^{\lambda_1 x}(A+Bx)$, zastępująca dla $\lambda_1=\lambda_2$ wyrazy: $c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$ z zupełnej całki ogólnej. Dla trzech równych pierwiastków: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$ otrzymamy podobnie w miejscu: $c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}+c_3e^{\lambda_3 x}$ formę: $e^{\lambda_1 x}(A+Bx+Cx^2)$, ogólnie dla r równych pierwiastków, czyli dla pierwiastka r-krotnego w miejscu: $c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}+\dots+c_re^{\lambda_r x}$ odpowiednią część zupełnej całki ogólnej w formie:

$$e^{\lambda_1 x}(A_1+A_2x+A_3x^2+\dots+A_rx^{r-1}).$$

Wielokrotnemu (r-krotnemu) pierwiastkowi λ równania pomocniczego odpowiada zatem całka szczególna $Ce^{\lambda x}$, gdzie C jest funkcyą wymierną $(r-1)$-go stopnia zawierającą r stałych dowolnych.

Przykład. $\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=0$. Kładąc: $y=e^{\lambda x}$, otrzymamy równanie pomocnicze $\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1=0$, stąd: $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=\lambda_3=1$. Pierwiastkowi pojedyńczemu $\lambda_1=-1$ odpowiada w zupełnej całce ogólnej wyraz ce^{-x}, pierwiastkowi podwójnemu $\lambda_2=\lambda_3=1$, zaś wyraz: $e^x(A+Bx)$. Zupełną całką ogólną danego równania różniczkowego będzie zatem funkcya: $y=ce^{-x}+(A+Bx)e^x$.

6. Jeżeli para pierwiastków sprzężonych, kształtu $a\pm bi$, występuje w równaniu pomocniczem r razy, tedy otrzymamy odpowiednią część zupełnej całki ogólnej w formie:

$$(c_1+c_2x+\dots+c_rx^{r-1})e^{(a+bi)x}+(c'_1+c'_2x+\dots+c'_rx^{r-1})e^{(a-bi)x},$$

która po zastąpieniu funkcyi: e^{bix} i e^{-bix} przez funkcye goniometryczne, otrzymuje kształt:

$$(A_1+A_2x+\dots+A_rx^{r-1}).e^{ax}\cos bx+(B_1+B_2x+\dots+B_rx^{r-1})e^{ax}\sin bx.$$

Wielokrotnej (r krotnej) parze pierwiastków sprzężonych kształtu $a\pm bi$ równania pomocniczego odpowiada zatem w zupełnej całce ogólnej całka szczególna: $Ae^{ax}\cos bx+Be^{ax}\sin bx$, w której spółczynniki A i B są wymiernemi funkcyami $(r-1)$-go stopnia ze względu na zmienną niezależną x, każdy o r stałych dowolnych.

Przykład. $\frac{d^4y}{dx^4}+2n^2\frac{d^2y}{dx^2}+n^4y=0$. Kładąc: $y=e^{\lambda x}$, otrzymamy równanie pomocnicze: $\lambda^4+2n^2\lambda^2+n^4=0$, skąd: $\lambda_1=\lambda_2=+ni$, $\lambda_3=\lambda_4=-ni$, zatem całkę ogólną kształtu:

$$y=(A_1+A_2x).\cos nx+(B_1+B_2x)\sin nx.$$

7. Wyniki poprzednich rozważań mogą być zestawione w następującej regule: *Jeżeli równanie liniowe n-go rzędu ma stałe spółczynniki, a wyraz wolny równy zeru, tedy kładąc w niem* $y=e^{\lambda a}$, *otrzymuje się równanie pomocnicze n-go stopnia. Każdemu pierwiastkowi rzeczywistemu* λ *odpowiada w zupełnej całce ogólnej wyraz* $Ce^{\lambda x}$, *każdej parze sprzężonych pierwiastków* $a\pm bi$ *wyrażenie kształtu:* $Ae^{ax}\cos bx+Be^{ax}\sin bx$. *W tych wyrażeniach będą spółczynniki A, B, C, stałe, skoro odpowiedni pierwiastek jest pojedyńczy, zaś wielomianami* $(r-1)$*-go stopnia, skoro odpowiedni pierwiastek jest r-krotny.*

8. Równania różniczkowe liniowe ze stałymi spółczynnikami i wyrazem wolnym, różnym od zera. Niech będzie dane równanie różniczkowe kształtu:

$$\frac{d^ny}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+a_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\dots+a_ny=X. \tag{7}$$

w którem X jest daną funkcyą zmiennej x lub liczbą stałą. Możemy tu zastosować następującą metodę rozwiązania:

α) Wyznaczamy całkę ogólną równania z wyrazem wolnym, równym zeru, czyli całkę ogólną równania różniczkowego:

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+a_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+a_n y=0.$$

β) Otrzymaną funkcyę o n stałych dowolnych, podstawiamy w dane równanie różniczkowe, uważając stałe dowolne jako parametry zmienne.

γ) Wyznaczamy te zmienne parametry tak, aby się stało zadość danemu równaniu różniczkowemu; w tym celu możemy poddać szukane parametry jeszcze $(n-1)$ dowolnym warunkom, a n-ty warunek, zawarty będzie w warunku, aby danemu równaniu różniczkowemu stało się zadość.

Najdogodniej przyjąć $(n-1)$ równań warunkowych tak, aby pochodne szukanej funkcyi aż do $(n-1)$-go rzędu przedstawiały się przy zmiennych parametrach $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tak, jak gdyby te parametry były stałe.

Ta metoda rozwiązywania równań różniczkowych nazywa się powszechnie metodą zmienności parametrów.

Przykład. $\frac{d^2y}{dx^2}+n^2y=\cos ax$. Dla równania: $\frac{d^2y}{dx^2}+n^2y=0$, otrzyjmujemy rozwiązanie zupełne: $y=c_1\cos nx+c_2\sin nx$. Ten sam kształt rozwiązania przymujemy dla danego równania różniczkowego, uważając c_1 i c_2 za zmienne parametry od x zależne. Przyjąwszy na wyznaczenie c_1 i c_2 warunek pierwszy, $\cos nx\frac{dc_1}{dx}+\sin nx\frac{dc_2}{dx}=0$, otrzymamy drugi warunek:

$$-n\sin nx\frac{dc_1}{dx}+n\cos nx\frac{dc_2}{dx}=\cos ax,$$

stąd:

$$\frac{dc_1}{dx}=-\frac{1}{n}\cos ax\sin nx,\quad \frac{dc_2}{dx}=\frac{1}{n}\cos ax\cos nx,$$

zatem:

$$c_1=\frac{1}{2n}\left[\frac{\cos(n+a)x}{n+a}+\frac{\cos(n-a)x}{n-a}\right]+C_1,\quad c_2=\frac{1}{2n}\left[\frac{\sin(n+a)x}{n+a}+\frac{\sin(n-a)x}{n-a}\right]+C_2.$$

Wstawiwszy te wartości w przyjęty kształt rozwiązania: $y=c_1\cos nx+c_2\sin nx$, otrzymamy szukaną całkę ogólną danego równania różniczkowego w postaci:

$$y=\frac{\cos ax}{n^2-a^2}+C_1\cos nx+C_2\sin nx.$$

9. Równania różniczkowe liniowe ze zmiennymi spółczynnikami. Równania różniczkowe liniowe ze zmiennymi spółczynnikami możemy niekiedy za pomocą stosownych podstawień przekształcić na równania liniowe ze stałymi spółczynnikami. Należą tu między innemi równania różniczkowe kształtu:

$$(a+bx)^n\frac{d^n y}{dx^n}+A(a+bx)^{n-1}\cdot\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+Ly=X, \tag{8}$$

gdzie $A, B, \ldots, L$ są liczby stałe, a X daną funkcyą zmiennej niezależnej x.

Równania tego kształtu dadzą się sprowadzić do równań liniowych ze stałymi spółczynnikami za pomocą podstawienia $a+bx=e^t$.

Niech będzie np. dane równanie różniczkowe drugiego rzędu, kształtu:

$$(a+bx)^2\frac{d^2y}{dx^2}+b(a+bx)\frac{dy}{dx}+n^2y=0.$$

Kładąc $a+bx=e^t$, otrzymujemy:

$$\frac{dy}{dx}=be^{-t}\frac{dy}{dt},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=b^2e^{-2t}\left[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right].$$

Podstawiwszy te wartości w dane równanie, otrzymamy równanie różniczkowe

$$b^2\frac{d^2y}{dt^2}+n^2y=0,$$

którego rozwiązaniem ogólnem będzie: $y=c_1 \cos \frac{nt}{b}+c_2 \sin \frac{nt}{b}$, stąd, kładąc: $t=\log(a+bx)$ otrzymujemy rozwiązanie danego równania różniczkowego:

$$y=c_1 \cos \log (a+bx)^{\frac{n}{b}}+c_2 \sin \log (a+bx)^{\frac{n}{b}}.$$

10. Równania różniczkowe nieliniowe wyższego rzędu. Równania różniczkowe nieliniowe rzędów wyższych dadzą się niekiedy za pomocą stosownych podstawień przekształcić na równania różniczkowe rzędów niższych. Do tych należą:

α) Równania, w których brak jednej ze zmiennych. Równania tego rodzaju dadzą się przekształcić na równania różniczkowe rzędu o jeden niższego, skoro się przyjmie pochodną najniższego rzędu jako zmienną zależną.

a) Kształt: $$F\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right)=0. \qquad (9)$$

Kładąc: $\frac{dy}{dx}=p$, otrzymamy:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx},$$

zatem równanie różniczkowe kształtu: $F\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right)$, które zcałkowane prowadzi do równania: $p=\varphi(x, c)$, czyli do równania różniczkowego rzędu pierwszego: $\frac{dy}{dx}=\varphi(x, c)$, zatem otrzymamy po powtórnem całkowaniu:

$$y=\int\varphi(x, c)\,dx+c'.$$

jako całkę ogólną danego równania różniczkowego rzędu drugiego.

b) Kształt: $$F\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right)=0. \qquad (10)$$

Kładąc: $\frac{dy}{dx}=p$, otrzymamy:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy},$$

zatem równanie różniczkowe rzędu pierwszego między zmiennemi y i p:

$$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right)=0,$$

które zcałkowane daje:

$$p=\varphi(y, c), \text{ czyli: } \frac{dy}{dx}=\varphi(y, c),$$

skąd otrzymujemy: $dx=\frac{dy}{\varphi(y, c)}$, zatem: $x=\int\frac{dy}{\varphi(y, c)}+c'$,

jako całkę ogólną danego równania różniczkowego nieliniowego rzędu drugiego.

Np. równanie różniczkowe nieliniowe rzędu drugiego: $1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y\frac{d^2y}{dx^2}=0$, prowadzi tą drogą do całki ogólnej kształtu: $y^2+(x-a)^2=b^2$.

11. Szczególne przypadki równań różniczkowych nieliniowych tego rodzaju są:

a) $\frac{d^n y}{dx^n}=X$, gdzie X jest wyłącznie funkcyą zmiennej x.

Kolejnem całkowaniem otrzymamy:

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=\int X\,dx+c_1,\quad \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}=\iint X\,dx^2+c_1x+c_2,$$

w końcu: $$y=\iint\ldots\int X\,dx^n+c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\ldots+c_n.$$

jako całkę ogólną.

β) $\frac{d^n y}{dx^n}=Y$, gdzie Y jest wyłącznie funkcyą zmiennej y.

Równanie całkowalne dla $n=2$. Gdyż z równania: $\frac{d^2y}{dx^2}=Y$, otrzymamy:

$$2\frac{dy}{dx}.\frac{d^2y}{dx^2}=2Y\frac{dy}{dx},\ \text{czyli: } d\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=2Y\frac{dy}{dx}.dx,\ \text{zatem: } \left(\frac{dy}{dx}\right)^2=2\int Y\,dy+c_1,$$

stąd:

$$\frac{dy}{dx}=(2\int Y\,dy+c_1)^{1/2},\quad dx=\frac{dy}{(2\int Y\,dy+c_1)^{1/2}},\ \text{a więc: } x=\int\frac{dy}{(2\int Y\,dy+c_1)^{1/2}}+c_2.$$

jako całkę ogólną.

Tą drogą otrzymamy np. dla równania: $\frac{d^2y}{dx^2}=ay$. Całkę ogólną w postaci: $x=\frac{1}{a}\log\left[ay+\sqrt{a^2y^2+c_1}\right]+c_2$.

γ) $\frac{d^n y}{dx^n}=f\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$.

Kładąc: $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=z$, otrzymamy:

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{dz}{dx},\ \text{zatem: } \frac{dz}{dx}=f(z),\quad dx=\frac{dz}{f(z)},\ \text{stąd: } x=\int\frac{dz}{f(z)}+c.$$

Jeżeli wyrazimy stąd z przez x i c, tedy otrzymamy: $z=\varphi(x,c)$, zatem równanie różniczkowe: $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=\varphi(x,c)$ rzędu $(n-1)$-go całkowalne podług α).

Jeżeli nie możemy wyrazić z wyraźnie przez x i c, wtedy możemy tak postąpić:

Z równania: $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=z$ mamy:

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}=\int z\,dx=\int\frac{z\,dz}{f(z)},$$

$$\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}}=\int dx\int\frac{z\,dz}{f(z)}=\int\frac{dz}{f(z)}\int\frac{z\,dz}{f(z)},$$

w końcu: $$y=\int\frac{dz}{f(z)}\int\frac{dz}{f(z)}\cdots\int\frac{z\,dz}{f(z)}.$$

Przykład. Znaleźć całkę ogólną równania: $a\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d^2y}{dx^2}$.

Kładąc: $\frac{d^2y}{dx^2}=z$, otrzymujemy: $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{dz}{dx}$, zatem przekształcimy dane równanie różniczkowe trzeciego rzędu na równanie różniczkowe pierwszego rzędu między zmiennemi x i z w postaci: $a\frac{dz}{dx}=z$. Całka ogólna tego równania przedstawia się w postaci: $z=Ce^{\frac{x}{a}}$, jest równaniem różniczkowem drugiego rzędu, kształtu:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=Ce^{\frac{x}{a}}$$

i ma całkę ogólną: $y=Ce^{\frac{x}{a}}+C'x+C''$,
która jest zarazem ogólnem rozwiązaniem danego równania różniczkowego.

δ) $\frac{d^n y}{dx^n}=f\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)$.

Kładąc: $\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}=z$, otrzymamy: $\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{d^2 z}{dx^2}$, zatem równanie różniczkowe: $\frac{d^2 z}{dx^2}=f(z)$ całkowalne podług β).

Przykład. Znaleźć całkę ogólną równania różniczkowego czwartego rzędu: $a^2\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d^2y}{dx^2}$.
Kładąc: $\frac{d^2y}{dx^2}=z$, otrzymujemy: $\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d^2z}{dx^2}$, zatem przekształcimy dane równanie czwartego rzędu na równanie różniczkowe drugiego rzędu: $a^2\frac{d^2z}{dx^2}=z$, któremu odpowiada całka ogólna:
$z=C_1e^{\frac{x}{a}}+C_2e^{-\frac{x}{a}}$, która jest równaniem różniczkowem drugiego rzędu: $\frac{d^2y}{dx^2}=C_1e^{\frac{x}{a}}+C_2e^{-\frac{x}{a}}$
i prowadzi do całki ogólnej w postaci:

$$y=c_1e^{\frac{x}{a}}+c_2e^{-\frac{x}{x}}+c_3x+c_4.$$

12. Równania różniczkowe jednorodne wyższych rzędów można za pomocą stosownych przekształceń sprowadzić do równań różniczkowych niższych rzędów. Należą tu równania:

α) Jednorodne ze względu na funkcyę i jej pochodne.

Niech będzie: $F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\dots,\frac{d^n y}{dx^n}\right)=0$,

równaniem jednorodnem ze względu na: $y,\ \frac{dy}{dx},\ ..,\frac{d^n y}{dx^n}$.

Kładąc $y=e^z$, możemy rząd o jedność zniżyć, otrzymamy bowiem:

$$\frac{dy}{dx}=e^z\frac{dz}{dx},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=e^z\left[\frac{d^2z}{dx^2}+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right],$$

możemy zatem po podstawieniu tych wartości dane równanie przez e^z podzielić, a tym sposobem zniknie zmienna z. Tak otrzymamy np. z równania:

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}\right)=0 \text{ równanie: } F\left(x,\ 1,\ \frac{dz}{dx},\ \frac{d^2z}{dx^2}+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]=0,$$

skąd, kładąc: $\frac{dz}{dx}=u$ dostaniemy równanie różniczkowe 1-go rzędu:

$$F\left(x,\ 1,\ u,\ \frac{du}{dx}+u^2\right)=0,$$

z którego otrzymamy $u=\varphi(x,\ c)$, a stąd:

$$z=\int\varphi(x,\ c)\,dx+c', \text{ czyli: } \log y=\int\varphi(x,\ c)\,dx+c',$$

jako szukaną całkę.

β) Równania jednorodne ze względu na zmienne i pochodne.

Równanie różniczkowe: $F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\dots,\frac{d^n y}{dx^n}\right)=0$ możemy uważać za równanie jednorodne, skoro uważać będziemy zmienne x i y stopnia 1-go, $\frac{dy}{dx}$ stopnia 0-go, $\frac{d^2y}{dx^2}$ stopnia —1-go, $\frac{d^ny}{dx^n}$ stopnia $-(n-1)$-go.

Połóżmy tedy $x=e^z$, $y=ue^z$, zatem: $dx=e^z dz$, $dy=e^z(u\,dz+du)$, tedy otrzymamy:

$$\frac{dy}{dx}=u+\frac{du}{dz}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{du}{dz}+\frac{d^2u}{dz^2}\right)e^{-z}.$$

Tak przekształcone równanie różniczkowe między u i z, nie będzie zawierało zmiennej z da się zatem zamienić na równanie $(n-1)$-go rzędu.

Jednorodność równań różniczkowych ze względu na zmienne x i y możemy ogólnie tak ustalić, że przypiszemy zmiennej x pierwszy stopień, a zmiennej y stopień n-ty, a jej r-tej pochodnej stopień $(n-r)$-ty. Kładąc mianowicie: $x=e^t$, $y=x^n=u=ue^{nt}$, otrzymamy:

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{du}{dt}+nu\right)e^{(n-1)t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left\{\frac{d^2u}{dt^2}+(2n\quad 1)\frac{du}{de}+n(n-1)u\right\}e^{(n-2)t}+\text{ i t. d.}$$

a przekształcimy tak pojęte równanie różniczkowe jednorodne między x i y na równanie różniczkowe między n i t, które nie będzie zawierało zmiennej t.

Np. Równanie różniczkowe:

$$x^4\frac{d^2y}{dx^2}-(x^3+2xy)\frac{dy}{dx}+4y^2=0$$

możemy uważać za jednorodne ze względu na zmienne x i y i pochodne przypisując zmiennej x stopień pierwszy, a zmiennej y stopień drugi, pochodnej $\frac{dy}{dx}$ stopień pierwszy, pochodnej $\frac{d^2y}{dx^2}$ stopień zerowy i t. d.

Połóżmy tedy: $x=e^t$, $y=x^2u=ue^{2t}$,

a otrzymamy:

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{du}{dt}+2u\right)e^t, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{d^2u}{dt^2}+3\frac{du}{dt}+2u\right),$$

zatem sprowadzimy dane równanie różniczkowe do postaci:

$$\frac{d^2u}{dt^2}+3\frac{du}{dt}+2u-\left(1+2u\right)\left(\frac{du}{dt}+2u\right)+4u^2=0, \text{ czyli: } \frac{d^2u}{dt^2}+2(1-u)\frac{du}{dt}=0,$$

a więc do równania różniczkowego drugiego rzędu ze względu na zmienną u, w którem brak zmiennej t.

13. Zupełne równania różniczkowe rzędów wyższych. Równanie różniczkowe rzędu n-go, kształtu:

$$\varphi\left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx},\, \frac{d^2y}{dx^2},\dots,\frac{d^ny}{dx^n}\right)=0 \tag{11}$$

nazywa się zupełnem, skoro Vdx, gdzie: $V=\varphi\left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx},\dots,\frac{d^ny}{dx^n}\right)$, jest zupełną różniczką pewnej funkcyi U, która będzie kształtu:

$$\psi\left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx},\dots,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Ze sposobu postępowania przy całkowaniu zupełnego równania różniczkowego rzędu pierwszego: $dU=0$ wypływa następująca reguła całkowania równań różniczkowych zupełnych n-go rzędu:

Całkujemy wyraz, zawierający: $\frac{d^ny}{dx^n}$ w pierwszym stopniu, jak gdyby pochodna $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ była jedyną zmienną, a $\frac{d^ny}{dx^n}$ jej pochodną. Przedstawiwszy

wynik przez U_1, otrzymamy $dU-dU_1$, jako zupełną różniczkę, zawierającą już jedynie: x, y, $\frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$. Powtarzając powyżej wskazane działanie, przedstawimy w końcu U, jako sumę całek U_1, $U_2, \ldots$ i t. d.

Przykład. $y+3x\frac{dy}{dx}+2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(x^2+2y^2\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2}=0$. Uważając lewą stronę za zupełną różniczkę, połóżmy:

$$dU=(y+3xp+2yp^2)dx+(x^2+2y^2p)dp,$$

gdzie: $p=\frac{dy}{dx}$, $dp=\frac{d^2y}{dx^2}dx$. Całkując wyrażenie jedynie ze względu na p, otrzymamy:

$$U_1=x^2p+y^2p^2, \text{ czyli: } U_1=x^2\frac{dy}{dx}+y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

Zupełna różniczka dU_1 będzie atoli:

$$dU_1=\left[2x\frac{dy}{dx}+2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+\left(x^2+2y^2\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2}\right]dx,$$

będzie zatem: $dU-dU_1=\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)dx$, skąd otrzymujemy: $U-U_1=xy$, a stąd:

$$U=U_1+xy=x^2\frac{dy}{dx}+y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+xy.$$

Pierwszą całką danego równania różniczkowego będzie zatem równanie 1-go rzędu:

$$x^2\frac{dy}{dx}+y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+xy=C.$$

14. Niektóre równania całkowalne za pomocą metody zamiany zmiennych. Za pomocą stosownych przekształceń, wywołanych wprowadzeniem nowych zmiennych, dochodzimy częstokroć do równań łatwo całkowalnych.

Przykłady. 1) $\frac{d^2y}{dx^2}=ax+by$. Kładąc: $ax+by=t$, otrzymamy:

$$a+b\frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}, \quad b\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2t}{dx^2},$$

zatem równanie przekształcone: $\frac{d^2t}{dx^2}=bt$, które jest równaniem liniowem o stałych spółczynnikach.

2) $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+q^2y=0$. Kładąc: $\arcsin x=t$, otrzymamy: $\frac{d^2y}{dt^2}+q^2y=0$, stąd:

$$y=c_1\cos(q\arcsin x)+c_2\sin(q\arcsin x).$$

15. Zastosowanie metody zamiany zmiennych do równania różniczkowego rzędu drugiego sprowadzonego do zera. Równanie różniczkowe liniowe rzędu drugiego kształtu:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0, \tag{12}$$

ma, jak wiemy, (art. 1 str. 953) całkę ogólną kształtu:

$$y=c_1y_1+c_2y_2,$$

gdzie y_1 i y_2 są dwiema całkami szczególnemi tego równania.

Znając jedną z całek szczególnych tego równania np. y_1 możemy wyprowadzić dowolną inną całkę szczególną y_2, a tem samem wyprowadzić całkę ogólną y w sposób następujący.

Niech będzie y_1 jedną z całek szczególnych danego równania, tedy mamy tożsamość:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}+P\frac{dy_1}{dx}+Qy_1=0.$$

Połóżmy $y=u.y_1$, gdzie u jest nową zmienną, tedy mamy:

$$\frac{dy}{dx}=u\frac{dy_1}{dx}+y_1\frac{du}{dx},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=u\frac{d^2y_1}{dx^2}+2\frac{du}{dx}\frac{dy_1}{dx}+y_1\frac{d^2u}{dx^2},$$

otrzymujemy zatem z danego równania różniczkowego następujące:

$$\left(\frac{d^2y_1}{dx^2}+P\frac{dy_1}{dx}+Qy_1\right)u+y_1\frac{d^2u}{dx^2}+\left(Py_1+2\frac{dy_1}{dx}\right)\frac{du}{dx}=0,$$

a stąd:

$$y_1\frac{d^2u}{dx^2}+\left(Py_1+2\frac{dy_1}{dx}\right)\frac{du}{dx}=0,$$

czyli równanie różniczkowe:

$$\frac{\frac{d^2u}{dx^2}}{\frac{du}{dx}}+P+\frac{2\frac{dy_1}{dx}}{y_1}=0,$$

które wprost scałkowane prowadzi do równania:

$$\log\frac{du}{dx}+\int P\,dx+2\log y_1=\log C_1,$$

czyli:

$$\frac{du}{dx}=C_1\frac{e^{-\int Pdx}}{y_1^2}.$$

Otrzymujemy stąd za pomocą ponownego całkowania:

$$u=C_1\int\frac{e^{-\int Pdx}}{y_1^2}dx+C_2,$$

zatem całkę ogólną danego równania różniczkowego rzędu drugiego w postaci:

$$y=C_1y_1\int\frac{e^{-\int Pdx}}{y_1^2}dx+C_2y_1. \tag{13}$$

Przykład. Równanie różniczkowe: $\frac{d^2y}{dx^2}-a^2y=0$ ma jedną całkę szczególną: $y_1=e^{ax}$, na tej podstawie przedstawi się całka ogólna w myśl wzoru (13) w postaci:

$$y=C_1e^{-ax}\int e^{-2ax}dx+C_2e^{ax},\ \text{czyli: } y=C_1e^{-ax}+C_2e^{ax}.$$

Uwaga. Dwie całki szczególne y_1 i y_2 równania różniczkowego drugiego rzędu: $\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0$ pozostają w osobliwszym związku ze spółczynnikiem P równania różniczkowego.

Z warunków: $\frac{d^2y_1}{dx^2}+P\frac{dy_1}{dx}+Qy_1=0$, $\frac{d^2y_2}{dx^2}+P\frac{dy_2}{dx}+Qy_2=0$ otrzymujemy mianowicie po wyrugowaniu spółczynnika Q równanie:

$$\left(y_2\frac{d^2y_1}{dx^2}-y_1\frac{d^2y_2}{dx^2}\right)+P\left(y_2\frac{dy_1}{dx}-y_1\frac{dy_2}{dx}\right)=0,$$

czyli:

$$\frac{y_2\frac{d^2y_1}{dx^2}-y_1\frac{d^2y_2}{dx^2}}{y_2\frac{dy_1}{dx}-y_1\frac{dy_2}{dx}}+P=0.$$

a stąd:

$$\log\left(y_2\frac{dy_1}{dx}-y_1\frac{dy_2}{dx}\right)+\int Pdx=\log C,$$

a więc związek:

$$y_2\frac{dy_1}{dx}-y_1\frac{dy_2}{dx}=Ce^{-\int Pdx}, \tag{14}$$

gdzie stała C otrzymuje pewną wartość, skoro y_1 i y_2 są dane dwie całki szczególne.

Rozumiejąc pod y_2 całkę ogólną danego równania, otrzymamy stąd wzór pod (13) wyprowadzony.

16. Przekształcenie równania różniczkowego rzędu drugiego na równanie różniczkowe rzędu pierwszego. Zastąpmy w równaniu różniczkowem:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0$$

zmienną y przez nową zmienną u za pomocą podstawienia:

$$y=e^{\int udx}, \text{ tedy będzie: } \frac{dy}{dx}=ue^{\int udx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=u^2e^{\int udx}+\frac{du}{dx}e^{\int udx},$$

zatem dane równanie sprowadzi się do postaci:

$$\left(u^2+\frac{du}{dx}+Pu+Q\right)e^{\int udx}=0. \tag{15}$$

Tym sposobem otrzymujemy na wyznaczenie zmiennej u równanie różniczkowe pierwszego rzędu:

$$\frac{du}{dx}+u^2+Pu+Q=0. \tag{16}$$

Wyznaczywszy stąd u jako funkcyę zmiennej x, otrzymujemy y z warunku: $\frac{dy}{dx}=uy$.

Przykład. Mając np. dane równanie różniczkowe rzędu drugiego w postaci: $\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=0$, dochodzimy na mocy podstawienia $y=e^{\int udx}$ do równania różniczkowego rzędu pierwszego:

$$\frac{du}{dx}+u^2+au+b=0, \text{ czyli: } dx+\frac{du}{u^2+au+b}=0,$$

które w przypadku, gdy: $u^2+au+b=(u-\alpha_1)(u-\alpha_2)$, sprowadza się do postaci:

$$dx+\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}\left(\frac{du}{u-\alpha_2}-\frac{du}{u-\alpha_1}\right)=0,$$

z której otrzymujemy ostatecznie równanie:

$$y=C_1e^{\alpha_1x}+C_2e^{\alpha_2x}.$$

17. Uwaga. Do otrzymanego powyżej równania różniczkowego rzędu pierwszego w postaci: $\frac{du}{dx}+u^2+Pu+Q=0$ możemy zastosować następującą uwagę. Kładąc: $u=vz$, a więc: $\frac{du}{dx}=v\frac{dz}{dx}+z\frac{dv}{dx}$, otrzymamy: $v\frac{dz}{dx}+v^2z^2+\left(Pv+\frac{dv}{dx}\right)z+Q=0$, skąd, gdy położymy: $Pv+\frac{dv}{dx}=0$, a więc: $v=e^{-\int Pdx}$, otrzymamy na wyznaczenie zmiennej z równanie:

$$\frac{dz}{dx}+vz^2+\frac{Q}{v}=0, \text{ czyli: } \frac{dz}{dx}+z^2e^{-\int Pdx}+Qe^{\int Pdx}=0.$$

Tym sposobem rozwiązanie równania różniczkowego rzędu drugiego:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0,$$

przedstawia się dwoma równaniami:

$$y=e^{\int udx}, \quad u=ze^{-\int Pdx},$$

gdzie z jest całką równania różniczkowego rzędu pierwszego kształtu:

$$\frac{dz}{dx}+z^2e^{-\int Pdx}+Qe^{\int Pdx}=0.$$

Powyższe równania sprowadza się pod założeniem, że: $Qe^{\int Pdx}=ae^{-\int Pdx}$, gdzie a jest pewną liczbą stałą, do postaci: $\frac{dz}{dx}+(a+z^2)e^{-\int Pdx}=0$, zatem: $\int\frac{dz}{a+z^2}+\int e^{-\int Pdx}dx=C_1$, z której pod założeniem, że a jest liczbą dodatnią, otrzymujemy:

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\,\text{arc tang}\,\frac{z}{\sqrt{a}}=C_1-\int e^{-\int Pdx}dx.$$

Według założenia jest: $e^{-\int Pdx}=\sqrt{\frac{Q}{a}}$, przeto otrzymujemy z ostatniego równania:

$$z=\sqrt{a}\,.\,\text{tang}\,(C_1-\int\sqrt{Q}\,dx),$$

a że: $u=ze^{-\int Pdx}=z\sqrt{\frac{Q}{a}}$, przeto będzie: $u=\sqrt{Q}\,\text{tang}\,(C_1-\int\sqrt{Q}\,.\,dx)$,

a więc ostatecznie: $$y=C_2e^{\int dx\sqrt{Q}\,\text{tang}\,(C_1-\int\sqrt{Q}\,dx)},\qquad(17)$$

jako całkę ogólną równania różniczkowego: $\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0$ pod założeniem, że:

$$\sqrt{\frac{Q}{a}}=e^{-\int Pdx},\ \text{czyli, że:}\ \frac{dQ}{dx}+2PQ=0.$$

18. Przekształcenie równania różniczkowego rzędu drugiego na inne, w którem brak pierwszej pochodnej. Wprowadzając w równaniu różniczkowem: $\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0$ nowe zmienne u i z za pomocą podstawienia: $y=uz$,

a więc: $$\frac{dy}{dx}=z\frac{du}{dx}+u\frac{dz}{dx},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2u}{dx^2}z+2\frac{du}{dx}\frac{dz}{dx}+u\frac{d^2z}{dx^2},$$

otrzymujemy: $$u\frac{d^2z}{dx^2}+\left(2\frac{du}{dx}+Pu\right)\frac{dz}{dx}+\left(\frac{d^2u}{dx^2}+P\frac{du}{dx}+Qu\right)z=0.\qquad(18)$$

Przyjmując zmienną u tak, aby było:

$$2\frac{du}{dx}+Pu=0,\ \text{czyli:}\ \frac{du}{u}=-\frac{P}{2}dx,\ \text{a więc:}\ u=e^{-\frac{1}{2}\int Pdx},$$

otrzymujemy na wyznaczenie zmiennej z równanie:

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\left(\frac{1}{u}\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{P}{u}\frac{du}{dx}+Q\right)z=0.$$

Ponieważ: $\frac{1}{u}\frac{du}{dx}=-\frac{P}{2}$, a więc: $\frac{1}{u}\frac{d^2u}{dx^2}-\left(\frac{1}{u}\frac{du}{dx}\right)^2=-\frac{1}{2}\frac{dP}{dx}$,

czyli: $$\frac{1}{u}\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{P^2}{4}-\frac{1}{2}\frac{dP}{dx},$$

a tem samem: $$\frac{1}{u}\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{P}{u}\frac{du}{dx}+Q=-\frac{P^2}{4}-\frac{1}{2}\frac{dP}{dx}+Q,$$

przeto powyższe równanie różniczkowe określające zmienną z sprowadza się do postaci:

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\left(\frac{P^2}{4}+\frac{1}{2}\frac{dP}{dx}-Q\right)z,\qquad(19)$$

a więc do równania różniczkowego rzędu drugiego, w którem niema pochodnej rzędu pierwszego.

Wyznaczywszy stąd z, otrzymamy:

$$y=ze^{-\frac{1}{2}\int Pdx}.\qquad(20)$$

Przyjmując np. że: $\frac{P^2}{4}+\frac{1}{2}\frac{dP}{dx}-Q=a$, gdzie a jest pewną liczbą stałą, otrzymujemy na wyznaczenie z równanie różniczkowe:

$$\frac{d^2z}{dx^2}-az=0,$$

którego całka ogólna pod założeniem, że a jest liczbą dodatnią, przedstawia się w postaci:

$$z=C_1e^{-x\sqrt{a}}+C_2e^{x\sqrt{a}}.$$

Dane równanie różniczkowe ma w tym przypadku kształt:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+\left(\frac{P^2}{4}+\frac{1}{2}\frac{dP}{dx}-a\right)y=0,$$

a jego całka ogólna przedstawia się w postaci:

$$y=\left\{C_1 e^{-x\sqrt{a}}+C_2 e^{x\sqrt{a}}\right\}e^{-\frac{1}{2}\int Pdx}.$$

19. **Ogólna całka równania różniczkowego liniowego rzędu drugiego z wyrazem wolnym różnym od zera.** Równanie różniczkowe liniowe rzędu drugiego:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=R, \tag{21}$$

w którem spółczynniki P, Q, R są funkcyami zmiennej niezależnej x, rozwiązujemy w myśl art. 8 i 9 metodą zmienności parametrów, opierając się na całce ogólnej równania różniczkowego do zera sprowadzonego:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0,$$

przedstawiającej się w postaci: $y=C_1y_1+C_2y_2$.

Przyjmując tensam kształt całki ogólnej dla danego równania różniczkowego pod założeniem, że parametry C_1 i C_2 są funkcyami zmiennej x, zakładamy, że w pierwszej pochodnej:

$$\frac{dy}{dx}=C_1\frac{dy_1}{dx}+C_2\frac{dy_2}{dx}+y_1\frac{dC_1}{dx}+y_2\frac{dC_2}{dx},$$

spełnia się warunek:

$$y_1\frac{dC_1}{dx}+y_2\frac{dC_2}{dx}=0. \tag{22}$$

Wobec tego druga pochodna otrzymuje kształt:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=C_1\frac{d^2y_1}{dx^2}+C_2\frac{d^2y_2}{dx^2}+\frac{dy_1}{dx}\frac{dC_1}{dx}+\frac{dy_2}{dx}\frac{dC_2}{dx},$$

na podstawie którego po uwzględnieniu danego równania różniczkowego otrzymamy na wyznaczenie zmiennych C_1 i C_2 drugi warunek:

$$\frac{dy_1}{dx}\frac{dC_1}{dx}+\frac{dy_2}{dx}\frac{dC_2}{dx}=R. \tag{23}$$

Z warunków (22) i (23) otrzymujemy:

$$\frac{dC_1}{dx}=\frac{Ry_2}{y_2\frac{dy_1}{dx}-y_1\frac{dy_2}{dx}},\qquad \frac{dC_2}{dx}=\frac{Ry_1}{y_1\frac{dy_2}{dx}-y_2\frac{dy_1}{dx}},$$

a stąd: $$C_1=\int\frac{Ry_2dx}{y_2\frac{dy_1}{dx}-y_1\frac{dy_2}{dx}}+c_1,\qquad C_1=\int\frac{Ry_1dx}{y_1\frac{dy_2}{dx}-y_2\frac{dy_1}{dx}}+c_2.$$

Całka ogólna równania: $\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=R$ przedstawia się zatem w postaci:

$$y=\left(\int\frac{Ry_2dx}{y_2\frac{dy_1}{dx}-y_1\frac{dy_2}{dx}}+c_1\right)y_1+\left(\int\frac{Ry_1dx}{y_1\frac{dy_2}{dx}-y_2\frac{dy_1}{dx}}+c_2\right)y_2 \tag{24}$$

skoro y_1 i y_2 są dwiema całkami szczególnemi równania: $\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0$.

20. Znając tylko jedną z całek szczególnych równania:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0,$$

np. y_1 zastosujmy do równania: $\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=R$ podstawienie: $y=uy_1$, z którego wynika:

$$\frac{dy}{dx}=u\frac{dy_1}{dx}+y_1\frac{du}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=u\frac{d^2y_1}{dx^2}+2\frac{du}{dx}\frac{dy_1}{dx}+y_1\frac{d^2u}{dx^2},$$

wtedy otrzymujemy:

$$u\left(\frac{d^2y_1}{dx^2}+P\frac{dy_1}{dx}+Qy_1\right)+2\frac{du}{dx}\frac{dy_1}{dx}+\left(P\frac{du}{dx}+\frac{d^2u}{dx^2}\right)y_1=R,$$

a stąd skoro: $\frac{d^2y_1}{dx^2}+P\frac{dy_1}{dx}+Qy_1=0$, na wyznaczenie zmiennej u równanie:

$$y_1\frac{d^2u}{dx^2}+\left(Py_1+2\frac{dy_1}{dx}\right)\frac{du}{dx}=R.$$

Otrzymane równanie różniczkowe drugiego rzędu możemy przekształcić na równanie liniowe pierwszego rzędu. Kładąc bowiem: $\frac{du}{dx}=v$, $\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{dv}{dx}$, otrzymujemy równanie liniowe pierwszego rzędu kształtu:

$$\frac{dv}{dx}+\left(P+\frac{2}{y_1}\frac{dy_1}{dx}\right)v=\frac{1}{y_1}R,$$

z którego na podstawia art. 6 str. 933 wypływa:

$$v=\frac{e^{-\int Pdx}}{y_1^2}\left(\int Ry_1e^{\int Pdx}dx+C_1\right),$$

skąd ze względu na to, że: $v=\frac{du}{dx}$, otrzymujemy:

$$u=\int\frac{dx\,e^{-\int Pdx}}{y_1^2}\left(\int Ry_1e^{\int Pdx}dx+C_1\right)+C_2,$$

a stąd wobec $y=uy_1$ całkę ogólną równania różniczkowego: $\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=R$ w postaci:

$$y=y_1\left[\int\frac{dxe^{-\int Pdx}}{y_1^2}\left(\int Ry_1e^{\int Pdx}dx+C_1\right)+C_2\right]. \qquad (25)$$

Znając więc zmienną y_1 jako jedną z całek szczególnych równania: $\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0$ możemy na podstawie powyższego wzoru podać całkę ogólną równania:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=R.$$

21. Przykład. Niech będzie dane równanie różniczkowe drugiego rzędu w postaci:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x^2}=\frac{a}{x^2-1}.$$

Biorąc pod uwagę równanie do zera sprowadzone: $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x^2}=0$, połóżmy: $y=e^{\int\frac{dx}{xu}}$, a więc:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{xu}e^{\int\frac{dx}{xu}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1-u-x\frac{du}{dx}}{x^2u^2}e^{\int\frac{dx}{xu}},$$

a otrzymamy na wyznaczenie u równanie:

$$0=\frac{1-u-x\frac{du}{dx}}{x^2u^2}+\frac{1}{x^2u}-\frac{1}{x^2}, \text{ czyli: } x\frac{du}{dx}+u^2-1=0,$$

skąd dostajemy: $\frac{dx}{x}=\frac{du}{1-u^2}$, zatem: $\log x+\frac{1}{2}\log C_1=\frac{1}{2}\log\frac{1+u}{1-u}$, a stąd: $x\sqrt{C_1}=\sqrt{\frac{1+u}{1-u}}$, czyli: $u=\frac{C_1x^2-1}{C_1x^2+1}$. Zważywszy, że: $\frac{dx}{xu}=\frac{du}{u(1-u^2)}=\frac{du}{u}+\frac{1}{2}\left(\frac{du}{1-u}-\frac{du}{1+u}\right)$, otrzymujemy: $\int\frac{dx}{xu}=\log u-\frac{1}{2}\log(1-u^2)+\log C_2$, przeto: $y=e^{\int\frac{dx}{xu}}=\frac{C_2u}{\sqrt{1-u^2}}$, skąd wyrażając u przez x, dostajemy ostatecznie: $y=C_2\frac{C_1x^2-1}{2x\sqrt{C_1}}$, czyli, co na jedno wychodzi: $y=c_1x+\frac{c_2}{x}$, jako całkę ogólną równania: $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=0$.

Przy pomocy dwu całek szczególnych tego równania w postaci: $y_1=x$, $y_2=\frac{1}{x}$, otrzymamy ze względu na to, że:

$$y_2\frac{dy_1}{dx}-y_1\frac{dy_2}{dx}=\frac{2}{x},$$

na podstawie (25) wprost całkę ogólną równania danego w postaci:

$$y=\left(\int\frac{a\,dx}{2(x^2-1)}+c_1\right)x+\left(\int\frac{ax^2\,dx}{2(1-x^2)}+c_2\right)\frac{1}{x},$$

a więc:

$$y=\left(\frac{a}{4}\log\frac{x-1}{x+1}+c_1\right)x+\left(-\frac{ax}{2}-\frac{a}{4}\log\frac{x-1}{x+1}+c_2\right)\frac{1}{x},$$

czyli:

$$y=-\frac{a}{2}+c_1x+\frac{c_2}{x}+\frac{a}{4}\left(x-\frac{1}{x}\right)\log\frac{x-1}{x+1}.$$

Na podstawie znajomości jednej całki szczególnej równania: $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x^2}=0$ w postaci $y_1=x$, otrzymamy z (13) całkę ogólną równania: $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x^2}=\frac{a}{x^2-1}$ w postaci:

$$y=x\left[\int\frac{dx}{x^3}\left(\int\frac{ax^2\,dx}{x^2-1}+C_1\right)+C_2\right],\ \text{czyli:}\ y=-\frac{C_1}{2x}+C_2x+ax\int\frac{dx}{x^3}\int\frac{x^2\,dx}{x^2-1},$$

a że na podstawie całkowania przez części:

$$\int\frac{dx}{x^3}\int\frac{x^2\,dx}{x^2-1}=-\frac{1}{2x^2}\int\frac{x^2\,dx}{x^2-1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-1}=-\frac{1}{2x}+\frac{x^2-1}{4x^2}\log\frac{x-1}{x+1},$$

przeto dostajemy:

$$y=-\frac{C_1}{2x}+C_2x-\frac{a}{2}+\frac{a(x^2-1)}{4x}\log\frac{x-1}{x+1},$$

czyli jak powyżej:

$$y=-\frac{a}{2}+c_1x+\frac{c_2}{x}+\frac{a}{4}\left(x-\frac{1}{x}\right)\log\frac{x-1}{x+1}.$$

22. Całkowanie równań różniczkowych drugiego rzędu za pomocą szeregów. Równanie różniczkowe drugiego rzędu określa zależność drugiej pochodnej od wartości funkcyi i jej pierwszej pochodnej w dowolnem miejscu zmiennej niezależnej x i dozwala stąd wyprowadzić zależność wszystkich pochodnych rzędu wyższego nad drugi od szukanej funkcyi i jej pierwszej pochodnej. Na tej podstawie możemy szukaną funkcyę przedstawić wprost lub metodą współczynników nieoznaczonych w postaci szeregu Taylora lub Maclaurina, przyjmując w jednem miejscu $x=a$ lub $x=0$, wartość funkcyi y i jej pochodnej y' zupełnie dowolnie, kładąc więc np $y_a=C_1$, $y'_a=C_2$, względnie $y_0=c_1$, $y'_0=c_2$ (Por. art. 20 str. 921).

Na szczególniejszą uwagę zasługują takie równania różniczkowe, których całki nie dadzą się przedstawić w formie zamkniętej i są źródłem funkcyj nowego rodzaju. Należą tu w szczególności równania Legendre'a, Bessel'a i Gaussa.

23. Równanie Legendre'a: $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0.$

Równaniu temu odpowiadają dwie całki szczególne, jedna y_1, z warunkami: $x=0$, $y_1=1$, $\frac{dy_1}{dx}=y'_1=0$ w postaci szeregu:

$$y_1=1-\frac{n(n+1)}{1.2}x^2+\frac{n(n+1)(n-2)(n+3)}{1.2.3.4}x^4-\ldots \tag{26}$$

druga y_2 z warunkami: $x=0$, $y_2=0$, $\frac{dy_2}{dx}=y'_2=1$ w postaci szeregu:

$$y_2=x-\frac{(n-1)(n+2)}{1.2.3}x^3+\frac{(n-1)(n+2)(n-3)(n+4)}{1.2.3.4.5}x^5-\ldots \tag{27}$$

a więc całka ogólna: $y=c_1y+c_2y_2$.

Jeżeli n jest liczbą całkowitą, to jeden z tych szeregów przechodzi w wielomian, mianowicie szereg na y_1 urywa się przy parzystem n, szereg na y_2 przy nieparzystem n.

Równaniu Legendre'a: $(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$ przy całkowitem n, czyni zatem zadość wielomian stopnia n-go, czyli t. zw. wielomian Legendre'a w postaci:

$$P_n(x)=\frac{1.3\ldots(2n-1)}{n!}\left(x^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}+\ldots\right) \tag{28}$$

Wielomian Legendre'a zowie się także funkcyą kulistą pierwszego rodzaju i przedstawia się w postaci:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n.n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}. \tag{28'}$$

W szczególności otrzymujemy stąd:

$$P_0(x)=1,\ P_1(x)=x,\ P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2},\ P_3(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x,\ P_4(x)=\frac{35}{8}x^4-\frac{30}{8}x^2+\frac{3}{8}.$$

24. Równanie Bessel'a: $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2+n^2)y=0.$

Ażeby rozwiązać to równanie, połóżmy:

$$y=A_1x^{m_1}+A_2x^{m_2}+A_3x^{m_3}+\ldots$$

a otrzymamy dla wykładników prawo: $m_r=m_1+2(r-1)$, przyczem $m^2_1=n^2$, zatem $m_1=n$ lub $m_1=-n$, a dla spółczynników prawo: $A_{r+1}=-\frac{A_r}{2^2r}\cdot\frac{1}{m_1+r}$, dostajemy zatem dwie całki szczególne, jedną y_1, odpowiadającą wykładnikowi $m_1=n$ pod założeniem $A_1=1$ w postaci:

$$y_1=x^n\left(1-\frac{x^2}{2^2(n+1)}+\frac{x^4}{2!\,2^4(n+1)(n+2)}-\ldots\right), \tag{29}$$

drugą y_2 odpowiadającą wykładnikowi $m_1=-n$, pod założeniem $A_1=1$ w postaci:

$$y_2=x^{-n}\left(1-\frac{x^2}{2^2(-n+1)}+\frac{x^4}{2!\,.\,2^4(-n+1)(-n+2)}+\ldots\right), \tag{30}$$

a więc całką ogólną: $y=C_1y_1+C_2y_2$.

Całki y_1 i y_2 prowadzą do nowych funkcyj, zwanych funkcyami Besse'la rzędu n-go, oznaczanych przez I_n, względnie I_{-n}, tak, że $y_1=C_1I_n$

$y_2 = C_2 I_{-n}$. W szczególności dla $n=0$ otrzymujemy funkcyę Bessel'a zerowego rzędu w postaci:

$$I_0 = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \ldots (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^2 4^2 \ldots (2n)^2} + \ldots \tag{31}$$

25. Równanie Gaussa: $x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + \{\gamma - (\alpha+\beta+1)x\}\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0.$

Kładąc: $y = A_0 x^m + A_1 x^{m+1} + A_2 x^{m+2} + \ldots$, otrzymamy za uwzględnieniem danego równania różniczkowego dla wykładników m t. z. równanie charakterystyczne: $m(m-1+\gamma)=0$, które ma dwa pierwiastki $m_1=0$ i $m_2=1-\gamma$, a dla spółczynników A_r równanie warunkowe:

$$A_{r+1} = \frac{(m+r+\alpha)(m+r+\beta)}{(m+r+1)(m+r+\gamma)} A_r.$$

Przyjmując $m_1=0$, otrzymamy pod założeniem $A_0=1$ całkę szczególną w postaci:

$$y_1 = 1 + \frac{\alpha\beta}{1 \, . \, \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \, . \, 2 \, . \, \gamma \, . \, (\gamma+1)} x^2 + \ldots \tag{32}$$

przedstawiającą t. z. szereg hipergeometryczny Gaussa, oznaczany zwykle przez $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, gdzie α, β, γ zowią się elementami szeregu. Szereg ten zawiera jako przypadki szczególne wszystkie szeregi występujące w analizie elementarnej.

Przyjmując $m_2 = 1-\gamma$, gdzie γ nie jest liczbą całkowitą, otrzymamy na podstawie powyższego prawidła spółczynników także drugą całkę szczególną danego równania różniczkowego.

26. Zastosowania geometryczne równań różniczkowych rzędu drugiego. Równanie różniczkowe zwyczajne rzędu drugiego wypowiada pewną własność, dotyczącą krzywizny szukanej linii krzywej lub wielkości z krzywizną związanych.

Całka ogólna równania różniczkowego rzędu drugiego przedstawia ∞^2 krzywych tego rodzaju, dwa warunki stosownie dobrane wyznaczające dwie stałe tejże całki ogólnej cechują jedną z szukanych krzywych.

Przykłady. 1) Znaleźć krzywe płaskie, w których promień krzywizny jest równy danej funkcyi odciętej x.

Otrzymujemy tu równanie różniczkowe: $\dfrac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = f(x).$

Równanie to nie zawiera y, da się zatem sprowadzić do równania różniczkowego rzędu pierwszego.

Kładąc: $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, otrzymamy:

$$\frac{dp}{(1+p^2)^{3/2}} = \frac{dx}{f(x)}, \text{ stąd: } \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \int \frac{dx}{f(x)} + C = X + C,$$

zatem: $$p = \frac{X+C}{\sqrt{1-(X+C)^2}}, \text{ więc: } y = \int \frac{(X+C)\,dx}{[1-(X+C)^2]^{1/2}} + C_1,$$

jako równanie szukane.

W szczególności otrzymamy dla: $f(x) = \frac{a^2}{2x}$, $X = \int \frac{dx}{f(x)} = \frac{x^2}{a^2}$,

zatem: $$y = \int \frac{x^2+c}{\sqrt{a^4-(x^2+c)^2}}\,dx + C_1$$

równanie krzywej, znanej w mechanice pod nazwą „krzywej elastycznej"; jej promień krzywizny jest do odciętej x, odwrotnie proporcyonalny.

2) Znaleźć krzywe, w których promień krzywizny jest proporcyonalny do sześci normalnej.

Otrzymujemy tu równanie różniczkowe: $\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = a^2\left[y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right]^3$,

czyli:
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2}{y^3}.$$

Równanie nie zawiera x, możemy tedy położyć: $dx = \frac{dy}{p}$, a otrzymamy: $p\,dp = \frac{a^2}{y^3}$

$$p^2 = -\frac{a^2}{y^2} + \frac{1}{n}, \quad p = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2-na^2}}{y\sqrt{n}}, \quad dx = \sqrt{n}\cdot\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-na^2}},$$

$$x = \sqrt{n}\,.\,\sqrt{y^2-na^2}+\alpha, \text{ zatem: } (x-\alpha)^2 - ny^2 = \pm n^2a^2,$$

równanie szukanej krzywej, która jest stosownie do n albo ellipsą, albo hiperbolą.

3) Znaleźć krzywe, w których promień krzywizny jest proporcyonalny do norma

Mamy tu równanie różniczkowe: $\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = ay\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2}$,

czyli:
$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = ay\,.\,\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Kładąc: $\frac{dy}{dx} = p$, otrzymamy stąd:

$$1+p^2 = ay\frac{dp}{dx}, \text{ czyli: } \frac{2}{a}\frac{dy}{y} = \frac{2p\,dp}{1+p^2},$$

zatem:
$$\log\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{a}} = \log(1+p^2), \text{ więc: } p = \sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^{2/a}-1},$$

czyli:
$$dx = \left[\left(\frac{y}{c}\right)^{2/a}-1\right]^{-1/2}dy, \text{ stąd: } x = \int\left[\left(\frac{y}{c}\right)^{2/a}-1\right]^{-1/2}dy + c',$$

równanie szukanych krzywych, zwanych zwykle **krzywemi Ribaucour'a**.

Szczególne przypadki:

α) $a = -1$; rozwiązanie: $x - c_1 = -\sqrt{c^2-y^2}$, czyli: $(x-c_1)^2 + y^2 = c^2$ koło (fig. 260).

β) $a = +1$; rozwiązanie: $\frac{x-c_1}{c} = \int\frac{dy}{\sqrt{y^2-c^2}} = \log\frac{y+\sqrt{y^2-c^2}}{c}$,

czyli: $\frac{y+\sqrt{y^2-c^2}}{c} = e^{\frac{x-c_1}{c}}$, zatem: $\frac{y-\sqrt{y^2-c^2}}{c} = e^{-\frac{x-c_1}{c}}$, skąd: $y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x-c_1}{c}} + e^{-\frac{x-c_1}{c}}\right)$

linia łańcuszkowa (fig. 261)

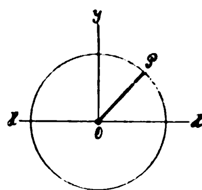


Fig. 260.

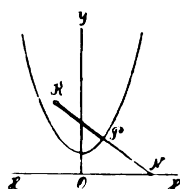


Fig. 261.

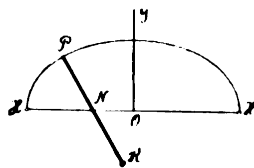


Fig. 262.

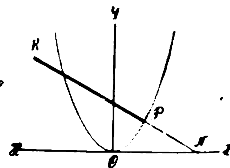


Fig. 263.

γ) $a = -2$; $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{c-y}{y}}$, równanie różniczkowe cykloidy (fig. 262).

δ) $a = 2$; $x - c_1 = 2\sqrt{c}\,.\,\sqrt{y-c}$, czyli: $y - c = \frac{(x-c_1)^2}{4c}$, parabola (fig. 263).

4) Znaleźć krzywe, w których rzut promienia krzywizny na daną prostą ma s długość a, t. j. $\rho\cos\alpha = a$.

Przyjmijmy daną prostą jako oś x-ów, tedy otrzymamy równanie różniczkowe:

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\cdot\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}=a,\quad \text{czyli:}\quad \frac{\frac{dy}{dx}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}}=a,$$

Kładąc: $\frac{dy}{dx}=p$, otrzymamy:

$$\frac{dx}{a}=\frac{dp}{p}-\frac{p\,dp}{1+p^2},\ \text{zaś}\ \frac{dy}{a}=\frac{dp}{1+p^2},\ \text{przeto:}\ \frac{x-c_1}{a}=\log\frac{p}{\sqrt{1+p^2}},\ \frac{y-c_2}{a}=\operatorname{arc\,tang} p,$$

skąd po wyrugowaniu p znajdziemy równanie szukanej krzywej:

$$\frac{x-c_1}{a}=\log\sin\left(\frac{y-c_2}{a}\right).$$

6) Znaleźć krzywą, w której promień krzywizny jest proporcyonalny do łuku, mierzonego od pewnego stałego punktu tej krzywej.

Równanie różniczkowe krzywej jest:

$$\frac{d^3y}{dx^3}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]-3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+n\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=0.$$

Kładąc: $\frac{dy}{dx}=p$, otrzymamy pierwszą całkę:

$$Ce^{\operatorname{arc\,tang} p}\cdot\frac{dp}{dx}=(1+p^2)^{3/2}.$$

Podstawiwszy: $\operatorname{arc\,tang} p=T$, otrzymamy równania szukanej krzywej w formie:

$$x-a=C_1e^{nT}(n\cdot\cos T+\sin T),\quad y-b=C_1e^{nT}(n\cdot\sin T-\cos T).$$

Krzywa jest spiralną logarytmiczną.

Ćwiczenia LIX.

Znaleźć całki ogólne następujących równań różniczkowych liniowych ze stałymi spółczynnikami:

1) $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=0.$ 2) $\frac{d^2y}{dx^2}-a^2y=0.$ 3) $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-2y=0.$ 4) $\frac{d^2y}{dx^2}+a^2y=0.$

5) $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=0.$ 6) $\frac{d^2y}{dx^2}-7\frac{dy}{dx}+12y=0.$ 7) $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+13y=0.$ 8) $\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+y=0.$

9) $\frac{d^4y}{dx^4}+2\frac{d^2y}{dx^2}+y=0.$ 10) $\frac{d^4y}{dx^4}-4\frac{d^3y}{dx^3}+6\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+y=0.$ 11) $\frac{d^3y}{dx^3}-3\frac{d^2y}{dx^2}+4y=0.$

12) $\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+2y=0.$ 13) $\frac{d^2y}{dx^2}-2a\frac{dy}{dx}+(a^2+b^2)y=0.$ 14) $\frac{d^4y}{dx^4}+2a^2\frac{d^2y}{dx^2}+a^4y=0.$

15) $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=x^2.$ 16) $\frac{d^4y}{dx^4}-a^4y=x^3.$ 17) $\frac{d^4y}{dx^4}-2\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2y}{dx^2}=x^3.$ 18) $\frac{d^2y}{dx^2}+y=\cos x.$

19) $\frac{d^2y}{dx^2}+a^2y=\cos x.$ 20) $\frac{d^2y}{dx^2}-7\frac{dy}{dx}+12y=x.$ 21) $\frac{d^4y}{dx^4}-2\frac{d^3y}{dx^3}+2\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=1.$

22) $\frac{d^2y}{dx^2}+y=\sin x.$ 23) $\frac{d^2y}{dx^2}+4y=x\sin^2 x.$ 24) $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=e^x.$ 25) $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=e^{2x}.$

26) $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+3y=2e^{3x}.$ 27) $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=x^2e^{3x}.$ 28) $a\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d^2y}{dx^2}.$ 29) $a^2\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d^2y}{dx^2}.$

30) $\frac{d^4y}{dx^4}-2\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2y}{dx^2}=x^3.$

Wyznaczyć całki ogólne następujących równań różniczkowych liniowych mających spółczynniki zmienne:

31) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-3y=0.$ 32) $(x+a)^2\frac{d^2y}{dx^2}-4(x+a)\frac{dy}{dx}+6y=0.$ 33) $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x^2}y=0.$

34) $x^3\frac{d^2y}{dx}+2x\frac{dy}{dx}-a^2x^2y=0.$ 35) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}+a^2x^2y=0.$ 36) $\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}+(1+x^2)y=0.$

37) $\frac{d^2y}{dx^2}+(a+bx)\frac{dy}{dx}+ab\,xy=0.$ 38) $x\frac{d^2y}{dx^2}+(a+bx)\frac{dy}{dx}+aby=0.$ 39) $x^3\frac{d^3y}{dx^3}-3x^2\frac{d^2y}{dx^2}+7x\frac{dy}{dx}-8y=0.$

40) $(a^2-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+2(n-1)x\frac{dy}{dx}+n(n-1)=0.$ 41) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-4x\frac{dy}{dx}+6y=x.$ 42) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-3x\frac{dy}{dx}+4y=2x^2.$

43) Wykazać, że znając dwie całki szczególne y_1, y_2, odpowiadające równaniu różniczkowemu liniowemu rzędu drugiego sprowadzonemu do zera, jak: $\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0$, w którem P i Q są funkcyami zmiennej x, otrzymujemy jego całkę ogólną w postaci: $y=C_1y_1+C_2y_2$.

44) Wykazać, że znając jedną całkę szczególną y_1 równania różniczkowego liniowego drugiego rzędu, kształtu: $\frac{d^2y}{dx^2}-P\frac{dy}{dx}+Qy=0$, otrzymamy całkę ogólną w postaci:

$$y=C_1y_1+C_2y_1\int\frac{e^{-\int Pdx}}{y_1^2}dx.$$

45) Wykazać, że między dwiema całkami szczególnemi równania różniczkowego drugiego rzędu: $\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0$ zachodzi związek: $y_2\frac{dy_1}{dx}-y_1\frac{dy_2}{dx}=Ce^{-\int Pdx}$.

46) Wykazać, że całkowanie równania różniczkowego drugiego rzędu: $\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy$ 0, sprowadza się za pomocą podstawienia: $y=e^{\int u\,dx}$, gdzie u jest nową zmienną, do całkowania równania różniczkowego rzędu pierwszego kształtu:

$$\frac{dy}{dx}+u^2+Pu+Q=0.$$

47) Wyznaczyć całkę równania różniczkowego: $\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=0$ o stałych spółczynnikach a i b za pomocą podstawienia: $y=e^{\int u\,dx}$, gdzie u jest nową zmienną.

48) Wykazać, że całkę ogólną równania różniczkowego: $\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0$, w którem: $\frac{P^2}{4}+\frac{1}{2}\frac{dP}{dx}-Q=a$, gdzie a jest liczbą stałą dodatnią, możemy przedstawić w postaci:

$$y=\left\{C_1e^{-x\sqrt{a}}+C_2e^{+x\sqrt{a}}\right\}e^{-\frac{1}{2}\int Pdx}.$$

49) Wykazać, że całkę ogólną równania różniczkowego drugiego rzędu:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy_1}{dx}+\frac{dP}{dx}y=0$$

można przedstawić w postaci:

$$y=e^{-\int Pdx}\left\{C_1+C_2\int e^{\int Pdx}dx\right\}.$$

50) Wykazać, że skoro funkcya z jest jakąkolwiek całką równania różniczkowego: $\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0$, natenczas całkę ogólną równania różniczkowego kształtu: $\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=R$, gdzie R jest funkcyą wyłącznie zmiennej x, możemy przedstawić w postaci:

$$y=z\left\{\int\frac{e^{-\int Pdx}dx}{z^2}\left(\int Rz\,e^{\int Pdx}dx+C_1\right)+C_2\right\}.$$

51) Wykazać, że całkę ogólną równania różniczkowego rzedu drugiego, kształtu:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x^2}=\frac{a}{x^2-1},$$

możemy przedstawić w postaci:

$$y=-\frac{a}{2}+C_1x+\frac{C_2}{x}+\frac{a}{4}\left(x-\frac{1}{x}\right)\log\frac{x-1}{x+1}.$$

52) Znaleźć pierwszą całkę równania różniczkowego drugiego rzędu kształtu:

$$y''=\frac{b+y'^2}{a+yy'}\cdot y'.$$

Podobnie dla następujących równań różniczkowych:

53) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}$. 54) $y+3x\frac{dy}{dx}+2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+\left(x^2+2y^2\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2}=0$.

Wykazać, że następujące równania różniczkowe mają całki ogólne w postaciach obok podanych:

55) $\frac{d^2y}{dx^2}-y=0$, w postaci: $x=\log(y+\sqrt{y^2+c})+C$. 56) $\frac{d^2y}{dx^2}-ay=0$, w postaci: $x=\frac{1}{a}\log(ay+\sqrt{a^2y^2+C_1})+C_2$. 57) $\frac{d^2y}{dx^2}=x+\sin x$, w postaci: $y=\frac{1}{6}x^3-\sin x+C_1x+C_2$. 58) $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+a^2y=0$, w postaci: $y=c_1\cos(a\,.\arcsin x)+c_2\sin(a\,.\arcsin x)$.

59) $a\frac{d^2y}{dx^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, w postaci: $y+c_1=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x-c}{a}}+e^{-\frac{x-c}{a}}\right)$. 60) $\frac{d^2y}{dx^2}=ay$, w postaci: $x=\int\frac{dy}{\sqrt{ay^2+C_1}}+C_2$. 61) $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{a}{\sqrt{y}}$, w postaci: $x=\int\frac{dy}{\sqrt{4a\sqrt{y}+c_1}}+C_2$. 62) $y=f\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, w postaci: $x=\int\frac{df(y'')}{\sqrt{2\int y''\,df(y'')+C_1}}+C_2$. 63) $\frac{d^2y}{dx^2}\cos y-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\sin y=1$, w postaci: $x=c_1+\cos c_2\,.\log\operatorname{tang}\frac{y+c_2}{2}$. 64) $\left(1+y\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx}\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}$, w postaci: $x=c_2+c_1\log(y+\sqrt{y^2+1-c_1^2})+\log(y-c_1\sqrt{y^2+1-c_1^2})$. 65) $(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$, w postaci: $c^2y=(1+c^2)\log(1+cx)-cx+C'$. 66) $1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+x\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}-a\frac{d^2y}{dx^2}\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{1/2}$, w postaci: $y=\sqrt{a^2+c^2-x^2}-c\log\frac{c+\sqrt{a^2+c^2-x^2}}{c'(x-a)}$. 67) $(x+a)\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\frac{dy}{dx}=0$, w postaci: $y+c'=\log(x^2-c^2)-\frac{a}{c}\log\frac{x+c}{x-c}$. 68) $y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-1=0$, w postaci: $(x+c)^2=y^2+c'^2$. 69) $-a\frac{d^2y}{dx^2}=\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}$, w postaci: $(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=a^2$. 70) $y\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=y^2\log y$, w postaci: $\log y=c_1e^x+c_2e^{-x}$. 71) $y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1$, w postaci: $x+c_1=\sqrt{y^2+c^2}$.

Znaleźć linie krzywe, w których promień krzywizny ρ pozostawałby z długością normalnej N w każdym punkcie w następującym związku:

72) $\rho=-N$, 73) $\rho=N$. 74) $\rho=-2N$. 75) $\rho=2N$. 76) $\rho=aN$. 77) $\rho=aN^3$. 78) $\rho\cos\alpha=a$, gdzie α jest kątem, który promień ρ tworzy z osią x-ów. 79) $\frac{N^3}{\rho}=-\frac{y^4}{a^2}$.

Oznaczając przez ρ promień krzywizny w pewnym punkcie krzywej, a przez α kąt, jaki styczna w tym punkcie tworzy z osią x-ów; znaleźć krzywe, w których:

80) $\rho=k\operatorname{cosec}^2\alpha$. 81) $\rho=x\sec^2\alpha$. 82) $\rho=2x\operatorname{cosec}\alpha$. 83) $\rho=2x\sec^2\alpha$. 84) $\rho=\frac{y}{\cos\alpha\sin\alpha}$.

85) Znaleźć krzywą, w którejby promień krzywizny w jakimkolwiek punkcie był równy promieniowi wodzącemu tego punktu.

86) Znaleźć krzywą, której promienie krzywizny byłyby proporcyonalne do łuków.

Jakie krzywe przedstawiają równania między promieniem krzywizny ρ a łukiem s w postaci: 87) $\rho^2=2as$. 88) $\rho^2+s^2=a^2$. 89) $s^2=a(\rho-a)$

Znaleźć całki szczególne następujących równań różniczkowych:

90) $\frac{d^2y}{dx^2}=ax$, pod założeniem, że gdy $x=0$, jest $y=0$, $y'=0$.

91) $\frac{d^2y}{dx^2}=m^2y$, pod założeniem, że gdy $x=\infty$, jest $y=0$, a gdy $x=0$, jest $y=y_0$.

92) $h\frac{d^2y}{dx^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, pod założeniem, że gdy $x=0$, jest $y=0$ i $y'=0$.

93) $\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{g}{a}x$, pod założeniem, że gdy $x=0$, jest $t=0$, a gdy $x=b$, jest: $\frac{dx}{dt}=0$.

94) $M\frac{d^2y}{dx^2}+Px+\frac{1}{2}px^2=0$, pod założeniem, że dla $x=l$, jest $y=0$, $y'=0$.

Rozwiązania LIX. 1) $y=c_1e^x+c_2e^{2x}$. 2) $y=C_1e^{ax}+C_2e^{-ax}$. 3) $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$. 4) $y=C_1\cos ax+C_2\sin ax$. 5) $y=(C_1+C_2x)e^x$. 6) $y=c_1e^{3x}+c_2e^{4x}$. 7) $y=Ae^{2x}\cos 3x+Be^{2x}\sin 3x$. 8) $y=Ce^{-x}+(A+Bx)e^x$. 9) $y=(A_1+A_2x)\cos x+(B_1+B_2x)\sin x$. 10) $y=(C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3)e^x$. 11) $y=Ce^{-x}+(c_1+c_2x)e^{2x}$. 12) $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$. 13) $y=e^{ax}(C_1\cos bx+C_2\sin bx)$. 14) $y=(C_1+C_2x)\cos ax+(C_3+C_4x)\sin ax$. 15) $y=e^{2x}(C_1+C_2x)+{}^1/_8(2x^3+4x+3)$. 16) $y=C_1e^{ax}+C_2e^{-ax}+C_3\cos ax+C_4\sin ax-\frac{x^3}{a^4}$. 17) $y=(C_1+C_2x)e^x+C_3+C_4x+\frac{x^5}{20}+\frac{x^4}{2}+$ $+3x^3+12x^2$. 18) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+{}^1/_2x\sin x$. 19) $y=\frac{\cos x}{a^2-1}+C_1\cos ax+C_2\sin ax$. 20) $y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}+\frac{12x+7}{144}$. 21) $y=c_1\cos x+c_2\sin x+(c_3+c_4x)e^x+1$. 22) $y=C_1\cos x+$ $+C_2\sin x-{}^1/_2x\cos x$. 23) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+{}^1/_8x-{}^1/_{32}\cos 2x-{}^1/_{16}x^2\sin 2x$. 24) $y=(C_1+C_2x+{}^1/_2x^2)e^x$. 25) $y=e^{-{}^1/_2x}\left(C_1\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}+C_2\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{1}{7}e^{2x}$. 26) $y=C_1e^x+$ $+Ce^{2x}+xe^{3x}$. 27) $y=(C_1+C_2x)e^x+\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}\right)e^{2x}$. 28) $y=C_1e^{\frac{x}{a}}+C_2x+C_3$. 29) $y=C_1e^{\frac{x}{a}}+C_2e^{-\frac{x}{a}}+C_3x+C_4$. 30) $y=(c_1+c_2x)e^x+c_3+c_4x+\frac{x^5}{20}+\frac{x^4}{2}+3x^3+12x^2$. 31) $y=c_1x^3+\frac{c_2}{x}$. 32) $y=c_1(x+a)^2+c_2(x+a)^3$. 33) $y=C_1x+\frac{C_2}{x}$. 34) $y=\frac{1}{x}(C_1e^{ax}+C_2e^{-ax})$. 35) $y=\frac{1}{x}(C_1\cos ax+C_2\sin ax)$. 36) $y=e^{-{}^1/_2x^2}(C_1+C_2x)$. 37) $y=e^{-ax}\left\{C_1+C_2\int e^{ax-{}^1/_2bx^2}dx\right\}$. 38) $y=e^{-bx}\left\{C_1+C_2\int x^{-a}e^{bx}dx\right\}$. 39) $y=x^2[C_1+C_2x\log x+C_3(\log x)^2]$. 40) Podst.: $y=(\alpha+\beta x)^\mu$, $y=(a+x)^n\left\{C_1+C_2\int\frac{(a-x)^{n-1}}{(a+x)^{n+1}}dx\right\}$. 41) $y=c_1x+c_2x^2+{}^1/_2x$. 42) $y=x^2[c_1+c_2\log x+(\log x)^2]$; 48) Podstaw: $y=uv$. 50) Podstaw: $y=uz$. 52) $y=\frac{a}{b}y'+C\sqrt{b+y'^2}$. 53) $\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}+\frac{1}{x}=C_1$ 54) $x^2\frac{dy}{dx}+y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+xy=C$. 72) $(x-a)^2+y^2=c^2$. 73) $y=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{x-c_1}{c}}+e^{-\frac{x-c_1}{c}}\right)$. 74) Cykloida. 75) $y-c=\frac{(x-c_1)^2}{4c}$. 76) $x=\int\left[\left(\frac{y}{c}\right)^{2/a}-1\right]^{-{}^1/_2}dy$. 77) Krzywe rzędu drugiego. 78) $\frac{x-c_1}{a}=\log\sin\frac{y-c_2}{a}$. 79) $y^2=C_1\cos\frac{2x}{a}+C_2\sin\frac{2x}{a}+\sqrt{C_1^2+C_2^2}$. 80) $(y-c_1)^2=2k(c_2-x)$. 81) $4Cy=x^2-2C^2\log\frac{x}{c}$. 82) Cykloida. 83) $y-C=\left(\frac{x}{3c}-1\right)\sqrt{cx}$. 84) $y^2=c\left(c+Ce^{-\frac{x}{c}}\right)$. 86) Spiralna logarytmiczna. 87) Ewolwenta koła. 88) Cykloida. 89) Linia łańcuchowa. 90) $y=\frac{1}{6}ax^3$. 91) $y=y_0e^{-mx}$. 92) $y+h=\frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}}+e^{-\frac{x}{h}}\right)$. 93) $x=b\sin\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}\right)$. 94) $My=\frac{P}{2}\left(l^2x-\frac{x^3}{3}\right)+\frac{p}{l}\left(l^3x-\frac{x^4}{4}\right)$.

Literatura. A. R. Forsyth: Lehrbuch der Differentialgleichungen. Braunschweig 1889. A. R. Forsyth: Theorie der Differentialgleichungen. Leipzig 1893. I. Horn Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. (Sammlung Schubert Band I). Leipzig 1905. L Schlesinger: Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variablen. (Sammlung Schubert Band XIII). Leipzig 1904.

Tematy do rozprawek naukowych:

1. Ogólna teorya równań różniczkowych liniowych rzędu drugiego ze stałymi i zmiennymi spółczynnikami.
2. Równanie różniczkowe Gaussa.
3. Równania różniczkowe Bessel'a i Legendre'a.

Wykład LX.

Zwyczajne równania różniczkowe o ilukolwiek zmiennych i układy równań różniczkowych.

1. Zupełne równanie różniczkowe pierwszego rzędu o trzech zmiennych. Równanie różniczkowe pierwszego rzędu o trzech zmiennych x, y, z przedstawia się w postaci ogólnej:

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0, \qquad (1)$$

gdzie P, Q i R są funkcyami zmiennych x, y, z.

Z równania pierwotnego: $\varphi(x, y, z) = C$, gdzie C jest stałą dowolną, otrzymamy za pomocą różniczkowania równanie:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = 0, \qquad (2)$$

czyli ogólnie równanie różniczkowe kształtu:

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

Mając odwrotnie dane równanie różniczkowe kształtu:

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

musimy wpierw zbadać, czy ono może pochodzić z różniczkowania pewnej funkcyi pierwotnej kształtu: $\varphi(x, y, z) = C$. Jeżeliby tak było, musiałyby być spółczynniki P, Q, R proporcyonalne do cząstkowych pochodnych, pewnej zresztą niewiadomej funkcyi $\varphi(x, y, z)$, zatem byłoby:

$$\frac{\frac{\partial\varphi}{dx}}{P} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{Q} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}{R} = \mu,$$

czyli:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \mu P, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \mu Q, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \mu R, \qquad (3)$$

gdzie μ jest pewną nieznaną funkcyą zmiennych x, y, z.

Z pierwszych dwóch równań otrzymamy warunek:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x},$$

czyli:

$$\mu\frac{\partial P}{\partial y} + P\frac{\partial\mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial Q}{\partial x} + Q\frac{\partial\mu}{\partial x},$$

zatem:

$$\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = Q\frac{\partial\mu}{\partial x} - P\frac{\partial\mu}{\partial y}. \qquad (a)$$

Podobnie dostaniemy z równań:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial z} = \frac{\partial(\mu R)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial x}=\frac{\partial(\mu R)}{\partial x}=\frac{\partial(\mu P)}{\partial z},$$

następujące warunki:

$$\mu\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)=R\frac{\partial\mu}{\partial y}-Q\frac{\partial\mu}{\partial z}, \qquad (b)$$

$$\mu\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)=P\frac{\partial\mu}{\partial z}-R\frac{\partial\mu}{\partial x}. \qquad (c)$$

Pomnożywszy równania warunkowe a), b), c) kolejno przez R, P, Q otrzymamy warunek:

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0, \qquad (4)$$

który musi się spełnić tożsamościowo, skoro dane równanie ma mieć całkę pierwotną kształtu: $\varphi(x,\ y,\ z)=C$. Takie równanie różniczkowe nazywamy równaniem **zupełnem**.

2. Jeżeli powyższy warunek jest spełniony, możemy dopiero szukać odpowiedniego równania pierwotnego kształtu: $\varphi(x,\ y,\ z)=C$.

Sposób postępowania będzie następujący:

α) Całkujemy równanie $P\,dx+Q\,dy=0$, jak gdyby zmienna z była stałą i kładziemy stałą całkowania równą $\varphi(z)$.

β) Zróżniczkowawszy otrzymaną funkcyę ze względu na wszystkie zmienne, porównywamy otrzymane równanie z danem i wyznaczamy funkcyę $\varphi(z)$ tak, aby otrzymane równanie różniczkowe było zgodne z danem równaniem.

Tym sposobem znajdziemy szukane równanie pierwotne czyli całkę danego równania różniczkowego.

Przykład. $(y+a)^2dx+z\,dy-(y+a)dz$. Mamy tu: $P=(y+a)^2$, $Q=z$, $R=-y-a$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2(y+a),\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=1,\quad \frac{\partial R}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial P}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial R}{\partial y}=-1,$$

zatem:

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+\&=(y+a)^2.2-(y+a).2(y+a)=0.$$

Warunek całkowalności spełniony, czyli dane równanie różniczkowe pochodzi od pewnego równania pierwotnego. Chcąc je znaleźć, uważajmy z jako wielkość stałą, zatem $dz=0$, otrzymamy tedy równanie: $(y+a)^2dx+z\,dy=0$, czyli: $dx+\frac{z\,dy}{(y+a)^2}=0$, którego całką będzie: $x-\frac{z}{y+a}=C$, czyli: $x-\frac{z}{y+a}=\varphi(z)$ Różniczkując otrzymane równanie ze względu na wszystkie zmienne otrzymamy równanie różniczkowe:

$$dx+\frac{z}{(y+a)^2}dy-\left\{\frac{1}{y+a}+\frac{d\varphi(z)}{dz}\right\}dz=0,\ \text{czyli: } (y+a)^2dx+z\,dy-\left\{y+a+(y+a)^2\frac{d\varphi(z)}{dz}\right\}dz=0$$

zgodne z równaniem danem, skoro będzie: $-(y+a)=-\left\{y+a+(y+a)^2\frac{d\varphi}{dz}\right\}$, czyli: $\frac{d\varphi}{dz}=0$, zatem $\varphi(z)=C$. Szukane równanie pierwotne będzie zatem: $x-\frac{z}{y+a}=C$.

Moglibyśmy byli także uważać wpierw y jako wielkość stałą, otrzymalibyśmy tedy równanie różniczkowe: $(y+a)^2dx-(y+a)dz=0$, czyli: $dz-(y+a)dx=0$, którego całką ogólną byłoby równanie: $z-x(y+a)=\varphi(y)$. Różniczkując to równanie i porównywając z danem, otrzymalibyśmy na oznaczenie $\varphi(y)$ warunek:

$$x+\frac{d\varphi(y)}{dy}=\frac{z}{y+a},\ \text{czyli: } \frac{d\varphi(y)}{dy}=\frac{z}{y+a}-x=\frac{z-x(y+a)}{y+a}=\frac{\varphi(y)}{y+a},\ \text{zatem: } \frac{d\varphi(y)}{\varphi(y)}=\frac{dy}{y+a},$$

stąd: $\log\varphi(y)=\log(y+a)+c$, czyli: $\varphi(y)=b(y+a)$, gdzie b jest stałą dowolną, a więc: $z-x(y+a)=b(y+b)$ równanie pierwotne zgodne z poprzednio otrzymanem.

3. Jeżeli równanie $Pdx+Qdy+Rdz=0$ jest jednorodnem ze względu na x, y, z, to rozwiązanie jego można sobie ułatwić za pomocą podstawienia:

$$x=uz, \quad y=vz.$$

Przykłady. 1) $(ay-bz)dx+(cx-az)dy+(bx-ay)dz=0$. Kładąc: $x=uz$, $y=vz$, otrzymamy:

$(av-b)du-(au-c)dv=0$, czyli: $\frac{du}{au-c}=\frac{dv}{av-b}$, skąd: $\frac{au-c}{av-b}=C$, zatem: $\frac{ax-cz}{ay-bz}=C$

zupełną całkę danego równania.

2) $(y^2+yz+z^2)dx+(x^2+xz+z^2)dy+(x^2+xy+y^2)dz=0$. Kładąc: $x=uz$, $y=vz$, otrzymamy:

$$\frac{dz}{z}=-\frac{(v^2+v+1)du+(u^2+u+1)dv}{(u+v+1)(uv+u+v)}, \quad \log z=\log\frac{u+v+1}{uv+u+v}+C,$$

a w końcu zupełne rozwiązanie: $\frac{xy+xz+yz}{x+y+z}=C$.

4. Jeżeli równanie: $Pdx+Q\,dy+R\,dz=0$ jest całkowalne, to znaczy jeżeli pochodzi od jakiejś funkcyi pierwotnej: $\varphi(x, y, z)=C$, zatem czyni zadość

warunkowi: $$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0,$$

wtedy istnieje zawsze pewien czynnik μ, taki, że będzie $\mu(Pdx+Q\,dy+R\,dz)$ zupełną różniczką du, zatem $u=C$ zupełnem rozwiązaniem.

Czynnik ten nazywamy czynnikiem całkującym równania różniczkowego pierwszego rzędu. Szczególną jego formę wyznaczamy pod pewnymi założeniami z jednego z warunków:

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}, \quad \frac{\partial(\mu Q)}{\partial z}=\frac{\partial(\mu R)}{\partial y}, \quad \frac{\partial(\mu R)}{\partial x}=\frac{\partial(\mu P)}{\partial z}.$$

5. **Równanie różniczkowe niezupełne o trzech zmiennych.** Zastanówmy się teraz nad przypadkiem, gdy równanie różniczkowe: $Pdx+Qdy+Rdz=0$ nie spełnia warunku całkowalności; w tym razie nie pochodzi dane równanie różniczkowe od żadnej funkcyi pierwotnej kształtu: $\varphi(x, y, z)=C$ za pomocą różniczkowania tej funkcyi i podzielenia otrzymanej różniczki pewnym czynnikiem μ. Musiały tedy zajść inne przekształcenia, które z zupełnej różniczki pewnej funkcyi wyrobiły dane równanie różniczkowe.

Przyjmijmy tedy dowolną funkcyę $f(x, y, z)=0$; różniczkując ją, otrzymamy równanie różniczkowe:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0. \tag{5}$$

Zestawiając te równania z danem równaniem różniczkowem:

$$Pdx+Q\,dy+R\,dz=0 \tag{6}$$

możemy z nich wyrugować z i dz, a otrzymamy równanie różniczkowe:

$$M\,dx+N\,dy=0, \tag{7}$$

gdzie M i N będą wyłącznie funkcyami z x i y.

Rozwiązując to równanie otrzymamy równanie $\varphi(x, y)=C$, zawierające stałą dowolną C, a łącząc otrzymane równanie z poprzednio dowolnie przyjętem: $f(x, y, z)=0$ otrzymamy rozwiązanie danego równania różniczkowego. Rozwiązanie składa się w tym razie z dwóch funkcyi $f(x, y, z)=0$ i $\varphi(x, y)=C$, z których pierwsza jest zupełnie dowolną, a druga od niej zależną.

Geometrycznie przedstawia tedy rozwiązanie pewien układ linij krzywych, wykreślonych na dowolnie przyjętej powierzchni, a posiadających

w każdym swym punkcie własność określoną danem równaniem różniczkowem: $Pdx+Qdy+Rdz=0.$

Jak z teoryi krzywych wiadomo, są wielkości dx, dy, dz proporcyonalne do cosinusów kątów λ, μ, ν, jakie styczna w danym punkcie x, y, z tworzy z osiami układu, t. z.:

$$\frac{dx}{\cos\lambda}=\frac{dy}{\cos\mu}=\frac{dz}{\cos\nu},$$

przeto posiadają styczne do otrzymanych krzywych, własność określoną równaniem: $P\cos\lambda+Q\cos\mu+R\cos\nu=0.$

Przykład. $x\,dx+y\,dy+c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,.\,dz=0.$ Równanie nie odpowiada warunkom całkowalności, nie pochodzi zatem od jednej funkcyi pierwotnej. Możemy tedy przyjąć dowolny związek między x, y, z, np. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Ze związku tego otrzymamy:

$$\frac{x\,dx}{a^2}+\frac{y\,dy}{b^2}+\frac{z\,dz}{c^2}=0,\ \text{zatem:}\ dz=-\frac{c^2}{z}\left(\frac{x\,dx}{a^2}+\frac{y\,dy}{b^2}\right),\quad z\,dz=-c^2\left(\frac{x\,dx}{a^2}+\frac{y\,dy}{b^2}\right).$$

Dane równanie: $x\,dx+y\,dy+c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dz=0$ sprowadzi się więc do kształtu:

$x\,dx+y\,dy-c^2\left(\frac{x\,dx}{a^2}+\frac{y\,dy}{b^2}\right)=0$, czyli do równania: $\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)x\,dx+\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)y\,dy=0$, którego całką będzie: $\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)x^2+\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)y^2=C$. Otrzymane równanie w połączeniu z przyjętem: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ jest rozwiązaniem danego równania różniczkowego i przedstawia układ krzywych na ellipsoidzie, których rzuty na płaszczyznę XOY są współśrodkowemi liniami stożkowemi. Przyjąwszy w miejscu: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ inny związek między x, y, z, otrzymamy inny układ krzywych, który będzie miał jednak także własność określoną danem równaniem różniczkowem.

6. Zupełne równanie różniczkowe o *n* zmiennych ma kształt:

$$X_1dx_1+X_2dx_2+\ldots+X_ndx_n=0, \tag{8}$$

gdzie X_1, $X_2,\ldots,X_n$ są funkcyami n zmiennych x_1, $x_2,\ldots,x_n$.

Ażeby to równanie miało całkę kształtu: $\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)=A$, to muszą współczynniki X_i być proporcyonalne do pochodnych cząstkowych: $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ tak, żeby dla wszelkich wartości $i=1, 2,\ldots, n$ było $\mu X_i=\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$.

Wybierając z tych n równań jakiekolwiek trzy, np. $i=1, 2, 3$, otrzymamy z nich warunek:

$$X_1\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_3}-\frac{\partial X_3}{\partial x_2}\right)+X_2\left(\frac{\partial X_3}{\partial x_1}-\frac{\partial X_1}{\partial x_3}\right)+X_3\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2}-\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right)=0. \tag{9}$$

Tworząc wszelkie możliwe kombinacye trzeciej klasy z n wskaźników, otrzymamy w ogólności: $\binom{n}{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ podobnych równań warunkowych. Równania te nie są wszystkie od siebie niezależne, gdyż te równania warunkowe, które np. X_n nie zawierają, mogą być oczywiście wyprowadzone z tych, które X_n zawierają. Takich równań, w których X_n się nie znajduje, jest: $\binom{n-1}{2}=\frac{(n-1)(n-2)}{2!}$, to też będzie ilość warunków od siebie niezależnych, którym spółczynniki równania różniczkowego pierwszego rzędu o n zmien-

nych muszą uczynić zadość, aby też równanie miało całkę pierwotną kształtu:

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = C.$$

Skoro te warunki są spełnione, możemy wyszukanie funkcyi pierwotnej $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = C$ wykonać metodą przyjętą dla trzech zmiennych. Podług tej metody musimy najpierw przyjąć wszystkie zmienne, prócz dwóch, jako stałe i całkować tak otrzymane równanie o dwóch zmiennych, zastępując stałą dowolną funkcyą pozostałych zmiennych za stałe uważanych.

Zróżniczkowawszy następnie otrzymaną całkę ze względu na wszystkie zmienne, porównamy wynik z danem równaniem różniczkowem. Warunki potrzebne dla tożsamości wyniku z danem równaniem różniczkowem posłużą tedy do wyznaczenia wprowadzonej funkcyi dowolnej, a tem samem do wyszukania równania pierwotnego.

7. **Przykład.** Równanie różniczkowe:

$$(2x_1 + x_2^2 + 2x_1 x_4 - x_3)dx_1 + 2x_1 x_2\, dx_2 - x_1\, dx_3 + x_1^2\, dx_4 = 0,$$

czyni zadość $\binom{4}{3}$, t. j. czterem warunkom całkowalności, z których tylko $\binom{3}{2}$, t. j. trzy są niezależne, pochodzi zatem od pewnej funkcyi pierwotnej. Przyjąwszy x_1 i x_2 jako stałe, zatem $dx_1 = 0$, $dx_2 = 0$, otrzymujemy równanie różniczkowe: $-x_1\, dx_3 + x_1^2\, dx_4 = 0$, zatem całkę: $-x_1 x_3 + x_1^2 x_4 = \varphi(x_1, x_2)$. Różniczkując ją ze względu na wszystkie zmienne, znajdziemy równanie różniczkowe: $(-x_3 + 2x_1 x_4)dx_1 - x_1 dx_3 + x_1^2\, dx_4 = d\varphi$, które, porównane z danem daje: $d\varphi = -(2x_1 + x_2^2)dx_1 - 2x_1 x_2 dx_2$, skąd wypada: $\varphi = -x_1^2 - x_1 x_2^2 + C$, zatem równanie pierwotne: $x_1^2 + x_1 x_2^2 - x_1 x_3 + x_1^2 x_4 = C$.

8. Zwyczajne równania różniczkowe stopnia wyższego nad pierwszy. Należą tu równania, w których różniczki zmiennych występują w potędze wyższej nad pierwszą.

Ograniczymy się na równaniu różniczkowem stopnia drugiego ogólnego kształtu:

$$A\, dx^2 + B\, dy^2 + C\, dz^2 + 2A'\, dy\, dz + 2B'\, dz\, dx + 2C'\, dx\, dy = 0, \tag{10}$$

gdzie A, B, C, A', B', C' są funkcyami zmiennych x, y, z.

Przyjmijmy, że lewa strona równania da się rozłożyć na dwa czynniki, co jest możliwe pod warunkiem, że wyznacznik:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A, & C', & B' \\ C', & B, & A' \\ B', & A', & C \end{vmatrix} = ABC + 2A'B'C' - AA'^2 - BA'^2 - CC'^2 = 0.$$

W takim razie rozpada się dane równanie różniczkowe na dwa zwyczajne równania różniczkowe pierwszego stopnia, kształtu:

$$P\, dx + Q\, dy + R\, dz = 0.$$

Całka każdego z tych równań będzie szczególnem rozwiązaniem danego równania różniczkowego. Otrzymamy zatem dwie całki szczególne w postaci:

$$\varphi_1(x, y, z) - C_1 = 0, \quad \varphi_2(x, y, z) - C_2 = 0,$$

a całką ogólną będzie tedy równanie pierwotne:

$$[\varphi_1(x, y, z) - C].[\varphi_2(x, y, z) - C] = 0,$$

o jednej stałej dowolnej C.

Przykład. Równanie: $x^2\, dx^2 + y^2\, dy^2 - z^2\, dz^2 + 2xy\, dx\, dy = 0$ da się przedstawić w formie: $(x\, dx + y\, dy + z\, dz)(x\, dx + y\, dy - z\, dz) = 0$, zatem rozłożyć na dwa równania:

$$x\, dx + y\, dy + z\, dz = 0, \quad x\, dx + y\, dy - z\, dz = 0,$$

których całkami będą równania: $x^2 + y^2 + z^2 = c_1$, $x^2 + y^2 - z^2 = c_2$, zatem całką ogólną: $(x^2 + y^2 + z^2 - c)(x^2 + y^2 - z^2 - c) = 0$. Dane równanie różniczkowe wypowiada zatem własność

linij stycznych do krzywych, położonych dowolnie na kuli (c_1), albo na hiperboloidzie obrotowej (c_2).

9. Przyjmijmy teraz, że wyznacznik $\Delta \gtrless 0$, czyli, że wielomian drugiego stopnia w danem równaniu nie da się rozłożyć na dwa czynniki pierwszego stopnia. W tym przypadku nie pochodzi dane równanie od jednego równania pierwotnego, ani od dwóch równań niezależnych, z których każde by było rozwiązaniem danego równania. Możemy jednak tedy przedstawić w ogólności rozwiązanie za pomocą układu równań jednoczesnych, z których jedno jest zupełnie dowolne, a drugie od pierwszego zależne.

10. Układy równań różniczkowych. W miejscu jednego tylko równania różniczkowego chcemy obecnie rozważać układy równań różniczkowych, czyli t. zw. równania różniczkowe jednoczesne. Jest w nich jedna tylko zmienna niezależna, której wszystkie inne zmienne są funkcyami. Ilość równań układu jest równa ilości zmiennych zależnych.

Najprostsze przykłady równań różniczkowych jednoczesnych tworzą:

1. równania oddzielnie całkowalne, np. układ:

$$l\,dx+m\,dy+n\,dz=0, \quad x\,dx+y\,dy+z\,dz=0,$$

odpowiadający całkom:

$$lx+my+nz=C_1, \quad x^2+y^2+z^2=C_2;$$

2. równania jednoczesne, które, stosownie połączone, dadzą się zastąpić układem równań oddzielnie całkowalnych, np. układ:

$$\frac{dx}{dt}+\frac{2x}{t}=1, \quad \frac{dy}{dt}=x+y+\frac{2x}{t}-1$$

da się zastąpić układem równań:

$$\frac{dx+dy}{dt}=x+y, \quad \frac{dx}{dt}+\frac{2x}{t}=1,$$

które są oddzielnie całkowalne i dają równania pierwotne w formie:

$$\log(x+y)=t+c_1, \quad x=\frac{t}{3}+\frac{c_2}{t^2}.$$

11. Równania jednoczesne pierwszego rzędu i pierwszego stopnia o trzech zmiennych tworzą układ równań kształtu:

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0, \quad P'dx+Q'dy+R'dz=0, \qquad (11)$$

gdzie P, P' i t. d. są funkcyami zmiennych x, y, z, albo liczbami stałemi.

Rozwiązanie takiego układu równań możemy zawsze uczynić zależnem od rozwiązania zwyczajnego równania różniczkowego drugiego rzędu między dwiema zmiennemi, gdyż z danego układu otrzymamy:

$$dy=\frac{RP'-PR'}{QR'-RQ'}dx, \quad dz=\frac{PQ'-QP'}{QR'-RQ'}dx,$$

czyli:

$$dy=\varphi(x, y, z)\,dx, \quad dz=\psi(x, y, z)\,dx, \text{ a stąd:}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx}&=\varphi(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx}&=\psi(x, y, z). \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Różniczkując pierwsze z tych równań pod założeniem, że x jest zmienną niezależną, otrzymamy:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dx},$$

a podstawiając za $\frac{dz}{dx}$ wartości z drugiego równania dostaniemy równanie:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\psi(x,\ y,\ z),$$

które obok $\frac{d^2y}{dx^2}$ i $\frac{dy}{dx}$ zawiera znane funkcye zmiennych x, y, z. Rugując z za pomocą pierwszego równania układu (12), otrzymamy w końcu zapowiedziane równanie różniczkowe drugiego rzędu wyłącznie między x i y. Zupełna całka pierwotna tego równania będzie zawierała dwie stałe dowolne, np. w postaci:

$$y=f(x,\ c_1,\ c_2), \tag{13}$$

stąd otrzymamy wskutek tegoż równania pierwszego:

$$\frac{\partial f(x,c_1,c_2)}{\partial x}=\varphi(x,y,z). \tag{14}$$

Oba równania (13) i (14) zawierają dwie stałe dowolne i przedstawiają zupełne rozwiązanie danego układu.

Zupełne rozwiązanie układu dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu, składa się zatem zawsze z dwóch równań zawierających dwie stałe dowolne.

Przykład. $(5y+9z)dx+dy+dz=0$, $(4y+8z)dx+2dy-dz=0$. Mamy tu: $\frac{dy}{dx}=-3y-4z$, $\frac{dz}{dx}=-2y-5z$, stąd otrzymamy:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-3\frac{dy}{dx}-4\frac{dz}{dx}=-3\frac{dy}{dx}+8y+20z=-3\frac{dy}{dx}+8y+\frac{20}{4}\left(-3y-\frac{dy}{dx}\right),$$

czyli:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+8\frac{dy}{dx}+7y=0,$$

równanie liniowe ze stałymi spółczynnikami.

Scałkowawszy je, otrzymamy: $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-7x}$, a porównawszy wartość stąd na $\frac{dy}{dx}$ otrzymaną z wartością powyżej podaną, będziemy mieli: $3y+4z=c_1e^{-x}+7c_2e^{-7x}$; oba ostatnie równania o 2 stałych dowolnych przedstawiają zupełne rozwiązanie danego układu.

12. Równania różniczkowe jednoczesne pierwszego rzędu o ilukolwiek zmiennych. Przyjmijmy, że mamy tylko jedną zmienną niezależną x, zaś n zmiennych zależnych $y_1, y_2, \dots, y_n$, jakoteż układ n równań różniczkowych kształtu:

$$P^{(i)}dx+P_1^{(i)}dy_1+P_2^{(i)}dy_2+\dots+P_n^{(i)}dy_n=0,\ (i=1,\ 2,\dots,n) \tag{15}$$

gdzie P są funkcyami zmiennych: $x, y_1, y_2, \dots, y_n$.

Z danego układu n równań możemy wyznaczyć stosunki między różniczkami $dx, dy_1, \dots, dy_n$ w formie symetrycznej:

$$\frac{dx}{Q}=\frac{dy_1}{Q_1}=\frac{dy_2}{Q_2}=\dots=\frac{dy_n}{Q_n}, \tag{16}$$

gdzie Q będą wiadomemi funkcyami zmiennych.

Rozwiązanie tego układu równań różniczkowych zależy od rozwiązania równania różniczkowego n-go rzędu między dwiema zmiennymi. Z (16) otrzymamy bowiem n równań takich:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= \frac{Q_1}{Q} = \psi_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= \frac{Q_2}{Q} = \psi_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} &= \frac{Q_n}{Q} = \psi_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Różniczkujmy pierwsze z tych równań $(n-1)$ razy podług x i podstawmy po każdem różniczkowaniu za $\frac{dy_2}{dx}, \dots, \frac{dy_n}{dx}$ wyrażenia podane w następnych $(n-1)$ równaniach. Tym sposobem otrzymamy wraz z pierwszem równaniem n równań, które podają związek między pochodnymi tej samej funkcyi y_1, jako to: $\frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2y_1}{dx^2}, \dots, \frac{d^n y_1}{dx^n}$ a zmiennymi: $x, y_1, y_2, \dots, y_n$. Wyrugowawszy z tych n równań $(n-1)$ zmiennych $y_2, y_3, \dots, y_n$, otrzymamy tylko jedno równanie w formie: $f\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2y_1}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny_1}{dx^n}\right)=0.$ (18)

Równanie to będzie właśnie zapowiedzianem równaniem różniczkowem n-go rzędu. Jako takie ma ono n od siebie niezależnych pierwszych całek, z których każda zawiera dowolną stałą od reszty stałych niezależną.

Całki te możemy przedstawić w formie:

$$\left.\begin{aligned} F_1\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\right) &= C_1, \\ F_2\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\right) &= C_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ F_n\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\right) &= C_n. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Jeżeli teraz w tym układzie równań zamiast pochodnych $\frac{dy_1}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$ podstawimy ich wartości wyrażone przez pierwotne zmienne, wtedy otrzymamy układ n równań kształtu:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n, C_1) &= 0, \\ \varphi_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n, C_2) &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \varphi_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n, C_n) &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

które wystarczają, aby każdą zmienną y jako funkcyę zmiennej niezależnej x wyznaczyć, a zatem:

Zupełne rozwiązanie układu n równań różniczkowych pierwszego rzędu między $(n+1)$ zmiennymi zależy od zupełnego rozwiązania jednego równania różniczkowego n-go rzędu i składa się z układu całkowego, t. zw. układu n równań, między $(n+1)$ zmiennymi i n stałymi dowolnymi.

13. Niektóre uproszczenia przy całkowaniu układu równań różniczkowych. Dany układ równań różniczkowych pierwszego rzędu i stopnia o n zmiennych zależnych, można przedstawić w formie symetrycznej:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dx}{X}, \quad (21)$$

gdzie $X_1, X_2, \dots, X_n$ są funkcyami zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Metoda postępowania przy całkowaniu tych równań może być częstokroć zupełnie różną od wygłoszonej poprzednio metody ogólnej. Zależy ona przedewszystkiem od kształtu mianowników i opiera się na własności równych ilorazów, dozwalającej z powyższych równości utworzyć nowe formy kształtu:

$$\frac{m_1 dx_1 + m_2 dx_2 + \ldots + m_n dx_n}{m_1 X_1 + m_2 X_2 + \ldots + m_n X_n},$$

które będą zupełnemi różniczkami, albo zestawione z jedną z powyższych, utworzą równanie całkowalne. Mając do rozporządzenia n czynników $m_1, m_2, \ldots, m_n$, możemy częstokroć otrzymać n równań całkowalnych, których rozwiązania utworzą całki danego układu.

14. Przykłady. 1) Dany układ: $\frac{dx}{ax+by+c} = \frac{dy}{a'x+b'y+c'} = \frac{dt}{t}$. Otrzymujemy stąd:

$$\frac{dt}{t} = \frac{dx + m\,dy}{ax+by+c+m(a'x+b'y+c')}, \text{ czyli: } \frac{dt}{t} = \frac{1}{a+ma'} \cdot \frac{(a+ma')dx + (a+ma')m\,dy}{(a+ma')x+(b+mb')y+c+mc'}.$$

Obierzmy m tak, aby było $(a+ma')m = b+mb'$, wtedy będą obie strony równania zupełnemi różniczkami, otrzymamy tedy całkę:

$$\log t + C = \frac{1}{a+ma'} \log[(a+ma')x+(b+mb')y+c+mc'],$$

czyli:

$$Ct = [ax+by+c+m(a'x+b'y+c')]^{\frac{1}{a+ma'}}.$$

Warunek $(a+ma')m = b+mb'$ daje jednakże dwie wartości na m, np. m_1 i m_2, mamy zatem dwa równania:

$$C_1 t = [ax+by+c+m_1(a'x+b'y+c')]^{\frac{1}{a+m_1a'}}, \quad C_2 t = [ax+by+c+m_2(a'x+b'y+c')]^{\frac{1}{a+m_2a'}},$$

które są całkami danego układu.

2) Dany układ: $\frac{dx}{ax+by+cz+d} = \frac{dy}{a'x+b'y+c'z+d'} = \frac{dz}{a''x+b''y+c''z+d''}$. Wprowadźmy nową zmienną t i oznaczmy mianowniki powyższych równości kolejno przez X, Y, Z, wtedy otrzymamy:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = \frac{dt}{t} = \frac{l\,dx + m\,dy + n\,dz}{lX+mY+nZ}.$$

Obierzmy l, m, n, tak, aby było:

$$al+a'm+a''n = \lambda l, \quad bl+b'm+b''n = \lambda m, \quad cl+c'm+c''n = \lambda n, \quad dl+d'm+d''n = \lambda r,$$

wtedy otrzymamy:

$$\frac{dt}{t} = \frac{l\,dx+m\,dy+n\,dz}{\lambda[lx+my+nz+r]}, \text{ zatem: } \log t + C = \frac{1}{\lambda}\log(lx+my+nz+r), \text{ czyli: } Ct = (lx+my+nz+r)^{\frac{1}{\lambda}}.$$

Z pierwszych trzech warunków otrzymamy jednakże po wyrugowaniu l, m, n, na oznaczenie λ równanie:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda, & a', & a'' \\ b, & b'-\lambda, & b'' \\ c, & c', & c''-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

które jako równanie 3-go stopnia ze względu na λ daje trzy pierwiastki λ_1, λ_2, λ_3, otrzymamy zatem także trzy odpowiednie grupy czynników: $l_1, m_1, n_1, r_1, l_2, m_2, n_2, r_2, l_3, m_3, n_3, r_3$, a więc układ całek:

$$c_1 t = [l_1x+m_1y+n_1z+r_1]^{\frac{1}{\lambda_1}}, \quad c_2 t = [l_2x+m_2y+n_2z+r_2]^{\frac{1}{\lambda_2}}, \quad c_3 t = [l_3x+m_3y+n_3z+r_3]^{\frac{1}{\lambda_3}},$$

z których, po wyrugowaniu t, otrzymamy ogólne rozwiązanie danego układu w formie:

$$[l_1x+m_1y+n_1z+r_1]^{\frac{1}{\lambda_1}} = C[l_2x+m_2y+n_2z+r_2]^{\frac{1}{\lambda_2}}, \quad [l_1x+m_1y+n_1z+r_1]^{\frac{1}{\lambda_1}} = C'[l_3x+m_3y+n_3z+r_3]^{\frac{1}{\lambda_3}},$$

gdzie C i C' są dwie stałe dowolne.

15. Układy równań różniczkowych rzędu wyższego nad pierwszy. Układ jednoczesnych równań różniczkowych rzędu wyższego nad pierwszy możemy zawsze sprowadzić do układu równań rzędu pierwszego.

Ażeby to wykonać, należy uważać jako nową zmienną każdy stosunek różniczkowy, oprócz stosunku różniczkowego najwyższego rzędu.

Tak przekształcone równania różniczkowe będą podobnie jak związane z nimi równania różniczkowe rzędu pierwszego dołączone, a oba układy razem utworzą układ jednoczesnych równań pierwszego rzędu.

Niech będzie dany układ równań różniczkowych rzędu drugiego, kształtu:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=X,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=Y,\quad \frac{d^2z}{dt^2}=Z, \tag{22}$$

gdzie X, Y, Z są funkcyami zmiennych x, y, z, t i pochodnych: $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$.

Takie równania nazywają się zwykle r ó w n a n i a m i r u c h u.

Przyjąwszy:
$$\frac{dx}{dt}=x',\quad \frac{dy}{dt}=y',\quad \frac{dz}{dt}=z', \tag{23}$$

przekształcimy dany układ w następujący:

$$\frac{dx'}{dt}=X,\quad \frac{dy'}{dt}=Y,\quad \frac{dz'}{dt}=Z. \tag{24}$$

Tym sposobem otrzymamy w całości sześć równań pierwszego rzędu między sześcioma zmiennemi zależnemi x, y, z, x', y', z' i jedną zmienną niezależną t. Zupełne rozwiązanie tego układu składać się będzie z sześciu równań między owemi zmiennemi, z sześciu stałemi dowolnemi.

Jeżeli z tych sześciu równań wyrugujemy trzy zmienne x', y', z' nowowprowadzone, otrzymamy trzy równania między pierwotnemi zmiennemi x, y, z, t i wspomnianemi powyżej sześcioma stałemi.

A zatem: *Zupełne rozwiązanie układu trzech równań różniczkowych drugiego rzędu między czterema zmiennemi wyraża się trzema równaniami pierwotnemi, zawierającemi te zmienne z sześciu stałemi dowolnemi.*

Ogólnie można dowieść twierdzenia: Zupełne rozwiązanie układu n równań różniczkowych między $(n+1)$ zmiennemi, z których jedna jest niezależną, składa się z n równań między temi zmiennemi, każde z tych równań będzie zawierało oprócz tego stałe dowolne, których ilość równa się sumie skaźników w stosunkach różniczkowych najwyższego rzędu.

W jaki sposób dojść do tych równań, niema reguły ogólnej. Różniczkowaniem i rugowaniem zmiennych można częstokroć dojść do równania różniczkowego wyższego wprawdzie rzędu, ale zawierającego tylko dwie zmienne. Częstokroć można także użyć z korzyścią metody czynników nieoznaczonych.

16. Przykłady. 1) Dany układ równań różniczkowych: $\frac{d^2x}{dt^2}=ax+by$, $\frac{d^2y}{dt^2}=a'x+b'y$.

Różniczkując pierwsze równanie dwa razy ze względu na t, otrzymamy:

$$\frac{d^4x}{dt^4}=a\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{d^2y}{dt^2},$$

wyrugowawszy y i $\frac{d^2y}{dt^2}$ z tych trzech równań, otrzymamy:

$$\frac{d^4x}{dt^4}-(a+b')\frac{d^2x}{dt^2}+(ab'-a'b)x=0,$$

t. j. równanie liniowe czwartego rzędu ze stałymi spółczynnikami. Zupełna całka równania przedstawi x jako funkcyę t, z czterema stałymi dowolnymi, stąd znajdziemy:

$$y=\frac{1}{b}\left(\frac{d^2x}{dt^2}-ax\right).$$

Prócz tego sposobu ogólnego można tu także tak postąpić. Z danych dwu równań znajdziemy:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+m\frac{d^2y}{dt^2}=\left(a+ma'\right)\left(x+\frac{b+mb'}{a+ma'}y\right).$$

Połóżmy $x+my=u$ i oznaczmy m tak, aby było:

$$\frac{b+mb'}{a+ma'}=m, \qquad (\alpha)$$

wtedy otrzymamy:

$$\frac{d^2u}{dt^2}=(a+ma')u, \quad \text{stąd: } u=C_1e^{(a+ma')^{1/2}t}+C_2e^{-(a+ma')^{1/2}t}.$$

Na m otrzymamy jednakże z warunku (α) dwie wartości m_1 i m_2, przeto składać się będzie zupełne rozwiązanie z dwóch równań:

$$x+m_1y=C_1e^{(a+m_1a')^{1/2}t}+C_2e^{-(a+m_1a')^{1/2}t}, \quad x+m_2y=C_3e^{(a+m_2a')^{1/2}t}+C_4e^{-(a+m_2a')^{1/2}t}.$$

2) Dane równania ruchu centralnego:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-k^2\frac{x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=-k^2\frac{y}{r^3}, \text{ gdzie: } r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Wprowadzając dwie nowe zmienne: $\frac{dx}{dt}=x'$, $\frac{dy}{dt}=y'$ możemy dany układ dwu równań zastąpić układem czterech równań w postaci:

$$\frac{dx}{x'}=\frac{dy}{y'}=\frac{dx'}{-k^2\frac{x}{r^3}}=\frac{dy'}{-k^2\frac{y}{r^3}}=dt,$$

któremu odpowiada układ czterech całek.

Z trzech ostatnich stosunków dostajemy raz równanie różniczkowe kształtu:

$$\frac{x'\,dx'+y'\,dy'}{-\frac{k^2}{r^3}(xx'+yy')}=dt,$$

które ze względu na to, że: $x^2+y^2=r^2$, zatem $xx'+yy'=rr'$ sprowadza się do postaci:

$$\frac{\frac{1}{2}d(x'^2+y'^2)}{-\frac{k^2}{r^3}rr'}=dt, \quad \text{czyli: } \tfrac{1}{2}d(x'^2+y'^2)=-k^2\frac{r'}{r^2}dt=k^2d\left(\frac{1}{r}\right),$$

daje zatem całkę pierwszą w postaci:

$$x'^2+y'^2=2\frac{k^2}{r}+2C_1; \qquad (a)$$

drugi raz dostajemy równanie różniczkowe kształtu:

$$x\,dy'-y'\,dx=0, \text{ czyli: } d(xy'-y\,x')=0,$$

zatem całkę drugą w postaci: $\qquad xy'-yx'=C_2. \qquad (b)$

Opierając się na tożsamości:

$$(x^2+y^2)(x'^2+y'^2)=(xx'+yy')^2-(xy'-yx')^2,$$

otrzymamy po uwzględnieniu powyższych dwu całek równanie:

$$r^2\left(2\frac{k^2}{r}+2C_1\right)=r^2r'^2+C^2_2,$$

z którego dostajemy: $\qquad rr'=r\frac{dr}{dt}=\sqrt{2C_1r^2+2k^2r-C^2_2}=\sqrt{R},$

czyli równanie różniczkowe: $dt=\frac{r\,dr}{\sqrt{R}}$, które daje trzecią całkę w postaci:

$$t=\int\frac{r\,dr}{\sqrt{R}}+C_3. \qquad (c)$$

Z całki drugiej otrzymujemy równanie różniczkowe:

$$\frac{xy'-x'y}{r^2}=\frac{C_2r'}{r\,.\,rr'}, \quad \text{czyli: } \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{C_2\frac{dr}{dt}}{r\sqrt{R}},$$

które daje całkę czwartą w postaci:

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}=C_2\int\frac{dr}{r\sqrt{R}}+C_4. \qquad (d)$$

Tym sposobem otrzymaliśmy wszystkie cztery całki danego układu równań, z kt rych ostatnie dwie zawierając wszystkie cztery stałe dowolne, rozwiązują ogólnie zagadnien W szczególnych przypadkach potrzeba czterech warunków, na podstawie których można cztery stałe wyznaczyć.

Ćwiczenia LX.

Następujące równania różniczkowe o trzech zmiennych zbadać pod względem i całkowalności i wyznaczyć ewentualne całki ogólne:

1) $(y\,dx+x\,dy)(a-z)+xy\,dz=0$. 2) $(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz=0$.

3) $(a\,dx-b\,dy)z+(by-ax)dz=0$. 4) $2(y+z)dx+(x+3y+2z)dy+(x+y)dz=0$.

5) $(ay-bz)dx+(cz-ax)dy+(bx-cy)dz=0$. 6) $(y^2+yz+z^2)dx+(x^2+xz+z^2)dy+(x^2+xy+y^2)dz=$

7) $(y+a)^2dx+z\,dy-(y+a)\,dz=0$. 8) $(y^2+yz)dx+(xz+z^2)\,dy+(y^2-xy)\,dz=0$.

9) $(2x^2+2xy+2xz^2+1)\,dx+dy+2dz=0$. 10) $(2x+y^2+2xz)\,dx+2xy\,dy+x^2\,dz=0$.

11) $zy\,dx-zx\,dy-y^2\,dz=0$.

12) Znaleźć całkę ogólną równania różniczkowego zwyczajnego: $ay\,dx+b\,dy-dz=$ pod warunkiem, że $y=f(x)$.

13) Znaleźć całkę ogólną równania różniczkowego zwyczajnego kształtu:

$$y\,dx-(x-z)(dy-dz)=0.$$

14) Wyprowadzić warunki, pod którymi równanie różniczkowe o n zmiennych, kształt

$$X_1dx_1+X_2dx_2+\ldots+X_ndx_n=0$$

ma całkę ogólną kształtu: $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)=C$ i wykazać, że istnieje w ogólności $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ odnośnych równań warunkowych od siebie niezależnych.

15) Wykazać, że równanie różniczkowe:

$$(2x_1+x_2^2+2x_1x_4-x_3)\,dx_1+2x_1x_2dx_2-x_1dx_3+x_1^2dx_4=0$$

jest równaniem różniczkowem zupełnem, któremu odpowiada całka ogólna w postaci:

$$x_1^2+x_1x_2^2-x_1x_3+x_1^2x_4=C.$$

Wyznaczyć całki ogólne następujących równań różniczkowych zupełnych:

16) $(y+z+u)dx+(z+u+x)\,dy+(u+x+y)\,dz+(x+y+z)\,du=0$.

17) $yzu\,dx+zux\,dy+uxy\,dz+xyz\,du=0$. 18) $(2x+y^2+2xz)\,dx+2xy\,dy+x^2dz\quad du=0$.

19) $z\,(y+z)\,dx+z\,(u-x)\,dy+y\,(x-u)\,dz+y\,(y+z)\,du=0$.

20) Wykazać, że całkę ogólną równania różniczkowego pierwszego rzędu a drugieg stopnia, kształtu: $x^2\,dx^2+y^2\,dy^2-z^2\,dz^2+2xy\,dx\,dy=0$ możemy przedstawić w postaci: $(x^2+y^2-C)^2=z^4$.

21) Wykazać, że równanie różniczkowe linij krzywiznowych na powierzchni: $ax^2+by^2+cz^2=1$ można sprowadzić do postaci:

$$a(b-c)x\,dy\,dz+b(c-a)y\,dz\,dx+c(a-b)z\,dx\,dy=0$$

i wyznaczyć jego całkę ogólną.

22) Wykazać, że rozwiązanie ogólne układu równań różniczkowych kształtu: $\frac{dx}{dt}=-$ $\frac{dy}{dt}=\alpha x$ określają równania: $x=C_1\cos\alpha t+C_2\sin\alpha t$, $y=-C_2\cos\alpha t+C_1\sin\alpha t$.

Rozwiązać następujące układy równań różniczkowych:

23) $\frac{dx}{dt}=ax+by+c$, $\frac{dy}{dt}=a'x+b'y+c'$. 24) $\frac{d^2x}{dt^2}=ax+by$, $\frac{d^2y}{dt^2}=a'x+b'y$.

25) $\frac{dx}{dt}+7x-y=0$, $\frac{dy}{dt}+2x+5y=0$. 26) $\frac{d^2x}{dt^2}+m^2y=0$, $\frac{d^2y}{dt^2}-m^2x=0$. 27) $\frac{dx}{dt}=\frac{bc(y-z)}{at}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{ca(z-x)}{bt}$, $\frac{dz}{dt}=\frac{ab(x-y)}{ct}$. 28) $\frac{dx}{dt}=cy-bz$, $\frac{dy}{dt}=az-cx$, $\frac{dz}{dt}=bx-ay$. 29) $\frac{dx}{dt}-4x+\frac{y}{4}=0$, $\frac{dy}{dt}+3y-x=0$. 30) $\frac{dx}{dt}+5x+y=e^t$, $\frac{dy}{dt}+3y-x=e^{2t}$,

31) **Wyprowadzić rozwiązanie układu równań różniczkowych kształtu:**

$$\frac{dx}{2y-5x+e^t}=\frac{dy}{x-6y+e^{2t}}=dt,$$

w postaci: $x+y=c_1e^{-4t}+\frac{1}{5}e^t+\frac{1}{6}e^{2t}$, $\quad x-y=c_2e^{-7t}+\frac{1}{8}e^t-\frac{2}{9}e^{2t}$.

32) Wykazać, że układowi równań różniczkowych:

$$t\,dx=(t-2x)dt, \quad t\,dy=(tx+ty+2x-t)\,dt,$$

odpowiada rozwiązanie ogólne: $x=\frac{1}{3}t+C_1t^{-2}$, $\quad x+y=C_2e^t$.

33) Wykazać, że rozwiązanie ogólne układu równań różniczkowych:

$$4\frac{dy}{dx}+9\frac{dy}{dt}+2x+18y-e^t=0, \quad 3\frac{dy}{dx}+7\frac{dy}{dt}+x+24y-3=0,$$

przedstawia się w postaci dwu równań:

$$x=e^{-4t}(A\cos t+B\sin t)+\frac{31}{26}e^t-\frac{93}{17}, \quad y=e^{-4t}[(A-B)\sin t-(A+B)\cos t]-\frac{2}{13}e^t+\frac{6}{17}.$$

34) Wykazać, że całki ogólne układu dwu równań różniczkowych:

$$\frac{dx}{dt}+ay=\frac{dy}{dt}-bx=0,$$

możemy przedstawić w postaci:

$$x=C_1e^{t\sqrt{ab}}+C_2e^{-t\sqrt{ab}}, \quad y=C_2\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot e^{-t\sqrt{ab}}-C_1\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot e^{t\sqrt{ab}}.$$

35) Analogicznie wykazać, że skoro: $\frac{dx}{dt}+ax+by=0$, $\frac{dy}{dt}+a_1x+b_1y=0$, otrzymujemy:

$$x=C_1e^{-\lambda_1t}+C_2e^{-\lambda_2t}, \quad y=\frac{\lambda_1-a}{b}C_1e^{-\lambda_1t}+\frac{\lambda_2-a}{b}C_2e^{-\lambda_2t},$$

gdzie λ_1 i λ_2 są pierwiastkami równania: $\lambda^2-(a+b_1)\lambda+ab_1-a_1b=0$.

36) Wykazać, że gdy: $\frac{dx}{dt}+4x+3y=t$, $\frac{dy}{dt}+2x+5y=e^t$, otrzymamy:

$$x=-\frac{31}{196}+\frac{5}{14}t-\frac{1}{8}e^t+C_1e^{-7t}+C_2e^{-2t}, \quad y=\frac{9}{98}-\frac{1}{7}t+\frac{5}{24}e^t-\frac{8}{3}C_1e^{-7t}-C_2e^{-2t}.$$

Rozwiązać następujące układy równań różniczkowych:

37) $\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{x+z}=\frac{dz}{x+y}$. $\quad$ 38) $\frac{dx}{-1}=\frac{dy}{3y+4z}=\frac{dz}{2y+5z}$. $\quad$ 39) $\frac{dx}{dt}+2x-4y=t$, $\frac{dy}{dt}+x+3z=e^t$, $\frac{dz}{dt}+2y+3z=0$. $\quad$ 40) $\frac{d^2y}{dt^2}+2y-z=0$, $\frac{dy}{dt}+\frac{dz}{dt}+x=0$, $\frac{dy}{dt}+\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{dx}{dt}=1$.

41) Wykazać, że rozwiązanie układu równań: $\frac{d^2x}{dt^2}-3x-y+3=0$, $\frac{d^2y}{dt^2}+x-8y+5=0$ przedstawi się w postaci:

$$x=\frac{1}{7}+4c_1e^{2t}+4c_2e^{-2t}-c_3e^{t\sqrt{7}}-c_4e^{-t\sqrt{7}}, \quad y=\frac{9}{14}+c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}-c_3e^{t\sqrt{7}}-c_4e^{-t\sqrt{7}}.$$

42) Wykazać, że rozwiązanie ogólne układu: $\frac{d^2x}{dt^2}-ay-bx=c$, $\frac{d^2y}{dt^2}-a'y-b'x=c'$, może być przedstawione w postaci:

$$x=\frac{ac'-ca'}{a'b-ab'}+C_1\cos\alpha x+C_2\sin\alpha x+C_3\cos\beta x+C_4\sin\beta x,$$

$$y=\frac{b'c-bc'}{a'b-ab'}-\frac{\alpha^2+b}{a}[C_1\cos\alpha x+C_2\sin\alpha x]-\frac{\beta^2+b}{a}[C_3\cos\beta x+C_4\sin\beta x],$$

gdzie α^2 i β^2 są pierwiastkami równania: $\lambda^2+(a'+b)\lambda+ab'-a'b=0$.

43) Wykazać, że skoro:

$$\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}-2\frac{dy}{dt}+x=\cos 2t, \quad \frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dx}+\frac{dx}{dt}+6y+5x=\sin t,$$

otrzymamy:

$$x=\cos 2t-2\sin 2t-\cos t+C_1\cos t\sqrt{2}+C_2\sin t\sqrt{2}+C_3\cos t\sqrt{3}+C_4\sin t\sqrt{3}.$$

44) **Wykazać, że ogólne rozwiązanie układu dwu równań różniczkowych:**

$$\frac{dx}{dt}+5x+y=e^t, \quad \frac{dy}{dt}+3y-x=e^{2t},$$

można określić równaniami:

$$x=\frac{4}{25}e^t-\frac{1}{36}e^{2t}+(C_1t+C_2)e^{-4t}, \qquad y=\frac{1}{25}e^t+\frac{7}{36}e^{2t}-(C_1t+C_2+C_1)e^{-4t}.$$

45) Wykazać, że na podstawie układu równań różniczkowych:

$$\frac{dx}{dt}+by+cz=0, \quad \frac{dy}{dt}+a'x+c'z=0, \quad \frac{dz}{dt}+a''x+b''y=0,$$

otrzymamy: $x=C_1e^{\lambda_1 t}+C_1e^{\lambda_2 t}+C_3e^{\lambda_3 t}$, gdzie λ_1, λ_2, λ_3 są pierwiastkami równania:

$$\lambda^3-(a'b+a''c+b''c')\lambda+a'b''c+a''bc'=0.$$

46) Znaleźć całkę ogólną równania różniczkowego zwyczajnego:

$$x\,dx+y\,dy+c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dz=0,$$

pod warunkiem, że: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

47) Wyznaczyć powierzchnie, których przekroje z powierzchnią obrotową: $x^2+y^2=\varphi(z)$ czynią zadość równaniu różniczkowemu:

$$[x(x-a)+y(y-b)]\,dz-(z-c)(x\,dx+y\,dy)=0.$$

48) Jakie równanie należy złączyć z równaniem: $y+z\log x+\varphi(z)=0$, aby stało się zadość równaniu różniczkowemu: $z\,dx+x\,dy+y\,dz=0$.

49) Na powierzchni paraboloidy obrotowej: $x^2+y^2=k^2z^2$ wykreślić tak linię krzywą, aby jej styczne spotykały koło określone równaniami: $x^2+y^2=a^2$, $z=b$.

50) Wyznaczyć trajektorye ortogonalne układu prostych paraboloidy hiperbolicznej: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$.

51) Wyznaczyć krzywe asymptotyczne na paraboloidzie hiperbolicznej: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$.

52) Wyznaczyć linie krzywiznowe powierzchni: $e^{-z}=\cos x\cos y$.

53) Pośród powierzchni konoidalnych o równaniu: $z=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ wyznaczyć takie, w których główne promienie krzywizny byłyby w każdym punkcie bezwzględnie równe, ale miały znaki przeciwne.

54) Znaleźć trajektorye ortogonalne prostych tworzących na paraboloidzie hiperbolicznej: $xy=az$.

55) Wyprowadzić równania krzywych asymptotycznych na powierzchni śrubowej: $z=a\,.\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}$.

56) Wyprowadzić równanie różniczkowe linij krzywiznowych na paraboloidzie: $z=ax^2+by^2$.

57) Wykazać, że wyznaczanie krzywych płaskich, określonych równaniem różniczkowem: $F(x, y, y')=0$, odpowiada wyznaczaniu krzywych na powierzchni: $F(x, y, z)=0$, czyniących zadość zwyczajnemu równaniu różniczkowemu o trzech zmiennych, kształtu: $dy-z\,dx=0$ i wyprowadzić stąd odnośne wnioski.

58) Wykazać, że równanie: $H(x, y)=0$ otrzymane po wyrugowaniu pochodnej y', z równań:

$$F(x, y, y')=0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'=0,$$

przedstawia miejsce geometryczne punktów przegięcia krzywych całkowych odpowiadających danemu równaniu różniczkowemu: $F(x, y, y')=0$.

59) Każdemu punktowi $M(x, y, z)$ przestrzeni niech odpowiada pewna płaszczyzna E przez niego przechodząca o równaniu: $A(X-x)+B(Y-y)-(Z-z)=0$, gdzie A i B są znanemi funkcyami zmiennych x, y, z. Znaleźć takie powierzchnie, aby płaszczyzna E była styczną w tym punkcie powierzchni.

60) Wykazać, że całką ogólną zupełnego równania różniczkowego:

$$dz=\frac{1+yz}{1+xy}dx+\frac{x(z-x)}{1+xy}dy,$$

jest $z=x+C(1+xy)$.

61) Wykazać, że całkowanie zupełnego równania różniczkowego:

$$(y^2+yz+z^2)dx+(z^2+xz+x^2)dy+(x^2+xy+y^2)dz=0$$

sprowadza się do całkowania układu równań różniczkowych: $\frac{dx}{z-y}=\frac{dy}{x-z}=\frac{dz}{y-x}$ i daje całkę ogólną kształtu: $xy+yz+zx=C(x+y+z)$.

62) Zbadać ruch punktu na płaszczyźnie, określony równaniami:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}y,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}y,$$

pod założeniem, że gdy: $t=0$ jest $x=0$, $y=0$, $\frac{dx}{dt}=0$, $\frac{dy}{dt}=1$.

63) Zbadać podobnie ruch określony równaniami: $\frac{d^2x}{dt^2}=0$, $\frac{d^2y}{dt^2}=g$, pod założeniem, że gdy: $t=0$, jest $x=0$, $y=0$, $\frac{dx}{dt}=v$, $\frac{dy}{dt}=0$.

64) Podobnie zbadać: $\frac{d^2x}{dt^2}=0$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-g$, pod założeniem, że gdy $t=0$, jest $x=0$, $y=0$, $\frac{dx}{dt}=v\cos\alpha$, $\frac{dy}{dt}=v\sin\alpha$.

65) $\frac{d^2x}{dt^2}=-m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-g-m\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}$, pod założeniem, że dla $t=0$, jest $x=0$, $y=0$, $\frac{dx}{dt}=u$, $\frac{dy}{dx}=\operatorname{tang}\alpha$.

Rozwiązania LX. 1) $\frac{xy}{a-z}=C$. 2) $xy+yz+xz=C$. 3) $\frac{ax-by}{z}=C$. 4) $(x+y)^2(y+z)=C$. 5) $\frac{ay-bz}{cz-ax}=C$. 6) $xy+xz+yz=C(x+y+z)$. 12) $z=a\int f(x)dx+bf(x)+C$. 16) $xy+yz+zu+ux=C$. 17) $xyzu=C$. 18) $x^2+xy^2+x^2z-u=C$. 19) $\frac{y+z}{u-x}=\frac{z}{u+C}$. 29) $x=ce^{-\frac{7t}{2}}-\frac{y}{8}$, $y=(ct+c_1)e^{-\frac{7t}{2}}$. 30) $x=\frac{4}{25}e^t-\frac{1}{36}e^{2t}+(c+c_1t)e^{-4t}$, $y=\frac{1}{25}e^t+\frac{7}{36}e^{2t}-(c+c_1+c_1t)e^{-4t}$. 38) $C_1(y-z)=C_2(y+2z)^{\frac{1}{7}}=e^{-x}$. 39) $x=C_1e^{-t}+C_2e^{-4t}+\frac{8}{5}e^t-\frac{8}{4}t^2+\frac{21}{8}t-\frac{93}{32}-C_3$. 49) $x^2+y^2+2(b-z)\left(x\frac{dx}{dz}+y\frac{dy}{dx}\right)+(b-z)^2\left[\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]=a^2$, $x^2+y^2=k^2z^2$. 50) $\pm\frac{b}{a}\frac{dy}{dx}+\frac{2}{a^2b}(bx+ay)\frac{dz}{dx}=0$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$. 51) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$, $(y-C)^2-\frac{b^2}{a^2}x^2=0$. 52) $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+y\right)=C\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\pm x\right)$. 53) Powierzchnie śrubowe wichrowate. 54) $y^2+z^2=C^2$. 55) $(y-Cx)(x^2+y^2-C)=0$, $z=a\,.\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}$. 56) $\frac{b}{a}xy\,.\,y'^2+\left(x^2-\frac{b}{a}y^2+\frac{b-a}{4a^2b}\right)y'-xy=0$. 59) Całkowanie równania różniczkowego: $dz=A\,dx+B\,dy$. 62) $x-y=-\frac{1}{2}\sin 2t$, $x+y=\sin t$, krzywa czwartego rzędu. 63) $y=\frac{g}{2v^2}x^2$. 64) $y=x\operatorname{tang}\alpha-\frac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha}$. 65) $y=\left(\operatorname{tang}\alpha+\frac{g}{2mu^2}\right)x-\frac{g}{4m^2u^2}(e^{-2mx}-1)$.

Literatura. E. Goursat: Cours d'analyse mathématique. Tome II. Paris 1905. F. Tisserand: Recueil complémentaire d'exercices sur le calcul infinitesimal. Deuxiéme édition par P. Painlevé. Paris 1896. Giulio Tomaselli: Esercizii sulle equazioni diffenrenziali. Milano 1883.

Tematy do rozprawek naukowych.

1. Teorya całkowalności równań różniczkowych zwyczajnych o ilukolwiek zmiennych.
2. Układ n równań jednoczesnych rzędu pierwszego.
3. Równania różniczkowe ruchu, czyli t. zw. równania dynamiczne.

Wykład LXI.

Równania różniczkowe cząstkowe.

1. Całki równań różniczkowych cząstkowych rzędu pierwszego. Równaniem różniczkowem cząstkowem rzędu pierwszego jest równanie kształtu:

$$F\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)=0, \text{ czyli: } F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0.$$

w którem: $\frac{\partial z}{\partial x}=p,\ \frac{\partial z}{\partial y}=q.$

Przyjmijmy, że dany jest związek pierwotny między zmiennemi x, y, z, kształtu:

$$f(x,\ y,\ z,\ a,\ b)=0, \tag{1}$$

gdzie a i b są dwie stałe dowolne.

Aby otrzymać z tego równania pochodne cząstkowe p i q, mamy wskutek różniczkowania częściowego ze względu na x i y równania:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q=0 \tag{2}$$

Z trzech równań (1) i (2) możemy wyrugować stałe dowolne a i b, a otrzymamy cząstkowe równanie różniczkowe kształtu:

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0, \tag{3}$$

odpowiadające danemu równaniu pierwotnemu.

Nawzajem jest dane równanie (1) rozwiązaniem cząstkowego równania różniczkowego (3) i to rozwiązanie zawiera dwie stałe dowolne i więcej ich zawierać nie może.

Nazywamy całką zupełną danego równania różniczkowego pierwszego rzędu, związek między zmiennemi, dogadzający równaniu różniczkowemu i zawierający tyle stałych dowolnych, ile jest zmiennych niezależnych.

Pod tymi warunkami jest tedy $f(x,\ y,\ z,\ a,\ b)=0$ całką zupełną równania różniczkowego $F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0$.

Przyjmijmy teraz, że wielkości a i b równania pierwotnego $f(x, y, z, a\ b)=0$ nie są stałymi, ale funkcyami zmiennych niezależnych x, y. W tym razie otrzymamy na oznaczenie pochodnych p i q równania:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p+\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q+\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y}=0. \tag{4}$$

Równania te dostarczą przy zmiennych a i b takich samych form dla pochodnych cząstkowych p i q, jakie wynikają z równań (2), skoro się spełnią relacye:

$$\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y}=0. \tag{5}$$

Niech przedstawia R wartość wyznacznika:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x}, & \frac{\partial b}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial y}, & \frac{\partial b}{\partial y} \end{vmatrix}=\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial y}-\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial x},$$

wtedy można zastąpić równania (5) równaniami im równoważnymi:

$$R\frac{\partial f}{\partial a}=0,\quad R\frac{\partial f}{\partial b}=0. \tag{6}$$

Równaniom tym stanie się dla $R \gtrless 0$ zadość, skoro będzie: $\frac{\partial f}{\partial a}=0$, $\frac{\partial f}{\partial b}=0$ i to są dwa równania, które określają a i b, jako funkcye zmiennych x, y, które podstawione w (1) dają równanie bez stałych dowolnych, będące również rozwiązaniem danego równania różniczkowego.

Takie rozwiązanie nazywamy całką osobliwą cząstkowego równania różniczkowego; jest ono związkiem między zmiennemi, które nie zawiera żadnej stałej dowolnej i nie wypływa z całki zupełnej przez nadanie stałym dowolnym szczególnych wartości, a więc nie jest szczególnym przypadkiem całki zupełnej. Przy pomocy całki zupełnej $f(x, y, z, a, b)=0$ określoną jest całka osobliwa równaniami:

$$f(x, y, z, a, b)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial a}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial b}=0. \tag{7}$$

Równaniom (5), a zatem i (6) staje się także zadość, skoro będzie:

$$R=0,\ \text{czyli:}\ \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x}, & \frac{\partial b}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial y}, & \frac{\partial b}{\partial y} \end{vmatrix}=\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial y}-\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial x}=0. \tag{8}$$

Odrzuciwszy przypadki, w których a i b są stałe, zauważymy, że równaniu (8) staje się zadość, skoro funkcye a i b będą od siebie w jakikolwiekbądź sposób zależne, czyli skoro będzie $b=\varphi(a)$, gdzie φ jest funkcyą dowolną.

Z równań (5) otrzymamy prócz tego, pomnożywszy pierwsze przez dx, drugie przez dy i dodawszy do siebie ich iloczyny, następujące równanie:

$$\frac{\partial f}{\partial a}\left(\frac{\partial a}{\partial x}dx+\frac{\partial a}{\partial y}dy\right)+\frac{\partial f}{\partial b}\left(\frac{\partial b}{\partial x}dx+\frac{\partial b}{\partial y}dy\right)=0,$$

czyli:

$$\frac{\partial f}{\partial a}da+\frac{\partial f}{\partial b}db=0.$$

Tym sposobem możemy równania (5) zastąpić równaniami:

$$b=\varphi(a)\ \text{i}\ \frac{\partial f}{\partial a}da+\frac{\partial f}{\partial b}db=0,$$

czyli:

$$b=\varphi(a),\quad \frac{\partial f[x, y, z, a, \varphi(a)]}{\partial a}=0.$$

Te równania wystarczają do oznaczenia wielkości a i b, jako funkcyj zmiennych niezależnych x i y, a tak otrzymane wartości będą zawierały dowolną funkcyę φ. Wstawiwszy te wartości w równanie $f(x, y, z, a, b)=0$, otrzymamy nowe rozwiązanie różne od obu poprzedzających.

Takie rozwiązanie nazywa się całką ogólną. Jest ono związkiem między zmiennymi, który zawiera w swym składzie jeszcze dowolną funkcyę zmiennych niezależnych, a określone jest przy pomocy całki zupełnej $f(x, y, z, a, b)=0$ równaniami:

$$f[x, y, z, a, \varphi(a)]=0, \quad \frac{\partial f[x, y, z, a, \varphi(a)]}{\partial a}=0. \tag{9}$$

Istnieją zatem trzy w zasadzie różne rodzaje rozwiązań cząstkowych równań różniczkowych, jako to: 1) całka zupełna, 2) całka osobliwa, 3) całka ogólna.

2. Twierdzenie. Wszelkie rozwiązanie cząstkowego równania różniczkowego zawarte jest w jednem z trzech rodzajów rozwiązań, t. z. jest albo całką zupełną, lub jej szczególnym kształtem, albo całką osobliwą, albo całką ogólną, lub jej kształtem szczególnym.

Niech będzie bowiem $z=\psi(x, y)$ rozwiązaniem równania różniczkowego:

$$F(x, y, z, p, q)=0,$$

którego zupełna całka ma kształt $z=f(x, y, a, b)=0$, wówczas sprawdzić się muszą równocześnie dwa równania, jako to:

$$F\left(x, y, \psi, \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=0, \quad F\left(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)=0,$$

z których widoczna, że skoro stałe a i b tak wyznaczymy, żeby się stało którymkolwiek dwom równaniom z układu: $f=\psi$, $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial y}$ zadość, także trzeciemu stanie się zadość.

Przyjmijmy, żeśmy a i b wyznaczyli tak, że będzie:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial y},$$

wówczas muszą z powodu, że w tych warunkach jest także $f=\psi$, spełniać się także warunki:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial y},$$

przeto muszą także wartości otrzymane na a i b dogadzać warunkom:

$$\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y}=0.$$

A to są właśnie warunki, na podstawie których z całki zupełnej inne rozwiązania się otrzymuje. Możemy zatem związek między daną całką a całką zupełną wyszukać w sposób następujący:

Najpierw wyznaczamy wartości na a i b tak, aby się stało zadość równaniom:

$$f=\psi, \quad \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial y}.$$

Jeżeli wartości w ten sposób otrzymane są stałe, wtedy jest dane rozwiązanie szczególnym przypadkiem całki zupełnej; jeżeli zaś te wartości są

zmienne, jednakże od siebie zależne tak, że jedna jest funkcyą drugiej, wtedy jest dane rozwiązanie szczególnym przypadkiem całki ogólnej, jeżeli wreszcie wartości na a i b są zmienne i od siebie niezależne, wtedy jest dane rozwiązanie całką osobliwą.

3. Przykład. Z równania $z=(x+a)(y+b)$, gdzie a i b są stałemi dowolnemi, otrzymujemy równanie różniczkowe $z=pq$, dla którego jest tedy: $z=(x+a)(y+b)$ całką zupełną. Równanie: $z=\frac{(x+y)^2}{4}$ odpowiada także równaniu różniczkowemu: $z=pq$, jakiego rodzaju jest to rozwiązanie? Mamy tu: $(x+a)(y+b)=\frac{(x+y)^2}{4}$, $p=y+b=\frac{x+y}{2}$, $q=x+a=\frac{x+y}{2}$, te trzy równania są od siebie zależne i dają: $a=\frac{y-x}{2}$, $b=\frac{x-y}{2}$, skąd wypływa, że $b=-a$. Wartości na a i b są więc zmienne i od siebie zależne. Dane rozwiązanie: $z=\frac{(x+y)^2}{4}$ jest zatem szczególnym przypadkiem całki ogólnej:

$$z=(x+a)[y+\varphi(a)];\quad 0=(x+a).\varphi'(a)+[y+\varphi(a)],\ \text{gdzie}\ \varphi(a)=-a.$$

4. Geometryczne znaczenie całek danego równania różniczkowego cząstkowego rzędu pierwszego. Jeżeli mamy tylko dwie zmienne niezależne a jedną zmienną zależną, wtedy możemy owe trzy zmienne uważać jako spółrzędne punktu w przestrzeni. Całka zupełna kształtu $f(x, y, z, a, b)=0$, przedstawia tedy z powodu dwóch stałych dowolnych a i b podwójnie-nieskończony układ powierzchni, których płaszczyzny styczne posiadają własność danem równaniem różniczkowem określoną.

Całka ogólna otrzymuje się z całki zupełnej na podstawie równań:

$$f(x,\ y,\ z,\ a,\ b)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial b}.\varphi'(a)=0,\quad b=\varphi(a).$$

Równania te wypowiadają, że z podwójnie nieskończonego układu powierzchni należy wybrać pewien pojedyńczo-nieskończony układ, tworzący pewien rodzaj powierzchni, zaznaczony warunkiem: $b=\varphi(a)$. Powierzchnie tak obrane przecinają się kolejno w liniach krzywych, określonych powyższemi równaniami. Każdej wartości parametru a odpowiada pewna linia krzywa, położona na powierzchni odpowiadającej parametrowi a. Po wyrugowaniu parametru a, otrzymamy równanie od a niezależne, przedstawiające powierzchnię obwijającą przyjęty układ powierzchni.

Powierzchnia obwijająca dotyka się każdej powierzchni układu, w krzywej przedstawionej powyższemi równaniami, zwanej charakterystyką albo krzywą charakterystyczną powierzchni obwijającej. Całka ogólna przedstawia zatem powierzchnię obwijającą przyjęty układ powierzchni, utworzoną przez swe linie charakterystyczne.

Całka osobliwa otrzymuje się z całki zupełnej na podstawie równań:

$$f(x,\ y,\ z,\ a,\ b)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial a}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial b}=0,$$

przedstawia zatem powierzchnię obwijającą wszystkie całką zupełną określone powierzchnie. Ta powierzchnia obwijająca dotyka się każdej powierzchni układu w pewnym punkcie określonym powyższemi trzema równaniami i zowie się zwykle powierzchnią graniczną podwójnie-nieskończonego układu powierzchni całką zupełną przedstawionego.

5. Równanie cząstkowe liniowe rzędu pierwszego. Przyjmując trzy zmienne, z zależną, x i y niezależne, możemy równanie różniczkowe cząstkowe liniowe rzędu pierwszego przedstawić w postaci:

$$P\frac{\partial z}{\partial x}+Q\frac{\partial z}{\partial y}=R, \tag{10}$$

gdzie P, Q, R są funkcyami zmiennych x, y, z, albo liczbami stałemi.

Oznaczając dla skrócenia $\frac{\partial z}{\partial x}=p$, $\frac{\partial z}{\partial y}=q$, przedstawimy powyższe równanie w formie:

$$Pp+Qq=R. \tag{10'}$$

Twierdzenie. Pierwotne równanie kształtu $u=\varphi(v)$, gdzie u i v są danemi funkcyami zmiennych x, y, z, a φ funkcyą dowolną prowadzi zawsze do równania różniczkowego cząstkowego kształtu:

$$Pp+Qq=R,$$

gdzie P, Q, R są funkcyami zmiennych x, y, z.

Różniczkując bowiem równanie pierwotne kolejno ze względu na x i y, otrzymamy:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p=\varphi'(v)\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}p\right), \quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q=\varphi'(v)\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}q\right),$$

skąd po wyrugowaniu $\varphi'(v)$ dostajemy:

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q}{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p}=\frac{\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}q}{\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}p},$$

przeto:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}\right)p+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}\right)q=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}, \text{ czyli: } Pp+Qq=R.$$

Do tego samego równania różniczkowego możemy dojść jeszcze następującą drugą:

Różniczkując równanie $u=\varphi(v)$ ze względu na wszystkie zmienne otrzymamy:

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=\varphi'(v)\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz\right),$$

a że to równanie ma się ostać niezależnie od kształtu dowolnej funkcyi $\varphi(v)$, przeto otrzymamy stąd dwa równania:

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz=0,$$

z których wynika, że:

$$\frac{dx}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial y}, & \frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{\partial v}{\partial y}, & \frac{\partial v}{\partial z}\end{vmatrix}}=\frac{dy}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial z}, & \frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial z}, & \frac{\partial v}{\partial x}\end{vmatrix}}=\frac{dz}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}},$$

a że: $dz=pdx+qdy$, przeto otrzymamy cząstkowe równanie różniczkowe, kształtu:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial y}, & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial y}, & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} p + \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial z}, & \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z}, & \frac{\partial v}{\partial x} \end{vmatrix} q = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

czyli:
$$Pp+Qq=R.$$

6. Z równania pierwotnego: $u=\varphi(v)$ możemy zatem otrzymać równanie różniczkowe cząstkowe w sposób następujący:

Tworząc równania: $u=a$, $v=b$, gdzie a i b są stałe dowolne, różniczkujemy oba równania ze względu na wszystkie zmienne i wyznaczamy stąd stosunki różniczek zupełnych dx, dy, dz w formie: $\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$, tedy będzie: $Pp+Qq=R$ szukanem równaniem różniczkowem.

Z powyższych wywodów wynika następujące postępowanie odwrotne: *Ażeby wyznaczyć całkę cząstkowego równania różniczkowego liniowego: $Pp+Qq=R$, utwórzmy układ pomocniczy zwyczajnych równań różniczkowych: $\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$ i wyszukajmy dwie od siebie niezależne całki: $u=a$, $v=b$, wtedy będzie: $u=\varphi(v)$, gdzie φ jest funkcyą dowolną, całką danego liniowego równania cząstkowego różniczkowego.*

Rozwiązanie: $u=\varphi(v)$ jest całką ogólną danego liniowego równania różniczkowego, obejmującą w sobie wszelkie możliwe rozwiązania.

Skoro bowiem równanie: $\psi(x, y, z)=0$ byłoby rozwiązaniem równania różniczkowego: $Pp+Qq=R$, podczas gdy $u=\varphi(v)$ jest całką powyższą metodą znalezioną, wtedy musiałyby równocześnie spełniać się równania:

$$P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}+R\frac{\partial u}{\partial z}=0,\quad P\frac{\partial v}{\partial x}+Q\frac{\partial v}{\partial y}+R\frac{\partial v}{\partial z}=0,\quad P\frac{\partial \psi}{\partial x}+Q\frac{\partial \psi}{\partial y}+R\frac{\partial \psi}{\partial z}=0,$$

co możliwe tylko wtedy, skoro będzie wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x}, & \frac{\partial \psi}{\partial y}, & \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y}, & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial y}, & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix}=0,$$

zatem $\psi=F(u, v)$, czyli rozwiązanie $\psi(x, y, z)=0$ jest zawarte w rozwiązaniu $F(u, v)=0$, zatem w rozwiązaniu $u=\varphi(v)$. Rozwiązanie $F(u, v)=0$ lub $u=\varphi(v)$, gdzie F lub φ są dowolnymi funkcyami, jest zatem rozwiązaniem najogólniejszem liniowego równania różniczkowego cząstkowego, czyli jego całką ogólną.

7. Przykłady. 1) $xp+yq=nz$. Otrzymujemy tu układ zwyczajnych równań różniczkowych: $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{nz}$, którego dwiema całkami są: $\frac{y}{x}=a$, $\frac{z}{x^n}=b$, zatem będzie: $\frac{z}{x^n}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ szukaną całką ogólną danego równania różniczkowego.

2) $(mz-ny)p+(nx-lz)q=ly-mx$. Jako równania pomocnicze, mamy tu:

$$\frac{dx}{mz-ny}=\frac{dy}{nx-lz}=\frac{dz}{ly-mx}=\frac{l\,dx+m\,dy+n\,dz}{0}=\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{0},$$

z których wypadają następujące:

$$l\,dx+m\,dy+n\,dz=0,\quad x\,dx+y\,dy+z\,dz=0,$$

zatem dwie całki szczególne: $lx+my+nz=a$, $x^2+y^2+z^2=b$, całką ogólną będzie zatem:

$$lx+my+nz=\varphi(x^2+y^2+z^2).$$

3) $(y^3x-2x^4)\frac{\partial u}{\partial x}+(2y^4-x^3y)\frac{\partial u}{\partial y}=9(x^3-y^3)u$. Równania pomocnicze:

$$\frac{dx}{y^3x-2x^4}=\frac{dy}{2y^4-x^3y}=\frac{du}{9(x^3-y^3)u},$$

skąd mamy najpierw równanie:

$$(x^3y-2y^4)dx+(y^3x-2x^4)dy=0,$$

którego całką zupełną jest: $\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}=a$, potem drugie równanie różniczkowe w formie:

$$3\left(\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}\right)+\frac{du}{u}=0,$$

którego całką zupełną jest: $x^3y^3u=b$, zatem całką ogólną danego równania różniczkowego cząstkowego będzie: $x^3y^3u=\varphi\left(\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}\right)$.

8. Równania różniczkowe cząstkowe o ilukolwiek zmiennych. Są to równania kształtu:

$$P_1p_1+P_2p_2+...+P_np_n=R,$$

gdzie: $p_1=\frac{\partial z}{\partial x_1}$, $p_2=\frac{\partial z}{\partial x_2}$, ..., $p_n=\frac{\partial z}{\partial x_n}$, a $P_1, P_2, ..., P_n$, R są funkcyami zmiennych $x_1, x_2, ..., x_n, z$.
Mając rozwiązać to równanie, tworzymy układ równań:

$$\frac{dx_1}{P_1}=\frac{dx_2}{P_2}=...=\frac{dx_n}{P_n}=\frac{dz}{R}.$$

Przedstawiając całki tego układu, w formie: $u=a$, $v_1=b_1$, $v_2=b_2$, ..., $v_{n-1}=b_{n-1}$, otrzymujemy całkę ogólną danego równania cząstkowego w formie: $u=\varphi(v_1, v_2, ..., v_{n-1})$.

Mając np. dane równanie:

$$(y+z+t)\frac{\partial t}{\partial x}+(x+z+t)\frac{\partial t}{\partial y}+(x+y+t)\frac{\partial t}{\partial z}=x+y+z.$$

tworzymy układ pomocniczy równań:

$$\frac{dx}{y+z+t}=\frac{dy}{z+x+t}=\frac{dz}{x+y+t}=\frac{dt}{x+y+z},$$

z którego otrzymamy:

$$\frac{dt-dx}{x-t}=\frac{dt-dy}{y-t}=\frac{dt-dz}{z-t}=\frac{dx+dy+dz+dt}{3(x+y+z+t)}.$$

Układ całek przedstawi się zatem w formie:

$$(x-t)(x+y+z+t)^{1/3}=a,\quad (y-t)(x+y+z+t)^{1/3}=b,\quad (z-t)(x+y+z+t)^{1/3}=c,$$

przeto otrzymamy całkę ogólną danego równania cząstkowego w postaci:

$$\varphi[(x-t)S^{1/3},\ (y-t)S^{1/3},\ (z-t)S^{1/3}]=0,\text{ gdzie: } S=x+y+z+t.$$

9. Równania cząstkowe pierwszego rzędu nieliniowe. Istnienie funkcyi pierwotnej między x, y, z, czyniącej zadość równaniu: $f(x, y, z, p, q)=0$, polega na założeniu, że równanie: $dz=p\,dx+q\,dy$ czyni zadość warunkowi całkowalności:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right), \tag{11}$$

gdzie:
$$\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)=\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial z}q,\quad \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)=\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial z}p+\frac{\partial q}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial z}p\right). \tag{12}$$

Skoro wyznaczymy na tej podstawie p jako funkcyę z x, y, z, otrzymamy z danego równania q jako funkcyę z x, y, z, a wstawiwszy w równanie: $dz=p\,dx+q\,dy$ otrzymane wartości na p i q, otrzymamy po scałkowaniu szukaną funkcyę między x, y, z, dogadzającą danemu równaniu cząstkowemu.

Z warunku $\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)$ otrzymamy najpierw z uwzględnieniem wartości (12) równania:

$$-\frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial y}+\left(q-p\frac{\partial q}{\partial p}\right)\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial q}{\partial x}+p\frac{\partial q}{\partial z}. \tag{13}$$

Ponieważ q jest na podstawie danego równania znaną funkcyą x, y, z, p, przeto przedstawia się powyżej otrzymane równanie jako liniowe równanie cząstkowe rzędu pierwszego, w którem p jest zmienną zależną, a x, y, z zmienne niezależne. Możemy zatem utworzyć układ pomocniczy:

$$\frac{dx}{-\frac{\partial q}{\partial p}}=dy=\frac{dz}{q-p\frac{\partial q}{\partial p}}=\frac{dp}{\frac{\partial q}{\partial x}+p\frac{\partial q}{\partial z}}, \tag{14}$$

z którego można wyprowadzić wartość na p zawierającą pewną stałą dowolną, a potem z danego równania odpowiednią wartość na q.

Obie wartości wywołają tedy równanie całkowalne:

$$dz=p\,dx+q\,dy, \tag{15}$$

które po wykonaniu całkowania dostarczy równania między x, y, z i dwiema stałemi dowolnemi, a to równanie będzie zupełną całką danego równania cząstkowego. Takich całek zupełnych możemy wyprowadzić więcej jak jedną.

Praktyczna metoda wyszukania całki zupełnej równania: $f(x, y, z, p, q)=0$ zwana metodą Lagrange'a i Charpit'a, jest tedy następująca:

1) Wyrażamy najpierw q jako funkcyę x, y, z i p.

2) Tę wartość podstawiamy w równanie: $\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)$, z którego otrzymamy równanie cząstkowe liniowe, a stąd układ równań zwyczajnych, który dostarczy pewnej wartości na p zawierającej jedną stałą dowolną.

3) Otrzymaną wartość na p wraz z odpowiednią wartością na q wstawiamy tedy w równanie: $dz=p\,dx+q\,dy$, które jest zwyczajnem równaniem całkowalnem.

4) Scałkowawszy to ostatnie równanie, otrzymamy całkę zupełną danego równania cząstkowego nieliniowego.

Przykład. Wyszukać całkę zupełną równania cząstkowego $z=pq$. Mamy tu:

$$q=\frac{z}{p},\quad \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)=\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial z}q,\quad \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)=\frac{p^2-z\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial z}p\right)}{p^2},$$

zatem: $\frac{z}{p^2}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial y}+\left(q+\frac{z}{p}\right)\frac{\partial p}{\partial z}=1$, czyli: $\frac{z}{p^2}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{2z}{p}\frac{\partial p}{\partial z}=1$,

skąd otrzymujemy układ pomocniczy: $\frac{p^2}{z}dx=dy=\frac{p}{2z}dz=dp$.

Z równania: $dp=dy$ otrzymamy tedy: $p=y+a$, zatem: $q=\frac{z}{y+a}$, przeto: $dz=(y+a)dx+\frac{z}{y+a}dy$, a stąd całkę zupełną: $z=(y+a)(x+b)$, gdzie a i b są stałe dowolne. Inną całkę zupełną otrzymamy przy pomocy równania: $\frac{p}{2z}dz=dp$, które daje: $p=c\,.\,z^{1/2}$, zatem: $q=\frac{1}{c}z^{1/2}$, przeto: $dz=c\,.\,z^{1/2}dx+\frac{1}{c}z^{1/2}dy$.

Scałkowawszy to równanie, znajdziemy:

$$2z^{1/2}=cx+\frac{1}{c}y+c',\quad\text{czyli: } z=\frac{\left(cx+\frac{1}{c}y+c'\right)^2}{4},$$

gdzie c i c' są dwie stałe dowolne, jako nową całkę zupełną równania cząstkowego: $z=pq$.

Z obu otrzymanych kształtów całki zupełnej, możemy znaleźć całki ogólne. Mianowicie otrzymamy z pierwszego kształtu całkę ogólną w formie:

$$z=(y+a)[x+\varphi(a)],\quad 0=x+\varphi(a)+(y+a)\varphi'(a),$$

skąd może być a wyrugowane, skoro kształt $\varphi(a)$ przyjęty, z drugiego zaś w formie:

$$z=\frac{1}{4}\left[cx+\frac{y}{c}+\psi(c)\right]^2,\quad 0=x-\frac{y}{c^2}+\psi'(c),$$

skąd może być stała c wyrugowaną skoro kształt $\psi(c)$ przyjęty.

Możemy także z obu powyższych całek zupełnych, wyprowadzić całkę osobliwą. Z pierwszej otrzymamy w tym celu:

$$z=(y+a)(x+b),\quad \frac{\partial z}{\partial a}=x+b=0,\quad \frac{\partial z}{\partial b}=y+a=0,$$

a stąd $b=-x$, $a=-y$, zatem $z=0$, jako całkę osobliwą.

Z drugiej postaci całki zupełnej otrzymamy:

$$z=\frac{1}{4}\left(cx+\frac{y}{c}+c'\right)^2,\quad \frac{\partial z}{\partial c}=\frac{1}{2}\left(x-\frac{y}{c^2}\right)\left(cx+\frac{y}{c}+c'\right)=0,\quad \frac{\partial z}{\partial c'}=\frac{1}{2}\left(cx+\frac{y}{c}+c'\right)=0,$$

stąd $c=0$, $c'=0$, zatem $z=0$ tę samą całkę osobliwą.

10. Przykłady zastosowań geometrycznych. 1) Wyprowadzić ogólne równanie powierzchni, w których długość normalnej zawarta między powierzchnią a płaszczyzną (x, y) jest stałą $k=1$.

Z równania normalnej: $\dfrac{X-x}{p}=\dfrac{Y-y}{q}=\dfrac{Z-z}{-1}$ otrzymamy na wyznaczenie jej kątów nachylenia równości:

$$\frac{\cos\alpha}{p}=\frac{\cos\beta}{q}=\frac{\cos\gamma}{-1}=\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}},$$

przeto długość żądaną normalnej równą: $\dfrac{z}{\cos\gamma}=-z\sqrt{p^2+q^2+1}$. Otrzymamy zatem równanie różniczkowe cząstkowe szukanych powierzchni w formie: $z^2(p^2+q^2+1)=1$. Stąd otrzymujemy: $q=(z^{-2}-1-p^2)^{1/2}$, przeto z warunku: $\left(\dfrac{\partial p}{\partial y}\right)=\left(\dfrac{\partial q}{\partial x}\right)$ układ równań pomocniczych:

$$\frac{dx}{p}=\frac{dy}{(z^{-2}-1-p^2)^{1/2}}=\frac{dz}{z^{-2}-1}=-\frac{z^3dp}{p}.$$

Z ostatnich dwóch stosunków znajdziemy:

$$p=\frac{c(1-z^2)^{1/2}}{z},\ \text{przeto:}\ q=(1-c^2)^{1/2}\frac{(1-z^2)^{1/2}}{z},\ \text{zatem:}\ dz=\frac{c(1-z^2)^{1/2}}{z}dx+(1-c^2)^{1/2}\frac{(1-z^2)^{1/2}}{z}dy,$$

a stąd całkę zupełną: $(1-z^2)^{1/2}=cx-(1-c^2)^{1/2}y+c'$, gdzie c i c' są stałe dowolne.

Całka ogólna przedstawi się stąd w formie dwóch równań:

$$(1-z^2)^{1/2}=cx-(1-c^2)^{1/2}y+\varphi(c),\quad 0=x+c(1-c^2)^{-1/2}y+\varphi'(c),$$

z których należy c wyrugować.

Inny układ rozwiązań otrzymamy z układu równań pomocniczych, tworząc stosunek: $\dfrac{dx+p\,dz+z\,dp}{p+pz^{-2}-p-pz^{-2}}$, z którego wyprowadzamy równanie różniczkowe: $dx+p\,dz+z\,dp=0$, którego całką będzie: $x+pz=a$. Mamy teraz scałkować równanie:

$$dz=\frac{a-x}{z}dx+\frac{[1-(a-x)^2-z^2]^{1/2}}{z}dy,$$

a otrzymamy całkę zupełną w postaci: $(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=1$.

Odpowiednia całka ogólna będzie określona równaniami:

$$(x-a)^2+[y-\varphi(a)]^2+z^2=1,\quad x-a+[y-\varphi(a)]\,.\,\varphi'(a)=0,$$

a całka osobliwa równaniem: $z^2=1$, czyli: $z=\pm 1$.

Z przykładu tego widzimy, jak ważną jest rzeczą wyprowadzić, jeżeli możebna stosowny kształt całki zupełnej, aby otrzymać należytą a prostą odpowiedź geometryczną, jaką np. w tym razie daje drugi układ rozwiązań. Całka zupełna przedstawia tu kulę o promieniu równym 1 i środku na płaszczyźnie (x, y); wyprowadzona z niej całka ogólna przedstawia powierzchnię kanałową, utworzoną przez dowolną kulę pod temi zastrzeżeniami. Całka osobliwa przedstawia dwie płaszczyzny równoległe do płaszczyzny (x, y) w odległości równej 1.

2) Wyznaczyć układ powierzchni, w których stosunek między elementem powierzchni a jego rzutem na płaszczyznę x, y jest stały (równy m).

Otrzymujemy tu równanie różniczkowe: $1+p^2+q^2=m^2$, którego całka zupełna: $z=ax+\sqrt{m^2-a^2-1}\,.\,y+b$ przedstawia podwójną nieskończoność płaszczyzn. Całka ogólna:

$$z=ax+\sqrt{m^2-a^2-1}\,.\,y+\varphi(a),\qquad 0=x-\frac{a}{\sqrt{m^2-a^2-1}}\,y+\varphi'(a)$$

przedstawia rozmaite układy stożków i innych powierzchni rozwijalnych.

11. Bezpośrednie wyprowadzenie całki osobliwej z danego równania różniczkowego. Równanie pierwotne wyraża z za pośrednictwem zmiennych x, y i stałych dowolnych a i b. Równanie różniczkowe wyraża z za pośrednictwem zmiennych x, y i pochodnych cząstkowych p, q. Jedno równanie da się przekształcić na drugie za pomocą dwóch równań, które wypływają z różniczkowania równania pierwotnego ze względu na x i y.

Na tej podstawie otrzymamy:

$$\frac{\partial z}{\partial p}=\frac{\frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial^2 z}{\partial b\partial y}-\frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial^2 z}{\partial a\partial y}}{\frac{\partial^2 z}{\partial a\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial b\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial a\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial b\partial x}},\qquad \frac{\partial z}{\partial q}=-\frac{\frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial^2 z}{\partial b\partial x}-\frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial^2 z}{\partial a\partial x}}{\frac{\partial^2 z}{\partial a\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial b\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial a\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial b\partial x}}. \tag{16}$$

Całka osobliwa wyprowadza się z całki zupełnej przy pomocy równań: $\frac{\partial z}{\partial a}=0$, $\frac{\partial z}{\partial b}=0$, w tym wypadku będzie jednakże podług poprzedzających wzorów: $\frac{\partial z}{\partial p}=0$, $\frac{\partial z}{\partial q}=0$, zatem:

Z równania różniczkowego: $z=f(x, y, p, q)$ znajduje się wprost jego całkę osobliwą, skoro wyrugujemy zeń p i q za pomocą równań:

$$\frac{\partial z}{\partial p}=0,\quad \frac{\partial z}{\partial q}=0. \tag{17}$$

Przykład: $z=(1+p^2+q^2)^{-1/2}$. Mamy tu:

$$\frac{\partial z}{\partial p}=-\frac{1}{2}(1+p^2+q^2)^{-3/2}.2p=0,\qquad \frac{\partial z}{\partial q}=-\frac{1}{2}(1+p^2+q^2)^{-3/2}.2q=0,$$

zatem dostajemy $p=0$, $q=0$. więc $z=\pm 1$, jako całkę osobliwą.

12. Całkowanie równań różniczkowych cząstkowych rzędu pierwszego nieliniowych o ilukolwiek zmiennych. Równania różniczkowe tego rodzaju mają kształt:

$$f(x_1,\ x_2, \ldots, x_n,\ z,\ p_1,\ p_2, \ldots, p_n)=0, \tag{18}$$

gdzie: $p_1=\frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, p_n=\frac{\partial z}{\partial x_n}$.

Przedewszystkiem musimy się starać wyznaczyć: $p_1, p_2, \ldots, p_n$ za pomocą zmiennych: $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$, tak, aby było całkowalnem równanie różniczkowe:

$$dz=p_1dx_1+p_2dx_2+\ldots+p_ndx_n. \tag{19}$$

Przypuśćmy, że razem z równaniem (18) istnieje równanie:

$$\varphi(x_1,\ x_2, \ldots, x_n,\ z,\ p_1,\ p_2, \ldots, p_n)=0, \tag{20}$$

wówczas, różniczkując równania (18) i (20) i podstawiając wartość otrzymaną na dz w równanie (19) otrzymamy dwa równania:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}+p_i\frac{\partial f}{\partial z}\right)dx_i+\frac{\partial f}{\partial p_i}dp_i=0, \tag{21}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}+p_i\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)dx_i+\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}dp_i=0, \tag{22}$$

Ale $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$, zatem:

$$dp_i = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_1} dx_1 + \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_n} dx_n. \tag{23}$$

Podstawiwszy tę wartość w (22) i zrównawszy spółczynniki przy niezależnych od siebie różniczkach: $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ do zera, otrzymamy n równań

kształtu: $$\frac{\partial \varphi}{\partial x_r} + p_r \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_r} = 0, \text{ gdzie: } r = 1, \ldots, n,$$

czyli: $$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_r} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_r} + p_r \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right),$$

jako też: $$\sum_{r=1}^{r=n} \frac{\partial \varphi}{\partial p_r} \frac{\partial^2 z}{\partial x_r \partial x_i} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right).$$

Porównawszy to równanie z (23) zauważymy, że różniczki dp_i i dx_r są związane temi samemi relacyami, co funkcye: $-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$ i $\frac{\partial \varphi}{\partial p_r}$, możemy zatem w (21) podstawić zamiast dp_i funkcyę: $-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$, a zamiast dx_i funkcyę: $\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}$, a otrzymamy równanie:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial z}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = 0, \tag{24}$$

które jest przy danej funkcyi f liniowem równaniem różniczkowem ze względu na nieznaną funkcyę φ. Z odpowiedniego układu pomocniczego zwyczajnych równań różniczkowych dość jest tedy oznaczyć $n-1$ całek:

$$\varphi_1 = a_1, \ \varphi_2 = a_2, \ldots, \varphi_{n-1} = a_{n-1}, \tag{25}$$

a te dozwolą w połączeniu z danem równaniem różniczkowem wyznaczyć $p_1, p_2, \ldots, p_n$ przez zmienne $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$.

Podstawiwszy wartości w ten sposób otrzymane w równanie:

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n,$$

otrzymamy zupełną całkę danego równania różniczkowego w postaci:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0. \tag{26}$$

Inne formy całek otrzymamy stąd, uważając parametry $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jako zmienne, podległe pewnym warunkom, nie naruszającym kształtów: $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

13. Całkowanie układu równań różniczkowych cząstkowych rzędu pierwszego. Weźmy pod uwagę układ równań różniczkowych cząstkowych rzędu pierwszego niezawierających zmiennej zależnej z wyraźnie, w postaci:

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{27}$$

gdzie: $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$.

Aby równania (27) miały wspólną całkę:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0, \text{ czyli: } z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

należy z równań (27) tak wyznaczyć pochodne p_i jako funkcye zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, aby było:

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k}=\frac{\partial p_k}{\partial x_i},\quad (i,\ k=1,\ 2,\ ..,\ n),$$

czyli, aby różniczka:

$$dz=p_1dx_1+p_2dx_2+...+p_ndx_n=\sum_{i=1}^{i=n}p_i\,dx_i \qquad (28)$$

była różniczką zupełną.

W tym przypadku znajdziemy zależną zmienną z, całkując równanie (28) jako równanie różniczkowe zupełne.

Ażeby ocenić, czy i kiedy takie rozwiązanie wspólne jest możliwe, weźmy pod uwagę dwa równania układu (27) np. $f_\lambda=0$, $f_\mu=0$. Różniczkując równanie $f_\lambda=0$ względem $x_i\,(i=1,\ 2,...,\ n)$, otrzymujemy n równań:

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i}+\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial f_\lambda}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial x_i}=0,$$

mnożąc te równania przez $\frac{\partial f_\mu}{\partial p_i}$ i sumując względem i, dostajemy:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i}\frac{\partial f_\mu}{\partial p_i}+\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=1}\frac{\partial f_\lambda}{\partial p_k}\frac{\partial f_\mu}{\partial p_i}\frac{\partial p_k}{\partial x_i}=0.$$

Postępując podobnie z równaniem: $f_\mu=0$, dostaniemy sumę:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial f_\mu}{\partial x_i}\frac{\partial f_\lambda}{\partial p_i}+\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial f_\lambda}{\partial p_k}\frac{\partial f_\mu}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial x_k}=0.$$

Odejmując tę sumę od poprzedzającej, dostajemy:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i}\frac{\partial f_\mu}{\partial p_i}-\frac{\partial f_\lambda}{\partial p_i}\frac{\partial f_\mu}{\partial x_i}\right)+\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial f_\lambda}{\partial p_k}\frac{\partial f_\mu}{\partial p_i}\left(\frac{\partial p_k}{\partial x_i}-\frac{\partial p_i}{\partial x_k}\right)=0.$$

Jeżeli $p_1,\ p_2,...,p_n$ są pochodnemi cząstkowemi tej samej funkcyi, wtedy: $\frac{\partial p_k}{\partial x_i}=\frac{\partial p_i}{\partial x_k}$, powyższe równanie sprowadzi się zatem do postaci równania:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i}\frac{\partial f_\mu}{\partial p_i}-\frac{\partial f_\lambda}{\partial p_i}\frac{\partial f_\mu}{\partial x_i}\right)=0, \qquad (29)$$

które nazywamy równaniem Poissona.

Stanowi ono warunek, pod którym równanie $f_\lambda=0$ i $f_\mu=0$ mają wspólną całkę. Nadając wskazówkom λ i μ wartości 1, 2,..., m, otrzymamy warunki, pod jakimi dany układ m równań różniczkowych może mieć wspólną całkę.

Ponieważ $p_1,...,p_n$ zawierają $n-m$ stałych dowolnych, więc całka równania:

$$dz=\sum_{i=1}^{i=n}p_i\,dx_i,$$

zawierać będzie $n-m+1$ stałych dowolnych i przedstawi się w postaci:

$$z=f(x_1,\ x_2,...,\ x_n,\ c_1,...,\ c_{n-m})+c_{n-m+1}, \qquad (30)$$

jako całka zupełna układu (27), z której zmieniając stałą c_i możemy otrzymać całki ogólne i osobliwe.

14. Równania różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu. Są to równania różniczkowe kształtu: $F(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t)=0,$ (31)

gdzie: $p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y},\ r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\ t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$

Znane są dotąd tylko szczególne przypadki, w których równanie cząstkowe drugiego rzędu da się ogólnie scałkować.

Najważniejszy przypadek jest ten, w którym pochodne drugiego rzędu r, s, t pojawiają się tylko w pierwszym stopniu, zatem równanie ma kształt:

$$Rr + Ss + Tt = V, \tag{32}$$

gdzie R, S, T, V są funkcyami x, y, z, p, q.

Metoda rozwiązania tego równania (metoda Monge'a) polega na wyszukaniu jednej lub dwu całek kształtu $u=f(v)$, gdzie u i v są oznaczonemi funkcyami x, y, z, p, q, a f przedstawia dowolny znak funkcyjny. Z takich dwóch pierwszych całek z osobna lub razem wziętych, otrzymuje się przez następne całkowanie drugą całkę, zawierającą dwie funkcye dowolne i będącą ogólnem rozwiązaniem danego równania różniczkowego drugiego rzędu.

Twierdzenie. Równanie różniczkowe pierwszego rzędu kształtu: $u=f(v)$ prowadzi do równania różniczkowego drugiego rzędu kształtu:

$$Rr + Ss + Tt = V,$$

skoro u i v związane są tożsamościowo warunkiem:

$$\frac{\partial u}{\partial p} \cdot \frac{\partial v}{\partial q} - \frac{\partial u}{\partial q} \cdot \frac{\partial v}{\partial p} = 0.$$

Gdyż różniczkując równanie $u=f(v)$ ze względu na x i y otrzymamy dwa równania:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z} + r\frac{\partial u}{\partial p} + s\frac{\partial u}{\partial q} = f'(v)\left(\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z} + r\frac{\partial v}{\partial p} + s\frac{\partial v}{\partial q}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z} + s\frac{\partial u}{\partial p} + t\frac{\partial u}{\partial q} = f'(v)\left(\frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z} + s\frac{\partial v}{\partial p} + t\frac{\partial v}{\partial q}\right),$$

z których po wyrugowaniu $f'(v)$ otrzymamy równanie kształtu:

$$Rr + Ss + Tt + U(rt - s^2) = V,$$

gdzie:

$$U = \frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial v}{\partial q} - \frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial v}{\partial p}.$$

Równanie to otrzymuje tylko wtedy kształt:

$$Rr + Ss + Tt = V,$$

skoro będzie:

$$\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial v}{\partial q} - \frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial v}{\partial p} = 0,$$

co było do udowodnienia.

15. Całkowanie równania: $Rr + Ss + Tt = V$. Metoda Monge'a. Przyjmijmy, że to równanie ma pierwszą całkę kształtu: $u=f(v)$.

Przekształciwszy dane równanie za pomocą równań:

$$dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy$$

i podstawiając wartości za r i t stąd otrzymane w dane równanie, otrzymamy równanie:

$$R\,dp\,dy + T\,dq\,dx - V\,dx\,dy = s(R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2),$$

któremu stanie się zadość, skoro będzie równocześnie:

$$R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2 = 0, \tag{33}$$

$$R\,dp\,dy + T\,dq\,dx - V\,dx\,dy = 0. \tag{34}$$

Pierwsze równanie rozkłada się na dwa następujące:

$$dy - \xi_1 dx = 0, \quad dy - \xi_2 dx = 0.$$

Z pierwszego z tych równań liniowych i równania:

$$R\,dp\,dy + T\,dq\,dx - V\,dx\,dy = 0$$

znajdziemy dwie całki: $u_1=a_1$, $v_1=b_1$, przeto: $u_1=f_1(v_1)$, gdzie f_1 przedstawia dowolną funkcyę, będzie pierwszą całką pośrednią. Podobnie otrzymamy z drugiego równania liniowego, w połączeniu z równaniem (34) drugą parę całek $u_2=a_2$, $v_2=b_2$, przeto $u_2=f_2(v_2)$ drugą całkę pośrednią.

Aby w końcu otrzymać szukaną całkę danego równania różniczkowego drugiego rzędu, musimy scałkować znowu każdą z otrzymanych dwóch całek pośrednich, które są równaniami różniczkowemi pierwszego rzędu, albo wyznaczywszy z nich p i q, wstawić otrzymane wartości w równanie:

$$dz=p\,dx+q\,dy. \tag{35}$$

Równanie to całkowane daje zupełną całkę danego równania różniczkowego.

16. Przykłady. 1) $r=a^2t$. Otrzymamy tu z powodu, że: $dp=r\,dx+s\,dy$, $dq=s\,dx+t\,dy$, równanie: $dp\,dy-a^2dx\,dq-s(dy^2-a^2dx^2)=0$, które dostarcza równań pomocniczych:

$$dy^2-a^2dx^2=0,\quad dp\,dy-a^2dx\,dq=0.$$

Pierwsze rozkłada się na dwa: $dy-a\,dx=0$ i $dy+a\,dx=0$, których całki są: $y-ax=A$, $y+ax=B$. Połączmy pierwszą z tych całek z drugiem równaniem pomocniczem, otrzymamy równanie: $dp-a\,dq=0$, które całkowane daje: $p-aq=A_1$, zatem pierwszą całkę pośrednią w postaci: $p-aq=\varphi_1(y-ax)$. Połączmy zaś w ten sposób: $y+ax=B$, otrzymamy: $dp+a\,dq=0$, zatem: $p+aq=B_1$, przeto drugą całkę pośrednią w formie: $p+aq=\varphi_2(y+ax)$. Uważając otrzymane dwie całki pośrednie jako równania jednoczesne, wyznaczmy z nich p i q i podstawmy otrzymane wartości w równanie: $dz=p\,dx+q\,dy$, a otrzymamy po stosownem przekształceniu:

$$dz=\frac{(dy+a\,dx)\,\varphi_2(y+ax)}{2a}-\frac{(dy-a\,dx)\,\varphi_1(y-ax)}{2a},$$

przeto całkę zupełną: $z=\varphi(y+ax)+\psi(y-ax)$, gdzie φ i ψ są dwiema dowolnemi funkcyami.

2) $(b+cq)^2r-2(b+cq)(a+cp)s+(a+cp)^2t=0$. Równania pomocnicze będą tu:

$$(b+cq)^2dy^2+2(b+cq)(a+cp)\,dx\,dy+(a+cp)^2dx^2=0,\quad (b+cq)^2dp\,dy+(a+cp)^2dq\,dx=0$$

Pierwsze daje: $(b+cq)dy+(a+cp)dx=0$, skąd ze względu, że: $dz=p\,dx+q\,dy$, otrzymamy: $a\,dx+b\,dy+c\,dz=0$, zatem całkę: $ax+by+cz=C_1$. Drugie równanie pomocnicze sprowadza się po wyrugowaniu stosunku $dy:dx$ do równania różniczkowego:

$$(b+cq)\,dp=(a+cp)\,dq,$$

którego całką jest: $(a+cp)=C_2(b+cq)$. Całką pośrednią danego równania różniczkowego będzie zatem równanie pierwszego rzędu:

$$a+cp=(b+cq)\,\varphi(ax+by+cz),$$

które należy scałkować znanym sposobem używanym przy równaniach liniowych.

W tym celu otrzymamy zwyczajne równania pomocnicze: $\frac{dx}{c}=\frac{dy}{-b\varphi}=\frac{dz}{b\varphi-a}$, z których wypada raz: $a\,dx+b\,dy+c\,dz=0$, zatem całka: $ax+by+cz=C$, drugi raz: $dy+dx\,\varphi(C)=0$, zatem druga całka: $y+x\,\varphi(C)=C'$.

Całka zupełna danego równania różniczkowego drugiego rzędu będzie zatem:

$$y+x\varphi(ax+by+cz)=\psi(ax+by+cz).$$

17. Całkowanie równań różniczkowych cząstkowych za pomocą szeregów potęgowych. Metoda całkowania za pomocą szeregów Taylor'a lub Maclaurina, stosowana przy równaniach różniczkowych zwyczajnych, może być niekiedy z korzyścią zastosowana także przy całkowaniu równań różniczkowych cząstkowych.

Niech będzie dane równanie różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego, kształtu:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}. \tag{36}$$

Rozwiązanie tego równania możemy przedstawić pod postacią szeregu potęgowego:

$$z = A_{00} + A_{01}\frac{x-x_0}{1!} + A_{10}\frac{y-y_0}{1!} + A_{20}\frac{(x-x_0)^2}{2!} + A_{11}\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{1!\,1!} + A_{02}\frac{(y-y_0)^2}{2!} + \dots$$

czyli:
$$z = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty}\sum_{\beta=0}^{\beta=\infty} A_{\alpha\beta}\frac{(x-x_0)^\alpha}{\alpha!}\frac{(y-y_0)^\beta}{\beta!}. \tag{37}$$

Połóżmy: $z^{(\alpha)} = \sum_{\beta=0}^{\beta=\infty} A_{\alpha\beta}\frac{(y-y_0)^\beta}{\beta!}$, natenczas otrzymamy rozwinięcie (37) pod postacią szeregu:
$$z = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} z^{(\alpha)}\frac{(x-x_0)^\alpha}{\alpha!}. \tag{38}$$

Szereg (38) ma uczynić zadość równaniu (36), wobec tego otrzymujemy celem wyznaczenia spółczynników $z^{(\alpha)}$ tegoż rozwinięcia równanie:

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=0}\frac{\partial z^{(\alpha)}}{\partial y}\frac{(x-x_0)^\alpha}{\alpha!} = a^2\sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} z^{(\alpha)}\frac{(x-x_0)^{\alpha-2}}{(\alpha-2)!},$$

z którego, porównywając ze sobą spółczynniki przy jednakowych potęgach dwumianu $x-x_0$, otrzymamy:
$$z^{(\alpha+2)} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial z^{(\alpha)}}{\partial y}\right) \tag{39}$$

Przyjmując więc zupełnie dowolnie spółczynniki $z^{(0)}$ i $z^{(1)}$ jako funkcye zmiennej y, a więc, zakładając, że dla $x=x_0$ jest: $z^{(0)} = \varphi(y)$ i $z^{(1)} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_1 = \psi(y)$, otrzymamy z (39):
$$z^{(2\alpha)} = \frac{\partial^{2\alpha} z}{\partial x^{2\alpha}} = \frac{1}{a^{2\alpha}}\frac{\partial^\alpha \varphi(y)}{\partial y^\alpha} = \frac{1}{a^{2\alpha}}\varphi^{(\alpha)}(y);$$
$$z^{(2\alpha+1)} = \frac{\partial^{2\alpha+1} z}{\partial x^{2\alpha+1}} = \frac{1}{a^{2\alpha}}\frac{\partial^\alpha \psi(y)}{\partial y^\alpha} = \frac{1}{a^{2\alpha}}\psi^{(\alpha)}(y).$$

Wstawiwszy te wartości w równanie (38) otrzymamy ogólne rozwiązanie danego równania różniczkowego cząstkowego w postaci:
$$z = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty}\frac{\varphi^{(\alpha)}(y)}{a^{2\alpha}}\frac{(x-x_0)^{2\alpha}}{(2\alpha)!} + \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty}\frac{\psi^{(\alpha)}(y)}{a^{2\alpha}}\frac{(x-x_0)^{2\alpha+1}}{(2\alpha+1)!}. \tag{40}$$

Funkcyę szukaną z możemy także przedstawić w postaci szeregu uporządkowanego według potęg dwumianu $(y-y_0)$.

Połóżmy w tym celu w (37):
$$z_\beta = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} A_{\alpha\beta}\frac{(x-x_0)^\alpha}{\alpha!},$$
natenczas rozwinięcie to przedstawi się w postaci szeregu:
$$z = \sum_{\beta=0}^{\beta=\infty} z_\beta\frac{(y-y_0)^\beta}{\beta!}, \tag{41}$$
gdzie na wyznaczenie spółczynników z_β otrzymujemy z równania (36) równanie warunkowe:
$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} z_\beta\frac{(y-y_0)^{\beta-1}}{(\beta-1)!} = a^2\sum_{\beta=0}^{\beta=\infty}\frac{\partial^2 z_\beta}{\partial x^2}\frac{(y-y_0)^\beta}{\beta!}.$$

Porównywając ze sobą spółczynniki przy jednakowych potęgach dwumianu $(y-y_0)$, otrzymujemy:
$$z_{\beta+1} = a^2\frac{\partial^2 z_\beta}{\partial x^2}. \tag{42}$$

Przyjmując więc z_0 jako zupełnie dowolną funkcyę zmiennej x, t. j. kładąc dla $y=y_0$ $z_0=\Phi(x)$, otrzymuje z (42):

$$z_\beta=a^{2\beta}\,\Phi^{(2\beta)}(x),$$

wskutek czego rozwinięcie (41) przedstawia się w postaci szeregu:

$$z=\sum_{\beta=0}^{\beta=\infty} a^{2\beta}\Phi^{(2\beta)}(x)\frac{(y-y_0)^\beta}{\beta!}, \tag{43}$$

który, o ile jest zbieżny, a to zależy od kształtu funkcyi $\Phi(x)$, przedstawia znowu całkę danego równania różniczkowego cząstkowego rzędu drugiego.

W podobny sposób możemy zawsze całkę jakiegokolwiek różniczkowego cząstkowego rozwinąć na szereg potęgowy, a cała trudność polega na okazaniu, że ten szereg w pewnym zakresie będzie zbieżny i że przeto danemu równaniu różniczkowemu cząstkowemu czyni zadość nie tylko formalnie, lecz także w rzeczywistości.

Ćwiczenia LXI.

1) Wykazać, że całkę ogólną równania różniczkowego cząstkowego: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x+z}$ możemy przedstawić w postaci: $2z-y\log(x+y+z)^2=F(y)$.

2) Znaleźć całkę zupełną równania różniczkowego cząstkowego kształtu:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=m\sqrt{x^2+y^2}.$$

3) Wyprowadzić równanie różniczkowe powierzchni, której normalne przecinają prostą w przestrzeni: $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$.

4) Wykazać, że całkę ogólną równania różniczkowego odpowiadającego zagadnieniu 3) możemy przedstawić w postaci: $F(lx+my+nz,\ x^2+y^2+z^2)=0$.

5) Utworzyć równanie różniczkowe cząstkowe mające całkę zupełną kształtu: $y^2(x^2-a)-(z+b)^2=0$ i znaleźć wszystkie całki tego równania.

6) Przedstawiając całkę zupełną równania różniczkowego cząstkowego:

$$z=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} \text{ w postaci: } z=\frac{1}{4}\left(ax+\frac{y}{a}+b\right)^2,$$

zbadać do jakiej kategoryi całek tego równania należy funkcya:

$$z=\frac{xy}{2}+\frac{x^2+y^2+(x^2-y^2)\sin\alpha}{4\cos\alpha}.$$

7) Znaleźć całkę zupełną równania różniczkowego cząstkowego: $z=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$ i zbadać rodzaj całki kształtu: $z=y\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

8) Wykazać, że całkę zupełną równania różniczkowego: $z=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$ możemy przedstawić w postaci: $z=ax+by+ab$ i wyznaczyć jego całkę osobliwą.

Rozwiązać następujące równania różniczkowe cząstkowe liniowe:

9) $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z.$ 10) $x^2\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}=-y^2.$ 11) $xz\frac{\partial z}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{\partial y}=xy.$

12) $(a-x)\frac{\partial z}{\partial x}+(b-y)\frac{\partial z}{\partial y}=c-z.$ 13) $\operatorname{tang} x.\frac{\partial z}{\partial x}+\operatorname{tang} y\frac{\partial z}{\partial y}=\operatorname{tang} z.$

14) $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x-a\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$ 15) $x_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial z}{\partial x_3}=nz.$

16) $x_2x_3\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_3x_1\frac{\partial z}{\partial x_2}+x_1x_2\frac{\partial z}{\partial x_3}=\frac{x_1x_2x_3}{z}.$

17) Wykazać, że równanie różniczkowe cząstkowe: $ap+bq=c$ ma całkę ogólną kształtu: $z=\frac{cy}{b}+\varphi(bx-ay)$.

18) Wykazać, że równaniu różniczkowemu: $\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+c\frac{\partial u}{\partial z}=xyz$ odpowiada całka ogólna: $u=\frac{1}{2}x^2yz-\frac{1}{6}x^3(bz+cy)+\frac{1}{12}bcx^4+\varphi(y-bx,\ z-cx)$.

Znaleźć całki ogólne następujących równań różniczkowych liniowych:

19) $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2}{y}$. 20) $\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{x+y}$ 21) $\frac{\partial z}{\partial x}+m\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{nx}{y}$. 22) $\frac{1}{x}p+\frac{1}{y}q=\frac{z}{y^2}$

23) $yp+xq=z$. 24) $\sec x\,.\,p+aq=z\operatorname{cotg} y$. 25) $x^2p+yq=\frac{x^3}{y}$. 26) $xp+yq=\frac{xy}{z}$.

Rozwiązać następujące równania różniczkowe cząstkowe rzędu pierwszego:

27) $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=a^2$. 28) $x^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+y^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=z$. 29) $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-a\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

30) $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+z^2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$

31) Wykazać, że zupełną całkę równania różniczkowego cząstkowego: $z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\frac{4}{9}$, można przedstawić w postaci: $(z+a^2)^3-(x+ay+b)^2=0$.

32) Znaleźć całkę ogólną równania różniczkowego liniowego: $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

33) Znaleźć całkę szczególną równania różniczkowego cząstkowego: $ap+bq=1$ pod założeniem, że: $x^2-y^2=1$.

34) Znaleźć całkę szczególną równania różniczkowego cząstkowego:

$$(x-a)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial z}{\partial y}=z-c,$$

pod założeniem, że: $x^2+y^2=1$ i podać jej znaczenie geometryczne.

35) Wykazać, że całkę zupełną równania różniczkowego cząstkowego kształtu:

$$p^2+q^2-2px-2qy+2xy=0,$$

możemy przedstawić w postaci:

$$z=\frac{x^2+ax+y^2+ay+b}{2}+\frac{(x-y)\sqrt{2(x-y)^2-a^2}}{4\sqrt{2}}-\frac{a^2\log\left[(x-y)\sqrt{2}+\sqrt{2(x-y)^2-a^2}\right]}{4\sqrt{2}}$$

36) Każdemu punktowi $M(x, y, z)$ przestrzeni odpowiada pewna prosta L o równaniach:

$$\frac{X-x}{P}=\frac{Y-y}{Q}=\frac{Z-z}{R},$$

gdzie P, Q, R są znanemi funkcyami zmiennych x, y, z. Wyznaczyć taką powierzchnię, aby płaszczyzna styczna do tej powierzchni w każdym z jej punktów przechodziła przez odpowiednią prostą L.

37) Znaleźć całkę ogólną równania różniczkowego: $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$ i wyprowadzić równanie stożka drugiego rzędu, który czyni zadość powyższemu równaniu i przechodzi przez punkt (1, 2, 3).

38) Znaleźć powierzchnię, która ma tę własność, że spółrzędne punktu, w którym normalna przecina płaszczyznę XOY, są proporcyonalne do odpowiednich spółrzędnych punktu powierzchni.

39) Znaleźć powierzchnię, która przecina pod kątem prostym wszystkie kule, przechodzące przez dany punkt, a mające środki na danej prostej przez ten punkt przechodzącej.

40) Znaleźć ogólne równanie powierzchni, które przecinają pod kątem prostym kulę określoną równaniem: $x^2+y^2+z^2-2az=0$, gdzie a jest parametrem zmiennym.

41) Wyznaczyć powierzchnie całkowe równania różniczkowego cząstkowego:

$$xy^2\frac{\partial z}{\partial x}+x^2y\frac{\partial z}{\partial y}=(x^2+y^2)z.$$

42) Wyznaczyć powierzchnie, przecinające pod stałym kątem wszystkie płaszczyzny przechodzące przez daną prostą.

Znaleźć całki ogólne następujących równań różniczkowych cząstkowych:

43) $\frac{\partial z}{\partial y}=z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$. 44) $xp+zq+y=0$. 45) $y^2p+xyq=nxz$. 46) $(x+y)p+(y-x)q=z$.

47) $(x-2y)p+(2x-3y)q=z$.

48) Wykazać, że całkę ogólną równania różniczkowego, kształtu:

$$\frac{x}{y}\frac{\partial v}{\partial x}+(1-y^2)\frac{\partial v}{\partial y}+(a-yz)\frac{\partial v}{\partial z}+(b-yu)\frac{\partial v}{\partial u}=\frac{v^2}{x^2},$$

edstawić można w postaci:

$$\frac{1}{v}-\frac{x}{x^2(1-y^2)}=F\left(\frac{x\sqrt{1-y^2}}{y},\ \frac{z-ay}{\sqrt{1-y^2}},\ \frac{u-by}{\sqrt{1-y^2}}\right).$$

49) Wyprowadzić całkę ogólną równania różniczkowego cząstkowego kształtu:

$$2x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2-x^2-y^2}{z}.$$

50) $(x^2-yz)p+(y^2-xz)q=z^2-xy.$ 51) $\operatorname{tang}\frac{y-z}{2}\cdot p+\operatorname{tang}\frac{z-x}{2}\cdot q=\operatorname{tang}\frac{x-y}{2}$

52) Znaleźć całkę osobliwą równania różniczkowego cząstkowego:

$$\left(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z\right)^2=1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

53) Wykazać, że całkę ogólną równania różniczkowego cząstkowego:

$$(xp+yq-z)^2=1+p^2+q^2$$

żemy przedstawić w postaci dwu równań:

$$ax+y\varphi(a)+z\{1-a^2-[\varphi(a)]^2\}^{1/2}=1,\qquad x+y\varphi'(a)-z\frac{a+\varphi(a)\varphi'(a)}{\{1-a^2-[\varphi(a)]^2\}^{1/2}}=0,$$

zie $\varphi(a)$ jest dowolną funkcyą.

54) Znaleźć całkę zupełną równania różniczkowego cząstkowego, kształtu:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=x+y.$$

Znaleźć całki zupełne i całki osobliwe następujących równań:

55) $z=px+qy+pq.$ 56) $z=px+qy+\sqrt{p^2+q^2+1}.$ 57) $z=px+qy+\sqrt{ap^2+bq^2+c}.$

$z=px+qy+3\sqrt[3]{pq}.$

59) Wykazać, że całka osobliwa równania różniczkowego cząstkowego:

$$z=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \text{ ma kształt: } z=-\frac{x^2+y^2}{4}.$$

60) Wykazać, że całkę zupełną równania różniczkowego cząstkowego: $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=xy,$

li $pq=xy$ możemy przedstawić w postaci: $z=\frac{ax^2}{2}+\frac{y^2}{2a}+b.$

Scałkować następujące równania różniczkowe:

61) $\left(\frac{y}{x}+\frac{z^2}{y^2}\right)p-\left(\frac{x}{y}+\frac{z^2}{x^2}+1\right)q=\left(\frac{y}{x^2}-\frac{x}{y^2}\right)z$ 62) $p^2+q^2=x^2+xy+y^2$

$ax^4\frac{\partial z}{\partial x}+(x^4z+ax^3y-ax^2y^2)\frac{\partial z}{\partial y}=2ax^3yz-a^2y^3z.$ 64) $px+qy-pq=0.$ 65) $py+qx-pq=0.$

$z=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}.$ 67) $\frac{\partial z}{\partial y}=f\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$ 68) $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2y=z\frac{\partial z}{\partial y}.$ 69) $\frac{\partial z}{\partial x}\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1\right\}+(b-z)\frac{\partial z}{\partial y}=0.$

$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=0.$ 71) $(y-b-Bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(x-a-Az)\frac{\partial z}{\partial y}=B(x-a)-A(y-b).$

$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$

73) Znaleźć powierzchnię, która przecina pod kątem prostym wszystkie elipsoidy zedstawione równaniem: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

74) Wyprowadzić równanie powierzchni, której promienie krzywizny są w każdym nkcie jednakowe i tego samego znaku.

Znaleźć całki ogólne następujących równań różniczkowych cząstkowych i podać h znaczenie geometryczne:

75) $\cos\alpha\frac{\partial z}{\partial x}+\cos\beta\frac{\partial z}{\partial y}-\cos\gamma=0.$ 76) $(x-\xi)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-\eta)\frac{\partial z}{\partial y}-(z-\zeta)=0.$

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial x}, & \frac{\partial z}{\partial y}, & -1\\ x, & y, & z\\ \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma\end{vmatrix}.$$

Wyprowadzić całki ogólne następujących równań różniczkowych cząstkowych rzędu drugiego:

78) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f(x)$. 79) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = a$, 80) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. 81) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2a \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$.

82) $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. 83) $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2$. 84) $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

85) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x$. 86) $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = xy$. 87) $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

88) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial z}{\partial x} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. 89) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{a^2}{x^4}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$. 90) $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

91) **Wykazać, że całka szczególna równania różniczkowego $rt - s^2 = 0$ pod założeniem, że $q^2 = (1+p^2)x^2$ przedstawia się w postaci:**

$$z = ay + \sqrt{a^2 - x^2} + a \log \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$$

Rozwiązania LXI. 2) $z - m\sqrt{x^2+y^2} = F\left(\frac{y}{x}\right)$. 3) $(ny - mx)\frac{\partial z}{\partial x} + (lz - nx)\frac{\partial z}{\partial y} = mx - ly$.

7) $\log z = a \log x + (1-a) \log y + b$. 8) $z = -xy$. 9) $\frac{z}{y} = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$. 10) $z = \frac{y^2}{3x} + \psi(xy)$.

20) $z = e^{\frac{x}{x+y}} \varphi(x+y)$. 21) $z = y^{\frac{n}{m}} \varphi(y - mx)$. 22) $z = y\varphi(y^2 - x^2)$. 23) $z = (x+y)\varphi(y^2+x^2)$.

24) $z = (\sin y)^{\frac{1}{a}} \varphi(y - a \sin x)$. 25) $z + \frac{x^2}{2y} + \frac{x}{2} = \varphi\left(\frac{y-x}{xy}\right)$. 26) $z^2 - xy = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$.

32) $x - az = \varphi(y - bz)$. 33) $(x-az)^2 + (y-bz)^2 = 1$. 34) Stożek: $(az-cx)^2 + (bz+cy)^2 = (z-c)^2$.

36) Całkowanie równania liniowego: $Pp + Qq = R$. 43) $\frac{z^2}{2} = ax + a^2 y + \varphi(a)$.

44) $xe^{\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{y}} = \varphi(y^2+z^2)$. 45) $z = y^n \cdot \varphi(x^2 - y^2)$. 46) $z = \sqrt{x^2+y^2} \cdot \varphi(\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{y} - \log\sqrt{x^2+y^2})$.

47) $(x-y)z = e^{\frac{z}{x+y}} \varphi(x-y)^2$ 49) $\frac{x^2+y^2+z^2}{x} = F\left(\frac{y}{x}\right)$. 50) $y \quad z = (x-y) f(yz+zx+xy)$.

51) $\cos(y+z) + \cos(x+z) + \cos(x+y) = f[\sin(y+z) + \sin(z+x) + \sin(x+y)]$. 52) $x^2+y^2+z^2 = 1$.

54) $z = \frac{2}{3}(x+a)^{3/2} + \frac{2}{3}(y-a]^{3/2} + b$. 66) $z = (x+\alpha)(y+\beta)$, lub: $z = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{a} + ay + b\right)^2$.

67) $z = \alpha x + f(\alpha) y + \beta$. 68) $z = a^2 y^2 + (ax+b)^2$. 69) $\alpha(z-b) - 1 = \frac{1}{4}(x + \alpha y + \beta)^2$.

70) $z = \varphi(x^2+y^2)$. 71) $(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = \varphi(Ax + By + z)$. 72) $z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

73) $\frac{x}{a^2}p + \frac{y}{b^2}q = \frac{z}{c^2}$, stąd: $\frac{y^{b^2}}{z^{c^2}} = \varphi\left(\frac{x^{a^2}}{z^{c^2}}\right)$ 74) $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$.

75) $\varphi(x \cos\gamma - z\cos\alpha, \quad y\cos\gamma - z\cos\beta) = 0$. 76) $\varphi\left(\frac{x-\xi}{z-\zeta}, \quad \frac{y-\eta}{z-\zeta}\right) = 0$.

77) $\varphi(x^2+y^2+z^2, \quad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) = 0$. 78) $z = \int\int\int f(x)dx^2 + x\varphi(y) + \psi(y)$.

85) $z = \varphi(y+ax) + \psi(y-ax) + \frac{x^3}{3!}$. 86) $z = xy\log x + xf\left(\frac{y}{x}\right) + \varphi(xy)$. 87) $z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi(xy)$.

88) $z = \frac{1}{x}[\varphi(y+ax) + \psi(y-ax)]$. 89) $z = x\left\{f\left(y + \frac{a}{x}\right) + \varphi\left(y - \frac{a}{x}\right)\right\}$. 90) $z = f[x + y\varphi(z)]$.

Literatura. E. Goursat: Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris 1891 E. Goursat: Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. T. I. Paris 1896. T. II. Paris 1898. Dr. Stanisław Kępiński: Podręcznik równań różniczkowych. Część II. Równania różniczkowe cząstkowe. We Lwowie 1907. Riemann-Weber: Die partiellen Differentialgleichungen. Braunschweig 1900.

Tematy do rozprawek naukowych:

1. Metody całkowania układu równań różniczkowych cząstkowych rzędu pierwszego.
2. Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego.
3. Całkowanie równań różniczkowych cząstkowych za pomocą szeregów potęgowych.

Wykład LXII.

Przedstawianie funkcyj i rozwiązywanie równań różniczkowych za pomocą całek określonych.

1. Ogólny pogląd na wyznaczanie wartości całek określonych. Do jednej z najważniejszych dziedzin rachunku całkowego należy wyznaczanie wartości takich całek określonych, których odpowiednie całki nieokreślone nie mogą być przedstawione w skończonej liczbie wyrazów za pomocą znanych funkcyj, tworząc nowe rodzaje funkcyj.

Metody wyznaczania wartości takich całek określonych mogą być rozmaite; najgłówniejsze z nich poznane w wykładach XXXVI—XLIV polegają:

α) na przekształcaniu danej całki określonej za pomocą zmiany zmiennej niezależnej i odpowiedniej zmiany granic (art. 4. str. 596);

β) na całkowaniu przez części, celem znalezienia związku między znaną i szukaną całką określoną (art. 5. str. 576);

γ) na rozwijaniu funkcyi, występującej pod znakiem całkowym na szereg i całkowaniu poszczególnych wyrazów tego szeregu, sumowaniu wyników i odejmowaniu wartości sumy odpowiadającej dolnej granicy od wartości odpowiadającej granicy górnej (art. 11. str. 580);

δ) na przybliżonem obliczaniu całki określonej, opartem o przybliżone metody obliczania powierzchni (art. 10. str. 591);

ε) na różniczkowaniu i całkowaniu danej całki określonej ze względu na parametr, występujący pod znakiem całkowania (art. 1—9 str. 527—632);

ζ) na przekształcaniu danej całki określonej na całkę podwójną (art 10 str. 576).

Funkcyę $f(x)$, której odpowiada w odstępie od a do b, skończona wartość całki określonej: $I=\int_a^b f(x)\,dx$, nazywamy też funkcyą całkowalną w tym odstępie, jaką jest między innemi wszelka funkcya ciągła.

2. Funkcye przedstawione całkami określonemi. Całki określone mogą być uważane jako funkcye jednej lub obu zmiennych granic całkowania, jak np. całki określone kształtu:

$$\int_a^x f(x)\,dx=F(x), \qquad \int_x^y f(x)\,dx=F(x,\ y),$$

a przy stałych granicach a i b jako funkcye jednego lub więcej parametrów zmiennych występujących pod znakiem całkowania, jak np. całki określone kształtu:

$$\int_a^b f(x,\ \alpha)\,dx=F(\alpha), \qquad \int_a^b f(x,\ \alpha,\ \beta)\,dx=F(\alpha,\ \beta).$$

W myśl tego zapatrywania całki określone mogą służyć jako sposoby przedstawiania funkcyj jednej, dwu lub więcej zmiennych niezależnych.

W następnych artykułach zajmiemy się niektóremi uwagi godnemi całkami określonemi, przedstawiającemi nowe funkcye zaznaczone osobnemi nazwami.

3. Całki Eulera. Tak nazywają się za przykładem Legendre'a dwie całki określone, jedna kształtu: $B(p, q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$, zwana Beta-funkcyą parametrów p i q, druga kształtu: $\Gamma(p)=\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx$, zwana Gamma-funkcyą parametru p.

Pierwsza zowie się także całką Eulera gatunku pierwszego, druga całką Eulera gatunku drugiego.

Całce Eulera gatunku pierwszego:

$$B(p, q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \tag{1}$$

możemy nadać między innemi następujące kształty:

Kładąc: $x=\frac{y}{1+y}$, a więc: $1-x=\frac{1}{1+y}$, $dx=\frac{dy}{(1+y)^2}$, a uwzględniając, że granicom 0 i 1 zmiennej niezależnej x odpowiadają granice 0 i ∞ dla nowej zmiennej y, pisząc wreszcie x zamiast y, otrzymujemy:

$$B(p, q)=\int_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{(1+x)^{p+q}}. \tag{2}$$

Rozkładając otrzymaną całkę na dwa dodajniki w ten sposób, że napiszemy:

$$B(p, q)=\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{(1+x)^{p+q}}+\int_1^\infty \frac{x^{p-1}dx}{(1+x)^{p+q}}.$$

zastąpmy w drugim dodajniku zmienną x przez $\frac{1}{x}$, zatem dx przez $-\frac{dx}{x^2}$, a otrzymamy 0 i 1, jako granice nowej zmiennej, wobec tego będzie:

$$B(p, q)=\int_0^1 \frac{x^{p-1}+x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}dx, \tag{3}$$

skąd wypływa bezpośrednio własność Beta-funkcyi, przedstawiona wzorem:

$$B(p, q)=B(q, p), \tag{4}$$

która wypływa zresztą także z wzoru (1), gdy w nim zastąpimy x przez $1-x$.

Całce Eulera gatunku drugiego:

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx \tag{5}$$

możemy znowu nadać między innemi następujące kształty:

Zastępując x przez mx, otrzymujemy:

$$\Gamma(p)=m^p\int_0^\infty e^{-mx}x^{p-1}dx, \tag{6}$$

skąd zastępując znowu x przez x^2 dostajemy wzór:

$$\Gamma(p)=2\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2p-1}dx. \tag{7}$$

Kładąc we wzorze (5) $e^{-x}=y$, zatem $x=\log\frac{1}{y}$, $dx=-\frac{dy}{y}$, otrzymujemy:

$$\Gamma(p)=-\int_1^0\left[\log\left(\frac{1}{y}\right)\right]^{p-1}dy=\int_0^1\left[\log\frac{1}{y}\right]^{p-1}dy,$$

a stąd pisząc x zamiast y, dostajemy wzór:

$$\Gamma(p)=\int_0^1\left[\log\frac{1}{x}\right]^{p-1}dx. \tag{8}$$

4. Związek między obu gatunkami całek Eulera. Kładąc we wzorze (2):

$$B(p,\ q)=\int_0^\infty\frac{y^{p-1}\,dy}{(1+y)^{p+q}},$$

na podstawie (6):

$$\frac{1}{(1+y)^{p+q}}=\frac{\int_0^\infty e^{-(1+y)x}x^{p+q-1}dx}{\Gamma(p+q)}$$

otrzymujemy:

$$B(p,\ q)=\frac{1}{\Gamma(p+q)}\cdot\int_0^\infty y^{p-1}\,dy\int_0^\infty e^{-(1+y)x}x^{p+q-1}dx,$$

czyli:
$$B(p,\ q)=\frac{1}{\Gamma(p+q)}\int_0^\infty x^{p+q-1}e^{-x}dx\int_0^\infty y^{p-1}e^{-xy}dy,$$

a że na podstawie wzoru (6):

$$\int_0^\infty y^{p-1}e^{-xy}dy=\frac{\Gamma(p)}{x^p},$$

przeto wzór poprzedni sprowadza się do postaci:

$$B(p,\ q)=\frac{1}{\Gamma(p+q)}\cdot\int_0^\infty x^{p+q-1}e^{-x}dx.\frac{\Gamma(p)}{x^p},$$

czyli:
$$B(p,\ q)=\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)}\int_0^\infty x^{q-1}e^{-x}dx,$$

a że $\int_0^\infty x^{q-1}e^{-x}dx=\Gamma(q)$, przeto otrzymujemy z powyższego równania wzór:

$$B(p,\ q)=\frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \tag{9}$$

wykazujący związek między Beta- i Gamma-funkcyami.

Na podstawie tego wzoru możemy obliczyć wartości Beta-funkcyj, gdy znane są wartości funkcyj Gamma.

5. Obliczanie wartości funkcyj Gamma. Dla jakiejkolwiek wartości parametru p otrzymujemy na podstawie całkowania przez części:

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx=-\Big|_0^\infty e^{-x}x^{p-1}+(p-1)\int_0^\infty e^{-x}x^{p-2}dx,$$

czyli:
$$\Gamma(p)=(p-1)\,\Gamma(p-1), \tag{10}$$

skąd wynika wzór:

$$\Gamma(p)=(p-1)(p-2)\ldots(p-m)\,\Gamma(p-m), \tag{11}$$

który w przypadku, gdy p jest liczbą całkowitą równą n, sprowadza się ze względu na to, że $\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx=1$, ostatecznie do postaci:

$$\Gamma(n)=1.2.3\ldots(n-1),\ \text{czyli:}\ \Gamma(n)=(n-1)! \tag{12}$$

*

w przypadku, gdy p nie jest liczbą całkowitą, dozwala wyznaczyć wartości funkcyi Γ dla wszystkich wartości dodatnich parametru p, jeżeli znana jest wartość funkcyi Γ dla wartości p między 0 i 1.

Przyjmując we wzorze (9) $p+q=1$, a więc: $q=1-p$, otrzymujemy stąd:

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{1+x}=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(1-p)}{\Gamma(1)},$$

a że: $\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx=1$, a za pomocą rozkładania funkcyi: $\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}$ na ułamki proste, dostajemy:

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m}dx}{1+x^{2n}}=\frac{\pi}{2n\sin\frac{2m+1}{n}\pi},$$

skąd podstawiając x za x^{2n} i kładąc: $\frac{2m+1}{n}=p$,

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin p\pi},$$

otrzymujemy przeto z powyższego wzór:

$$\Gamma(p).\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}, \tag{13}$$

który w połączeniu z wzorem (11) dozwala wyznaczyć wartość funkcyi Γ dla wszelkiego p, gdy znane są wartości funkcyi Γ dla parametrów p leżących w granicach od 0 do $^1/_2$.

6. Uwaga dotycząca obliczania wartości całki określonej: $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{1+x}$. Wartość całki określonej: $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx$ może być także wyznaczoną przy pomocy szeregów. W tym celu połóżmy:

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x}dx+\int_1^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx,$$

a że dla pierwszej całki, gdzie $0<x<1$ mamy:

$$\frac{x^{p-1}}{1+x}=x^{p-1}-x^p+x^{p+1}-x^{p+2}+\ldots$$

a dla drugiej, gdzie $1<x<\infty$ jest:

$$\frac{x^{p-1}}{1+x}=x^{p-2}-x^{p-3}+x^{p-4}-x^{p-5}+\ldots$$

przeto całkując te szeregi w dotyczących granicach otrzymujemy:

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\frac{1}{p}-\frac{1}{1+p}+\frac{1}{2+p}-\frac{1}{3+p}+\frac{1}{4+p}-\ldots+\frac{1}{1-p}-\frac{1}{2-p}+\frac{1}{3-p}-\frac{1}{4-p}+\ldots$$

czyli:

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\frac{1}{p}+\frac{2p}{1^2-p^2}-\frac{2p}{2^2-p^2}+\frac{2p}{3^2-p^2}-\frac{2p}{4^2-p^2}+\ldots$$

Szereg ten przedstawia właśnie funkcyę: $\frac{\pi}{\sin p\pi}$.

Jest bowiem na mocy wzorów (11) i (12) str. 452:

$$\sin\frac{p\pi}{2}=\frac{p\pi}{2}\left(1-\frac{p^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{p^2}{4^2}\right)\left(1-\frac{p^2}{6^2}\right)\left(1-\frac{p^2}{8^2}\right)\ldots$$

$$\cos\frac{p\pi}{2}=\left(1-\frac{p^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{p^2}{3^2}\right)\left(1-\frac{p^2}{5^2}\right)\left(1-\frac{p^2}{7^2}\right)\ldots$$

przeto:

$$\frac{d\log\sin\frac{p\pi}{2}}{dp}=\frac{\pi}{2}\operatorname{cotg}\frac{p\pi}{2}=\frac{1}{p}-\frac{2p}{2^2-p^2}-\frac{2p}{4^2-p^2}-\frac{2p}{6^2-p^2}-\ldots$$

$$\frac{d\log\cos\frac{p\pi}{2}}{dp}=-\frac{\pi}{2}\operatorname{tang}\frac{p\pi}{2}=\frac{2p}{1^2-p^2}+\frac{2p}{3^2-p^2}+\frac{2p}{5^2-p^2}+\frac{2p}{7^2-p^2}+\ldots$$

a że:
$$\frac{\pi}{2}\cot g\frac{p\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\tan g\frac{p\pi}{2}=\frac{\pi}{\sin p\pi},$$
zatem otrzymujemy wzór sumowy:
$$\frac{\pi}{\sin p\pi}=\frac{1}{p}+\frac{2p}{1^2-p^2}-\frac{2p}{2^2-p^2}+\frac{2p}{3^2-p^2}-\frac{2p}{4^2-p^2}+\dots$$
a więc:
$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin p\pi},\ \text{gdy: } 0<p<1.$$

7. Wartości: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ i $\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)$. Dla $p=\frac{1}{2}$ otrzymujemy z (13):
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2=\pi,\ \text{zatem: } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty e^{-x}x^{1/2}dx=\sqrt{\pi}.$$

Zastępując w wzorze (11) p przez $p+m$, gdzie m jest liczbą całkowitą, otrzymujemy:
$$\Gamma(p+m)=(p+m-1)(p+m-2)\dots p.\Gamma(p),$$
czyli wzór:
$$\Gamma(p+m)=p(p+1)\dots(p+m-1)\Gamma(p), \tag{14}$$
z którego, gdy $p=1/2$, dostajemy:
$$\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}\dots\frac{2m-1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$
czyli:
$$\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)=\frac{1.3.5\dots(2m-1)}{2^m}\sqrt{\pi}. \tag{15}$$

8. Przedstawienie funkcyi $\Gamma(x)$ w postaci iloczynu nieskończonego. Różniczkując funkcyę $\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-y}y^{x-1}dy$ podług x, otrzymujemy:
$$\frac{d\Gamma(x)}{dx}=\Gamma'(x)=\int_0^\infty e^{-y}y^{x-1}\log y\,dy,$$
skąd kładąc: $\log y=\int_0^\infty \frac{e^{-z}-e^{-yz}}{z}dz$, dostajemy:
$$\Gamma'(x)=\Gamma(x).\int_0^\infty\left[e^{-z}-\frac{1}{(1+z)^x}\right]\frac{dz}{z},$$
zatem:
$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=\frac{d\log\Gamma(x)}{dx}=\int_0^\infty[e^{-z}-(1+z)^{-x}]\frac{dz}{z},$$
czyli:
$$\frac{d\log\Gamma(x)}{dx}=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-y}}{y}-\frac{e^{-xy}}{1-e^{-y}}\right)dy. \tag{16}$$

Pochodna tej funkcyi podług x otrzymuje kształt:
$$\frac{d^2\log\Gamma(x)}{dx^2}=\int_0^\infty\frac{ye^{-xy}}{1-e^{-y}}dy,$$
a że:
$$\frac{1}{1-e^{-y}}=1+e^{-y}+e^{-2y}+\dots+e^{-(n-1)y}+\frac{e^{-ny}}{1-e^{y}},$$
a więc:
$$\frac{ye^{-xy}}{1-e^{-y}}=ye^{-xy}+ye^{-y(x+1)}+ye^{-y(x+2)}+\dots$$
przeto będzie: $$\frac{d^2\log\Gamma(x)}{dx^2}=\int_0^\infty[ye^{-xy}+ye^{-y(x+1)}+ye^{-y(x+2)}+\dots]dy,$$
zatem otrzymamy rozwinięcie:
$$\frac{d^2\log\Gamma(x)}{dx^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\dots \tag{17}$$
w postaci szeregu jednostajnie zbieżnego dla wszelkiej dodatniej wartości x.

Całkując go między granicami 1 i x, otrzymujemy:

$$\frac{d\log\Gamma(x)}{dx}=-C+\left(1-\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{x+2}\right)+\dots \qquad (18)$$

gdzie stała $C=\Gamma'(1)=\int_0^\infty\left(\frac{1}{1-e^{-y}}-\frac{1}{y}\right)e^{-y}dy$ zowie się stałą Eulera.

Całkując (18) między granicami x i 1, otrzymamy:

$$\log\Gamma(x)=-C(x-1)+\left(\frac{x-1}{1}-\log\frac{x}{1}\right)+\left(\frac{x-1}{2}-\log\frac{x+1}{2}\right)+\dots$$

$$\dots+\left(\frac{x-1}{m}-\log\frac{x+m-1}{m}\right)+\dots \qquad (19)$$

skąd, kładąc $x=2$, otrzymujemy stałą Eulera w postaci:

$$C=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{m-1}-\log m\right).$$

Po uwolnieniu od stałej C otrzymujemy wzór (19) w postaci:

$$\log\Gamma(x)=\sum_{m=1}^{m=\infty}\left[(x-1)\log\left(1+\frac{1}{m}\right)-\log\left(1+\frac{x-1}{m}\right)\right], \qquad (20)$$

skąd wypada: $$\Gamma(x)=\lim_{m=\infty}\frac{1.2.3\dots m.m^{x-1}}{x(x+1)\dots(x+m-1)},$$

czyli: $$\Gamma(x)=\lim_{m=\infty}\frac{1.2.3\dots(m-1)m^x}{x(x+1)\dots(x+m-1)}. \qquad (21)$$

Do tego wzoru możemy dojść także bezpośrednio w sposób następujący:

Zastąpmy w całce: $\Gamma(x)=\int_0^\infty y^{x-1}e^{-y}dy$ czynnik e^{-y} przez potęgę $\left(1-\frac{y}{m}\right)^m$, która dąży do e^{-y}, gdy m dąży do nieskończoności i wyjdźmy z całki:

$$\Gamma(x)=\int_0^m y^{x-1}\left(1-\frac{y}{m}\right)^m dy, \text{ gdzie } \lim m=\infty.$$

Za pomocą całkowania przez części m-razy powtórzonego otrzymujemy:

$$\Gamma(x)=\frac{m(m-1)\dots2.1}{x(x+1)\dots(x+m-1)}\cdot\frac{1}{m^m}\int_0^m y^{x+m-1}dy=\frac{1.2\dots m}{x(x+1)\dots(x+m-1)}\cdot\frac{1}{m^m}\Big|_0^m\frac{y^{x+m}}{x+m},$$

zatem ostatecznie: $$\Gamma(x)=\lim_{m=\infty}\frac{1.2.3\dots m}{x(x+1)\dots(x+m)}m^x.$$

9. Przedstawienie funkcyi $\log\Gamma(1+x)$ w postaci szeregu potęgowego.

Na podstawie wzoru (17) otrzymujemy:

$$\frac{d^2\log\Gamma(x+1)}{dx^2}=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}+\dots \qquad (22)$$

skąd dla $x=0$ dostajemy:

$$\frac{1}{2!}\left[\frac{d^2\log\Gamma(x+1)}{dx^2}\right]_{x=0}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots\right]=\frac{S_2}{2}.$$

Postępując z (22) do n-tej pochodnej, otrzymujemy:

$$\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n\log\Gamma(x+1)}{dx^n}\right]_{x=0}=\frac{(-1)^n}{n}\left[\frac{1}{1^n}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\dots\right]=(-1)^n\frac{S_n}{n},$$

a że na podstawie (18):

$$\left[\frac{d\log\Gamma(x+1)}{dx}\right]_{x=0}=-C, \text{ zaś: } \left[\log\Gamma(x+1)\right]_{x=0}=\log\Gamma(1)=0,$$

przeto otrzymamy na mocy szeregu Maclaurin'a:

$$\log\Gamma(1+x) = -Cx + S_2\frac{x^2}{2} - S_3\frac{x^3}{3} + S_4\frac{x^4}{4} - S_5\frac{x^5}{5} + \dots \qquad (23)$$

a stąd:

$$\log\Gamma(1-x) = Cx + S_2\frac{x^2}{2} + S_3\frac{x^3}{3} + S_4\frac{x^4}{4} + \dots$$

Wobec tego mamy:

$$\frac{1}{2}\log[\Gamma(1-x).\Gamma(1+x)] = S_2\frac{x^2}{2} + S_4\frac{x^4}{4} + S_6\frac{x^6}{6} + \dots$$

a że:

$$\Gamma(1-x)\Gamma(1+x) = \frac{\pi x}{\sin \pi x},$$

więc:

$$\frac{1}{2}\log\frac{\pi x}{\sin\pi x} = S_2\frac{x^2}{2} + S_4\frac{x^4}{4} + S_6\frac{x^6}{6} + \dots$$

przeto wzór (23) sprowadza się do postaci:

$$\log\Gamma(1+x) = -Cx + \frac{1}{2}\log\frac{\pi x}{\sin\pi x} - S_3\frac{x^3}{3} + S_5\frac{x^5}{5} + \dots$$

Dodajmy do tego wzoru tożsamość:

$0 = -\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$, a otrzymamy wzór:

$$\log\Gamma(1+x) = \frac{1}{2}\log\frac{\pi x}{\sin\pi x} - \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} + (1-C)x -$$

$$-(S_3-1)\frac{x^3}{3} - (S_5-1)\frac{x^5}{5} - \dots \qquad (24)$$

który dozwala dość szybko obliczyć wartość funkcyi $\log\Gamma(1+x)$ dla wszelkich x między 0 i $\frac{1}{2}$, gdy obliczone są sumy S_r i stała Eulera C.

Sumy S_r obliczone zostały przez Legendre'a aż do S_{35}. Z dokładnością na dziesięć miejsc dziesiętnych jest:

$S_2 = 1{\cdot}6449340668$, $S_5 = 1{\cdot}0369277551$, $S_8 = 1{\cdot}0040773512$,
$S_3 = 1{\cdot}2020569032$, $S_6 = 1{\cdot}0173430620$, $S_9 = 1{\cdot}0020783928$,
$S_4 = 1{\cdot}0823232337$, $S_7 = 1{\cdot}0083492774$, $S_{10} = 1{\cdot}0009945751$.

Kładąc we wzorze (24) $x = {}^1/_2$, otrzymujemy na wyznaczenie stałej Eulera C wzór:

$$C = 1 + \log\frac{2}{3} - \frac{1}{3.2^2}(S_3-1) - \frac{1}{5.2^4}(S_5-1) - \frac{1}{7.2^6}(S_7-1) - \dots$$

z którego otrzymujemy $C = 0{\cdot}5772156649\dots$

10. Obraz funkcyi $\Gamma(x)$. Na podstawie powyżej wyprowadzonych własności funkcyi $\Gamma(x)$ nie trudno wyrobić sobie wyobrażenie o przebiegu funkcyi krzywej: $y = \Gamma(x)$. Krzywa ma od $x=0$ do $x=\infty$, rzędne stale dodatnie, przyczem $\Gamma(0)=\infty$, jako też $\Gamma(\infty)=\infty$, otrzymuje zarówno dla $x=1$, jako też dla $x=2$ jednakową wartość równą 1, przeto posiada w odstępie między $x=1$ a $x=2$ pewną rzędną najmniejszą (minimum) (fig. 264).

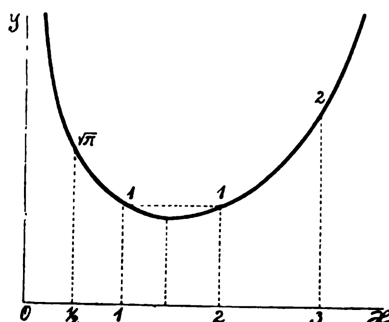


Fig 264.

Staje się to, jak z warunku $\Gamma'(x)=0$ można w przybliżeniu obliczyć, dla $x = 1{\cdot}4616321451$, któremu odpowiada: $\Gamma(x) = 0{\cdot}8856031944\dots$

11. Sprowadzanie niektórych całek określonych do funkcyi Gamma. Zapomocą funkcyi Eulera można wyrazić wiele całek określonych, które za pomocą znanych funkcyj elementarnych wyrazić się nie dadzą.

Przytoczymy tu przykładowo najważniejsze z nich:

α) Całka kształtu: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\varphi \cos^{2q-1}\varphi \, d\varphi$, sprowadza się na mocy podstawienia: $x = \sin^2\varphi$ do postaci:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\varphi \cos^{2q-1}\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{1}{2}B(p, q),$$

wobec czego otrzymujemy:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\varphi \cos^{2q-1}\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{25}$$

Zakładając $p = q$, otrzymujemy:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi\cos\varphi)^{2p-1}\,d\varphi = \frac{1}{2^{2p-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2\varphi)^{2p-1}\,d\varphi = \frac{1}{2^{2p-3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\varphi\,d\varphi,$$

zatem na mocy (25) wzór:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\varphi\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\varphi\,d\varphi = 2^{2p-2}\frac{\Gamma^2(p)}{\Gamma(2p)} \tag{26}$$

ważny dla wszelkiej dodatniej wartości parametru p.

Zakładając $p+q=1$, a więc kładąc $2p-1=n$, $2q-1=-n$, otrzymujemy z (25):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\varphi\cos^{-n}\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right).\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right) = .\Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right).\Gamma\left(1-\frac{1+n}{2}\right),$$

a że:

$$\Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right).\Gamma\left(1-\frac{1+n}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{1+n}{2}\pi} = \frac{\pi}{\cos\frac{n\pi}{2}},$$

przeto otrzymujemy wzór:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan g^n\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{2\cos\frac{n\pi}{2}} \tag{27}$$

ważny gdy $n < 1$.

β) Całka określona kształtu: $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}}dx$ sprowadza się wskutek podstawienia $y = x^4$ do postaci:

$$\int_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{4}\int_0^1 y^{\frac{n-3}{4}}(1-y)^{-1/2}dy = \frac{1}{4}B\left(\frac{n+1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{4}\right).\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+3}{4}\right)},$$

skąd dostajemy wzór:

$$\int_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+3}{4}\right)}.$$

γ) Całka Laplace'a: $\int_0^\infty e^{-a^2x^2}dx$ sprowadza się wskutek podstawienia $y = a^2x^2$ do postaci:

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{e^{-y}dy}{2a\sqrt{y}} = \frac{1}{2a}\int_0^\infty e^{-y}y^{-1/2}\,dy = \frac{1}{2a}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

skąd, ze względu na to, że $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ otrzymujemy wzór:

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}.$$

δ) Całki określone kształtu: $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^p}dx$, $(p<1)$, $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx$ $(p<2)$ możemy sprowadzić do całek Eulera, przekształcając wpierw te całki na całki podwójne na podstawie wzoru:

$$\frac{1}{x^p}=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^\infty y^{p-1}e^{-xy}dy.$$

Otrzymujemy tedy:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^p}dx=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^\infty\int_0^\infty y^{p-1}e^{-xy}\cos x\,dx\,dy=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^\infty e^{-xy}\cos x\,dx\int_0^\infty y^{p-1}dy,$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^\infty\int_0^\infty y^{p-1}e^{-xy}\sin x\,dx\,dy=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dx\int_0^\infty y^{p-1}dy,$$

a że na podstawie art. 7. str. 579 jest:

$$\int_0^\infty e^{-xy}\cos x\,dx=\frac{y}{1+y^2},\qquad \int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dx=\frac{1}{1+y^2},$$

przeto otrzymujemy:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^p}dx=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^\infty \frac{y^p dy}{1+y^2},\qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^\infty \frac{y^{p-1}dy}{1+y^2}.$$

Kładąc $y=\operatorname{tang}\varphi$, a więc: $dy=\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$ i uwzględniając wzór (19), otrzymujemy:

$$\int_0^\infty \frac{y^n dy}{1+y^2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{tang}^n\varphi\,d\varphi=\frac{\pi}{2\cos\frac{n\pi}{2}},\quad (n<1),$$

przeto:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^p}dx=\frac{\pi}{2\Gamma(p)\cos\frac{p\pi}{2}},\qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx=\frac{\pi}{2\Gamma(p)\sin\frac{p\pi}{2}}.\tag{28}$$

W szczególności otrzymujemy stąd:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx=\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

12. Całki elliptyczne. Całkami określonemi elliptycznemi pierwszego i drugiego rodzaju nazywają się całki określone oznaczone za przykładem Legendre'a w następujący sposób:

$$F(k,\varphi)=\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\qquad E(k,\varphi)=\int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

w których φ zowie się amplitudą, k modułem odnośnej całki.

Wprowadzając w całce elliptycznej pierwszego rodzaju:

$$F(k,\varphi)=\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\tag{29}$$

nową zmienną φ_1 za pomocą podstawienia: $\operatorname{tang}\varphi=\frac{\sin 2\varphi_1}{k+\cos 2\varphi_1}$, zwanego podstawieniem Landen'a, otrzymamy:

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{2}{1+k}\int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{\sqrt{1+\frac{4k}{(1+k)^2}\sin^2\varphi_1}}=\frac{2}{1+k}\int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\varphi_1}},$$

gdzie: $k_1=\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$, czyli wzór:

$$F(k,\varphi)=\frac{2}{1+k}F(k_1,\varphi_1),\tag{30}$$

który dozwala sprowadzić daną całkę elliptyczną pierwszego rodzaju na inną z większym modułem i mniejszą amplitudą. Wzór tem wraz z odpowiednim wzorem odwrotnym:

$$F(k_1, \varphi_1)=\frac{1+k}{2}F(k, \varphi), \tag{31}$$

dostarcza metod obliczania wartości funkcyi $F(k, \varphi)$.

Stosując podstawienie Landena: $\operatorname{tang}\varphi=\frac{\sin 2\varphi_1}{k+\cos 2\varphi_1}$ do całki elliptycznej drugiego rodzaju:

$$E(k, \varphi)=\int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi, \tag{32}$$

otrzymamy:

$$E(k, \varphi)+k\sin\varphi=\int_0^\varphi [\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}+k\cos\varphi]d\varphi=2\int_0^\varphi \frac{1+k\cos 2\varphi_1}{\sqrt{1+2k\cos 2\varphi_1+k^2}}d\varphi_1$$

Kładąc jak poprzednio: $k_1=\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$, otrzymujemy:

$$E(k, \varphi)+k\sin\varphi=\frac{2}{1+k}\int_0^{\varphi_1}\frac{1+k(1-2\sin^2\varphi_1)}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\varphi_1}}=$$

$$=\int_0^{\varphi_1}\left[(1+k)\sqrt{1-k_1^2\sin^2\varphi_1}+(1-k)\frac{1}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\varphi_1}}\right]d\varphi_1=$$

$$=(1+k)E(k_1, \varphi_1)+(1-k)F(k_1, \varphi_1),$$

zatem wzór:

$$E(k, \varphi)+k\sin\varphi=(1+k)E(k_1, \varphi_1)+(1-k)F(k_1, \varphi_1), \tag{33}$$

który dozwala wyrazić daną całkę elliptyczną drugiego rodzaju i całkę elliptyczną pierwszego rodzaju, obie ze zwiększonym modułem i zmiejszoną amplitudą.

Całki $F(\varphi, k)$ i $E(\varphi, k)$ zostały obliczone przez Legendre'a, który ułożył odnośne tablice.

13. Szczególniej ważne w zastosowaniach są całki F i E odpowiadające amplitudzie $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Nazywamy je zupełnemi całkami elliptycznemi i oznaczamy wzorami:

$$F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi. \tag{34}$$

Zupełna całka elliptyczna pierwszego rodzaju jest pewną funkcyą modułu k, którą możemy przedstawić w postaci szeregu potęgowego.

Otrzymujemy mianowicie:

$$F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi+\frac{1.3}{2.4}k^4\sin^4\varphi+\frac{1.3.5}{2.4.6}\sin^6\varphi+\ldots\right)d\varphi,$$

a że:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\varphi\,d\varphi=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\frac{\pi}{2},$$

przeto całkując wyraz za wyrazem we wskazanych granicach dostajemy:

$$F(k)=\frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}k\right)^2+\left(\frac{1.3}{2.4}k^2\right)^2+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}k^3\right)^2+\ldots\right\}. \tag{35}$$

Jeżeli k rośnie od 0 do 1, funkcya $F(k)$ rośnie od $\frac{\pi}{2}$ do ∞ (fig. 265).

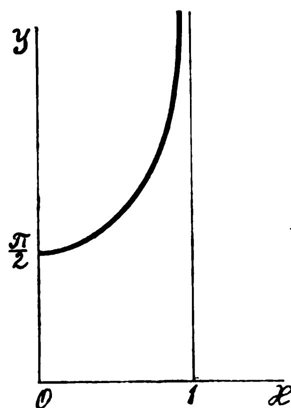


Fig. 265.

Zupełna całka elliptyczna drugiego rodzaju jest nową funkcyą modułu k, którą możemy również przedstawić w postaci szeregu potęgowego. Mianowicie otrzymujemy:

$$E(k) = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}k\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}k^2\right)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}k^3\right)^2 - \ldots\right]. \quad (36)$$

Jeżeli k rośnie od 0 do 1, funkcya $E(k)$ spada od $\frac{\pi}{2}$ do 1.

13. Wzory (35) i (36) są bardzo użyteczne przy obliczaniu wartości funkcyj $F(k)$, $E(k)$ dla małych wartości modułu k. Dla wartości k bliskich 1, otrzymamy za pomocą podstawień Landena wzory:

$$F(k) = (1+k_1)F(k_1), \quad (37)$$

$$E(k) = \frac{2}{1+k_1}E(k_1) - (1-k_1)F(k_1), \quad (38)$$

gdzie: $k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}$.

Tą drogą dochodzimy dla funkcyi $F(k)$ do wzoru:

$$F(k) = (1+k_1)(1+k_2)\ldots(1+k_n)F(k_n),$$

gdzie k_n może już być dowolnie małem, a wobec tego wartość $F(k_n)$ może być łatwo obliczoną za pomocą wzoru (37).

Dla $n = \infty$ otrzymamy $k_n = 0$, $F(0) = \frac{\pi}{2}$, a wskutek tego:

$$F(k) = \frac{\pi}{2}(1+k_1)(1+k_2)\ldots(1+k_n)\ldots$$

W szczególności, otrzymujemy tą drogą:

$$F\left(\frac{1}{3}\right) = 1{\cdot}617\ldots, \quad F\left(\frac{1}{2}\right) = 1{\cdot}685\ldots, \quad F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1{\cdot}854\ldots, \quad F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2{\cdot}156\ldots$$

Analogiczne wzory możemy na podstawie (38) wyprowadzić dla funkcyi $E(k)$ i dostajemy:

$$E\left(\frac{1}{3}\right) = 1{\cdot}526\ldots, \quad E\left(\frac{1}{2}\right) = 1{\cdot}467\ldots, \quad E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1{\cdot}350\ldots, \quad E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1{\cdot}211\ldots$$

14. Przykłady całek określonych, sprowadzających się do całek elliptycznych zupełnych pierwszego lub drugiego rodzaju. Niektóre całki określone można zawsze sprowadzić do zupełnych całek elliptycznych pierwszego lub drugiego rodzaju. Rozważymy tu przykładowo najważniejsze

1) Całka określona: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ sprowadza się za pomocą podstawienia $x = \cos\varphi$ $dx = -\sin\varphi\, d\varphi$ do postaci:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{d\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}},$$

otrzymujemy zatem:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1{\cdot}311\ldots$$

2) Całka określona: $\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$ sprowadza się za pomocą podstawienia $x = \cos$ postaci:

$$\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}} + \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

otrzymujemy zatem:

$$\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \sqrt{2}\,E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0{\cdot}599\ldots$$

3) Całka określona, kształtu: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ sprowadza się za pomocą podstawi $\sin x = t$, $dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ do postaci:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t^2)}}.$$

Kładąc teraz $t = \cos^2\varphi$, zatem $dt = -2\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi$, otrzymujemy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = -2\int_{\frac{\pi}{2}}^1 \frac{d\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}} = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}$$

zatem:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = \sqrt{2}\,.\,F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2{\cdot}622\ldots$$

4) Całka określona: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-2\sin^2\varphi}}$ sprowadza się wskutek podstawienia: $\sin\psi = \sqrt{2}\sin\varphi$, a więc: $d\varphi = \frac{\cos\psi\,d\psi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\psi}}$ do postaci:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\psi}},$$

więc:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-2\sin^2\varphi}} = \frac{\sqrt{2}}{2}F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1{\cdot}311\ldots$$

5) Całka określona: $\int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\alpha}}$ wskutek podstawienia: $k = \sin\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\varphi}{2} = k\sin$ wobec czego:

$$\cos\varphi - \cos\alpha = 2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right) = 2k^2\cos^2\psi, \quad d\varphi = \frac{2k\cos\psi\,d\psi}{\sqrt{1-k^2\cos^2\psi}},$$

a granicami na ψ odpowiadającemi granicom 0 i α zmiennej φ będą 0 i $\frac{\pi}{2}$, sprowadza do postaci:

$$\int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\alpha}} = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\cos^2\psi}} = \sqrt{2}\,.\,F(k),$$

zatem:

$$\int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\alpha}} = \sqrt{2}\,F\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

15. Szeregi i całki Fourier'a. Rozwinięcie danej funkcyi $f(x)$ na szereg potęgowy:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

prowadzi na mocy podstawienia $x=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ z uwzględnieniem wzoru Moivre'a: $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$ na pomysł rozwinięcia:

$$f(x)=A_0+A_1\cos x+A_2\cos 2x+\ldots+A_n\cos nx+\ldots$$
$$+B_1\sin x+B_2\sin 2x+\ldots+B_n\cos nx+\ldots \qquad (39)$$

które nazywamy szeregiem Fourier'a.

Załóżmy w myśl Fourier'a, że dana funkcya $f(x)$ dla wszelkich wartości położonych między $-\pi\ldots+\pi$ możemy przedstawić w postaci powyższego szeregu i postawimy sobie za zadanie wyznaczyć odpowiednie spółczynniki A_r i B_r.

Całkując równanie (39) między granicami $-\pi\ldots+\pi$ dostajemy:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}A_0\,dx+\sum_{r=1}^{r=\infty}\int_{-\pi}^{\pi}A_r\cos rx\,dx+\sum_{r=1}^{r=\infty}\int_{-\pi}^{\pi}B_r\sin rx\,dx,$$

skąd ze względu na to, że:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos rx\,dx=\Big|_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin rx}{r}=0,\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\sin rx\,dx=\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{\cos rx}{r}=0,$$

otrzymujemy:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}A_0dx=2\pi A_0,$$

zatem:

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx. \qquad (40)$$

Mnożąc znowu równanie (39) raz przez $\cos sx$, drugi raz przez $\sin sx$, całkując je w granicach od $-\pi$ do $+\pi$, otrzymujemy:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos sx\,dx=\sum_{r=0}^{r=\infty}\int_{-\pi}^{\pi}A_r\cos rx\cos sx\,dx+\sum_{r=1}^{r=\infty}\int_{-\pi}^{\pi}B_r\sin rx\cos sx\,dx, \quad (a)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin sx\,dx=\sum_{r=0}^{r=\infty}\int_{-\pi}^{\pi}A_r\cos rx\sin sx\,dx+\sum_{r=1}^{r=\infty}\int_{-\pi}^{\pi}B_r\sin rx\sin sx\,dx, \quad (b)$$

a że:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 rx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2rx}{2}dx=\Big|_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{x}{2}+\frac{\sin 2rx}{4r}\right)=\pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos rx\cos sx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(r-s)x+\cos(r+s)x}{2}dx=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin rx\cos rx\,dx=\frac{1}{4r}\Big|_{-\pi}^{\pi}\cos 2rx=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin rx\cos sx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(r+s)x+\sin(r-s)x}{2}dx=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 rx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2rx}{2}dx=\Big|_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2rx}{4r}\right)=\pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin rx\sin sx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(r-s)x-\cos(r+s)x}{2}dx=0,$$

ogólnie:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin rx\cos sx\,dx=0,\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\cos rx\cos sx\,dx=\begin{cases}0, & \text{gdy } r\gtrless s\\ \pi & \text{,, } r=s\gtrless 0\end{cases},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin rx \sin sx\, dx = \begin{cases} 0, & \text{gdy } r \gtrless s \\ \pi, & \text{gdy } r = s \gtrless 0 \end{cases},$$

przeto otrzymujemy z (a) i (b) wzory:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos rx\, dx = \pi A_r, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin rx\, dx = \pi B_r,$$

zatem:

$$A_r = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos rx\, dx, \quad B_r = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin rx\, dx. \tag{41}$$

Spółczynniki A_r i B_r w szeregu Fouriera przedstawiają się więc jako pewne całki określone, które nazywamy całkami Fourier'a.

Podstawiwszy otrzymane wartości spółczynników w równanie (39), otrzymujemy szereg Fourier'a w postaci:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx + \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{r=\infty} \cos rx \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos rx\, dx +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{r=\infty} \sin rx \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin rx\, dx, \tag{42}$$

przedstawiający wartość funkcyi $f(x)$ w przedziale od $x = -\pi$ do $x = \pi$.

16. Uwaga. α) Jeżeli dana funkcya $f(x)$ jest funkcyą parzystą, t. z. jeżeli $f(x) = f(-x)$, tedy mamy:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\, dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos rx\, dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x) \cos rx\, dx,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin rx\, dx = 0.$$

Funkcya parzysta $f(x)$ przedstawia się więc w przedziale od 0 do π w postaci szeregu:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\, dx + \frac{2}{\pi}\sum_{r=1}^{r=\infty} \cos rx \int_{0}^{\pi} f(x) \cos rx\, dx,$$

czyli:

$$f(x) = \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \ldots + A_n \cos nx + \ldots \tag{43}$$

gdzie:

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx.$$

β) Jeżeli dana funkcya $f(x)$ jest funkcyą nieparzystą, t. z. jeżeli $f(-x) = -f(x)$, tedy mamy:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos rx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin rx\, dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x) \sin rx\, dx.$$

Funkcya nieparzysta $f(x)$ przedstawia się zatem w przedziale od 0 do π w postaci szeregu:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{r=1}^{r=\infty} \sin rx \int_{0}^{\pi} f(x) \sin rx\, dx, \tag{44}$$

czyli:

$$f(x) = B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \ldots + B_n \sin nx + \ldots$$

gdzie:

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx.$$

γ) Z szeregów (42), (43) i (44) ważnych w przedziale od $-\pi$ do π, względnie od 0 do π, możemy wyprowadzić szeregi ważne między $-a$ i a, względnie między 0 i a, gdzie a jest liczbą dowolną.

Kładąc mianowicie: $x = \frac{\pi y}{a}$, $f(x) = \varphi(y)$, otrzymamy ogólny szereg Fourier'a:

$$\varphi(y) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} \varphi(y)\, dy + \frac{1}{a}\sum_{r=1}^{r=\infty} \cos\frac{r\pi y}{a}\int_{-a}^{a} \varphi(y) \cos\frac{r\pi y}{a}\, dy + \frac{1}{a}\sum_{r=1}^{r=\infty} \sin\frac{r\pi y}{a}\int_{-a}^{a} \varphi(y) \sin\frac{r\pi y}{a}\, dy.$$

a stąd dla funkcyj parzystych szereg:

$$\varphi(y)=\frac{1}{a}\int_0^a\varphi(y)\,dy+\frac{2}{a}\sum_{r=1}^{r=\infty}\cos\frac{r\pi y}{a}\int_0^a\varphi(y)\cos\frac{r\pi y}{a}\,dy,$$

a dla funkcyj nieparzystych szereg:

$$\varphi(y)=\frac{2}{a}\sum_{r=1}^{r=\infty}\sin\frac{r\pi y}{a}\int_0^a\varphi(y)\sin\frac{r\pi y}{a}\,dy.$$

17. **Przykłady.** 1) Rozwinąć x w szereg Fourier'a. Mamy tu:

$$A_r=0,\quad B_r=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin rx\,dx=\frac{2}{\pi}(-1)^{r-1}\frac{\pi}{r}=(-1)^{r-1}\frac{2}{r},$$

zatem:

$$x=2\left\{\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin 4x+..\right\},$$

obraz geometryczny szeregu składa się z odcinków równoległych, jak na fig. 266.

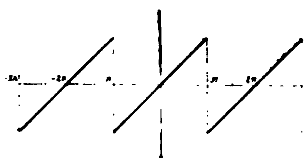


Fig. 266.

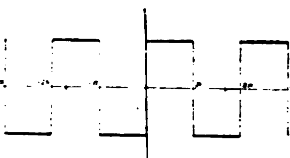


Fig. 267.

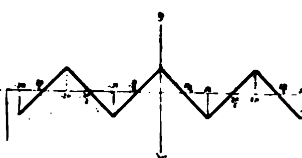


Fig. 268.

2) Rozwinąć $y=+c$, przy $0<x<\pi$ i $y=-c$, przy $0>x>-\pi$. Funkcya jest w całym przedziale nieparzystą, mamy zatem:

$$c=\frac{4c}{\pi}\left\{\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+...\right\},$$

a stąd:

$$\frac{\pi}{4}=\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+...$$

Obraz geometryczny szeregu przedstawia fig. 267.

3) Rozwinąć $y=x$, przy $0<x<\pi$ i $y=-x$, przy $-\pi<x<0$. Funkcya jest w całym przedziale parzystą, otrzymujemy zatem:

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+..\right).$$

Obraz geometryczny szeregu przedstawia fig. 268.

18. Rozwiązywanie równań różniczkowych za pomocą całek określonych. Całek określonych możemy niekiedy używać z korzyścią także przy rozwiązywaniu równań różniczkowych. Sposób postępowania podany przez Laplace'a polega na tem, że przyjmujemy dowolnie kształt całki określonej, która miałaby przedstawić rozwiązanie danego równania różniczkowego, a następnie wyznaczamy funkcyę stojącą pod znakiem całkowania, tudzież granice całkowania tak, żeby danemu równaniu różniczkowemu stało się zadość.

Sposobu tego możemy z korzyścią użyć szczególnie przy całkowaniu równań różniczkowych liniowych, mających za spółczynniki funkcye zmiennej niezależnej x, zwanych zwykle równaniami Laplace'a w postaci:

$$(a_0+b_0x)\frac{d^ny}{dx^n}+(a_1+b_1x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+(a_{n-1}+b_{n-1}x)\frac{dy}{dx}+(a_n+b_nx)y=0 \quad (45)$$

Ażeby rozwiązać to równanie załóżmy, że szukaną całką jest:

$$y=\int_{t_0}^{t_1}e^{tx}\,T\,dt, \quad (46)$$

gdzie T jest nieznaną funkcyą wyłącznie zmiennej t. Na podstawie tego założenia:

$$\frac{dy}{dx}=\int_{t_0}^{t_1} te^{tx}\,T\,dt,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\int_{t}^{t_1} t^2 e^{tx}\,T\,dt...$$

a wstawiwszy te wartości w równanie (45), otrzymujemy warunek:

$$(a_0+b_0x)\int_{t_0}^{t_1} t^n e^{tx}\,T\,dx+...+(a_{n-1}+b_{n-1}x)\int_{t_0}^{t_1} t\,e^{tx}\,T\,dx+(a_n+b_nx)\int_{t_0}^{t_1} e^{tx}\,T\,dx=0, \quad (47)$$

który, jeżeli położymy:

$$a_0t^n+a_1t^{n-1}+...+a_{n-1}t+a_n=\varphi(t),\quad b_0t^n+b_1t^{n-1}+...+b_{n-1}t+b_n=\psi(t),$$

sprowadzi się do postaci:

$$\int_{t_0}^{t_1} e^{tx}\,T\,\varphi(t)\,dt+\int_{t_0}^{t_1} xe^{tx}\,T\,\psi(t)\,dt=0. \quad (48)$$

Na podstawie metody całkowania przez części mamy:

$$\int_{t_0}^{t_1} xe^{tx}\,T\,\psi(t)\,dt=\Big|_{t_0}^{t_1}[e^{tx}\,T\,\psi(t)]-\int_{t_0}^{t_1} e^{tx}\frac{d[T\,\psi(t)]}{dt}\,dt,$$

przeto otrzymujemy z (48) warunek:

$$\Big|_{t_0}^{t_1}[e^{tx}\,T\,\psi(t)]-\int_{t_0}^{t_1} e^{tx}\left[\frac{d[T\,\psi(t)]}{dt}-T\,\varphi(t)\right]dt=0,$$

któremu stanie się zadość, gdy przyjmiemy:

$$\frac{d[T\,\psi(t)]}{dt}-T\,\varphi(t)=0 \text{ i zarazem: } \Big|_{t_0}^{t_1}[e^{tx}\,T\,\psi(t)]=0. \quad (49)$$

Pierwsze z tych równań określa T jako funkcyę zmiennej t, drugie wyznacza granice całkowania dla całki przyjętej jako rozwiązanie danego równania różniczkowego.

Ażeby wyznaczyć T, napiszemy pierwsze równanie w postaci:

$$\frac{d[T\,\psi(t)]}{dt}-\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}\,T\,\psi(t)=0,$$

a otrzymujemy stąd:

$$\frac{d[T\,\psi(t)]}{T\,\psi(t)}=\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}\,dt,$$

a więc:
$$\log T\,\psi(t)=\int\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}\,dt+c, \text{ czyli: } T\,\psi(t)=Ce^{\int\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}dt},$$

zatem:
$$T=C\frac{e^{\int\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}dt}}{\psi(t)}, \quad (50)$$

jako kształt funkcyi, którą należy podstawić w przyjętej całce określonej (48).

Drugie równanie, z którego należy wyznaczyć granice całkowania t_0 i t_1, otrzymuje teraz kształt:

$$\Big|_{t_0}^{t_1}[e^{tx}\,T\,\psi(t)]=\Big|_{t_0}^{t_1}\left[e^{tx}Ce^{\int\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}dt}\right]=\Big|_{t_0}^{t_1} Ce^{tx+\int\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}dt},$$

czyli:
$$\Big|_{t_0}^{t_1} e^{tx+\int\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}dt}=0. \quad (51)$$

Jeżeli z równania (51) potrafimy wyznaczyć dla pewnego t_0 n wartości odmiennych: $t_1, t_2, \dots, t_n$, tedy otrzymamy całkę ogólną danego równania różniczkowego w postaci:

$$y = C_1\int_{t_0}^{t_1} e^{tx}T\,dt + C_2\int_{t_0}^{t_2} e^{tx}T\,dt + \dots + C_n\int_{t_0}^{t_n} e^{tx}T\,dt. \tag{52}$$

19. Przykład. Weźmy pod uwagę równanie różniczkowe zwyczajne n-go rzędu: $\frac{d^n y}{dx^n} - xy = 0$. Załóżmy, że całka jego ma kształt:

$$y = \int_{t_0}^{t_1} e^{tx}\,T\,dt,$$

natenczas otrzymamy na wyznaczenie nieznanej funkcyi T i niewiadomych granic całkowania równanie różniczkowe:

$$\frac{d^n}{dx^n}\int_{t_0}^{t_1} e^{tx}\,T\,dt - x\int_{t_0}^{t_1} e^{tx}\,T\,dt = 0,$$

czyli:

$$\int_{t_0}^{t_1} e^{tx}t^n\,T\,dt - \int_{t_0}^{t_1} e^{tx}x\,T\,dt = 0,$$

skąd ze względu na to, że:

$$\int_{t_0}^{t_1} e^{tx}x\,T\,dt = \Big|_{t_0}^{t_1} e^{tx}\,T - \int_{t_0}^{t_1} e^{tx}\,dT,$$

otrzymujemy:

$$-\Big|_{t_0}^{t_1} e^{tx}\,T + \int_{t_0}^{t_1} e^{tx}(Tt^n\,dt + dT) = c.$$

Równaniu temu uczynimy zadość, przyjmując:

$$Tt^n\,dt + dT = 0, \qquad \Big|_{t_0}^{t_1} e^{tx}\,T = -c.$$

Z pierwszego równania dostajemy:

$$\frac{dT}{T} = -t^n dt, \text{ a stąd: } \log T = -\frac{t^{n+1}}{n+1} + C,$$

zatem:

$$T = Ce^{-\frac{t^{n+1}}{n+1}},$$

wskutek czego drugie równanie otrzymuje kształt:

$$C\Big|_{t_0}^{t_1} e^{tx - \frac{t^{n+1}}{n+1}} = -c, \text{ czyli: } C\left[e^{t_1x - \frac{t_1^{n+1}}{n+1}} - e^{t_0x - \frac{t_0^{n+1}}{n+1}}\right] = -c.$$

Przyjmując $t_0 = 0$, $C = c$ otrzymujemy na wyznaczenie granicy górnej t_1 równanie:

$$e^{t_1x - \frac{t_1^{n+1}}{n+1}} = 0,$$

któremu stanie się zadość, jeżeli $t_1 = \infty$, będzie tak zawsze, gdy: $t_1^n > (n+1)x$. Jako granice przyjętej całki określonej, występują więc 0 i ∞, otrzymujemy zatem całkę szczególną danego równania w postaci:

$$y = \int_0^\infty e^{xt - \frac{t^{n+1}}{n+1}}\,dt.$$

Wartość funkcyi T nie zmieni się, jeżeli t zastąpimy przez ωt, gdzie ω jest jakimkolwiek pierwiastkiem stopnia $(n+1)$-go z dodatniej jednostki, otrzymujemy zatem $(n+1)$ całek szczególnych, kształtu:

$$y = C_1\int_0^\infty e^{\omega tx - \frac{t^{n+1}}{n+1}}\,d(\omega t) = C_1\omega\int_0^\infty e^{\omega tx - \frac{t^{n+1}}{n+1}}\,dt.$$

Jeżeli ω jest pierwotnym pierwiastkiem, tedy tworząc powyższe całki określone dla wszystkich $(n+1)$ pierwiastków $\omega, \omega^2, \dots, \omega^n$, 1, i dodając je, otrzymamy sumę:

$$y = C_0\int_0^\infty e^{tx - \frac{t^{n+1}}{n+1}}\,dt + \omega C_1\int_0^\infty e^{\omega tx - \frac{t^{n+1}}{n+1}}\,dt + \dots + \omega^n C_n\int_0^\infty e^{\omega^n tx - \frac{t^{n+1}}{n+1}}\,dt,$$

która uczyni zadość danemu równaniu różniczkowemu, jeżeli będzie: $C_0 + C_1 + \dots + C^n = 0$.

Warunek taki zachodzić więc musi między $(n+1)$ stałemi, aby powyżej przedstawiona funkcya była całką ogólną równania różniczkowego: $\frac{d^n y}{dx^n} = xy$.

Ćwiczenia LXII.

Wyprowadzić następujące własności całek Eulera:

1) $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{(1+x)^{p+q}} = \int_0^1 \frac{x^{p-1}+x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}$.

2) $\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx = m^p \int_0^\infty e^{-mx}x^{p-1}dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2p-1}dx = \int_0^1 \log\left(\frac{1}{x}\right)^{p-1}dx.$

3) $B(p, q) = \frac{\Gamma(p) . \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$. 4) $\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1) = (p-1)(p-2)\ldots(p-m)\Gamma(p-m)$ [cut off at page edge]

eżeli $p > 1$.

5) $\Gamma(p) = (p-1)!$ jeżeli p jest liczbą całkowitą. 6) $\Gamma(p) . \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$.

7) $\Gamma(1+p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi p}{\sin p\pi}$. 8) $\Gamma(p) . \Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p)$.

9) $\frac{d \log \Gamma(x)}{dx} = \int_0^\infty [e^{-z} - (1+z)^{-x}]\frac{dz}{z} = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-y}}{y} - \frac{e^{-xy}}{1-e^{-y}}\right]dy.$

10) $\frac{d^2 \log \Gamma(x)}{dx^2} = \int_0^\infty \frac{ye^{-xy}}{1-e^{-y}}dy = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \ldots$

11) $\frac{d \log \Gamma(x)}{dx} = -C + \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{x+2}\right) + \ldots,$

gdzie $C = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-y}} - \frac{1}{y}\right)e^{-y}dy = \lim_{m=\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m-1} - \log m\right) = 0{\cdot}5772156649\ldots$

12) $\log \Gamma(x) = -C(x-1) + \left(\frac{x-1}{1} - \log\frac{x}{1}\right) + \left(\frac{x-1}{2} - \log\frac{x+1}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{x-1}{m} - \log\frac{x+m-1}{m}\right) + \ldots$ [cut off at page edge]

13) $\log \Gamma(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \left[\left(x-1\right)\log\left(1+\frac{1}{m}\right) - \log\left(1+\frac{x-1}{m}\right)\right].$

14) $\Gamma(x) = \lim_{m=\infty} \frac{1 . 2 \ldots m . m^{x-1}}{x(x+1)\ldots(x+m-1)}$. 15) $\log \Gamma(1+x) = -Cx + S_2\frac{x^2}{2} - S_3\frac{x^3}{3} + S_4\frac{x^4}{4} - \ldots$

gdzie $C = \lim_{m=\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m-1} - \log m\right)$, $S_n = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \ldots$, $(n = 2, 3\ldots)$.

16) $\int_0^\infty e^{-a^2x^2}dx = \frac{1}{2a}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$. 17) $\int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(x+a)^{p+q}}dx = \frac{1}{a^q(1+a)^p} . \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

18) $\int_0^1 x^{p-1}(1-x^2)^{q-1}dx = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) . \Gamma(q)}{2\Gamma\left(\frac{p}{2}+q\right)}$. 19) $\int_0^1 \log \Gamma(x)\,dx = \log\sqrt{2\pi}$.

20) $\int_p^{p+1} \log \Gamma(x)dx = p\log p - p + \log\sqrt{2\pi}$, (wzór Raabe'go). 21) $\int_0^\infty \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2\frac{dx}{x} = \pi^2$.

22) $\int_0^\infty e^{-x}\log x\,dx = -C = -0{,}577215664\ldots$ 23) $\int_0^\infty e^{-x^2}\log x\,dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{4}(C + \log 4)$

24) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p\varphi\cos^q\varphi\,d\varphi = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+1\right)}$. 25) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\varphi\cos^{2q-1}\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

26) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\varphi\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\varphi\,d\varphi = 2^{2p-2}\frac{\Gamma^2(p)}{\Gamma(2p)}$.

27) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tang}^n x\,dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right).\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right) = \frac{\pi}{2\cos\frac{n\pi}{2}}$, gdy $|n|<1$. 28) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tang} x}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

29) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right).\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}$, gdy $n>1$.

30) $\int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{[ax+b(1-x)]^{p+q}}dx = \frac{1}{a^p b^q}\frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$. 31) $\int_0^a x^{p-1}(a-x)^{q-1}dx = a^{p+q-1}\frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

32) $\int_0^\infty x^{p-\frac{1}{2}}e^{-x}dx = \frac{1.3\ldots(2p-1)}{2^p}\sqrt{\pi}$.

33) Kładąc logarytm całkowy: $Li(x) = \int_0^x \frac{dx}{\log x}$,

wykazać, że: $Li(e^x) = C + \log x + \frac{1}{1}\frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{3!} + \ldots$,

gdzie $C = 0{\cdot}5772156649\ldots$ jest stałą Eulera.

Dowieść, że:

34) $\int_0^\infty \frac{\sin xy}{1+y^2}dy = \frac{1}{2}[e^{-x}Li(e^x) - e^x Li(e^{-x})]$.

35) $\int_0^\infty \frac{y\cos xy}{1+y^2}dy = -\frac{1}{2}[e^{-x}Li(e^x) + e^x Li(e^{-x})]$.

36) Wykazać, że: $F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}k\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}k^2\right)^2 + \ldots\right\}$

i dowieść, że $F(0) = \frac{\pi}{2}$, $F(1) = \infty$.

37) Wykazać, że: $F\left(\frac{1}{3}\right) = 1{\cdot}617\ldots$, $F\left(\frac{1}{2}\right) = 1{\cdot}685\ldots$, $F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1{\cdot}854\ldots$, $F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2{\cdot}156\ldots$

38) Wykazać, że: $E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,.\,d\varphi = \frac{\pi}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}k\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}k^2\right)^2 - \ldots\right\}$

i dowieść, że: $E(0) = \frac{\pi}{2}$, $E(1) = 1$.

39) Wykazać, że:

$E\left(\frac{1}{3}\right) = 1{\cdot}526\ldots$, $E\left(\frac{1}{2}\right) = 1{\cdot}467\ldots$, $E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1{\cdot}350\ldots$, $E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1{\cdot}211\ldots$

40) Wykazać, że: $E(k) - F(k) = k\,.\,E'(k)$.

Dowieść, że:

41) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = \sqrt{2}F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2{\cdot}622\ldots$ 42) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1{\cdot}311\ldots$

43) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \sqrt{2}\,.\,E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0{\cdot}599\ldots$

44) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2}F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0{\cdot}927\ldots$ 45) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-2\sin^2\varphi}} = 1{\cdot}311\ldots$,

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-2\sin^2\varphi}\,d\varphi = 0{\cdot}599\ldots$ 46) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log\sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = -\frac{1}{2}F(k).\log k - \frac{\pi}{4}F(\sqrt{1-k^2})$.

47) Daną jest funkcya $f(x)$, wyznaczyć tak $(m+1)$ stałych: $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_m$, aby funkcya: $A_0 + A_1\cos x + \ldots + A_m\cos mx$ podawała w miejscach: $x = r\varphi$, $(r = 0, 1, \ldots, m)$, gdzie: $\varphi = \frac{\pi}{m+1}$, te same wartości, co funkcya $f(x)$.

48) Jaką wartość będzie miał spółczynnik A_r w zag. 47, gdy m rośnie nieograniczenie.

49) Daną jest funkcya $f(x)$, wyznaczyć tak m stałych: $B_1, B_2, \dots, B_m$, aby funkcya: $B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \dots + B_m \sin mx$ miała w miejscach: $x = \varphi, 2\varphi, \dots, m\varphi$, gdzie $\varphi = \frac{\pi}{m+1}$ te same wartości, co funkcya $f(x)$.

50) Jaką wartość będzie miał spółczynnik B_r rozwinięcia podanego w zag. 49, jeżeli to rozwinięcie ma przedstawiać wartość funkcyi $f(x)$ dla wszelkich wartości x od $x=0$ do $x = \pi$.

51) Jaką wartość mają spółczynniki A_r i B_r pod założeniem, że dla wszelkich wartości zmiennej niezależnej od $x = -\pi$ do $x = \pi$ dana funkcya $f(x)$ przedstawia się w postaci szeregu:

$$f(x) = A_0 + A_1 \cos x + \dots + A_n \cos nx + \dots + B_1 \sin x + \dots + B_n \sin nx + \dots$$

52) Wykazać, że wszelkiej funkcyi parzystej $f(x) = f(-x)$ odpowiada w granicach od $x = 0$ do $x = \pi$ szereg Fouriera, kształtu:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx + \frac{2}{\pi}\sum_{r=1}^{r=\infty} \cos rx \int_0^\pi f(x) \cos rx\, dx.$$

53) Wykazać, że wszelkiej funkcyi nieparzystej $f(x) = -f(-x)$ odpowiada w granicach od $x = 0$ do $x = \pi$ szereg Fouriera:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{r=1}^{r=\infty} \sin rx \int_0^\pi f(x) \sin rx\, dx$$

54) Wyprowadzić ogólny szereg Fourier'a, ważny w granicach od $x = -a$ do $x = a$ w postaci:

$$f(x) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx + \frac{1}{a}\sum_{r=1}^{r=\infty} \cos\frac{r\pi x}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\cos\frac{r\pi x}{a}\,dx + \frac{1}{a}\sum_{r=1}^{r=\infty} \sin\frac{r\pi x}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\sin\frac{r\pi x}{a}\,dx.$$

55) Jak się przedstawia rozwinięcie podane w (54) w przypadku, gdy $f(x)$ jest funkcyą parzystą, a jak gdy $f(x)$ jest funkcyą nieparzystą.

Wyprowadzić następujące szeregi Fouriera:

56) $\frac{x}{2} = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \dots$

57) $a = \frac{4a}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \dots\right)$. 58) $\frac{\pi}{4} = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots$

59) $x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right)$.

60) $x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \dots\right)$.

61) $x(x-\pi) = -\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \dots\right)$.

62) $e^{ax} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n}{a^2+n^2}(1 - \cos n\pi e^{a\pi}) \sin nx$. 63) $e^{ax} = \frac{e^{a\pi}-1}{a\pi} + \frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos n\pi e^{a\pi} - 1}{a^2+n^2} \cos nx$.

64) $\frac{\pi}{2}\frac{\sin ax}{\sin a\pi} = \frac{\sin x}{1^2-a^2} - \frac{2\sin 2x}{2^2-a^2} + \frac{3\sin 3x}{3^2-a^2} - \dots$

65) $\frac{\pi}{2}\frac{\cos ax}{\sin a\pi} = \frac{1}{2a} - \frac{a\cos x}{a^2-1^2} + \frac{a\cos 2x}{a^2-2^2} - \frac{a\cos 3x}{a^2-3^2} + \dots$

66) $\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots$ 67) $\frac{\pi}{4}x = \sin x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \frac{\sin 7x}{7^2} + \dots$

68) $\frac{\pi}{2a}\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}} = \frac{1}{2a^2} - \frac{\cos x}{1^2+a^2} + \frac{\cos 2x}{2^2+a^2} - \frac{\cos 3x}{3^2+a^2} + \dots$

69) $\frac{\pi}{2}\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}} = \frac{\sin x}{1^2+a^2} - \frac{2\sin 2x}{2^2+a^2} + \frac{3\sin 3x}{3^2+a^2} - \frac{4\sin 4x}{4^2+a^2} + \dots$

70) $\frac{1}{2}x\sin x = \frac{1}{2} + \frac{\cos x}{4} - \frac{\cos 2x}{1.3} + \frac{\cos 3x}{2.4} - \frac{\cos 4x}{3.5} + \dots$

71) Wykazać, że równanie różniczkowe: $x\frac{d^2y}{dx^2}-y=0$ ma rozwiązanie w postaci:

$$y=C\int_0^\infty \sin\frac{x}{v}\, e^{-\frac{1}{2}v^2} v\, dv.$$

72) Wykazać, że równanie różniczkowe: $x\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ ma rozwiązanie w postaci:

$$y=C\int_0^\infty e^{\frac{x}{v}-\frac{1}{2}v^2} v\, dv.$$

73) Wyznaczyć całkę ogólną równania różniczkowego: $\frac{d^2y}{dx^2}+m^2a^2x^{2m-2}y=0$ w postaci:

$$y=C_1\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(ax^m \sin\varphi)\cos^{-\frac{1}{m}}\varphi\, d\varphi+C_2 x\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(ax^m\sin\varphi)\cos^{\frac{1}{m}}\varphi\, d\varphi,$$

pod założeniem, że $-1<m<1$.

74) Znaleźć całkę szczególną równania różniczkowego: $ay''=\sqrt{1+y'^2}$, pod warunkiem, że dla: $x=0$ jest: $y=0$ i $y'=0$.

75) Podobnie dla równania różniczkowego: $y''=m(y+a)$.

76) Znaleźć całkę ogólną równania różniczkowego: $\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-y=0$; wiedząc, że jedną z jego całek szczególnych jest: $y_1=e^{\frac{x^2}{2}}$.

77) Znaleźć całkę ogólną równania różniczkowego Legendre'a: $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{y}\frac{dy}{dx}-\frac{a}{x^2}y=0$, sprawdziwszy, że jedną z jego całek szczególnych jest: $y_1=x^{-\frac{1}{2}}$.

Znaleźć linię krzywą, dla której:

78) $\int_a^x y^2dx=2m\int_a^x y\sqrt{1+y'^2}\,dx$. 79) $\int_a^\varphi r^2\sin d\varphi=8m\int_a^\varphi r\sin\varphi\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi$.

Rozwiązania LXII. 16) Podstawić: $y=a^2x^2$. 17) Podstawić: $\frac{x}{x+a}=\frac{y}{1+a}$. 18) Podstawić: $x^2=y$. 30) Podstawić: $x=\frac{by}{a(1-y)+by}$. 31) Połóż: $x=ay$. 47) $A_r=\frac{2\varphi}{\pi}[\cos r\varphi\,.\,f(\varphi)+\ldots+\cos mr\,.\,f(m\varphi)]$, $r=1, 2,\ldots, m$, zaś: $A_0=\frac{\varphi}{\pi}[f(\varphi)+\ldots+f(m\varphi)]$. 48) $A_r=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos rx\,.\,f(x)\,dx$, $A_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx$. 49) $B_r=\frac{2\varphi}{\pi}[\sin r\varphi f(\varphi)+\ldots+\sin mr\varphi f(m\varphi)]$, $r=1, 2,\ldots, m$. 50) $B_r=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin rx\,.\,f(x)\,dx$. 51) $A_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)\,dx$, $A_r=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)\cos rx\,dx$, $B_r=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)\sin rx\,dx$. 55) $f(x)=f(-x)=\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\,dx+\frac{2}{a}\sum_{r=1}^{r=\infty}\cos\frac{r\pi x}{a}\int_0^a f(x)\frac{\cos r\pi x}{a}\,dx$, $f(x)=-f(-x)=\frac{2}{a}\sum_{r=1}^{r=\infty}\sin\frac{r\pi x}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{r\pi x}{a}\,dx$.

Literatura. E. Césaro: Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung mit zahlreichen Übungsbeispielen, deutsch v. G. Kowalewski. Leipzig 1904. G. Lejeune-Dirichlets: Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen, herausgegeben von G. Arendt, Braunschweig 1904 G. F. Meyer: Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale zwischen reellen Grenzen. Leipzig 1871. Wł. Zajączkowski: Wykład nauki o równaniach różniczkowych. Paryż 1877.

Tematy do rozpraw naukowych.

1. Teorya całek Eulera.
2. Całki i szeregi Fouriera.
3. Całkowanie równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych za pomocą całek określonych.

Wykład LXIII.

Zasadnicze pojęcia rachunku przemienności.

1. Pojęcie przemienności funkcyi. Niech będzie daną pewna funkcya zmiennej niezależnej x w postaci $y=f(x)$. Wyobraźmy sobie teraz inną funkcyę nieskończenie mało różną od danej funkcyi y, t. j. nową funkcyę posiadającą tę własność, że dla każdej wartości zmiennej niezależnej x odpowiednia wartość tej nowej funkcyi różni się nieskończenie mało od wartości [illegible]zynal[illegible] danej funkcyi $y=f(x)$. Otóż tę nieskończenie małą zmianę w[illegible] danej funkcyi y nazywamy przemiennością (waryacyą) [illegible] y i oznaczamy przez δy. Przemienność δy funkcyi y jest w ogóle z[illegible] dowolną wielkością nie tylko dla różnych wartości zmiennej niezależnej x, lecz także dla pewnej danej wartości tejże zmiennej x. Znak $y+\delta y$ [illegible]dstawia zatem nie jedną, lecz nieskończenie wiele nowych funkcyj zbli[illegible] nieskończenie do danej funkcyi y.

2. Chcąc zaznaczyć w pewien sposób przejście od danej funkcyi do następnej $y+\delta y$, połóżmy $y=\varphi(x, t)$, gdzie t jest dowolnym parametrem, ze zmianą parametru t możemy tedy wydobyć coraz inne funkcye zmiennej x. Mianowicie otrzymujemy tedy przemienność:

$$\delta y=\frac{\partial\varphi(x, t)}{\partial t}dt, \tag{1}$$

a więc przedstawioną w postaci cząstkowej różniczki funkcyi $\varphi(x, t)$ wywołanej zmianą parametru t.

Jeżeli przeciwnie parametr t pozostaje niezmieniony, wówczas mamy do czynienia z funkcyą zmiennej niezależnej x i otrzymujemy różniczkę tej funkcyi określoną wzorem:

$$dy=\frac{\partial\varphi(x, t)}{\partial x}dx, \tag{2}$$

Przemienność δy i różniczka dy mogą być więc uważane za różniczki tej samej funkcyi, przemienność δy byłaby tedy tylko różniczką zmiennej y uważanej za funkcyę parametru t przy niezmiennem x, podczas gdy dy jest różniczką zmiennej y uważanej za funkcyę zmiennej x przy niezmiennym parametrze t. Skoro y otrzymuje przyrost δy, wówczas y' otrzymuje przyrost $\delta y'$, y'' zaś $\delta y''$ i t. d., a wszelka funkcya V, która zależy od y, y', y'', otrzymuje tedy przemienność δV zależną od przemienności δy, $\delta y'$, $\delta y''$ i t. d.

Z tego określenia waryacyi wynika, że do symbolu δ stosują się podobne prawidła, jak do symbolu różniczkowania d. Nie trudno zauważyć przy tem, że symbole d i δ są przemienne, że mianowicie:

$$\frac{d^i y}{dx^i}(\delta^k y) = \delta^k\left(\frac{d^i y}{dx^i}\right).$$

3. Przejście od danej funkcyi $y=f(x)$ do następnej $y+\delta y$ może być także w ten sposób zaznaczone, że przyjmiemy:

$$\delta y = \varepsilon\,.\,\eta(x), \tag{3}$$

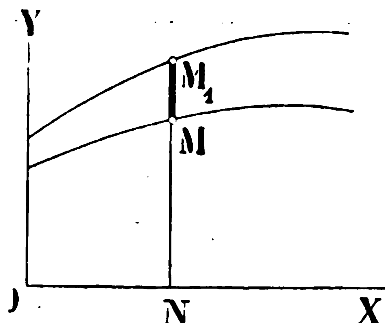


Fig. 269.

gdzie $\eta(x)$ jest pewną niewiadomą funkcyą, a ε wielkością nieskończenie małą.

Geometrycznie przedstawia to nieskończenie małe przekształcenie wywołane przesunięciem krzywej $y=f(x)$ w kierunku osi y o wielkość zmienną $\delta y = \varepsilon\,.\,\eta(x)$, skutkiem czego następuje przekształcenie krzywej $y=f(x)$ na krzywą: $y+\delta y = f(x) + \varepsilon\eta(x)$ (fig. 269).

Dowolny punkt M krzywej $y=f(x)$ zajmie teraz położenie M_1, gdzie $MM_1 = \delta y = \varepsilon\,.\,\eta(x)$.

4. **Przemienność całki określonej.** Postawmy sobie za zadanie wyznaczyć przemienność całki określonej:

$$U = \int_{x_0}^{x_1} V\,dx, \tag{4}$$

gdzie V jest wiadomą funkcyą zmiennej niezależnej x, jej funkcyi y i pochodnych y', y'',... a x_0 i x_1 przedstawiają pewne stałe granice całkowania.

Połóżmy: $$V = f(x,\ y,\ y',\ y''\ldots),$$

tedy będzie przemienność tej funkcyi:

$$\delta V = f(x,\ y+\delta y,\ y'+\delta y',\ y''+\delta y'',\ldots) - f(x,\ y,\ y',\ y''\ldots),$$

przedstawi się na mocy wzoru Taylora w postaci:

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial V}{\partial y''}\delta y'' + \ldots \tag{5}$$

zatem będzie:

$$\delta U = \delta\int_{x_0}^{x_1} V\,dx = \int_{x_0}^{x_1}\delta V\,dx = \int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial V}{\partial y''}\delta y'' + \ldots\right)dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial V}{\partial y}\delta y\,dx + \int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial V}{\partial y'}\delta y'\,dx + \int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial V}{\partial y''}\delta y''\,dx + \ldots$$

Na podstawie metody całkowania przez części otrzymujemy atoli:

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial V}{\partial y'}\delta y'\,dx = \int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial V}{\partial y'}\cdot\frac{\delta\,dy}{dx}\,dx = \int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial V}{\partial y'}\cdot\frac{d\delta y}{dx}\,dx = \Big|_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial V}{\partial y'}\delta y\right) - \int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^2 V}{\partial y'\,\partial x}\delta y\,dx,$$

następnie:

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial V}{\partial y''}\delta y''\,dx = \int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial V}{\partial y''}\frac{\delta\,d^2 y}{dx^2}\,dx = \int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial V}{\partial y''}\cdot\frac{d^2\delta y}{dx^2}\,dx = \Big|_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial V}{\partial y''}\delta y'\right) - \int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^2 V}{\partial y''\,\partial x}\delta y'\,dx =$$

$$= \Big|_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial V}{\partial y''}\delta y'\right) - \Big|_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y''\,\partial x}\delta y\right) + \int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^3 V}{\partial y''\,\partial x^2}\delta y\,dx$$

i tak dalej, zatem jest:

$$\delta U = \Big|_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\delta y\right) + \Big|_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial V}{\partial y'}\delta y\right) + \Big|_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial V}{\partial y''}\delta y' - \Big|_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y''\,\partial x}\delta y\right) + \ldots +\right.$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial y'\,\partial x} + \frac{\partial^3 V}{\partial y''\,\partial x} - \ldots\right)\delta y\,dx,$$

czyli:

$$\delta U = \Big|_{x_0}^{x_1} \sum + \int_{x_0}^{x_1} \Phi\, \delta y\, dx, \tag{6}$$

gdy:

$$\Big|_{x_0}^{x_1} \sum = \Big|_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \delta y + \frac{\partial V}{\partial y'} \delta y - \frac{\partial^2 V}{\partial y'' \partial x} \delta y + \dots \right)$$

przedstawia zbiór funkcyj nie wymagających żadnego całkowania, a zależnych tylko od granic x_0 i x_1, zaś:

$$\Phi = \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial x} + \frac{\partial^3 V}{\partial y'' \partial x^2} - \dots$$

5. Maximum lub minimum całki określonej. Możemy teraz wyznaczyć warunki, pod jakimi całka określona: $U = \int_{x_0}^{x_1} V dx$ będzie maximum lub minimum. Przedewszystkiem musi być w takim razie:

$$\delta U = 0. \tag{7}$$

To wymaga jednakże, aby było $\Phi = 0$ przeto także $\Sigma = 0$.

Równanie $\Phi = 0$ przedstawia się w postaci równania różniczkowego:

$$\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial x} + \frac{\partial^3 V}{\partial y'' \partial x^2} - \dots = 0, \tag{8}$$

które będzie zawierało tyle stałych dowolnych, ile wskazuje rząd najwyższej pochodnej $\frac{d^n y}{dx^n}$, w tem równaniu występującej.

Na wyznaczenie tych stałych służy drugi warunek:

$$\Sigma = \Big|_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \delta y \right) + \Big|_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial V}{\partial y'} \delta y \right) + \Big|_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V}{\partial y''} \delta y' - \Big|_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y'' \partial x} \delta y \right) + \dots = 0, \tag{9}$$

który, zawierając przemienności: δy_0, δy_1, $\delta y'_0$, $\delta y'_1$,... które mogą być dowolnemi wielkościami, spełni się, gdy spółczynniki przy tych przemiennościach będą zerami, a to dostarczy tyle równań, ile stałych będzie do wyznaczenia.

Zagadnienie wyznaczenia maximum lub minimum całki określonej polega zatem na całkowaniu równania różniczkowego $\Phi = 0$.

6. Zagadnienie o brachistochronie. Znaleźć linię krzywą, po której punkt ruchomy przejdzie pod wpływem siły ciężkości w najkrótszym czasie od punktu A do B (fig. 270).

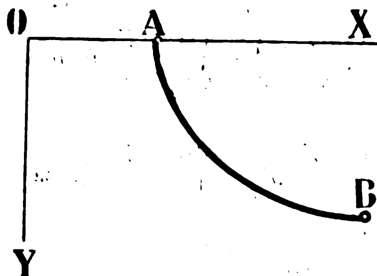


Fig. 270.

Przyjmijmy oś OY zwróconą w kierunku siły ciężkości i przesuńmy oś OX przez punkt A, wtedy otrzymamy prędkość v w dowolnym punkcie M określoną wzorem:

$$v = \sqrt{2gy} = \frac{ds}{dt},$$

gdzie s jest długością przebytej drogi, a t czasem upłynionym. Otrzymujemy stąd:

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2gy}} . ds = \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx.$$

Czas potrzebny do przebycia łuku AB przedstawi się zatem pod postacią wzoru:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx.$$

Mamy zatem wyszukać taką funkcyę, dla której całka określona:

$$U = \int_{x_0}^{x_1} V dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx$$

otrzymuje wartość minimalną. Mamy tu:

$$V=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}},\quad \frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y^{3/2}},\quad \frac{\partial V}{\partial y'}=\frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}.$$

Warunek $\delta U=0$ prowadzi tu do równania:

$$\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{\partial^2 V}{\partial y'\partial x}=0,$$

skąd ze względu na to, że: $\frac{\partial^2 V}{\partial y'\partial x}=\frac{2yy''-y'^2-y'^4}{2[y(1+y'^2)]^{3/2}}$, otrzymujemy równanie różniczkowe:

$$-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y^{3/2}}-\frac{2yy''-y'^2-y'^4}{2y^{3/2}(1+y'^2)^{3/2}}=0,$$

które po uproszczeniu otrzymuje kształt:

$$(1+y'^2)^2+2yy''-y'^2-y'^4=0,\ \text{czyli: } 1+y'^2+2yy''=0.$$

Otrzymane równanie różniczkowe jest rzędu drugiego i powstaje z różniczki zupełnej:

$$d\left(\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)^2}}\right)=0,$$

ma zatem pierwszą całkę w postaci:

$$\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}}=C,\ \text{czyli: } y(1+y'^2)=\frac{1}{C^2}.$$

Kładąc $\frac{1}{C^2}=2a$, otrzymujemy stąd równanie różniczkowe rzędu pierwszego w postaci:

$$y'^2=\frac{2a-y}{y},\ \text{skąd dostajemy: } \frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{2a-y}{y}}.$$

Będzie więc: $dx=\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2a-y}}dy$, czyli: $dx=\frac{y\,dy}{\sqrt{2ay-y^2}}$, zatem: $x=\int\frac{y\,dy}{\sqrt{2ay-y^2}}+b$.

Ze względu na to, że:

$$\int\frac{y\,dy}{\sqrt{2ay-y^2}}=a\int\frac{dy}{\sqrt{2ay-y^2}}-\frac{1}{2}\int\frac{d(2ay-y^2)}{\sqrt{2ay-y^2}},$$

otrzymujemy stąd równanie szukanej krzywej w postaci:

$$x=a\,.\,\text{arc cos}\frac{a-y}{a}-\sqrt{2ay-y^2}+b.$$

Kładąc: $\frac{a-y}{a}=\cos\varphi$, zatem: $\sin\varphi=\frac{\sqrt{2ay-y^2}}{a}$, zastąpimy powyższe równanie dwoma równaniami w postaci:

$$x-b=a(\varphi-\sin\varphi),\quad y=a(1-\cos\varphi)$$

wskazującemi cykloidę zwyczajną jako szukaną brachistochronę.

Na wyznaczenie stałych a i b wystarczają dwa punkta A i B, przez które ma krzywa przechodzić.

7. Przemienność całek określonych o zmiennych granicach całkowania.

Jeżeli w całce określonej: $U=\int_{x_0}^{x_1}V\,dx$ mogą oprócz funkcyi y, występującej w wyrażeniu: $V=f(x, y, y', y'',\ldots)$, zmieniać się także granice x_0 i x_1, t. z. geometrycznie, jeżeli punkta końcowe krzywej $y=f(x)$ zamiast pozostać stałe mają się poruszać po krzywych $y=\varphi(x)$ i $y=\psi(x)$, wówczas należy do przemienności δU, otrzymanej pod założeniem, że granice x_0 i x_1 są stałe, dołączyć jeszcze przemienność całki, spowodowaną przemiennością granic x_0 o δx_0, x_1 o δx_1.

Ta dodatkowa przemienność przedstawia się w postaci:

$$\int_{x_0+\delta x_0}^{x_1+\delta x_1}V\,dx-\int_{x_0}^{x_1}V\,dx=\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1}V\,dx-\int_{x_0}^{x_0+\delta x_0}V\,dx=V_1\delta x_1-V_0\delta x_0=\Big|_{x_0}^{x_1}(V\delta x).$$

Będzie tedy zupełna przemienność danej całki określonej przedstawiona wzorem:

$$\delta U = \int_{x_0}^{x_1} \Phi \delta y \,.\, dx + \Big|_{x_0}^{x_1} \Big(\Sigma + V \delta x \Big), \tag{10}$$

przyczem przemienności δx są na granicach zależne od przemienności δy według wzorów:

$$\delta y_0 = [\varphi'(x_0) - y'_0]\, \delta x_0, \quad \delta y_1 = [\psi'(x_1) - y'_1]\, \delta x_1.$$

8. Szukając np. brachistochrony pod założeniem, że jej punkta końcowe A i B znajdować się mają na krzywych $y = \varphi(x)$ i $y = \psi(x)$, otrzymamy z warunku $\Phi = 0$, jak powyżej, cykloidę:

$$x - b = a(\varphi - \sin \varphi), \quad y = a(1 - \cos \varphi).$$

Warunek $\Big|_{x_0}^{x_1} \Big(\Sigma + V \delta x \Big) = 0$, ze względu na to, że:

$$y(1 + y'^2) = 2a, \text{ a więc: } V = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{2a}}{y}, \quad \Sigma = \frac{y'}{\sqrt{y(1 + y'^2)}} \delta y = \frac{y' \delta y}{\sqrt{2a}},$$

a wskutek tego:

$$\Sigma + V \delta x = \frac{y'}{\sqrt{2a}} \delta y + \frac{\sqrt{2a}}{y} \delta x,$$

$$\delta y_0 = (\varphi'(x_0) - y'_0)\, \delta x_0, \quad \delta y_1 = [\psi'(x_1) \;\; y'_1]\, \delta x_1,$$

a więc:

$$\Sigma_0 + V_0 \delta x_0 = \frac{y'_0}{\sqrt{2a}} [\varphi'(x_0) - y'_0]\, \delta x_0 + \frac{\sqrt{2a}}{y_0} \delta x_0 = [y'_0 \varphi'(x_0) + 1] \frac{\delta x_0}{\sqrt{2a}},$$

$$\Sigma_1 + V_1 \delta x_1 = \frac{y'_1}{\sqrt{2a}} [\psi'(x_1) - y'_1]\, \delta x_1 + \frac{\sqrt{2a}}{y_1} \delta x_1 = [y'_1 \psi'(x_1) + 1] \frac{\delta x_1}{\sqrt{2a}},$$

otrzymuje tu kształt:

$$\Big|_{x_0}^{x_1} \Big(\Sigma + V \delta x \Big) = \Big[1 + y'_1 \psi(x_1) \Big] \frac{\delta x_1}{\sqrt{2a}} - \Big[1 + y'_0 \varphi(x_0) \Big] \frac{\delta x_0}{\sqrt{2a}} = 0,$$

z którego wypływają dwa równania graniczne:

$$1 + y'_1 \psi(x_1) = 0, \quad 1 + y'_0 \varphi(x_0) = 0.$$

Musi być zatem: $y'_0 = -\frac{1}{\varphi(x_0)}$, $y'_1 = -\frac{1}{\psi(x_1)}$, **co dowodzi, że szukana cykloida jako brachistochrona musi obie dane krzywe:** $y = \varphi(x)$ **i** $y = \psi(x)$ **przeciąć pod kątem prostym.**

9. Maximum lub minimum całki określonej zależnej od dwu lub więcej funkcyj. Niech będzie teraz dana całka określona kształtu: $U = \int_{x_0}^{x_1} V dx$, gdzie: $V = f(x, y, z, y', z', y'', z'', \ldots)$, przyczem y i z są dwie niewiadome funkcye zmiennej x, od siebie niezależne.

Szukając przemienności funkcyi U wywołanej przemiennościami funkcyj y i z, otrzymujemy według art. 4 wzór:

$$\delta U = \int_{x_0}^{x_1} (\Phi \delta y + \Psi \delta z)\, dx + \Big|_{x_0}^{x_1} \Big(\Sigma + \Gamma \Big), \tag{11}$$

gdzie Ψ i Γ są odnośnie do funkcyi z wielkościami Φ i Σ odnośnie do funkcyi y.

Na wyznaczenie funkcyj y i z, które są wstanie wywołać maximum lub minimum danej całki określonej, a więc spełniają warunek $\delta U = 0$, otrzymujemy tu dwa równania:

$$\Phi = 0, \quad \Psi = 0, \tag{12}$$

nadto na wyznaczenie stałych równania: $\Big|_{x_0}^{x_1} \Sigma = 0$, $\Big|_{x_0}^{x_1} \Gamma = 0$.

Jeżeli funkcye y i z mają być od siebie zależne na podstawie równania: $F(x, y, z)=0$, tedy przemienności δy i δz funkcyj y i z nie są od siebie niezależne, lecz związane relacyą:

$$\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial z}\delta z=0. \qquad (13)$$

Warunek maximum lub minimum danej całki określonej, przedstawiając się w postaci: $\Phi\delta y+\Psi\delta z=0$ sprowadza się stąd do warunku: $\Phi:\frac{\partial F}{\partial y}=\Psi:\frac{\partial F}{\partial z}$, który musi się spełniać dla wszystkich wartości zmiennej niezależnej x, zawartych między granicami x_0 i x_1.

10. Mając np. znaleźć najkrótszą odległość dwu punktów na powierzchni $F(x, y, z)=0$ mamy znaleźć minimum całki:

$$U=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx.$$

Mamy tu: $\Phi=-\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}$, $\Psi=-\frac{d}{dx}\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}$;

oznaczając przez s długość łuku szukanej krzywej mamy:

$$ds=\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx,\quad \text{zatem: } \frac{dy}{ds}=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}},\quad \frac{dz}{ds}=\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}},$$

z czego widzimy, że Φ i Ψ są proporcyonalne do cosinusów kątów β i γ, jakie główna normalna szukanej krzywej tworzy z osią y-ów i z-ów.

A że: $\frac{\partial F}{\partial y}$ i $\frac{\partial F}{\partial z}$ są proporcyonalne do cosinusów kątów μ i ν, jakie ta normalna do powierzchni tworzy z temi osiami, a przytem ma być: $\Phi:\frac{\partial F}{\partial y}=\Psi:\frac{\partial F}{\partial z}$, więc widzimy z tego, że płaszczyzna ściśle styczna w każdym punkcie szukanej krzywej wpada w płaszczyznę normalną do powierzchni, co jest własnością linij geodezyjnych na tejże powierzchni.

11. Maximum lub minimum całki określonej z warunkami dodatkowymi. Częstokroć chodzi o wyznaczenie maximum lub minimum danej całki określonej U pod założeniem, że inna całka określona V od niewiadomych funkcyj zależna otrzymuje pewną stałą wartość.

W tym przypadku należy, jak wynika ze sposobów wyznaczania maximum lub minimum funkcyi ilukolwiek zmiennych, wyznaczyć maximum lub minimum całki $U+\lambda V$, a więc położyć równą zeru przemienność sumy $U+\lambda V$, gdzie λ jest wielkością stałą, którą stosownie obrać należy.

12. Mając np. między krzywemi o stałej długości wyznaczyć taką, której powierzchnia ograniczona osią x ów i krańcowemi rzędnemi byłaby maximum lub minimum, mamy wyznaczyć taką funkcyę, któraby wywołała maximum lub minimum całki określonej: $U=\int_{x_0}^{x_1}y\,dx$, niezmieniając wartości całki określonej: $\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}dx$.

Połóżmy: $f=y+\lambda\sqrt{1+y'^2}$, to ze względu na to, że f jest wyłącznie funkcyą y i y', otrzymamy:

$$\frac{df}{dx}=\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial y'}y''=y'\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}+\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{dy'}{dx}=\frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right),$$

zatem: $$\frac{d}{dx}\left(f-y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0,\ \text{a więc: } f-y'\frac{\partial f}{\partial y'}=C,$$

gdzie C jest pewną liczbą stałą.

W danym przypadku jest:

$$\frac{\partial f}{\partial y'}=\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}},\quad f-y'\frac{\partial f}{\partial y'}=y+\lambda\sqrt{1+y'^2}-\frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=y+\frac{\lambda}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Oznaczywszy stałą C przez b, otrzymamy równanie:

$$y+\frac{\lambda}{\sqrt{1+y'^2}}=b,$$

które rozwiązane podług y' sprowadza się do postaci: $y'=\frac{\sqrt{\lambda^2-(b-y)^2}}{b-y}$.

Otrzymujemy zatem po oddzieleniu zmiennych równanie różniczkowe kształtu:

$$dx=\frac{(b-y)\,dy}{\sqrt{\lambda^2-(b-y)^2}},\ \text{a stąd: } x=\int\frac{(b-y)\,dy}{\sqrt{\lambda^2-(b-y)^2}}=\sqrt{\lambda^2-(b-y)^2}+a,$$

a więc

$$(x-a)^2+(y-b)^2=\lambda^2;$$

krzywą tą jest zatem łuk koła, którego środek (a, b) i promień λ znajdziemy z warunku, że koło przechodzić ma przez dwa dane punkta, a długość łuku ma mieć pewną stałą wartość.

13. Przemienność całki określonej zależnej od niewiadomej funkcyi dwu lub więcej zmiennych. Weźmy pod uwagę całkę określoną kształtu:

$$U=\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} f(x, y, z, p, q)\,dx\,dy,$$

rozciągającą się na pewien dany zakres całkowania, w którym z jest niewiadomą funkcyą zmiennych niezależnych x i y, a p i q są jej pochodnemi cząstkowemi.

Przemienność δz tejże niewiadomej funkcyi wywołuje przemienność δf funkcyi $f(x, y, z, p, q)$ w postaci:

$$\delta f=\frac{\partial f}{\partial z}\delta z+\frac{\partial f}{\partial p}\delta p+\frac{\partial f}{\partial q}\delta q. \tag{14}$$

Mamy jednak:

$$\frac{\partial f}{\partial p}\delta p=\frac{\partial f}{\partial p}\delta\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \delta z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\delta z\right)-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p}\delta z,$$

$$\frac{\partial f}{\partial q}\delta q=\frac{\partial f}{\partial q}\delta\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial \delta z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\delta z\right)-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial q}\delta z,$$

zatem:

$$\partial f=\left(\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial q}\right)\delta z+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\delta z\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\delta z\right).$$

Kładąc: $\Phi=\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial p}-\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial q}$, otrzymujemy:

$$\delta U=\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\Phi\,\delta z\,dx\,dy+\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\delta z\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\delta z\right)\right]dx\,dy. \tag{15}$$

Jeżeliby z była taką funkcyą zmiennych x i y, dla której wartość całki określonej U byłaby maximum lub minimum, musiała by być przemienność $\delta U=0$, a to się stanie, skoro będzie:

$$\Phi=0,\ \text{a następnie: } \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\partial z\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\delta z\right)\right]dx\,dy=0.$$

Równanie:

$$\Phi=0,\ \text{czyli: } \frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial q}=0, \tag{16}$$

prowadzi do równania różniczkowego cząstkowego, którego całka ogólna określa ogólną postać funkcyi z, drugie równanie wyznacza szczególne funkcye, występujące także w całce ogólnej.

Mając np. przeprowadzić przez daną krzywą zamkniętą pewną powierzchnię, na którejby ta krzywa ograniczała najmniejszą powierzchnię, mamy znaleźć minimum całki określonej: $U=\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$. Mamy tu:

$$f=\sqrt{1+p^2+q^2},\qquad \Phi=-\frac{\partial}{\partial x}\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Warunek $\Phi=0$ prowadzi tu do równania różniczkowego cząstkowego rzędu drugiego, kształtu:

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0,$$

które jest równaniem różniczkowem powierzchni minimalnych.

Ćwiczenia LXIII.

1) Wykazać, że kolejne przemienności $\delta\varphi$, $\delta^2\varphi,\ldots$ funkcyi $\varphi(x,\ y,\ y',\ y'',\ldots y^{(m)})$ można przedstawić w postaci:

$$\delta\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y+\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\delta y'+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial y^{(m)}}\delta y^{(m)},\qquad \delta^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\delta y^2+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2}\delta y'^2+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial y'}\delta y\,\delta y'+\ldots$$

jeżeli $\delta y,\ \delta y',\ldots,\delta y^{(m)}$ są przemiennościami funkcyi y i jej pochodnych $y',\ y'',\ldots,y^{(m)}$.

2) Wykazać, że przemienności całki określonej: $U=\int_{x_0}^{x_1}\varphi(x,\ y,\ y',\ldots,y^{(m)})dx$ przedstawiają się w przypadku stałych granic całkowania w postaci:

$$\delta U=\int_{x_0}^{x_1}\delta\varphi\,dx,\quad \delta^2U=\int_{x_0}^{x_1}\delta^2\varphi\,dx,\ldots,\delta^rU=\int_{x_0}^{x_1}\delta^r\varphi\,dx.$$

3) Wykazać, że w przypadku, gdy granice całkowania x_0 i x_1 zmieniają się o δx_0 i δx_1 zależne przemienności δU i δ^2U całki określonej: $U=\int_{x_0}^{x_1}\varphi(x,y,y',\ldots,y^{(m)})dx$ wyrażają się wzorami:

$$\delta U=\int_{x_0}^{x_1}\delta\varphi\,dx+\Big|_{x_0}^{x_1}(\varphi\,\delta x)=\int_{x_0}^{x_1}\delta\varphi\,dx+\varphi_1\delta x_1-\varphi_0\delta x_0.$$

$$\delta^2U=\int_{x_0}^{x_1}\delta^2\varphi\,dx+\Big|_{x_0}^{x_1}\left(\frac{d\varphi}{dx}\delta x^2+2\delta\varphi\,\delta x\right)=\int_{x_0}^{x_1}\delta^2\varphi\,dx+\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_1\delta x_1^2-\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0\delta x_0^2+2(\delta\varphi)_1\delta x_1-2(\delta\varphi)_0\delta x_0.$$

4) Wykazać, że w przypadku maximum lub minimum całki określonej: $U=\int_{x_0}^{x_1}\varphi(x,\ y,\ y',\ldots)dx$ jej pierwsza przemienność δU musi stawać się zerem dla wszelkich przemienności δy, δx_0, δx_1, a zarazem druga przemienność δ^2U musi być stale różną od zera.

5) Przyjmując: $U=\int_{x_0}^{x_1}\varphi(x,\ y,\ y')dx$ wykazać, że:

$$\delta U=\Big|_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\delta y\right)+\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)\right]\delta y\,dx.$$

6) Wykazać, że konieczny warunek istnienia maximum lub minimum całki: $U=\int_{x_0}^{x_1}\varphi(x.\ y,\ y')dx$ sprowadza się do równania różniczkowego: $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)=0.$

7) Wyznaczyć tak zmienną y jako funkcyę zmiennej x, aby całka określona: $\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx$ była minimum.

8) Dla jakiej funkcyi całka określona: $\int_{x_1}^{x_2}y\sqrt{1+y'^2}\,dx$ będzie miała minimum.

9) Wyznaczyć tak zmienną r jako funkcyę zmiennej φ, aby całka określona: $\int_0^{\pi}\left(r^2-2a\sqrt{r^2+r'^2}\right)d\varphi$ była maximum.

10) Dla jakiej funkcyi otrzymuje całka określona: $\int_{-a}^{a}y\,dx$ wartość najmniejszą pod założeniem, że całka: $\int_{-a}^{a}\sqrt{1+y'^2}\,dx$ ma stałą wartość $2l$.

11) Dla jakich funkcyj zmiennej niezależnej t uzyska wartość minimalną całka określona: $\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$.

12) Wyznaczyć tak zmienną z, jako funkcyę dwu zmiennych niezależnych x i y, aby całka określona: $\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$ otrzymała wartość minimalną.

13) Znaleźć linię najkrótszego oddalenia dwóch punktów.

14) Daną jest krzywa płaska, znaleźć drugą krzywą płaską o danej długości tak, żeby powierzchnia zawarta między temi krzywemi była największą.

15) Przez dwa dane punkta przeprowadzić tak linię krzywą, aby powierzchnia powstała przez obrót tej krzywej około danej osi była najmniejszą.

16) Pomiędzy wszystkiemi krzywemi o danej długości wyznaczyć taką, która przez swój obrót około danej osi opisze największą lub najmniejszą powierzchnię.

17) Pomiędzy krzywemi o danej długości wyznaczyć taką, która przez obrót około danej osi utworzy największą lub najmniejszą objętość.

18) Znaleźć linię krzywą tak, aby powierzchnia powstała przez obrót tej krzywej około danej osi miała daną wartość stałą, a odpowiednia objętość była maximum lub minimum.

19) Która linia krzywa zamyka przy danym obwodzie największą powierzchnię.

20) Znaleźć linię krzywą taką, ażeby powierzchnia zawarta między tą krzywą, jej ewolutą i końcowymi promieniami krzywizny była minimum.

21) Znaleźć linię krzywą, która ze względu na dany punkt ma największy lub najmniejszy moment bezwładności.

22) Na danej powierzchni znaleźć najkrótszą linię między dwoma punktami.

23) Znaleźć najkrótszą linię między dwoma punktami, mającą pewną stałą krzywiznę.

24) Na danej powierzchni wykreślono pewną linię krzywą, znaleźć na tej powierzchni drugą krzywą o danej długości, zamykającą z pierwszą krzywą największą powierzchnię.

25) Znaleźć równanie powierzchni, dla której całka podwójna: $\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\sqrt{p^2+q^2}\,dx\,dy$ miałaby największą lub najmniejszą wartość.

26) Znaleźć równanie powierzchni, dla której całka podwójna: $\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}(z-px-qy)\,dx\,dy$ byłaby maximum lub minimum, przy danej stałej wartości całki: $\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\sqrt{p^2+q^2}\,dx\,dy$.

Rozwiązania LXIII. 7) $y=ax+b$. 8) $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x-b}{a}}+e^{-\frac{x-b}{a}}\right)$. 9) $r=2a\sin\varphi$. 10) $(y-c')^2+(x-c)^2=\frac{l^2}{\pi^2}$. 11) $x=at+\alpha$, $y=bt+\beta$, $z=ct+\gamma$. 12) Całka ogólna równania różniczkowego: $(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0$. 15) Linia łańcuchowa.

Literatura. Oskar Bolza: Lectures on the calculus of variations. Chicago 1904. M. C. Jordan: Cours d'analyse de l'école polytechnique. Tome troisième. Paris, 1887. Kneser: Lehrbuch der Variationsrechnung. Braunschweig 1900 Moigno: Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral. Tome quatrième. Calcul des variations rédigé en collaboration avec M. Lindelöf. Paris 1861.

Tematy do rozpraw naukowych:

1. Maxima i minima całek określonych pojedyńczych.
2. Maxima i minima całek określonych podwójnych i potrójnych.
3. Teorya zagadnień izoperymetrycznych.

Koniec tomu II.

Dostrzeżone omyłki drukarskie.

wiersz:	zamiast:	powinno być:
6 od dołu,	$8\int dx+\int\frac{dx}{x-1}=$	$8\int dx+7\int\frac{dx}{x-1}$
2 „	$[ax^2-bx+c-$	$[ax^2+bx+c-$
13 od góry	$\int R,\ y)dx$	$\int R(x,\ y)dx$

ostatni wzór (10) i str. 59 wiersz drugi i czwarty od góry skreślić współczynniki przez arc sin jako nie potrzebne.

5 od dołu	$\int\frac{Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^m y}$	$\int\frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)y}$
17 od góry	$\frac{dx}{y}=$	$\int\frac{dx}{y}=$
11 „ we wz. (13)	$A\int\frac{dy}{y}$	$A\int\frac{dx}{y}$

11 i 13 od dołu we wzorach (1) na I' przed log postawić brakujący współczynnik $\frac{1}{\sqrt{a\alpha^2+b\alpha+c}}$

3 od dołu powinien mieć postać $I''=-\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{du}{u^2(x_1-\alpha)(x_2-\alpha)}=$

$$=\frac{1}{\sqrt{a(x_1-\alpha)(x_2-\alpha)}}\log\frac{u\sqrt{x_1-\alpha}+\sqrt{x_2-\alpha}}{u\sqrt{x_1-\alpha}+\sqrt{x_2-\alpha}}$$

w. 10 i 11 od góry we wzorach (2) i (3) zamiast $\Delta>0$, powinno być $\Delta<0$.

w. 7 we wzorze (6) w mianowniku po x zamiast $(1+\sqrt{\alpha^2+1})$, powinno być $(-1+\sqrt{\alpha^2+1})$.

w. 10 od dołu we wzorze (3) zamiast $\int x^{m-np}(a+bx^n)\,dx$, powinno być $\int x^{m-np}(a+bx^n)^p\,dx$.

9 od dołu	$[bz\beta+$	$[bz^\beta+$

w. 9 od góry zamiast $s+2$ przez s, a więc s przez $s-2$, powinno być $s-2$ przez s, a więc s przez $s+2$.

2 od góry	$2m-1$ w mianowniku	$2m-2$
11 „	$-\frac{\cos^3\dot{x}}{3}\{\sin^2x+2\}$	$-\frac{\cos x}{3}\{\sin^2x+2\}$
6 od dołu	$I_{s-2,\ m+2}$	$I_{s-2,\ k+2}$
8 od góry	$\frac{\operatorname{tg}^{2r-2}x}{2r-2}$	$\frac{\operatorname{tg}^{2r-3}x}{2r-3}$
7 „	$\frac{s+k}{2}$	$\frac{s+k}{2}+1$
14 „	$\frac{b\sin^2\varphi}{b\cos^2\varphi}$	$\frac{b\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}$
10 od dołu	$\int\sum_{r=0}^{r=m}\binom{m}{r}$	$\int\sum_{r=0}^{r=m}(-1)^r\binom{m}{r}$
wiersz ostatni	$\frac{a\cos x+\sin x}{a^2+1}$, oraz $\frac{a\sin x-\cos x}{a^2+1}$,	$\frac{a\cos x+\sin x}{a^2+1}e^{ax}$, oraz $\frac{a\sin x-\cos x}{a^2+1}e^{ax}$
14 od dołu		ma być $\frac{dv}{dx}=\frac{e^{ax}}{a}$, $\frac{d^nv}{dx^n}=\frac{e^{ax}}{a^n}$
12 „	$dv=\cos x\,dx$	$dv=\cos bx\,dx$

pierwszy wiersz rozwinięcia wzoru (19), czyli 9 w. od dołu w liczniku zamiast $b^2(x-\alpha)^{2r+e+1}$, powinno być $b^{2r}(x-\alpha)^{2r+e+1}$.

Str.	wiersz:	zamiast:	powinno być:
251	14 od góry we wzorze na $I_1 \pm$ i I_2 zam. $e^{(a\pm bi)(x-\alpha_1)}dx$, pow. być $e^{(a\pm bi)(x-\alpha_1)}dx$,		
251	16 „	$(a\pm bi)x^r+\varrho$	$(a\pm bi)\varrho x^r+\varrho$
260	21 od dołu	$-\binom{n-1}{3}\frac{x^{n-3}}{3}+\dots$	$-\binom{n-1}{3}\frac{x^{n-1}}{3}+\dots$
265	16 „	$3y^2y''+$	$3y^2y'''+$
314	13 od góry	$+\frac{1}{3!}\frac{x}{3}$	$+\frac{1}{3!}\frac{x^3}{3}$
320	16 od dołu	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-b$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^3}=-b$
394	12 „		ma być $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial v}$
527	wiersz ostatni	$-\frac{1}{u}\sum_s^{(1)}$	$-\frac{1}{u}-\sum_s^{(1)}$
528	9 od góry	$\frac{1}{\alpha}\sum^{(1)}\frac{1}{u-s}+$	$\frac{1}{\alpha}\sum^{(1)}\left(\frac{1}{u-s}+\right.$
550	13 „	$\frac{q_1q_2}{p_3}+\frac{q_2q_3}{p_4}+\dots$	$\frac{q_1q_2}{p_2}+\frac{q_2q_3}{p_3}+\dots$
565	1 „	$b_0\mathfrak{P}(x)$	$b_0\mathfrak{P}_1(x)$
578	16 „	$\left(\int_0^b e^{\lambda x}\,dx\right)$	$\left(\int_0^b e^{-\lambda x}\,dx\right)$
608	11 „	$\measuredangle QNM$	$\measuredangle QPM$
616	10 od dołu	$f_2(\alpha, \alpha)$	$f_2(a, \alpha)$
633	9 „	$\int_0^\infty e^{\alpha^2(1+x^2)}\alpha\,d\alpha$	$\int_0^\infty e^{-\alpha^2(1+x^2)}\alpha\,d\alpha$
637	8 „	$f(x, y)\,dx\,dx$	$f(x, y)\,dx\,dy$
638	10 od góry	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^3}dx$	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$
638	na dole w wyznaczniku w pierwszym jego wierszu zamiast: $\frac{\partial f_1}{\partial u}$, $\frac{\partial f_1 \partial}{\partial v}$, $\frac{f_1}{\partial w}$, powinno być $\frac{\partial f_1}{\partial u}$, $\frac{\partial f_1}{\partial v}$, $\frac{\partial f_1}{\partial w}$.		
640	2 od góry jako dolna granica całkowania zamiast: $-\sqrt{a^2-x^2-y}$, powinno być $-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.		
648	wzór (16) różniczka dx nie stoi pod pierwiastkiem, ale po nim, skreślić kreskę pierwiastka stosownie.		
654	6 od dołu	$\int_0^{\frac{\varepsilon x}{a}}$	$\int_0^{\frac{\varepsilon x}{a}}$
655	16 „ dolna granica całkowania nie 0, lecz ε (dwie poprawki).		
655	12 „	$\sqrt{\frac{\varepsilon^2x^2}{a^2}}-1$	$\sqrt{\frac{\varepsilon^2x^2}{a^2}-1}$
670	11 od góry pod całką w liczniku zamiast: $\sin^2\varphi\sin^2\varphi$, powinno być $\cos^2\varphi\sin^2\varphi$.		
684	5 od dołu	AD	NP
800	wiersz ostatni, w ostatniem równaniu w miejsce mianownika q^2-a^2, pow. być b^2-a^2.		
804	7 od dołu	$r^2=k.\frac{dd'}{a}$	$r^2=k.dd'$
869	8 od góry	$\frac{ux+vy+wz}{u^2+z^2+w^2}$	$\frac{ux+vy+wz}{u^2+v^2+w^2}$
913	5 „ po wyrażeniu: $\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}$, postawić $=0$.		
937	10 „	$\frac{du}{dx}=N$	$\frac{du}{dy}=N$